Equation de Poisson

Mustafa Aydın

November 2022

1 Abstract

Un système linéaire est un système mathématique d'équations qui peut être exprimé sous la forme Ax = b, où A est une matrice de coefficients, x est un vecteur de variables et b est un vecteur de constantes. La solution d'un système linéaire est constituée des valeurs des variables qui rendent vraies toutes les équations du système.

L'équation de Poisson est une équation aux dérivées partielles qui décrit comment une certaine quantité physique, telle que le potentiel électrique ou la température, change dans une région donnée. Il porte le nom du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson, qui a été le premier à étudier ce type d'équation. L'équation de Poisson a la forme $\Delta\phi = f$, où ϕ est la quantité décrite, f est une fonction qui décrit la source ou le puits de la quantité, et Δ est l'opérateur de Laplace. Il est souvent utilisé en physique et en ingénierie pour modéliser le comportement de systèmes impliquant la diffusion ou l'écoulement d'un fluide.

En général, la solution de l'équation de Poisson peut être assez complexe et il n'est pas toujours possible de trouver une solution analytique. Dans de tels cas, des méthodes numériques sont souvent utilisées pour obtenir une solution approximative qui est précise à l'intérieur d'une tolérance donnée.

2 Introduction

En mathématiques et particulièrement en algèbre linéaire, un système d'équations linéaires est un système d'équations constitué d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues. Par exemple:

$$\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 + 4x_2 - x_3 = -6 \\ \mathrm{x}_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3\mathrm{x}_1 + x_2 = 2 \end{cases} . \tag{1}$$

Le problème est de trouver les valeurs des inconnues x_1, x_2 et x_3 qui satisfassent les trois équations simultanément. Cette système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.1 Modéle de système d'équation linéaire

Une épicerie a mené une enquête auprès de 10 clients (A_1, A_2, ..., A_{10}) sur leurs besoins mensuels pour 10 produits différents (a_1, a_2, .., a_{10}) et leurs budgets total(b_1, b_2, .., b_{10}) pour ces besoins. L'épicerie veut mettre à jour le prix de 10 produits afin de répondre à tous les besoins de ces clients. La liste des besoins du client $A_1 = [a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,10}]$. La liste des besoins du client $A_2 = [a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,10}]$. La liste des besoins du client $A_{10} = [a_{10,1}, a_{10,2}, ..., a_{10,10}]$. Si on l'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{1,1} & \mathrm{a}_{1,2} & . & . & . & \mathrm{a}_{1,10} \\ \mathrm{a}_{2,1} & \mathrm{a}_{2,2} & . & . & . & \mathrm{a}_{2,10} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \mathrm{a}_{10,1} & \mathrm{a}_{10,2} & . & . & . & \mathrm{a}_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ . \\ . \\ \mathrm{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ . \\ . \\ \mathrm{b}_{10} \end{bmatrix}$$

où les valeurs x_1, x_2, ..., x_{10} sont les prix que l'épicerie veut mettre à jour. Si l'on place les données obtenues à la suite de l'enquête dans la matrice:

$$\begin{bmatrix} 20 & 3 & 0 & 15 & 11 & 12 & 8 & 6 & 18 & 2 \\ 13 & 14 & 0 & 1 & 3 & 17 & 2 & 12 & 0 & 10 \\ 1 & 14 & 9 & 17 & 5 & 3 & 3 & 5 & 0 & 12 \\ 2 & 6 & 3 & 13 & 4 & 12 & 16 & 3 & 3 & 4 \\ 19 & 19 & 11 & 19 & 2 & 1 & 16 & 8 & 0 & 10 \\ 18 & 18 & 0 & 4 & 11 & 16 & 12 & 2 & 2 & 9 \\ 15 & 11 & 16 & 10 & 4 & 11 & 8 & 7 & 9 & 11 \\ 14 & 10 & 6 & 4 & 13 & 4 & 18 & 8 & 3 & 20 \\ 3 & 3 & 11 & 13 & 6 & 12 & 13 & 11 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & 20 & 2 & 15 & 7 & 19 & 1 & 13 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_4 \\ \mathrm{x}_5 \\ \mathrm{x}_6 \\ \mathrm{x}_7 \\ \mathrm{x}_8 \\ \mathrm{x}_9 \\ \mathrm{x}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2300 \\ 2400 \\ 1500 \\ 1200 \\ 2800 \\ 2800 \\ 2500 \\ 2900 \\ 2000 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

Le résultat du système donne les prix à mettre à jour.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58.10 \\ 31.09 \\ 6.86 \\ 4.80 \\ 24.65 \\ 19.04 \\ 13.44 \\ 31.21 \\ 5.38 \\ 40.53 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, tous les clients pourront acheter leurs besoins avec le budget qu'ils allouent.

