

数学（文科）

一、选择题：本大题共 12 小题，每题 5 分，满分 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x < 1 \text{ 或 } 2 < x \leq 3\}$ ，集合 $B = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ ，则集合 $A \cap B$ 中的元素个数为
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
2. 已知复数 z 满足： $zi = 3 + 4i$ (i 为虚数单位)，则 $\bar{z} =$
A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $-4 + 3i$ D. $-4 - 3i$
3. 已知命题 $p: \forall x \geq 1, 2^x - \log_2 x \geq 1$ ，则 $\neg p$ 为
A. $\forall x < 1, 2^x - \log_2 x < 1$ B. $\forall x \geq 1, 2^x - \log_2 x < 1$
C. $\exists x < 1, 2^x - \log_2 x < 1$ D. $\exists x \geq 1, 2^x - \log_2 x < 1$
4. 为实现国民经济新“三步走”的发展战略目标，国家加大了扶贫攻坚的力度。某地区在 2015 年以前的年均脱贫率（脱离贫困的户数占当年贫困户总数的比）为 70%。2015 年开始全面实施“精准扶贫”政策后，扶贫效果明显提高，其中 2019 年度实施的扶贫项目，各项目参加户数占比（参加该项目户数占 2019 年贫困户总数的比）及该项目的脱贫率见下表：

实施项目	种植业	养殖业	工厂就业	服务业
参加户占比	40%	40%	10%	10%
脱贫率	95%	95%	90%	90%

那么 2019 年的年脱贫率是实施“精准扶贫”政策前的年均脱贫率的（ ）倍

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{48}{35}$ C. $\frac{47}{35}$ D. $\frac{37}{28}$
5. 已知首项为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 \cdot a_4 = \frac{9}{2^4}$, $a_7 \cdot a_9 = \frac{9}{2^{14}}$ ，则 $a_{13} =$
A. $\frac{3}{2^9}$ B. $\frac{3}{2^{12}}$ C. $\pm \frac{3}{2^9}$ D. $\pm \frac{3}{2^{12}}$
6. 已知函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的定义域为 $[a, b]$ ，值域为 $[-\frac{1}{2}, 1]$ ，则 $b - a$ 的值可能为
A. $\frac{\pi}{3}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

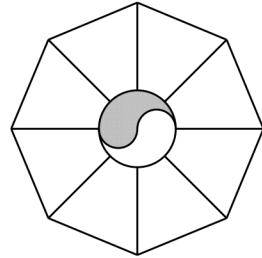
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆

与双曲线 C 的一条渐近线交于点 O 及点 $A(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 则双曲线 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$

8. 《易经》包含着很多哲理, 在信息学、天文学中都有广泛的应用, 《易经》的博大精深, 对今天的几何学和其它学科仍有深刻的影响. 下图就是《易经》中记载的几何图形——八卦田, 图中正八边形代表八卦, 中间的圆代表阴阳太极图, 图中八块面积相等的曲边梯形代表八卦田. 已知正八边形的边长为 10 m , 代表阴阳太极图的圆的半径为 4 m , 则每块八卦田的面积约为

- A. 114 m^2
B. 57 m^2
C. 54 m^2
D. 48 m^2

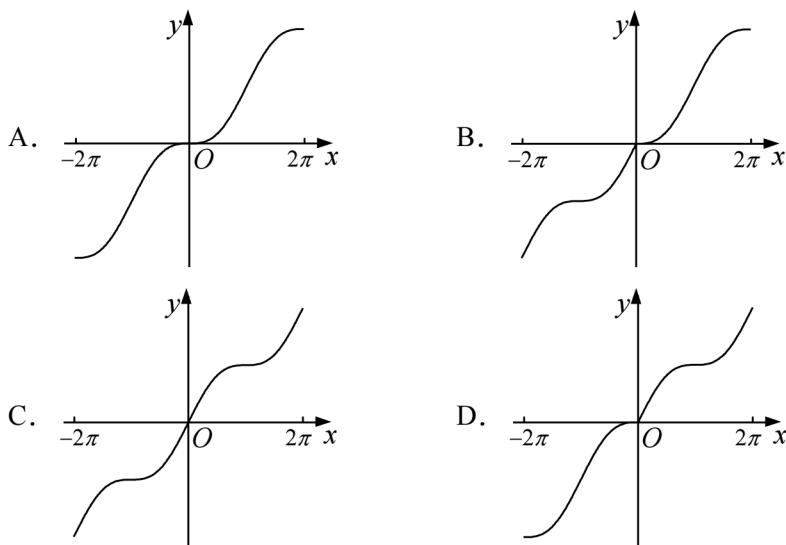


9. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin(A + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(B + C) = 0$,

