Obrnljive funkcije so sfere v svetu

Timon Najdovski   Mentor: prof. dr. Andrej Bauer
Somentor: asist. - razisk. PhD. Egbert Marteen Rijke

27. februar 2024

1 Osnove Martin-Löfove odvisne teorije tipov

Sledeč [2] bomo v tem poglavju predstavili osnovne koncepte Martin-Löfove odvisne teorije tipov. Zaradi njihove razsežnosti se ne bomo spustili v podrobnosti formalnih definicij, vendar bomo osnove opisali v nekoliko neformalnem slogu.

Osnovni objekti, s katerimi bomo delali, so *tipi*, ki jih bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami, kot so A, B in C. Tipi lahko vsebujejo *elemente*, kar bomo označili z zapisom $x : A$, ki ga preberemo kot *x je tipa A*. Zapis $x : A$ je v mnogih pogledih podoben relaciji $x \in A$ iz formalizma teorije množic, vendar se od nje razlikuje v nekaj pomembnih pogledih. Elementi v teoriji tipov obstajajo samo znotraj svojih tipov, kar pomeni, da za element $x : A$ vprašanje "Ali velja $x : B$?" sploh ni smiselno. V nasprotju s tem lahko v teoriji tipov $x : A$ le predpostavimo, ali pa konstruiramo po nekem zaporedju sklepov.

Iz znanih tipov lahko tvorimo mnoge sestavljene tipe, nekaj od katerih naštejemo spodaj. Sestavljene tipe podamo s sklepi, ki nam omogočajo delo z njihovimi elementi, in z enačbami, ki nam omogočajo, da en izraz nadomestimo z drugim.

- *Koprodukt* $A + B$, za katerega veljata sklepa:
  - Če velja $x : A$, velja $\iota_1(a) : A + B$.
  - Če velja $y : B$, velja $\iota_2(b) : A + B$.
- *Produkt* $A \times B$, za katerega veljajo sklepi:
  - Če velja $t : A \times B$, velja $\pi_1(t) : A$.
  - Če velja $t : A \times B$, velja $\pi_2(t) : B$.
  - Če veljata $x : A$ in $y : B$, velja $(x, y) : A \times B$.
  - Za vsak $a : A$ in $b : B$ velja $\pi_1(a, b) \doteq a$ in $\pi_2(a, b) \doteq b$.
- *Funkcijski tip* $A \to B$, za katerega veljajo sklepi:
  - Če veljata $x : A$ in $f : A \to B$, velja $f(x) : B$.
  - Če pod predpostavko $x : A$ velja $b(x) : B$, velja $\lambda x.b(x) : A \to B$.
  - Za vsak $a : A$ velja enakost $(\lambda x.b(x))(a) \doteq b(a)$.
  - Za vsako funkcijo $f : A \to B$ velja enakost $\lambda x.f(x) \doteq f$.

S tipi ne želimo predstaviti samo matematičnih objektov, temveč tudi matematične trditve, kar bomo dosegli preko tako imenovane interpretacije *izjave kot tipi* (ang. *propositions as types*). V tej interpretaciji vsaki trditvi dodelimo tip, elementi katerega so dokazila, da ta trditev velja. Tako konstrukcija elementa $p : P$ postane konstrukcija dokazila veljavnosti trditve P, kar pa ustreza dokazu trditve P. Če si sedaj zopet ogledamo konstrukcije koprodukta, produkta in funkcijskih tipov, vidimo, da ustrezajo disjunkciji, konjunkciji in implikaciji med trditvami.

Kadar lahko pod predpostavko $x : A$ tvorimo tip $B(x)$, takrat B imenujemo *odvisen tip* oz. *družina tipov nad A*. Za A tip in B družino tipov nad A definiramo še dva sestavljena tipa:

1. *Odvisna vsota* $\sum (x : A)\, B(x)$, za katero veljajo sklepi:
   - Če velja $t : \sum (x : A)\, B(x)$, velja $\pi_1(t) : A$.
   - Če velja $t : \sum (x : A)\, B(x)$, velja $\pi_2(t) : B(\pi_1(t))$.
   - Če veljata $x : A$ in $y : B(x)$, velja $(x, y) : \sum (x : A)\, B(x)$.
   - Za vsak $a : A$ in $b : B(a)$ velja $\pi_1(a, b) \doteq a$ in $\pi_2(a, b) \doteq b$.
2. *Odvisni produkt* $\prod (x : A)\, B(x)$, za katerega veljajo sklepi:
   - Če veljata $x : A$ in $y : \prod (x : A)\, B(x)$, velja $f(x) : B(x)$.
   - Če pod predpostavko $x : A$ velja $b(x) : B(x)$, velja $\lambda x.b(x) : \prod (x : A)\, B(x)$.
   - Za vsak $a : A$ velja enakost $(\lambda x.b(x))(a) \doteq b(a)$.
   - Za vsako element $f : \prod (x : A)\, B(x)$ velja enakost $\lambda x.f(x) \doteq f$.

