UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Mabel Najdovski

OBRNLJIVE FUNKCIJE SO SFERE V SVETU

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

Obrnljive funkcije so sfere v svetu

Povzetek

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Invertible maps are spheres in the universe

Abstract

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99
Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem
Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Podtipi

Trditev 1.1. *Naj bo A tip, P predikat na A, B pa družina tipov nad A. Denimo, da obstaja funkcija $s : \prod (x : A)\, Bx \to Px$. Tedaj velja ekvivalenca*

$$\sum (x : A)\, Bx \simeq \sum \Big(t : \sum (x : A)\, Px\Big)\, B(pr_1 t).$$

Dokaz. Po asociativnosti sigma tipov je desna stran ekvivalence ekvivalentna tipu $\sum (x : A) \sum (p : Px)\, Bx = \sum (x : A)\, Px \times Bx$. Po trditvi (TODO equiv-tot) torej zadošča pokazati, da za vsak $x : A$ obstaja ekvivalenca $Bx \simeq Px \times Bx$.

Funkcijo $f : Bx \to Px \times Bx$ definiramo kot $\lambda\, y.\, (s(x, y),\, y)$, za funkcijo $g : Px \times Bx \to Bx$ pa lahko vzamemo drugo projekcijo. Očitno velja enakost $g(f(y)) = y$, ker pa je P predikat, velja tudi enakost $f(g\,(p, y)) = (s(x, y), y) = (p, y)$. $\square$

Trditev 1.2. *TODO subtype identity principle*

2 Karakterizacija obrnljivosti

Definicija 2.1. *Prosta zanka* na tipu A je sestavljena iz točke $a : A$ in identifikacije $a = a$. Tip vseh prostih zank na tipu A označimo s

$$\texttt{free-loop}\,(A) := \sum (x : A)\, x = x.$$

Izrek 2.2. *Tip prostih zank na tipu $A \simeq B$ je ekvivalenten tipu obrnljivih funkcij med A in B.*

Dokaz. Želimo konstruirati ekvivalenco med tipom $\sum (e : A \simeq B)\, e = e$ in tipom $\sum (f : A \to B)\, \texttt{is-invertible}\,(f)$. Ker je `is-equiv` predikat in za vsako funkcijo f obstaja funkcija $\texttt{is-invertible}\,(f) \to \texttt{is-equiv}\,(f)$, najprej opazimo, da po trditvi 1.1 velja ekvivalenca

$$\sum (f : A \to B)\, \texttt{is-invertible}\,(f) \simeq \sum (e : A \simeq B)\, \texttt{is-invertible}\,(\texttt{map}\, e).$$

(TODO define `map`) Po trditvi (TODO equiv-tot) torej zadošča pokazati, da za vsako ekvivalenco $e : A \simeq B$ obstaja ekvivalenca

$$(e = e) \simeq \texttt{is-invertible}\,(\texttt{map}\ e).$$

Oglejmo si tip

$$\texttt{is-invertible}\,(\texttt{map}\, e) = \sum (g : B \to A)\, (\texttt{map}\, e \circ g \sim id) \times (g \circ \texttt{map}\, e \sim id).$$

Po asociativnosti tipa odvisne vsote je ta ekvivalenten tipu

$$\begin{aligned} &\sum \Big(H : \sum (g : B \to A)\, \texttt{map}\, e \circ g \sim id\Big)\, (\texttt{map}\, H \circ \texttt{map}\, e \sim id) = \\ &\sum (H : \texttt{section}\,(\texttt{map}\, e))\, (\texttt{map}\, H \circ \texttt{map}\, e \sim id), \end{aligned}$$

ker pa imajo po trditvi TODO ekvivalence kontraktibilen tip prerezov, po trditvi (TODO kontraktibilen bazni prostor) velja še ekvivalenca

$$\sum (H : \texttt{section}\,(\texttt{map}\, e))\, (\texttt{map}\, H \circ \texttt{map}\, e \sim id) \simeq (\texttt{sec}\, e \circ \texttt{map}\, e \sim id)\,.$$

Sledi, da velja $\texttt{is-invertible}\,(\texttt{map}\,e) \simeq (\texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim id)$, dokaz pa zaključimo še z zaporedjem ekvivalenc, ki jih argumentiramo spodaj.

$$
\begin{aligned}
&(\texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim id) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e \circ \texttt{sec}\,e \circ \texttt{map}\,e \sim \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e \sim \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(\texttt{map}\,e = \texttt{map}\,e) \simeq \\
&(e = e)
\end{aligned}
$$

- Ker je e ekvivalenca, je po trditvi TODO ekvivalenca tudi delovanje $\texttt{map}\,e$ na homotopije.
- Funkcija $\texttt{sec}\,e$ je prerez funkcije $\texttt{map}\,e$.
- TODO funext
- Po trditvi 1.2 lahko zanko na funkciji $\texttt{map}\,e$ dvignemo do zanke na pripadajoči ekvivalenci e.

□

Slovar strokovnih izrazov

universe svet