UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

Povzetek

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

Abstract

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem

Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Osnovne definicije homotopske teorije tipov

1.1 Sigma tipi in odvisne funkcije

Definicija 1.1. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Tvorimo tip

$$\sum (x : A)\, Bx,$$

imenovan *sigma tip družine B nad A*. Elementi $\sum (x : A)\, Bx$ so pari (x, y), kjer je $x : A$ in $y : Bx$.

Trditev 1.2. *TODO karakterizacija enakosti v sigma tipih*

Definicija 1.3. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Tvorimo tip

$$\prod (x : A)\, Bx,$$

imenovan *tip odvisnih funkcij med A in B*. Elementi $\prod (x : A)\, Bx$ so predpisi f, ki vsakemu elementu $x : A$ priredijo element $f(x) : Bx$, imenujemo pa jih *odvisne funkcije med A in B*.

1.2 Podtipi

Definicija 1.4. Naj bo A tip in P družina tipov nad A. Pravimo, da je P *predikat*, če velja $\texttt{is-prop}\,(Px)$ za vsak $x : A$.

Kadar imamo podan

Trditev 1.5. *Naj bo A tip, P predikat na A, B pa družina tipov nad A. Denimo, da obstaja družina funkcij $s : \prod (x : A)\, (Bx \to Px)$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\sum (x : A)\, Bx \simeq \sum \Big(t : \sum (x : A)\, Px\Big)\, B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti sigma tipov je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum (x : A) \sum (p : Px)\, Bx = \sum (x : A)\, (Px \times Bx)$. Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \to Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda\, y.\, (s(x, y),\, y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \to Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g\,(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$.

□

Trditev 1.6. *TODO subtype identity principle*

2 Ekvivalence in obrnljive funkcije

2.1 Definicije

Definicija 2.1. Za funkcijo f pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa

$$\texttt{section}\, f := \sum (g : B \to A)\, f \circ g \sim id,$$

imenovanega *tip prerezov funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\texttt{section}\, f$ imenujemo *prerezi funkcije f.* Za funkcijo f pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa

$$\texttt{retraction}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, g \circ f \sim id,$$

imenovanega *tip retrakcij funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\texttt{retraction}\, f$ imenujemo *retrakcije funkcije f.*

Definicija 2.2. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, če obstaja element tipa

$$\texttt{is-equiv}\,(f) := \texttt{section}\,(f) \times \texttt{retraction}\,(f).$$

Pravimo, da je tip A *ekvivalenten* tipu B, če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa $A \simeq B := \sum (f : A \to B)\, \texttt{is-equiv}\,(f)$. Funkcijo, pripadajočo elementu $e : A \simeq B$, označimo z $\texttt{map}\, e$.

Definicija 2.3. Za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa

$$\texttt{is-invertible}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, (f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id),$$

imenovanega *tip inverzov funkcije f.*

Funkcije, pripadajoče elementom $\texttt{is-invertible}\,(f)$, imenujemo *inverzi funkcije f.*

2.2 Osnovne lastnosti

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence f vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je f tudi obrnljiva.

Trditev 2.4. *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da je funkcija f obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija f ekvivalenca. Podan imamo njen prerez s s homotopijo $H : f \circ s \sim id$ in njeno retrakcijo r s homotopijo $K : r \circ f \sim id$, s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa $s \circ f \sim id$ po sledečem izračunu:

$$sf \overset{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \overset{rHf}{\sim} rf \overset{K}{\sim} id. \qquad \square$$

Definicija 2.5. Naj bo $f : \prod (x : A)\, (Bx \to Cx)$ družina funkcij. Definiramo funkcijo $\texttt{tot}\,(f) : \sum (x : A)\, Bx \to \sum (x : A)\, Cx$ s predpisom $\texttt{tot}\,(f)(x, y) = (x, f(x, y))$.

