

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek

Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

1	Ekvivalence in obrnljive funkcije	4
2	Podtipi	5
3	Karakterizacija obrnljivosti	5

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

POVZETEK

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

ABSTRACT

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem

Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Ekvivalence in obrnljive funkcije

Definicija 1.1. Naj bo $f : A \rightarrow B$ funkcija. Tip

$$\text{section } f := \sum (g : B \rightarrow A) f \circ g \sim id$$

imenujemo *tip prerezov funkcije* f . Za funkcijo f pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa $\text{section}(f)$, imenovan *prerez* f . Tip

$$\text{retraction}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) g \circ f \sim id$$

imenujemo *tip retrakcij funkcije* f . Za funkcijo f pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa $\text{retraction}(f)$, imenovan *retrakcija* f .

Definicija 1.2. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, da obstaja element tipa

$$\text{is-equiv}(f) := \text{section}(f) \times \text{retraction}(f).$$

Pravimo, da je tip A *ekvivalenten* tipu B , če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa $A \simeq B := \sum (f : A \rightarrow B) \text{is-equiv}(f)$.

Definicija 1.3. Naj bo $f : A \rightarrow B$ funkcija. Tip

$$\text{is-invertible}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) (f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id)$$

imenujemo *tip inverzov funkcije* f . Za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa $\text{is-invertible}(f)$, imenovan *inverz* f .

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence f vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je f tudi obrnljiva.

Trditev 1.4. *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da je funkcija f obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija f ekvivalenca. Podan imamo njen prerez s s homotopijo $H : f \circ s \sim id$ in njeno retrakcijo r s homotopijo $K : r \circ f \sim id$, s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa $s \circ f \sim id$ po sledečem izračunu:

$$sf \stackrel{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \stackrel{rHf}{\sim} rf \stackrel{K}{\sim} id. \quad \square$$

Definicija 1.5. Naj bo $f : \prod (x : A) (B(x) \rightarrow C(x))$ družina funkcij. Definiramo (TODO prevedi total) funkcijo $\text{tot}(f) : \sum (x : A) Bx \rightarrow \sum (x : A) Cx$ s predpisom $\text{tot}(f)(x, y) = (x, f(x, y))$.

Izrek 1.6. *Naj bo $f : \prod (x : A) (B(x) \rightarrow C(x))$ družina funkcij. Tedaj je $\text{tot}(f)$ ekvivalenca natanko tedaj, ko je f družina ekvivalenc, torej ko je $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$.*

Zgornji izrek je pomemben, saj nam omogoči, da konstrukcijo ekvivalence med sigma tipi nad istim baznim tipom poenostavimo na konstrukcijo družine ekvivalenc, kar je pogosto veliko lažje. Uporabljali ga bomo v obliki sledeče posledice:

Posledica 1.7. *Naj bo A tip, B in C družini tipov nad A in denimo, da velja $B(x) \simeq C(x)$ za vsak $x : A$. Tedaj velja $\sum (x : A) B(x) \simeq \sum (x : A) C(x)$.*

2 Podtipi

Trditev 2.1. *Naj bo A tip, P predikat na A , B pa družina tipov nad A . Denimo, da obstaja funkcija $s : \prod (x : A) Bx \rightarrow Px$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\sum (x : A) Bx \simeq \sum (t : \sum (x : A) Px) B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti sigma tipov je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum (x : A) \sum (p : Px) Bx = \sum (x : A) Px \times Bx$. Po posledici 1.7 torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \rightarrow Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda y. (s(x, y), y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \rightarrow Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$. □

Trditev 2.2. *TODO subtype identity principle*

3 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 3.1. *Prosta zanka na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s*

$$\text{free-loop}(A) := \sum (x : A) x = x.$$

Izrek 3.2. *Tip prostih zank na tipu $A \simeq B$ je ekvivalenten tipu obrnljivih funkcij med A in B .*

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco med tipom $\sum (e : A \simeq B) e = e$ in tipom $\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f)$. Ker je is-equiv predikat in za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\text{is-invertible}(f) \rightarrow \text{is-equiv}(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 2.1 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f) \simeq \sum (e : A \simeq B) \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

(TODO define `map`) Po posledici 1.7 torej zadošča pokazati, da za vsako ekvivalenco $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$(e = e) \simeq \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

Oglejmo si tip

$$\text{is-invertible}(\text{map } e) = \sum (g : B \rightarrow A) (\text{map } e \circ g \sim id) \times (g \circ \text{map } e \sim id).$$

Po asociativnosti tipa odvisne vsote je ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned} & \sum \left(H : \sum (g : B \rightarrow A) \text{map } e \circ g \sim id \right) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) = \\ & \sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id), \end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id).$$

Sledi, da velja $\text{is-invertible}(\text{map } e) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$\begin{aligned} & (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id) \simeq \\ & (\text{map } e \circ \text{sec } e \circ \text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e = \text{map } e) \simeq \\ & (e = e) \end{aligned}$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje $\text{map } e$ na homotopije.
- Funkcija $\text{sec } e$ je prerez funkcije $\text{map } e$.
- TODO funext
- Po trditvi 2.2 lahko zanko na funkciji $\text{map } e$ dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e .

□

Slovar strokovnih izrazov

universe svet