UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

Povzetek

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

Abstract

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem

Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Osnovne definicije homotopske teorije tipov

1.1 Odvisne vsote in odvisni produkti

Definicija 1.1. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Definiramo tip

$$\sum (x : A)\, Bx,$$

imenovan *odvisna vsota tipov A in B*. Elementi $\sum (x : A)\, Bx$ so pari (x, y), kjer je $x : A$ in $y : Bx$.

Definicija 1.2. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Definiramo tip

$$\prod (x : A)\, Bx,$$

imenovan *odvisni produkt tipov A in B*. Elementi $\prod (x : A)\, Bx$ so predpisi f, ki vsakemu elementu $x : A$ priredijo element $f(x) : Bx$, imenujemo pa jih *odvisne funkcije med A in B*.

1.2 Enakost in homotopija

Definicija 1.3. Naj bo A tip in $x, y : A$. Definiramo tip $x = y$, imenovan *tip identifikacij med x in y*, elemente katerega pa imenujemo *identifikacije med x in y*. Za vsak $x : A$ obstaja identifikacija $\mathsf{refl}_x : x = x$. TODO induction principle

Iz indukcijskega pravila za tip identifikacij lahko izpeljemo mnoge znane lastnosti enakosti. Pokazali bomo, da obstoj identifikacij tvori ekvivalenčno relacijo in da vsaka funkcija to relacijo ohranja, konstruirali pa bomo še tako imenovano funkcijo *transport*.

Definicija 1.4. Naj bo A tip. Definiramo operacijo *konkatenacije*

$$\mathsf{concat} : \prod (x, y, z : A)\, (x = y) \to ((y = z) \to (x = z))$$

in operacijo *inverza*

$$\mathsf{inv} : \prod (x, y : A)\, (x = y) \to (y = x).$$

Za $\mathsf{concat}\,(x, y, z, p, q)$ bomo pogosteje pisali $p \cdot q$, za $\mathsf{inv}\,(x, y, p)$ pa p^{-1}.

Konstrukcija: Da bi definirali operacijo concat, po indukcijskem pravilu za identifikacije zadošča, da podamo $\mathsf{concat}\,(x, x, z, \mathsf{refl}_x, q)$ □

Trditev 1.5. *TODO karakterizacija enakosti v odvisnih vsotah*

Definicija 1.6. Naj bosta $f, g : A \to B$ funkcij. Pravimo, da sta funkciji f in g *homotopni*, če obstaja element tipa

$$f \sim g := \sum (x : A)\, f(x) = g(x).$$

Elemente $H : f \sim g$ imenujemo *homotopije med f in g*.

2 Ekvivalence in obrnljive funkcije

2.1 Definicije

Definicija 2.1. Za funkcijo f pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{section}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, f \circ g \sim id,$$

imenovanega *tip prerezov funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\mathsf{section}\, f$ imenujemo *prerezi funkcije f.* Za funkcijo f pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{retraction}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, g \circ f \sim id,$$

imenovanega *tip retrakcij funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\mathsf{retraction}\, f$ imenujemo *retrakcije funkcije f.*

Definicija 2.2. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}equiv}\,(f) := \mathsf{section}\,(f) \times \mathsf{retraction}\,(f).$$

Pravimo, da je tip A *ekvivalenten* tipu B, če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa $A \simeq B := \sum (f : A \to B)\, \mathsf{is\text{-}equiv}\,(f)$. Funkcijo, pripadajočo elementu $e : A \simeq B$, označimo z $\mathsf{map}\, e$.

Definicija 2.3. Za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, (f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id),$$

imenovanega *tip inverzov funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom $\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f)$, imenujemo *inverzi funkcije f.*

2.2 Osnovne lastnosti

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence f vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je f tudi obrnljiva.

Trditev 2.4. *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da je funkcija f obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija f ekvivalenca. Podan imamo njen prerez s s homotopijo $H : f \circ s \sim id$ in njeno retrakcijo r s homotopijo $K : r \circ f \sim id$, s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa $s \circ f \sim id$ po sledečem izračunu:

$$sf \overset{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \overset{rHf}{\sim} rf \overset{K}{\sim} id. \qquad \square$$

Definicija 2.5. Naj bo $f : \prod (x : A) (Bx \to Cx)$ družina funkcij. Definiramo funkcijo $\mathsf{tot}\,(f) : \sum (x : A)\, Bx \to \sum (x : A)\, Cx$ s predpisom $\mathsf{tot}\,(f)(x, y) = (x, f(x)(y))$.

