UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

POVZETEK

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

ABSTRACT

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99

Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem

Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Osnovne definicije homotopske teorije tipov

1.1 Odvisne vsote in odvisni produkti

Definicija 1.1. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Definiramo tip

$$\sum (x : A)\, Bx,$$

imenovan *odvisna vsota tipov A in B*. Elementi $\sum (x : A)\, Bx$ so pari (x, y), kjer je $x : A$ in $y : Bx$.

Trditev 1.2. *TODO karakterizacija enakosti v odvisnih vsotah*

Definicija 1.3. Naj bo A tip in B družina tipov nad A. Definiramo tip

$$\prod (x : A)\, Bx,$$

imenovan *odvisni produkt tipov A in B*. Elementi $\prod (x : A)\, Bx$ so predpisi f, ki vsakemu elementu $x : A$ priredijo element $f(x) : Bx$, imenujemo pa jih *odvisne funkcije med A in B*.

1.2 Enakost in homotopija

Definicija 1.4. Naj bo A tip in $x, y : A$. Definiramo tip $x = y$, imenovan *tip identifikacij med x in y*, elemente katerega imenujemo *identifikacije med x in y*. Za vsak $x : A$ obstaja identifikacija $\mathsf{refl}_x : x = x$.

2 Ekvivalence in obrnljive funkcije

2.1 Definicije

Definicija 2.1. Za funkcijo f pravimo, da *ima prerez*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{section}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, f \circ g \sim id,$$

imenovanega *tip prerezov funkcije f*.

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\mathsf{section}\, f$ imenujemo *prerezi funkcije f*. Za funkcijo f pravimo, da *ima retrakcijo*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{retraction}\,(f) := \sum (g : B \to A)\, g \circ f \sim id,$$

imenovanega *tip retrakcij funkcije f*.

Funkcije, pripadajoče elementom tipa $\mathsf{retraction}\, f$ imenujemo *retrakcije funkcije f*.

Definicija 2.2. Pravimo, da je funkcija f *ekvivalenca*, če ima tako prerez kot retrakcijo, torej, če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}equiv}\,(f) := \mathsf{section}\,(f) \times \mathsf{retraction}\,(f).$$

Pravimo, da je tip A *ekvivalenten* tipu B, če obstaja ekvivalenca med njima, torej element tipa $A \simeq B := \sum (f : A \to B)\, \mathsf{is\text{-}equiv}\,(f)$. Funkcijo, pripadajočo elementu $e : A \simeq B$, označimo z $\mathsf{map}\, e$.

Definicija 2.3. Za funkcijo f pravimo, da je *obrnljiva* oziroma, da *ima inverz*, če obstaja element tipa

$$\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f) := \sum (g : B \to A)\,(f \circ g \sim id) \times (g \circ f \sim id),$$

imenovanega *tip inverzov funkcije f*.

Funkcije, pripadajoče elementom $\mathsf{is\text{-}invertible}\,(f)$, imenujemo *inverzi funkcije f*.

2.2 Osnovne lastnosti

V definiciji obrnljivosti smo zahtevali, da ima funkcija obojestranski inverz, v definiciji ekvivalence pa smo zahtevali le, da ima ločen levi in desni inverz. To bi nas lahko napeljalo k prepričanju, da je pojem obrnljivosti močnejši od pojma ekvivalence, vendar spodnja trditev pokaže da sta pravzaprav logično ekvivalentna. Pokazali bomo, da lahko prerez (ali simetrično, retrakcijo) ekvivalence f vedno izboljšamo do inverza, kar pokaže, da je f tudi obrnljiva.

Trditev 2.4. *Funkcija je ekvivalenca natanko tedaj, ko je obrnljiva.*

Dokaz. Denimo, da je funkcija f obrnljiva. Tedaj lahko njen inverz podamo tako kot njen prerez, kot njeno retrakcijo, kar pokaže, da je ekvivalenca.

Obratno denimo, da je funkcija f ekvivalenca. Podan imamo njen prerez s s homotopijo $H : f \circ s \sim id$ in njeno retrakcijo r s homotopijo $K : r \circ f \sim id$, s katerimi lahko konstruiramo homotopijo tipa $s \circ f \sim id$ po sledečem izračunu:

$$sf \overset{K^{-1}sf}{\sim} rfsf \overset{rHf}{\sim} rf \overset{K}{\sim} id. \qquad \square$$

Definicija 2.5. Naj bo $f : \prod (x : A)\,(Bx \to Cx)$ družina funkcij. Definiramo funkcijo $\mathsf{tot}\,(f) : \sum (x : A)\,Bx \to \sum (x : A)\,Cx$ s predpisom $\mathsf{tot}\,(f)(x, y) = (x, f(x)(y))$.