2.2 l'Equation de Poisson

L'équation de Poisson est l'équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre suivante : $\Delta\phi = f$ où Δ est L'opérateur laplacien et f est une distribution généralement donnée.
Plus explicitement, l'équation de Poisson à deux dimensions est:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = s(x,y)$$

où u(x,y) est la fonction inconnue et s(x,y) la fonction source, éventuellement nulle (équation de Laplace).

Sur un domaine borné de R^N et de frontière régulière, le problème de trouver ϕ à partir de f et satisfaisant certaines conditions aux limites appropriées est un problème bien posé : la solution existe et est unique.

Un exemple d'équation de Poisson est celle vérifiée par le potentiel électrostatique :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

où ρ est la densité volumique de charge électrique et ε la permittivité électrique du milieu.
Un autre exemple est l'équation de la chaleur en régime stationnaire vérifiée par la température :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{\sigma}{\lambda}$$

où σ est la source thermique et λ la conductivité thermique.

En mécanique des fluides, l'écoulement bidimentionnel d'un fluide parfait (c.a.d. non visqueux) et irrotationnel autour d'un obstacle peut être décrit par un potentiel de vitesse ϕ tel que : $\vec{v} = \vec{grad}(\phi)$. Si l'écoulement est de plus incompressible, la divergence de la vitesse est nulle et on obtient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

La condition limite sur un obstacle consiste à écrire que la vitesse du fluide est tangente à la surface de l'obstacle en tout point de celui-ci, c'est-à-dire que la composante normale du gradient du potentiel est nulle.

2.3 Résoudre des systèmes d'équations linéaires et d'équation de Poisson

Les méthodes d'équations linéaires sont divisées en deux catégories. Direct et itérative. Dans les méthodes directes, l'examen portera sur la règle de Crammer, l'élimination gaussienne et la décomposition LU (matrices triangulaires inférieures et supérieures). L'élimination gaussienne est un algorithme de résolution de système d'équations linéaires. En algèbre linéaire, la décomposition LU (également appelée factorisation LU) factorise une matrice comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure.

Une méthode itérative est une procédure mathématique qui génère une séquence de solutions approchées améliorées pour une classe de problèmes. Certains schémas itératifs bien connus sont la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel, la méthode de sur-relaxation successive.

Dans cet article, nous nous concentrerons davantage sur la solution des équations de Poisson avec conditions aux limites (non-homogènes) de Dirichlet est donné par le système:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \text{u=g } dans\ \partial\Omega \end{cases} . \tag{2}$$

où $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ est l'opérateur laplacien, f une fonction donnée, g les conditions aux limites et Ω le domaine de frontière $\partial\Omega$. Une des manière classique de résoudre un tel problème est par différence finie. L'idée est de considérer une discrétisation du domaine en une grille (ou maille) avec un nombre fini de nœuds où la solution de l'équation aux d´erivées partielles sera approximée par un schéma aux différences finies à cinq points avec espacement homogène :

$$\begin{cases} -(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})\,\frac{1}{h^2} = \mathrm{f}_{i,j} \mid i,j \le N-1 \\ \mathrm{u}_{i,j} = g_{i,j} \mid \text{i,j=0 } ouN \end{cases} \tag{3}$$

où $x_{i,j}$ sont les valeurs des différentes fonctions en jeu évaluées aux nœuds (i,j) et N le nombre d'intervalles entreles points. Cette approximation résulte en un système linéaire que nous allons résoudre par ordinateur.

2.4 Python comme outil d'analyse numérique

L'analyse numérique est une discipline à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Elle s'intéresse tant aux fondements qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathEmatique.

Plus formellement, l'analyse numérique est l'étude des algorithmes permettant de résoudre numériquement par discrétisation les problèmes de mathématiques continues (distinguées des mathématiques discrètes). Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre de façon numérique à des questions à variable réelle ou complexe comme l'algèbre linéaire numérique sur les champs réels ou complexes, la recherche de solution numérique d'équations différentielles et d'autres problèmes liés survenant dans les sciences physiques et l'ingénierie. Branche des mathématiques appliquées, son développement est étroitement lié à celui des outils informatiques.

