Universidad de San Andrés

Práctica A: Derivadas

RESULTADOS

1. Para cada una de las siguientes funciones f, usar la definición...

   (a) $f'(3) = 2$, $y = 2(x-3) - 1 = 2x - 7$

   (b) $f'(-1) = -8$, $y = -8(x+1) + 5 = -8x - 3$

   (c) $f'(2) = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}(x-2) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

   (d) $f'(1) = 1$, $y = (x-1) + 1 = x$
   $f'(-1) = -1$, $y = -(x+1) + 1 = -x$
   No existe $f'(0)$ ni recta tangente en $x_0 = 0$.

   (e) $f'(1) = 2$, $y = 2(x-1) + 1$
   $f'(5) = 10$, $y = 10(x-5) + 25$
   No existe $f'(0)$ ni recta tangente en $x_0 = 0$.

2. Estimar el valor de $\sqrt{4,05}$ usando la recta tangente de la función del ejercicio (1c) ...
   $f\left(1 + \frac{1}{20}\right) = \sqrt{4,05} \approx RT\left(1 + \frac{1}{20}\right) = 2.0125$. Con calculadora: $\sqrt{4.05} = 2.01246117974$.

3. Considerar las funciones $f(x) = |x| + x$, $\quad g(x) = x \cdot |x|$ y $\quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   a) f y g son suma y producto, respectivamente, de funciones continuas y derivables en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   $h(x) = 0$ en $(0, +\infty)$, es continua y derivable; y en $(-\infty, 0)$, $h(x) = x^2$, también es continua y derivable.

   b) $f'(1) = 2$, $f'(-2) = 0$, $g'(1) = 2$, $g'(-2) = 4$ y $h'(3) = 0$.

   c) $f'_+(0) = 3$ (por derecha), $f'_-(0) = 0$ (por izquierda); $g'(0) = 0$.

   d) h es derivable en $x = 0$ y $h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

4. Calcular las derivadas de las funciones del ejercicio 1 en cada punto genérico $x_0 = x$

   (a) $f'(x) = 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   (b) $f'(x) = 8x \ \forall x \in \mathbb{R}$;

   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} \ \forall x \in (-2, +\infty)$;

   (d) $f'(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$
   con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (e) $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x > 0, \end{cases}$
   con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Calcular $f'(x)$ para las siguientes funciones, especificando el dominio de f y de f'.

   (a) $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2$;

(b) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x+1)(2+5x^2)+(x+2)\cdot 3\cdot(2+5x^2)+(x+2)(3x+1)\cdot 10x$;

(c) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \mathbb{R}$, $2\sin x + 2x\cos x - 2xe^x - (x^2-2)e^x$;

(d) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x\cos x - e^x \sin x$;

(e) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = (0,+\infty)$, $f'(x) = 2x\ln x + x - x^2$;

(f) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = (0,+\infty)$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$;

(g) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x) = \dfrac{2x-21}{x^4}$;

(h) $\text{Dom}\, f = [0,+\infty)$, $\text{Dom}\, f' = (0,+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$;

(i) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

(j) $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = (0,+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

6. Calcular $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando las reglas de derivación

(a) $f'(x) = 200(1+2x)^{99}$;

(b) $f'(x) = -3\sin(3x-5)$;

(c) $f'(x) = -8x^3\cos(x^4) + 4\sin^3(x)\cos x$;

(d) $f'(x) = \dfrac{5-5\ln^4 x}{x}$;

(e) $f'(x) = \dfrac{e^x+2x}{e^x+x^2+1}$;

(f) $f'(x) = e^{x^2+3x}(2x+3)$;

(g) $f'(x) = 2^x\ln 2$;

(h) $f'(x) = \dfrac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}} + 2\sin x\cos x$;

(i) $f'(x) = \cos(\ln(x^4+1))\dfrac{4x^3}{x^4+1}$;

(j) $f'(x) = \sqrt[3]{x^2-1} + \dfrac{2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$;

(k) $f'(x) = \dfrac{4bx^3}{3\sqrt[3]{(a+bx^4)^2}}$;

(l) $f'(x) = 3\dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(m) $f'(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$.

7. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de cada una de las siguientes...

(a) $y = 0$;

(b) $y = 15(x-4)+36$;

(c) En $x = 0$ RT: $y = 1$.
En $x = 1$ RT: $y = -\frac{2}{e}(x-1)+\frac{1}{e}$;

(d) $y = 3e(x-1)+e$.

8. Sean $f(x) = 2x^3$ y $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $x=2$ tal que $g'(2) = 4$. Hallar $(g\circ f)'(1)$.
$(g\circ f)'(1) = 24$.

9. Sean $f(x) = 5x+3$ y $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $x=8$ tal que $(g\circ f)'(1) = 2$. Hallar $g'(8)$.
$g'(8) = \dfrac{2}{5}$.

