

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek

Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

1	Ekvivalence in obrnljive funkcije	4
2	Podtipi	5
3	Karakterizacija obrnljivosti	5

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

POVZETEK

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

ABSTRACT

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem

Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Ekvivalence in obrnljive funkcije

Definicija 1.1. Za funkcijo f pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa

$$\text{section } f := \sum (g : B \rightarrow A) f \circ g \sim id,$$

imenovanega *tip prerezov funkcije* f .

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\text{section } f$ imenujemo *prerezi funkcije* f . Za funkcijo f pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa

$$\text{retraction}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) g \circ f \sim id,$$

imenovanega *tip retrakcij funkcije* f .

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\text{retraction } f$ imenujemo *retrakcije funkcije* f .

Definicija 1.2. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, če obstaja element tipa

$$\text{is-equiv}(f) := \text{section}(f) \times \text{retraction}(f).$$

Pravimo, da je tip A *ekvivalenten* tipu B , če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa $A \simeq B := \sum (f : A \rightarrow B) \text{is-equiv}(f)$. Funkcijo, pripadajočo elementu $e : A \simeq B$, označimo z $\text{map } e$.

Definicija 1.3. Za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa

$$\text{is-invertible}(f) := \sum (g : B \rightarrow A) (f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id),$$

imenovanega *tip inverzov funkcije* f .

Funkcije, pripadajoče elementom $\text{is-invertible}(f)$, imenujemo *inverzi funkcije* f .

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence f vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je f tudi obrnljiva.

Trditev 1.4. *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da je funkcija f obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija f ekvivalenca. Podan imamo njen prerez s s homotopijo $H : f \circ s \sim id$ in njeno retrakcijo r s homotopijo $K : r \circ f \sim id$, s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa $s \circ f \sim id$ po sledečem izračunu:

$$sf \stackrel{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \stackrel{rHf}{\sim} rf \stackrel{K}{\sim} id.$$

□

Definicija 1.5. Naj bo $f : \prod (x : A) (Bx \rightarrow Cx)$ družina funkcij. Definiramo funkcijo $\text{tot}(f) : \sum (x : A) Bx \rightarrow \sum (x : A) Cx$ s predpisom $\text{tot}(f)(x, y) = (x, f(x, y))$.

Izrek 1.6. Naj bo $f : \prod (x : A) (Bx \rightarrow Cx)$ družina funkcij in denimo, da je $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$. Tedaj je ekvivalenca tudi funkcija $\text{tot}(f)$.

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$, lahko tvorimo družino funkcij $s : \prod (x : A) (Cx \rightarrow Bx)$, kjer je $s(x)$ prerez funkcije $f(x)$. Trdimo, da je tedaj $\text{tot}(s)$ prerez funkcije $\text{tot}(f)$, saj za vsak $(x, y) : \sum (x : A) Cx$ velja enakost

$$\text{tot}(f)(\text{tot}(s)(x, y)) = \text{tot}(f)(x, s(x, y)) = (x, f(x, s(x, y))) = (x, y).$$

Analogno lahko konstruiramo retrakcijo funkcije $\text{tot}(f)$, kar zaključí dokaz. \square

Zgornji izrek je pomemben, saj nam omogoči, da konstrukcijo ekvivalenc med sigma tipi nad istim baznim tipom poenostavimo na konstrukcijo družine ekvivalenc, kar je pogosto veliko lažje. Uporabljali ga bomo v obliki sledeče posledice:

Posledica 1.7. Naj bo A tip, B in C družini tipov nad A in denimo, da velja $Bx \simeq Cx$ za vsak $x : A$. Tedaj velja $\sum (x : A) Bx \simeq \sum (x : A) Cx$.

2 Podtipi

Trditev 2.1. Naj bo A tip, P predikat na A , B pa družina tipov nad A . Denimo, da obstaja družina funkcij $s : \prod (x : A) (Bx \rightarrow Px)$. Tedaj velja ekvivalenca

$$\sum (x : A) Bx \simeq \sum (t : \sum (x : A) Px) B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti sigma tipov je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum (x : A) \sum (p : Px) Bx = \sum (x : A) (Px \times Bx)$. Po posledici 1.7 torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \rightarrow Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda y. (s(x, y), y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \rightarrow Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$. \square

Trditev 2.2. *TODO subtype identity principle*

3 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 3.1. Prosta zanka na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s

$$\text{free-loop}(A) := \sum (x : A) x = x.$$

Izrek 3.2. Tip prostih zank na tipu $A \simeq B$ je ekvivalenten tipu obrnljivih funkcij med A in B .

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco med tipom $\sum (e : A \simeq B) e = e$ in tipom $\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f)$. Ker je `is-equiv` predikat in ker po trditvi 1.4 za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\text{is-invertible}(f) \rightarrow \text{is-equiv}(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 2.1 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \rightarrow B) \text{is-invertible}(f) \simeq \sum (e : A \simeq B) \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

Po posledici 1.7 torej zadošča pokazati, da za vsako ekvivalenco $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$(e = e) \simeq \text{is-invertible}(\text{map } e).$$

Oglejmo si tip

$$\text{is-invertible}(\text{map } e) = \sum (g : B \rightarrow A) (\text{map } e \circ g \sim id) \times (g \circ \text{map } e \sim id).$$

Po asociativnosti tipa odvisne vsote je ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned} & \sum (H : \sum (g : B \rightarrow A) \text{map } e \circ g \sim id) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) = \\ & \sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id), \end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \text{section}(\text{map } e)) (\text{map } H \circ \text{map } e \sim id) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id).$$

Sledi, da velja $\text{is-invertible}(\text{map } e) \simeq (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$\begin{aligned} & (\text{sec } e \circ \text{map } e \sim id) \simeq \\ & (\text{map } e \circ \text{sec } e \circ \text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e \sim \text{map } e) \simeq \\ & (\text{map } e = \text{map } e) \simeq \\ & (e = e) \end{aligned}$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje `map e` na homotopije.
- Funkcija `sec e` je prerez funkcije `map e`.
- TODO funext
- Po trditvi 2.2 lahko zanko na funkciji `map e` dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e .

□

Slovar strokovnih izrazov

`universe` svet