Trditev 2.6. *Naj bo $f : \prod (x : A)\,(Bx \to Cx)$ družina funkcij in denimo, da je $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$. Tedaj je ekvivalenca tudi funkcija $\mathsf{tot}\,(f)$.*

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ ekvivalenca za vsak $x : A$, lahko tvorimo družino funkcij $s : \prod (x : A)\,(Cx \to Bx)$, kjer je $s(x)$ prerez funkcije $f(x)$. Trdimo, da je tedaj $\mathsf{tot}\,(s)$ prerez funkcije $\mathsf{tot}\,(f)$, saj za vsak $(x, y) : \sum (x : A)\,Cx$ velja enakost

$$\mathsf{tot}\,(f)(\mathsf{tot}\,(s)(x, y)) = \mathsf{tot}\,(f)(x, s(x)(y)) = (x, f(x)(s(x)(y))) = (x, y).$$

Analogno lahko konstruiramo retrakcijo funkcije $\mathsf{tot}\,(f)$, kar zaključi dokaz. $\square$

Zgornja trditev je pomembna, saj nam omogoči, da konstrukcijo ekvivalence med odvisnima vsotama z istim baznim tipom poenostavimo na konstrukcijo družine ekvivalenc, kar je pogosto veliko lažje. Uporabljali ga bomo v obliki sledeče posledice:

Posledica 2.7. *Naj bo A tip, B in C družini tipov nad A in denimo, da velja $Bx \simeq Cx$ za vsak $x : A$. Tedaj velja $\sum (x : A)\,Bx \simeq \sum (x : A)\,Cx$.*

2.3 Podtipi

Definicija 2.8. Naj bo A tip in P družina tipov nad A. Pravimo, da je P *predikat*, če velja $\textsf{is-prop}\,(Px)$ za vsak $x : A$.

Trditev 2.9. *Naj bo A tip, P predikat na A, B pa družina tipov nad A. Denimo, da obstaja družina funkcij $s : \prod\,(x : A)\,(Bx \to Px)$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\sum\,(x : A)\,Bx \simeq \sum\Big(t : \sum\,(x : A)\,Px\Big)\,B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti odvisne vsote je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum\,(x : A) \sum\,(p : Px)\,Bx = \sum\,(x : A)\,(Px \times Bx)$. Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \to Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda\, y.\,(s(x, y),\ y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \to Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g\,(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$.

□

3 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 3.1. *Prosta zanka* na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s

$$\textsf{free-loop}\,(A) := \sum\,(x : A)\,x = x.$$

Izrek 3.2. *Tip obrnljivih funkcij med A in B je ekvivalenten tipu prostih zank na tipu $A \simeq B$.*

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco tipa

$$\sum\,(f : A \to B)\,\textsf{is-invertible}\,(f) \simeq \sum\,(e : A \simeq B)\,(e = e).$$

Ker je $\textsf{is-equiv}$ predikat in ker po trditvi 2.4 za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\textsf{is-invertible}\,(f) \to \textsf{is-equiv}\,(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 2.9 velja ekvivalenca

$$\sum\,(f : A \to B)\,\textsf{is-invertible}\,(f) \simeq \sum\,(e : A \simeq B)\,\textsf{is-invertible}\,(\textsf{map}\,e).$$

Po posledici 2.7 torej zadošča pokazati, da za vsak element $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$\textsf{is-invertible}\,(\textsf{map}\,e) \simeq (e = e).$$

Oglejmo si tip

$$\textsf{is-invertible}\,(\textsf{map}\,e) = \sum\,(g : B \to A)\,(\textsf{map}\,e \circ g \sim id) \times (g \circ \textsf{map}\,e \sim id).$$

Po asociativnosti odvisne vsote ta ekvivalenten tipu

$$\sum\Big(H : \sum\,(g : B \to A)\,\textsf{map}\,e \circ g \sim id\Big)\,(\textsf{map}\,H \circ \textsf{map}\,e \sim id) =$$
$$\sum\,(H : \textsf{section}\,(\textsf{map}\,e))\,(\textsf{map}\,H \circ \textsf{map}\,e \sim id),$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum \left(H : \mathsf{section}\left(\mathsf{map}\, e\right)\right)\left(\mathsf{map}\, H \circ \mathsf{map}\, e \sim id\right) \simeq \left(\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id\right).$$

Sledi, da velja $\mathsf{is\text{-}invertible}\,(\mathsf{map}\, e) \simeq (\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim id) \simeq \\
&(\mathsf{map}\, e \circ \mathsf{sec}\, e \circ \mathsf{map}\, e \sim \mathsf{map}\, e) \simeq \\
&(\mathsf{map}\, e \sim \mathsf{map}\, e) \simeq \\
&(\mathsf{map}\, e = \mathsf{map}\, e) \simeq \\
&(e = e)
\end{aligned}$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje $\mathsf{map}\, e$ na homotopije.
- Funkcija $\mathsf{sec}\, e$ je prerez funkcije $\mathsf{map}\, e$.
- TODO funext
- Po trditvi **??** lahko zanko na funkciji $\mathsf{map}\, e$ dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e.

□

Slovar strokovnih izrazov

universe svet