10. Hallar $f(4)$ y $f'(4)$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(4) = -3$, $f'(4) = -2$;

(b) $f(4) = 3,\ f'(4) = \frac{1}{4}$.

11. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación de la recta tangente al gráfico de...
$a = 2,\ b = 1$.

12. Sea g derivable en $x = 0$ tal que la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x_0 = 0$...
$y = \frac{1}{4}x + 2\ln 2$.

13. Dada $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$, ¿en qué puntos la recta tangente a f es paralela a $y = -2x + 1$? ...
En $x = -\frac{1}{2}$, RT: $y = -2(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$. Y en $x = \frac{1}{2}$, RT: $y = -2(x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}$.

14. Usando el método de derivación logarítmica, calcular las derivadas...

(a) $f'(x) = x^{3x}(3\ln x + 3)$;

(b) $f'(x) = 2x^{\ln x}\dfrac{\ln x}{x}$;

(c) $f'(x) = (\sqrt{x+1})^x \left(\ln(\sqrt{x+1}) + \dfrac{x}{2(x+1)}\right)$;

(d) $f'(x) = \sqrt[x]{x}\,\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$;

(e) $f'(x) = (x^2+1)^{\sin x}\left(\cos(x)\ln(x^2+1) + \dfrac{2x\sin x}{x^2+1}\right)$.

15. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

(a) f es continua en $x = 2$.

(b) $f'_{\pm}(1) = \pm\infty$, no es derivable en $x_1 = 1$. $f'_{+}(2) = 0$, $f'_{-}(2) = \frac{1}{2}$ tampoco es derivable en $x_2 = 2$.

16. Hallar el dominio de f' y dar su fórmula para cada una de las siguientes funciones:

(a) $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ -e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$
Nos falta una herramienta para calcular la derivada en $x = 0$. Sin embargo existe un truco para prescindir de ella; $f'(0) = -1$.

(b) $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$;

(c) $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(d) $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 1, \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq 1 \text{ y } x \neq 0. \end{cases}$

17. En cada caso, hallar si es posible todos los valores de a y b en $\mathbb{R}$ de manera que f resulte...

(a) $a = 7,\ b = -4$;

(b) $a = -3,\ b = 4$;

(c) $a = \pm 1,\ b = 4$.

(d) $a = 0,\ b = 2$.

18. Considere la función $f(x) = \ldots$

(a) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$;

(b) $a = 2,\ b = 3$.

19. Calcular las derivadas $f''(x), f'''(x)$ y $f^{(iv)}(x)$, para cada una de las siguientes funciones.

$f(x)$	$3x^3 + 5x - 1$	$\ln(7x)$	$(x^2+1)^5$
$f''(x)$	$18x$	$-\frac{1}{x^2}$	$10\,(9\,x^2+1)(x^2+1)^3$
$f'''(x)$	18	$\frac{2}{x^3}$	$240\,(3\,x^2+1)(x^2+1)^2 x$
$f^{(iv)}(x)$	0	$-\frac{6}{x^4}$	$240\,(21\,x^4+14\,x^2+1)(x^2+1)$
$f^{(n)}(x)$	$\begin{cases} 9x^2+5 & \text{si } n=1, \\ 18x & \text{si } n=2, \\ 18 & \text{si } n=3, \\ 0 & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$	$(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$	No se deduce una fórmula regular fácilmente.

$f(x)$	$\cos x$	e^x	$\sin(4x)$
$f''(x)$	$-\cos x$	e^x	$-16\,\sin(4\,x)$
$f'''(x)$	$\sin x$	e^x	$-64\,\cos(4\,x)$
$f^{(iv)}(x)$	$\cos x$	e^x	$256\,\sin(4\,x)$
$f^{(n)}(x)$	$\begin{cases} \cos x & \text{si } r_4(n)=0, \\ -\sin x & \text{si } r_4(n)=1, \\ -\cos x & \text{si } r_4(n)=2, \\ \sin x & \text{si } r_4(n)=3. \end{cases}$ Donde $r_4(n)$ es el resto al dividir n por 4.	e^x	$\begin{cases} 4^n\sin(4x) & \text{si } r_4(n)=0, \\ 4^n\cos(4x) & \text{si } r_4(n)=1, \\ -4^n\sin(4x) & \text{si } r_4(n)=2, \\ -4^n\cos(4x) & \text{si } r_4(n)=3. \end{cases}$

$f(x)$	$\sin(4x) + \cos x + e^x$	xe^x
$f''(x)$	$-16\,\sin(4\,x) - \cos(x) + e^x$	$xe^x + 2\,e^x$
$f'''(x)$	$-64\,\cos(4\,x) + \sin(x) + e^x$	$xe^x + 3\,e^x$
$f^{(iv)}(x)$	$256\,\sin(4\,x) + \cos(x) + e^x$	$xe^x + 4\,e^x$
$f^{(n)}(x)$		$xe^x + ne^x$