Izrek 2.6. *Naj bo $f : \prod (x : A) (Bx \to Cx)$ družina funkcij in denimo, da je $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$. Tedaj je ekvivalenca tudi funkcija $\mathtt{tot}\,(f)$.*

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$, lahko tvorimo družino funkcij $s : \prod (x : A) (Cx \to Bx)$, kjer je $s(x)$ prerez funkcije $f(x)$. Trdimo, da je tedaj $\mathtt{tot}\,(s)$ prerez funkcije $\mathtt{tot}\,(f)$, saj za vsak $(x, y) : \sum (x : A)\, Cx$ velja enakost

$$\mathtt{tot}\,(f)(\mathtt{tot}\,(s)(x, y)) = \mathtt{tot}\,(f)(x, s(x, y)) = (x, f(x, s(x, y))) = (x, y).$$

Analogno lahko konstruiramo retrakcijo funkcije $\mathtt{tot}\,(f)$, kar zaključi dokaz. □

Zgornji izrek je pomemben, saj nam omogoči, da konstrukcijo ekvivalenc med sigma tipi nad istim baznim tipom poenostavimo na konstrukcijo družine ekvivalenc, kar je pogosto veliko lažje. Uporabljali ga bomo v obliki sledeče posledice:

Posledica 2.7. *Naj bo A tip, B in C družini tipov nad A in denimo, da velja $Bx \simeq Cx$ za vsak $x : A$. Tedaj velja $\sum (x : A)\, Bx \simeq \sum (x : A)\, Cx$.*

3 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 3.1. *Prosta zanka* na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s

$$\mathtt{free\text{-}loop}\,(A) := \sum (x : A)\, x = x.$$

Izrek 3.2. *Tip prostih zank na tipu $A \simeq B$ je ekvivalenten tipu obrnljivih funkcij med A in B.*

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco med tipom $\sum (e : A \simeq B)\, e = e$ in tipom $\sum (f : A \to B)\, \mathtt{is\text{-}invertible}\,(f)$. Ker je $\mathtt{is\text{-}equiv}$ predikat in ker po trditvi 2.4 za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\mathtt{is\text{-}invertible}\,(f) \to \mathtt{is\text{-}equiv}\,(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 1.5 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \to B)\, \mathtt{is\text{-}invertible}\,(f) \simeq \sum (e : A \simeq B)\, \mathtt{is\text{-}invertible}\,(\mathtt{map}\, e).$$

Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsako ekvivalenco $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$(e = e) \simeq \mathtt{is\text{-}invertible}\,(\mathtt{map}\ e).$$

Oglejmo si tip

$$\mathtt{is\text{-}invertible}\,(\mathtt{map}\, e) = \sum (g : B \to A)\, (\mathtt{map}\, e \circ g \sim id) \times (g \circ \mathtt{map}\, e \sim id).$$

Po asociativnosti sigma tipov ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned} &\sum \Big(H : \sum (g : B \to A)\, \mathtt{map}\, e \circ g \sim id\Big)\, (\mathtt{map}\, H \circ \mathtt{map}\, e \sim id) = \\ &\sum (H : \mathtt{section}\,(\mathtt{map}\, e))\, (\mathtt{map}\, H \circ \mathtt{map}\, e \sim id), \end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \mathtt{section}\,(\mathtt{map}\, e))\, (\mathtt{map}\, H \circ \mathtt{map}\, e \sim id) \simeq (\mathtt{sec}\, e \circ \mathtt{map}\, e \sim id)\,.$$

Sledi, da velja $\texttt{is-invertible}\,(\texttt{map}\,e) \simeq (\texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$
\begin{aligned}
&(\texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim id) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e \circ \texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e \sim \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e = \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(e = e)
\end{aligned}
$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje $\texttt{map}\,e$ na homotopije.
- Funkcija $\texttt{sec}\,e$ je prerez funkcije $\texttt{map}\,e$.
- TODO funext
- Po trditvi 1.6 lahko zanko na funkciji $\texttt{map}\,e$ dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e.

$\square$

Slovar strokovnih izrazov

universe svet