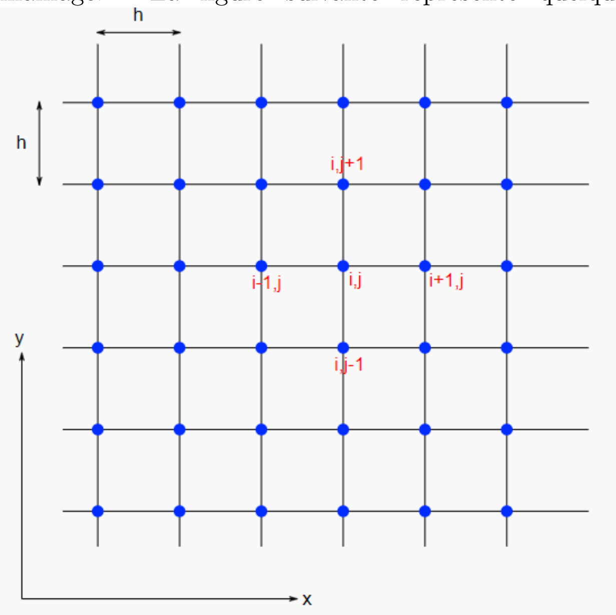
Python est l'un des langages les plus utiles pour effectuer ces opérations. Python n'appartient qu'à ses utilisateurs et à ses contributeurs. Ils forment une énorme communauté mondiale qui ne cesse de grandir et de contribuer à l'amélioration du langage, de ses environnements de développement (IDE), et de l'enrichir avec de nouvelles librairies utiles.

3 Méthodologie

On recherche une solution de l'équation de Poisson sur le domaine carré [0,1]x[0,1]. Sur les bords du carré, la condition limite appliquée consiste à fixer la valeur de u (condition limite de Dirichlet). Nous allons voir comment effectuer la discrétisation de l'équation de Poisson, puis comment résoudre le système d'équations obtenu avec une méthode itérative.

3.1 Discrétisation

Le domaine carré est divisé avec un maillage dont les mailles sont carrées. On note h le pas d'espace du maillage. La figure suivante représente quelques mailles.



On recherche une valeur approchée de la fonction u(x,y) aux nœuds du maillage. La valeur recherchée au point d'indices (i,j) est notée $U_{i,j}$. La valeur de la fonction source au même point est notée $S_{i,j}$. Nous allons discrétiser l'équation de Poisson en utilisant la méthode des différences finies. Cette méthode consiste à remplacer les dérivées par des différences finies, afin d'obtenir des équations vérifiées par les valeurs $U_{i,j}$ aux nœuds du maillage.

Par ailleurs, le nombre de nœuds dans chaque dimension sera choisi égal à une puissance de 2 plus 1 :

$$N = 2^p + 1$$

où p est un entier. Cela fait un nombre de mailles puissance de 2. L'avantage de ce choix est de permettre une division du nombre de mailles par 2, 4, etc. En comptant les rangées fictives, le nombre d'éléments des matrices dans chaque dimension est :

$$M = N + 2$$

3.2 Laplacien

Pour discrétiser une dérivée seconde, on utilise les développements de Taylor suivants, pour une fonction f d'une variable :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + O(h^4)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3}f'''(x) + O(h^4)$$

En sommant ces deux équations, on obtient :

$$f''(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} + O(h^4)$$

Cette relation permet de discrétiser les dérivées secondes, par exemple :

- $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_(i+1,j)+U_(i-1,j)-2U_(i,j)}{h^2}$

et d'autre part, on obtient l'équation suivante:

- $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_(i,j+1)+U_(i,j-1)-2U_(i,j)}{h^2}$

pour chaque nœud du maillage, on obtient l'équation:

$$U_(i+1,j)+U_(i-1,j)+U_(i,j+1)+U_(i,j-1)-4U_(i,j) = h^2S_(i,j)$$

3.3 Conditions limites de Dirichlet

Sur les bords du domaine, une valeur de u est imposée. Il peut aussi y avoir des lignes à l'intérieur du domaine où la valeur de u est imposée.

