Universidad de San Andrés

Práctica B: Aplicaciones de la derivada

Resultados

1. Para cada una de las siguientes funciones, analizar si se cumplen o no y por qué ...
   (a) Sí, se cumplen. f es continua en $[1, 3]$, derivable en $(1, 3)$ y $f(1) = f(3) = 2$.
   (b) Sí. f es continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y $f(0) = f(1) = 0$.
   (c) No. f no está definida en $x = 3 \in [-3, 4]$ (porque el denominador se anula), no es continua y menos derivable en $[-3, 4]$. Sí vale que $f(-3) = f(4) = -1$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, analizar si se cumplen o no y por qué ...
   (a) Sí. f es continua en $[2, 6]$ y derivable $(2, 6)$ por ser cociente de continuas y derivables con denominador no nulo. La función tiene problemas de dominio en $x = 7$, fuera del intervalo del enunciado.
   (b) Sí. f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$.
   (c) Sí. f es continua en $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$.

3. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 7$. Verificar que $f(1) = f(-1)$, pero f' no se anula en $(-1, 1)$. ...
   $f(1) = f(-1) = 8$. Si valiera el teorema de Rolle, existiría un $c \in (-1, 1)$ donde $f'(c) = 0$. Pero $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ nunca se anula. No puede aplicarse el teorema de Rolle porque f no es derivable en $x_0 = 0 \in (-1, 1)$.

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Verificar que $f(0) = 0, f(2) = 2$ y que no existe $c \in (0, 2)$ tal que ...
   Si valiera el teorema del valor medio (o de Lagrange) en $[0, 2]$, existiría un $c \in (0, 2)$ donde $f'(c) = \frac{2-0}{2-0} = 1$. Pero $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ y $f'(x) = 1 \Rightarrow -1 = (x-1)^2$, no tiene solución. No puede aplicarse el teorema del valor medio porque f no es derivable en $x_0 = 1 \in (0, 2)$.

5. La temperatura (medida en grados centígrados) de un animal pequeño ...
   (a) T es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$. Por el TVM, existe un $c \in (0, 4)$ donde $T'(c) = \frac{T(4)-T(0)}{4-0} = 0$.
   (b) $t_0 = 2 \in (0, 4)$.

6. Para una empresa, el costo de producción de x artículos de cierta clase está dado ...
   El costo promedio de producir 100 artículos es $C(100)/100 = 100$. C es continua en $[0, 100]$ y derivable en $(0, 100)$, por el TVM existe un $x \in (0, 100)$ donde $C'(x) = \frac{C(100)-C(0)}{100-0} = \frac{C(100)}{100}$.
   $C'(x) = 200 - 2x = 100$ con $x = 50$ artículos.

7. Calcular los siguientes límites ...

(a) $\frac{1}{3}$,
(b) 0 y $+\infty$,
(c) $-\infty$,
(d) 0,
(e) $\frac{25}{2}$,
(f) ∞,
(g) 0,
(h) 0,
(i) 0,
(j) 0,
(k) 2.

8. Decidir si se puede aplicar la regla de L'Hospital para calcular el límite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$. ...

   Usando LH queda $\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})}{\cos(x)}$ que no tiene límite.

   $$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado}} = 0$$

9. Calcular el límite $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{\frac{1}{x}-1}$ primero usando la regla de L'Hospital ...

   $-\frac{1}{3}$

10. Calcular los siguientes límites ...

(a) $+\infty$ y 0.
(b) 0,
(c) -1,
(d) $+\infty$,
(e) 2,
(f) 0,
(g) 1,
(h) 1,
(i) e^3,
(j) 1.