V interpretaciji *izjave kot tipi* odvisna vsota ustreza eksistenčni kvantifikaciji, odvisni produkt pa univerzalni kvantifikaciji. Če je namreč A tip in P družina tipov nad A, lahko tedaj element $p : P(a)$ razumemo kot dokazilo, da *predikat P velja za element a*. Tako lahko par $(a, p) : \sum (x : A)\, P(x)$ razumemo kot dokazilo, da *obstaja a, za katerega velja P(a)*, funkcijo $f : \prod (x : A)\, P(x)$ pa kot prireditev, ki vsakemu elementu $x : A$ priredi dokazilo $f(x) : P(x)$, torej kot dokazilo, da *za vsak x velja P(x)*.

2 Sintetična homotopska teorija

V tem poglavju bomo predstavili, kako lahko odvisno teorijo tipov uprabimo za razvoj tako imenovane *sintetične homotopske teorije*. V tej interpretaciji bomo tipe razumeli kot *prostore*, njihove elemente kot *točke*, družine tipov B nad A pa kot *vlaknenja nad A*, kjer vsaki točki x prostora A priredimo prostor $B(x)$, ki *leži nad x*. Odvisno vsoto $\sum (x : A)\, B(x)$ lahko tako razumemo kot *totalni prostor vlaknenja B*, odvisni produkt $\prod (x : A)\, B(x)$ pa kot *prostor prerezov vlaknenja B*.

Za homotopsko interpretacijo odvisne teorije tipov bo ključna vključitev *tipa identifikacij*: za vsaki točki $x, y : A$ bomo definiramo tip $\mathsf{Id}\,(x, y)$, ki ga bomo razumeli kot *tip poti med točkama x in y v prostoru A*. Identifikacije med točkami lahko razširimo do *homotopije med funkcijami*: za funkciji $f, g : A \to B$ definiramo tip

$$f \sim g := \prod (x : A)\, \mathsf{Id}\,(f(x), g(x)).$$

Elementi $f \sim g$ so torej dokazila, da za vsako točko $x : A$ obstaja pot med točkama $f(x)$ in $g(x)$, kar ustreza klasični definiciji homotopije.

Za funkcijo $f : A \to B$ lahko sedaj definiramo *tip prerezov*

$$\mathsf{section}\,(f) := \sum\,(g : B \to A)\,(f \circ g \sim id)$$

in *tip retrakcij*

$$\mathsf{retraction}\,(f) := \sum\,(g : B \to A)\,(g \circ f \sim id).$$

Preko pojmov prereza in retrakcije lahko definiramo *ekvivalenco tipov*, ki ustreza homotopski ekvivalenci med prostori. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez, kot retrakcijo, torej če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}equiv}\,(f) := \mathsf{section}\,(f) \times \mathsf{retraction}\,(f),$$

za tipa A in B pa pravimo, da sta *ekvivalentna*, če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa

$$A \simeq B := \sum\,(f : A \to B)\,\mathsf{is\text{-}equiv}\,(f).$$

Elementi $A \simeq B$ so torej peterice (f, g, H, h, K), kjer je H homotopija, ki dokazuje, da je g prerez f, K pa homotopija, ki dokazuje, da je h retrakcija f.

V definiciji ekvivalence smo zahtevali, da ima dana funkcija f ločen levi in desni inverz, lahko pa bi lahko zahtevali tudi, da ima obojestranski inverz, kar lahko izrazimo s tipom

$$\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) := \sum\,(g : B \to A)\,((f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id)),$$

ki ga imenujemo *tip inverzov funkcije f*. Če obstaja element tega tipa, tedaj za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva*. Čeprav se na prvi pogled zdi, da je pojem inverza močnejši od pojma ekvivalence, bomo pokazali, da sta pravzaprav logično ekvivalentna; dokaz je povsem analogen dokazu v algebri, kjer lahko pokažemo, da ima element z levim in desnim inverzom enoličen obojestranski inverz, le da dokaz poteka na nivoju homotopij, namesto enakosti.