Pour un nœud (i,j) où la valeur imposée est $U(x_i, y_j)$, l'équation s'écrit :

$$U_{i,j} = U(x_i, y_j)$$

L'équation générale est donc valable à condition d'utiliser :

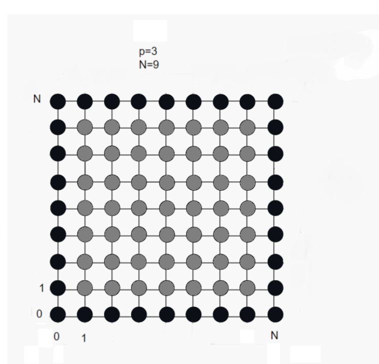
$$U_(i,j) + U_(i,j) + U_(i,j) - 4U_(i,j) = h^2S_(i,j) - U_(i_b, j_b)$$

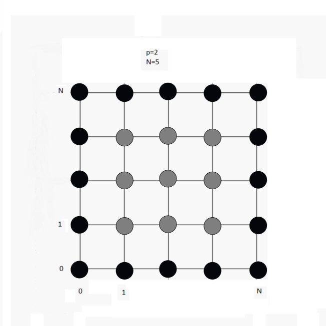
si $U_(i_b, j_b)$ est dans la bord du domaine.

Pour chacun des $Q = (N-2)X(N-2)$ nœuds du maillage, il y a une équation linéaire de la forme, au dessus. On doit donc résoudre un système linéaire de Q équations à Q inconnues. Si on place toutes les inconnues $U_{i,j}$ dans une matrice colonne U (en les rangeant par exemple par lignes successives), le système peut se mettre sous la forme matricielle :

$$AU = F$$

3.4 Affichement





Les indices d'accès aux éléments de la matrice sont indiqués sur la figure. On voit ainsi que les indices des nœuds du maillage vont de 1 à N.

Lorsque nous divisons la zone en 16 grid égaux(p=2), les équations que nous obtenons seront :

$$
\begin{aligned}
&f_{(1,1)}(1/4)^2 - U_{(1,0)} - U_{(0,1)} = u_{(2,1)} + u_{(1,2)} - 4u_{(1,1)}\\
&f_{(1,2)}(1/4)^2 - U_{(0,2)} = u_{(2,2)} + u_{(1,1)} + u_{(1,3)} - 4u_{(1,2)}\\
&f_{(1,3)}(1/4)^2 - U_{(0,3)} - U_{(1,4)} = u_{(2,3)} + u_{(1,2)} - 4u_{(1,3)}\\
&f_{(2,1)}(1/4)^2 - U_{(2,0)} = u_{(2,2)} + u_{(3,1)} + u_{(1,1)} - 4u_{(2,1)}\\
&f_{(2,2)}(1/4)^2 = u_{(1,2)} + u_{(3,2)} + u_{(2,1)} + u_{(3,2)} - 4u_{(2,2)}\\
&f_{(2,3)}(1/4)^2 - U_{(2,4)} = u_{(1,3)} + u_{(3,3)} + u_{(2,2)} - 4u_{(2,3)}\\
&f_{(3,1)}(1/4)^2 - U_{(4,1)} - U_{(3,0)} = u_{(3,2)} + u_{(2,1)} - 4u_{(3,1)}\\
&f_{(3,2)}(1/4)^2 - U_{(4,2)} = u_{(3,3)} + u_{(3,1)} + u_{(2,2)} - 4u_{(3,2)}\\
&f_{(3,3)}(1/4)^2 - U_{(3,4)} - U_{(4,3)} = u_{(3,2)} + u_{(2,3)} - 4u_{(3,3)}
\end{aligned}
$$

On connait les valeurs de la fonction $f_{(i,j)}$ et les valeurs bords $U_{(i,j)}$, et on veut trouver les valeurs $u_{(i,j)}$ intérieur du domaine.

Si nous écrivons notre système d'équations sous forme matricielle:

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{(1,1)}\\ u_{(1,2)}\\ u_{(1,3)}\\ u_{(2,1)}\\ u_{(2,2)}\\ u_{(2,3)}\\ u_{(3,1)}\\ u_{(3,2)}\\ u_{(3,3)}
\end{bmatrix}
=
$$

