

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

## **OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU**

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek

Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

# Kazalo

1	Ekvivalence in obrnljive funkcije	4
2	Podtipi	5
3	Karakterizacija obrnljivosti	5

## **Obrnljive funkcije so sfere v svetu**

### **POVZETEK**

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

## **Invertible maps are spheres in the universe**

### **ABSTRACT**

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

**Math. Subj. Class. (2020):** 74B05, 65N99

**Ključne besede:** naravni logaritem, nenaravni algoritem

**Keywords:** natural logarithm, unnatural algorithm

# 1 Ekvivalence in obrnljive funkcije

**Definicija 1.1.** Naj bo  $f : A \rightarrow B$  funkcija. Tip

$$\text{section } f := \sum (g : B \rightarrow A) f \circ g \sim id$$

imenujemo *tip prerezov funkcije*  $f$ . Za funkcijo  $f$  pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa  $\text{section}(f)$ , imenovan *prerez*  $f$ . Tip

$$\text{retraction}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) g \circ f \sim id$$

imenujemo *tip retrakcij funkcije*  $f$ . Za funkcijo  $f$  pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa  $\text{retraction}(f)$ , imenovan *retrakcija*  $f$ .

**Definicija 1.2.** Pravimo, da je funkcija  $f$  *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, da obstaja element tipa

$$\text{is-equiv}(f) := \text{section}(f) \times \text{retraction}(f).$$

Pravimo, da je tip  $A$  *ekvivalenten* tipu  $B$ , če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa  $A \simeq B := \sum (f : A \rightarrow B) \text{is-equiv}(f)$ .

**Definicija 1.3.** Naj bo  $f : A \rightarrow B$  funkcija. Tip

$$\text{is-invertible}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) (f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id)$$

imenujemo *tip inverzov funkcije*  $f$ . Za funkcijo  $f$  pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa  $\text{is-invertible}(f)$ , imenovan *inverz*  $f$ .

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence  $f$  vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je  $f$  tudi obrnljiva.

**Trditev 1.4.** *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

*Dokaz.* Denimo, da je funkcija  $f$  obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija  $f$  ekvivalenca. Podan imamo njen prerez  $s$  s homotopijo  $H : f \circ s \sim id$  in njeno retrakcijo  $r$  s homotopijo  $K : r \circ f \sim id$ , s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa  $s \circ f \sim id$  po sledečem izračunu:

$$sf \stackrel{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \stackrel{rHf}{\sim} rf \stackrel{K}{\sim} id.$$

□

## 2 Podtipi

**Trditev 2.1.** Naj bo  $A$  tip,  $P$  predikat na  $A$ ,  $B$  pa družina tipov nad  $A$ . Denimo, da obstaja funkcija  $s : \prod (x : A) Bx \rightarrow Px$ . Teda velja ekvivalenca

$$\sum (x : A) Bx \simeq \sum (t : \sum (x : A) Px) B(pr_1 t).$$

*Dokaz.* Po asociativnosti sigma tipov je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu  $\sum (x : A) \sum (p : Px) Bx = \sum (x : A) Px \times Bx$ . Po trditvi (TODO equiv-tot) torej zadošča pokazati, da za vsak  $x : A$  obstaja ekvivalenca  $Bx \simeq Px \times Bx$ .

Funkcijo  $f : Bx \rightarrow Px \times Bx$  definiramo kot  $\lambda y. (s(x, y), y)$ , za funkcijo  $g : Px \times Bx \rightarrow Bx$  pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost  $g(f(y)) = y$ , ker pa je  $P$  predikat, velja tudi enakost  $f(g(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$ .  $\square$

**Trditev 2.2.** *TODO subtype identity principle*

## 3 Karakterizacija obrnljivosti

**Definicija 3.1.** Prosta zanka na tipu  $A$  je sestavljena iz točke  $a : A$  in identifikacije  $a = a$ . Tip vseh prostih zank na tipu  $A$  označimo s

$$\text{free-loop}(A) := \sum (x : A) x = x.$$

**Izrek 3.2.** Tip prostih zank na tipu  $A \simeq B$  je ekvivalenten tipu obrnljivih funkcij med  $A$  in  $B$ .

*Dokaz.* Želimo konstruirati ekvivalenco med tipom  $\sum (e : A \simeq B) e = e$  in tipom  $\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f)$ . Ker je  $\text{is-equiv}$  predikat in za vsako funkcijo  $f$  obstaja funkcija  $\text{is-invertible}(f) \rightarrow \text{is-equiv}(f)$ , najprej opazimo, da po trditvi 2.1 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f) \simeq \sum (e : A \simeq B) \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

(TODO define map) Po trditvi (TODO equiv-tot) torej zadošča pokazati, da za vsako ekvivalenco  $e : A \simeq B$  obstaja ekvivalenca

$$(e = e) \simeq \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

Oglejmo si tip

$$\text{is-invertible}(\text{map } e) = \sum (g : B \rightarrow A) (\text{map } e \circ g \sim id) \times (g \circ \text{map } e \sim id).$$

Po asociativnosti tipa odvisne vsote je ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned} & \sum (H : \sum (g : B \rightarrow A) \text{map } e \circ g \sim id) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) = \\ & \sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id), \end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id).$$

Sledi, da velja  $\text{is-invertible}(\text{map } e) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim \text{id})$ , dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$\begin{aligned} & (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim \text{id}) \simeq \\ & (\text{map } e \circ \text{sec } e \circ \text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e = \text{map } e) \simeq \\ & (e = e) \end{aligned}$$

- Ker je  $e$  ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje  $\text{map } e$  na homotopije.
- Funkcija  $\text{sec } e$  je prerez funkcije  $\text{map } e$ .
- TODO funext
- Po trditvi 2.2 lahko zanko na funkciji  $\text{map } e$  dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci  $e$ .

□

## Slovar strokovnih izrazov

`universe` svet