Trditev 2.6. *Naj bo $f : \prod (x : A) (Bx \to Cx)$ družina funkcij in denimo, da je $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$. Tedaj je ekvivalenca tudi funkcija $\mathsf{tot}\,(f)$.*

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$, lahko tvorimo družino funkcij $s : \prod (x : A) (Cx \to Bx)$, kjer je $s(x)$ prerez funkcije $f(x)$. Trdimo, da je tedaj $\mathsf{tot}\,(s)$ prerez funkcije $\mathsf{tot}\,(f)$, saj za vsak $(x, y) : \sum (x : A)\, Cx$ velja enakost

$$\mathsf{tot}\,(f)(\mathsf{tot}\,(s)(x, y)) = \mathsf{tot}\,(f)(x, s(x)(y)) = (x, f(x)(s(x)(y))) = (x, y).$$

Analogno lahko konstruiramo retrakcijo funkcije $\mathsf{tot}\,(f)$, kar zaključi dokaz. $\square$

Zgornja trditev je pomembna, saj nam omogoči, da konstrukcijo ekvivalence med odvisnima vsotama z istim baznim tipom poenostavimo na konstrukcijo družine ekvivalenc, kar je pogosto veliko lažje. Uporabljali ga bomo v obliki sledeče posledice:

Posledica 2.7. *Naj bo A tip, B in C družini tipov nad A in denimo, da velja $Bx \simeq Cx$ za vsak $x : A$. Tedaj velja $\sum (x : A)\, Bx \simeq \sum (x : A)\, Cx$.*

2.3 Podtipi

Definicija 2.8. Naj bo A tip in P družina tipov nad A. Pravimo, da je P *predikat*, če velja $\mathsf{is\text{-}prop}\,(Px)$ za vsak $x : A$.

Trditev 2.9. *Naj bo A tip, P predikat na A, B pa družina tipov nad A. Denimo, da obstaja družina funkcij $s : \prod (x : A) (Bx \to Px)$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\sum (x : A)\, Bx \simeq \sum \Big(t : \sum (x : A)\, Px\Big)\, B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti odvisne vsote je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum (x : A) \sum (p : Px)\, Bx = \sum (x : A) (Px \times Bx)$. Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \to Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda\, y.\, (s(x, y),\, y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \to Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g\,(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$. $\square$

3 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 3.1. *Prosta zanka* na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s

$$\mathsf{free\text{-}loop}\,(A) := \sum (x : A)\, x = x.$$

Izrek 3.2. *Tip obrnljivih funkcij med A in B je ekvivalenten tipu prostih zank na tipu $A \simeq B$.*

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco tipa

$$\sum (f : A \to B)\, \mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) \simeq \sum (e : A \simeq B)\,(e = e).$$

Ker je $\mathsf{is\text{-}equiv}$ predikat in ker po trditvi 2.4 za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) \to \mathsf{is\text{-}equiv}\,(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 2.9 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \to B)\, \mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) \simeq \sum (e : A \simeq B)\, \mathsf{is\text{-}invertible}\,(\mathsf{map}\, e).$$

Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsak element $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$\mathsf{is\text{-}invertible}\,(\mathsf{map}\, e) \simeq (e = e).$$

Oglejmo si tip

$$\mathsf{is\text{-}invertible}\,(\mathsf{map}\, e) = \sum (g : B \to A)\,(\mathsf{map}\, e \circ g \sim id) \times (g \circ \mathsf{map}\, e \sim id).$$

Po asociativnosti odvisne vsote ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned}&\sum \Big(H : \sum (g : B \to A)\, \mathsf{map}\, e \circ g \sim id\Big)\,(\mathsf{map}\, H \circ \mathsf{map}\, e \sim id) = \\ &\sum (H : \mathsf{section}\,(\mathsf{map}\, e))\,(\mathsf{map}\, H \circ \mathsf{map}\, e \sim id),\end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \mathsf{section}\,(\mathsf{map}\, e))\,(\mathsf{map}\, H \circ \mathsf{map}\, e \sim id) \simeq (\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id)\,.$$

Sledi, da velja $\mathsf{is\text{-}invertible}\,(\mathsf{map}\, e) \simeq (\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$\begin{aligned}&(\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id) \simeq \\ &(\mathsf{map}\, e \circ \mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim \mathsf{map}\, e) \simeq \\ &(\mathsf{map}\, e \sim \mathsf{map}\, e) \simeq \\ &(\mathsf{map}\, e = \mathsf{map}\, e) \simeq \\ &(e = e)\end{aligned}$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje $\mathsf{map}\, e$ na homotopije.
- Funkcija $\mathsf{sec}\, e$ je prerez funkcije $\mathsf{map}\, e$.
- TODO funext
- Po trditvi **??** lahko zanko na funkciji $\mathsf{map}\, e$ dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e.

□

Slovar strokovnih izrazov

universe svet