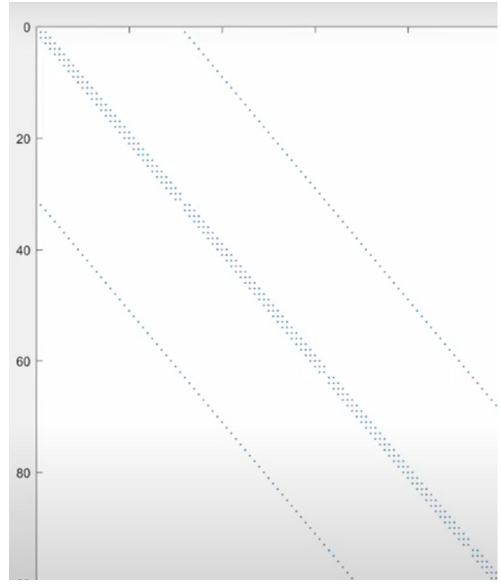
$$
=\begin{bmatrix}
f_{(1,1)}(1/4)^2 - U_{(1,0)} - U_{(0,1)}\\
f_{(1,2)}(1/4)^2 - U_{(0,2)}\\
f_{(1,3)}(1/4)^2 - U_{(0,3)} - U_{(1,4)}\\
f_{(2,1)}(1/4)^2 - U_{(2,0)}\\
f_{(2,2)}(1/4)^2\\
f_{(2,3)}(1/4)^2 - U_{(2,4)}\\
f_{(3,1)}(1/4)^2 - U_{(4,1)} - U_{(3,0)}\\
f_{(3,2)}(1/4)^2 - U_{(4,2)}\\
f_{(3,3)}(1/4)^2 - U_{(3,4)} - U_{(4,3)}
\end{bmatrix}
$$

Nous avons trouvé la matrice A dans notre système ($AU = F$).

3.5 l'Existence et l'Unicité des solutions

Le déterminant de la matrice A que nous avons trouvé en 2.4 est différent de 0, et donc la matrice A est inversible. Notre système a donc une solution et est unique. Qu'en est-il de tous les autres processus de discrétisation, y a-t-il une solution et est-ce la seule?

Les matrices A que nous obtiendrons dans toutes nos opérations de discrétisation seront sous forme de matrices *Block Toeplitz.*



où les points bleus représentent les valeurs nonzero dans la matrice.

De plus, les valeurs de notre matrice sont claires, comme ça toujours:

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
A_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline
1 & A_1 & 1 & 0 & 0\\ \hline
0 & 1 & A_1 & 1 & 0\\ \hline
0 & 0 & 1 & A_1 & 1\\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & A_1
\end{array}\right]_{(N-2XN-2)}
$$

$$
\text{où la matrice } A_1 = \begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -4 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & -4
\end{bmatrix}_{(N-2XN-2)}
$$

et la matrice 1 qui est matrice dont le diagonale est 1. Le déterminant des matrices sous cette forme n'est jamais égale à 0 et est inversible. Par conséquent, le système a une solution et est unique.

3.6 l'Inverse de la Matrice

l'inverse de la Matrice de taille 9x9 qu'on veut résoudre le système est calculé par la calculator:

$$
\begin{bmatrix}
-67/224 & -11/112 & -1/32 & -11/112 & -1/16 & -3/112 & -1/32 & -3/112 & -3/224\\
-11/112 & -37/112 & -11/112 & -1/16 & -1/8 & -1/16 & -3/112 & -5/112 & -3/112\\
-1/32 & -11/112 & -67/224 & -3/112 & -1/16 & -11/112 & -3/224 & -3/112 & -1/32\\
-11/112 & -1/16 & -3/112 & -37/112 & -1/8 & -5/112 & -11/112 & -1/16 & -3/112\\
-1/16 & -1/8 & -1/16 & -1/8 & -3/8 & -1/8 & -1/16 & -1/8 & -1/16\\
-3/112 & -1/16 & -11/112 & -5/112 & -1/8 & -37/112 & -3/112 & -1/16 & -11/112\\
-1/32 & -3/112 & -3/224 & -11/112 & -1/16 & -3/112 & -67/224 & -11/112 & -1/32\\
-3/112 & -5/112 & -3/112 & -1/16 & -1/8 & -1/16 & -11/112 & -37/112 & -11/112\\
-3/224 & -3/112 & -1/32 & -3/112 & -1/16 & -11/112 & -1/32 & -11/112 & -67/224
\end{bmatrix}_{(9X9)}
$$

On voit que cette matrice est dans forme:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline B & D & B \\ \hline C & B & A \end{array}\right]$$

et les matrices A,B,C,D sont dans forme:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline b & d & b \\ \hline c & b & a \end{array}\right]$$ où les a,b,c,d sont nombre réel.

L'inverse des matrices de taille 4x4 est au format suivant.