Kljub temu pa med obrnljivostjo in ekvivalenco obstaja razlika: pokazali bomo, da pod predpostavko obstoja tako imenovanih *višjih induktivnih tipov* obstajajo funkcije f, za katere ne obstaja ekvivalenca $\mathsf{is\text{-}equiv}\,(f) \simeq \mathsf{is\text{-}invertible}\,(f)$. Da bi to razliko bolje razumeli, bomo vpeljali pojem *kontraktibilnosti tipov*: pravimo, da je tip A *kontraktibilen*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}contr}\,(A) := \sum\,(c : A) \prod\,(x : A)\,\mathsf{Id}\,(c, x),$$

kar pove, da v tipu A obstaja odlikovana točka c, s katero so identificirane vse ostale točke. Preko kontraktibilnosti definiramo še sledeč tip:

$$\mathsf{is\text{-}prop}\,(A) := A \to \mathsf{is\text{-}contr}\,(A).$$

Kontraktibilne tipe lahko razumemo kot tipe, ki imajo *natanko eno točko*, tipe, za katere velja $\mathsf{is\text{-}prop}$, pa kot tipe, ki imajo *največ eno točko*, saj zanje velja, da so kontraktibilni, čim vsebujejo točko.

Pokazali bomo, da ekvivalence ohranjajo lastnost $\mathsf{is\text{-}prop}$, torej, da če velja $A \simeq B$ in $\mathsf{is\text{-}prop}(A)$, da tedaj velja tudi $\mathsf{is\text{-}prop}(B)$, za tem pa še skicirali dokaz trditve $\mathsf{is\text{-}prop}(\mathsf{is\text{-}equiv}(f))$ za poljubno funkcijo f. Dokaz trditve je precej tehničen, njena vsebina pa ni nepričakovana: če ima funkcija levi in desni inverz, sta ta do homotopije natanko enolično določena. Trditev pa nam pravzaprav pove še več, poleg enoličnosti levega in desnega inverza nam da tudi enoličnost homotopij, ki to potrjujeta.

Sedaj je dokaz neekvivalence med $\mathsf{is\text{-}equiv}(f)$ in $\mathsf{is\text{-}invertible}(f)$ na dlani: če bi taka ekvivalenca obstajala, bi ohranjala lastnost $\mathsf{is\text{-}prop}$ tipa $\mathsf{is\text{-}equiv}(f)$, torej moramo le še poiskati funkcijo f, za katero $\mathsf{is\text{-}prop}(\mathsf{is\text{-}invertible}(f))$ ne velja. Izkaže pa se, da v teoriji tipov, s katero smo delali do sedaj, obstoja take funkcije ne moremo ne dokazati, ne ovreči, pokazali pa bomo, da ga lahko dokažemo v določeni razširitvi. V namen sintetične homotopske teorije našo teorijo tipov pogosto razširimo z različnimi *višjimi induktivnimi tipi*: to so tipi za katere ne predpostavimo samo sklepov za konstrukcijo točk, temveč tudi sklepe za konstrukcijo identifikacij. Predstavili bomo enega od najpomembnejših primerov višjih induktivnih tipov, *sfere* $\mathbb{S}^n$, in pokazali da identitetna funkcija na $\mathbb{S}^1$ ne zadošča $\mathsf{is\text{-}prop}(\mathsf{is\text{-}invertible}(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}))$. Za podrobnosti o konstrukcijah z višjimi induktivnimi tipi se bomo sklicali na [4] in [1]

3 Karakterizacija obrnljivosti

V zadnjem poglavju bomo predstavili novo karakterizacijo tipa obrnljivih funkcij med tipoma A in B:

$$\mathsf{invertible\text{-}map}(A, B) := \sum (f : A \to B)\, \mathsf{is\text{-}invertible}(f). \tag{1}$$

Dokazali bomo, da velja ekvivalenca

$$\mathsf{invertible\text{-}map}(A, B) \simeq \sum (e : A \simeq B)\, e = e,$$

formalizacija česar je tudi dostopna v knjižnici formalizirane matematike z dokazovalnim pomočnikom Agda [3]. Na koncu bomo vpeljali še tako imenovane *svetove* $\mathcal{U}$, tipe, katerih elementi so tipi, in aksiom *univalence*, ki opisuje tipe identifikacij na svetovih. Preko univerzalnih lastnosti sfer, aksioma univalence in trditve 1 bomo dokazali še sledečo ekvivalenco:

$$\sum (A : \mathcal{U}) \sum (B : \mathcal{U})\, (\mathsf{invertible\text{-}map}(A, B)) \simeq (\mathbb{S}^2 \to \mathcal{U}).$$

Literatura

[1] Axel Ljungström. *Symmetric Monoidal Smash Products in Homotopy Type Theory.* 2024. arXiv: `2402.03523 [math.AT]`.

[2] Egbert Rijke. *Introduction to Homotopy Type Theory.* 2022. arXiv: `2212.11082 [math.LO]`.

[3] Egbert Rijke in sod. *The agda-unimath library.* URL: `https://github.com/UniMath/agda-unimath/`.

[4] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* Institute for Advanced Study: `https://homotopytypetheory.org/book`, 2013.