Universidad de San Andrés

Práctica A: Derivadas

1. Para cada una de las siguientes funciones f, usar la definición (límite de los cocientes incrementales) para hallar, si es posible, la derivada de la función f en los puntos indicados x_0. Hallar, si existe, la ecuación de la recta tangente al gráfico de cada función en el punto $(x_0; f(x_0))$.

   (a) $f(x) = 2x - 7, \quad$ en $x_0 = 3$

   (b) $f(x) = 4x^2 + 1, \quad$ en $x_0 = -1$

   (c) $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad$ en $x_0 = 2$

   (d) $f(x) = |x|$ en $x_0 = 1, x_0 = -1, x_0 = 0$

   (e) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   en $x_0 = 1, x_0 = 5, x_0 = 0$

2. Estimar el valor de $\sqrt{4,05}$ usando la recta tangente de la función del ejercicio (1c) hallada para $x_0 = 2$ evaluando en $\tilde{x} = 2 + \frac{1}{20}$. (Comparar con el resultado obtenido con calculadora.)

3. Considerar las funciones $f(x) = |x| + x, \quad g(x) = x \cdot |x|$ y $\quad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   a) Mostrar que son continuas y derivables en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) Dar los valores de $f'(1)$, $f'(-2)$, $g'(1)$, $g'(-2)$ y $h'(3)$.

   c) Mostrar que f no es derivable en $x = 0$ y que g sí lo es. Calcular $g'(0)$.

   d) Estudiar si h es o no derivable en $x_0 = 0$. Dar la fórmula $h'(x)$.

4. Calcular las derivadas de las funciones del Ejercicio 1 en cada punto genérico $x_0 = x$ en donde la función es derivable. (Usar las reglas de derivación cuando sea posible o la definición en caso contrario.)

5. Calcular $f'(x)$ para las siguientes funciones, especificando el dominio de f y de f'.

   (a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

   (b) $f(x) = (x+2)(3x+1)(2+5x^2)$

   (c) $f(x) = 2x\,\mathrm{sen}(x) - (x^2-2)e^x$

   (d) $f(x) = e^x \cos x + \ln(3)$

   (e) $f(x) = x^2 \ln(x) - \dfrac{x^3}{3} + e^\pi$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

   (g) $f(x) = \dfrac{7-x}{x^3}$

   (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

   (i) $f(x) = \tan x$

   (j) $f(x) = 5\ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x}$

6. Calcular $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones, aplicando las reglas de derivación junto con la regla de la cadena (propiedad de derivación para la composición de funciones).

(a) $f(x) = (1+2x)^{100}$

(b) $f(x) = \cos(3x-5)$

(c) $f(x) = -2\text{sen}(x^4) + (\text{sen}(x))^4$

(d) $f(x) = \ln(x^5) - (\ln(x))^5$

(e) $f(x) = \ln(e^x + x^2 + 1)$

(f) $f(x) = e^{x^2+3x}$

(g) $f(x) = 2^x$ $(\star)$

(h) $f(x) = 3^{\sqrt{x}} + \text{sen}^2(x)$. $(\star\star)$

(i) $f(x) = \text{sen}(\ln(x^4+1))$

(j) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2-1}$

(k) $f(x) = (a+bx^4)^{\frac{1}{3}}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$ fijos.

(l) $f(x) = 6\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(m) $f(x) = \ln(\dfrac{x-1}{x+1})$

$(\star)$ Recordar que $2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{\ln(2)x}$ y usar la derivada de e^{ax}.

$(\star\star)$ $\text{sen}^2(x) = (\text{sen}(x))^2$.

7. Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso:

   (a) $f(x) = \ln(x^2+1)$ en $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = (\sqrt{x}+x)^2$ en $x_0 = 4$

   (c) $f(x) = e^{-x^2}$ en $x_0 = 0$, $x_0 = 1$

   (d) $f(x) = e^x(x+\ln(x))$ en $x_0 = 1$.

8. Sean $f(x) = 2x^3$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $x = 2$ tal que $g'(2) = 4$. Hallar $(g \circ f)'(1)$.

9. Sean $f(x) = 5x+3$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $x = 8$ tal que $(g \circ f)'(1) = 2$. Hallar $g'(8)$.

10. Hallar $f(4)$ y $f'(4)$ en cada uno de los siguientes casos:

    (a) Si la recta tangente a f en $x = 4$ es $y = -2x+5$.

    (b) Si la recta tangente al gráfico de f en en el punto $(4,3)$ pasa por el punto $(0,2)$.

11. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x) = a \cdot \ln(\sqrt{2x+3}) + bx$ en el punto $P = (-1, f(-1))$ sea $y = 3x+2$.

12. Sea g derivable en $x = 0$ tal que la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en $x_0 = 0$ es $y = 2$. Sea $f(x) = g(x)\ln(\sqrt{x+4})$. Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 0$.

13. Dada $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$, ¿en qué puntos la recta tangente a f es paralela a $y = -2x+1$? Para esos puntos hallar la recta tangente.

14. Usando el método de derivación logarítmica, calcular las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = x^{3x}$ para $x > 0$.

    (b) $f(x) = x^{\ln(x)}$

    (c) $f(x) = (\sqrt{x+1})^x$

    (d) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

    (e) $f(x) = (x^2+1)^{\text{sen}(x)}$

15. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \le 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

(a) Analizar la continuidad de f en $x = 2$.

(b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudiar la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$.

16. Hallar el dominio de f' y dar su fórmula para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-1 & \text{si } x > 1 \\ -\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

17. En cada caso, hallar si es posible todos los valores de a y b en $\mathbb{R}$ de manera que f resulte derivable en el punto de corte:

(a) $f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x < 1 \\ 3x^2+x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-3} & \text{si } x < 2 \\ ax+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^2x}{x-3} & \text{si } x < 2 \\ -3x+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(x)+x^2+a & \text{si } x < 0 \\ \frac{b(\sqrt{x+1}-1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

18. Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2+bx-2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(a) Hallar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales f es continua en $x = 0$.

(b) Hallar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales f es derivable en $x = 0$.

19. Calcular las derivadas $f''(x), f'''(x)$ y $f^{(iv)}(x)$, para cada una de las siguientes funciones. Para los ítems (a), (b), (c), (d) y (e) dar la fórmula general de $f^n(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$

(b) $f(x) = (x^2+1)^5$

(c) $f(x) = \ln(7x)$

(d) $f(x) = \cos(x)$

(e) $f(x) = e^x$

(f) $f(x) = \mathrm{sen}(4x)$

(g) $f(x) = \mathrm{sen}(4x) + \cos(x) + e^x$

(h) $f(x) = xe^x$