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline B & E & F & C \\ \hline C & F & E & B \\ \hline D & C & B & A \end{array}\right]$$

et les matrices A,B,C,D,E,F sont dans forme:

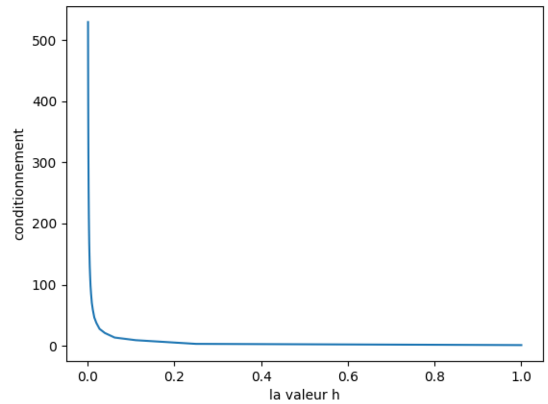
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & d \\ \hline b & e & f & c \\ \hline c & f & e & b \\ \hline d & c & b & a \end{array}\right]$$ où les a,b,c,d,e,f sont nombre réel.

Par conséquent, notre matrice et l'inverse ont des propriétés structurellement importantes.

$\triangleright A^T$ =A

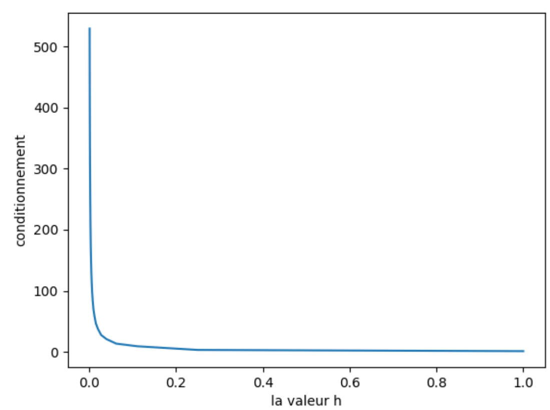
$\triangleright (A^{-1})^T$ =A^{-1}

3.7 Conditionnement



On voit que la valeur du conditionnement tend vers l'infini quand la valeur de h est proche de zéro (c'est-à-dire quand on crée trop de maillages dans le processus de discrétisation de notre domaine) , pour la norme infinie $\left\|A\right\|_\propto$. Plus la valeur de conditionnement est élevée, plus la variation du vecteur solution (U) affectée par une légère variation du vecteur de droite (F) dans le système linéaire est élevée.

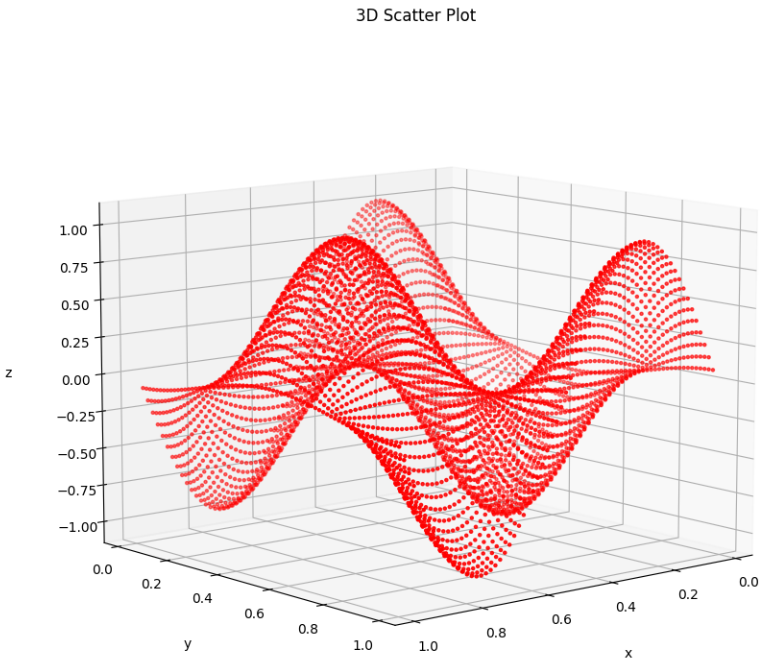
Le graphe de conditionnement est le même pour une norme différente. Pour la norme $\left\|A\right\|_1$:



Donc la valeur de conditionnement de la matrice dans notre système linéaire est indépendante de la norme.

3.8 Rèsoudre le Systéme

4 Résultats



4.1 Réferences

https://saspublishers.com/media/articles/SJPMS-56-334-341-c.pdf

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ benjamin.graille/UPF/NdC.pdf

https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/elliptique/poisson/poisson.html

https://www-liphy.univ-grenoble-alpes.fr/pagesperso/ismail/teachingFiles/L3P1213/eqPoisson.pdf