$b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} + 1$, 则角 C 的大小为

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

10. 函数 $y = \sin|x| + x$ 在 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 上的大致图象是

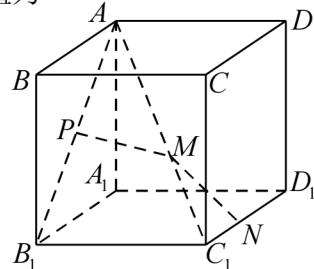


11. 若定义在 \mathbf{R} 上的增函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 且 $f(2) = 2$, 令 $g(x) = f(x) - 1$, 则下列结论不一定成立的是

- A. $g(1) = 0$ B. $g(0) = -1$
C. $g(-1) + g(1) < 0$ D. $g(-1) + g(2) > -2$

12. 如图所示，棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为线段 AB_1 的中点， M, N 分别为体对角线 AC_1 和棱 C_1D_1 上任意一点，则 $PM + \frac{\sqrt{2}}{2}MN$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. 1
 D. $\sqrt{2}$



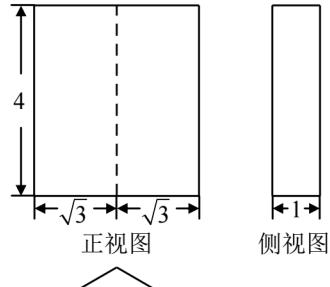
二、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} ，满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{b}^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ，则向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为_____.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，则使得 $f(x) \geq 0$ 的 x 的取值范围为_____.

15. 已知某几何体的三视图如右图所示，则该几何体外接球的表面积为_____.

16. 已知点 P 为直线 $ax + y - 4 = 0$ 上一点， PA, PB 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的两条切线，若恰好存在一点 P 使得 $PA \perp PB$ ，则椭圆 C 的离心率为_____.



(第 15 题图)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：60 分。

17. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_n - 3^{n+1} + 3$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 设 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ ，求证：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{n} - \frac{a_n}{3^n}$ ， $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$ ，求 T_n .

18. (12 分)

受“非洲猪瘟”的影响，10月份起，某地猪肉的单价随着每周供应量的不足而上涨，具体情形统计如下表所示：

自受影响后第 x 周	1	2	3	4	5
猪肉单价 y (元/斤)	16	18.5	20.6	23.7	26.2

(1) 求猪肉单价 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ；

(2) 当地有关部门已于 11 月初购入进口猪肉，如果猪肉单价超过 30 元/斤，则释放进口猪肉增加市场供应量以调控猪肉价格，试判断自受影响后第几周开始需要释放进口猪肉？

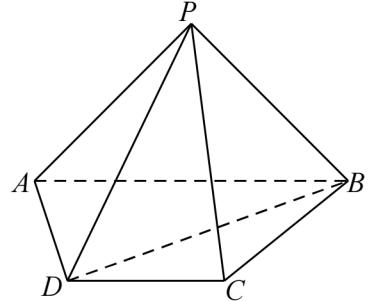
参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 340.6$ ，参考公式： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAB 是等腰直角三角形， $PA=PB$ ， $BC \perp$ 平面 PAB ， $AB=BC=2$, $AD=BD=\sqrt{5}$.

(1) 求证： $PA \perp$ 平面 PBC ；

(2) 求顶点 C 到平面 PAD 的距离.



20. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x(e^x-\lambda \cos x)-1$ ，且曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线经过点 $(-1, -2)$.

(1) 求实数 λ 的值；

(2) 若函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ，试判断函数 $g(x)$ 的零点个数并证明.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $A(a, 3)$, P 为抛物线 C 上一动点, O 为坐标原点.

- (1) 若 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 5, 求实数 a 的值;
- (2) 若梯形 $OPMN$ 内接于抛物线 C , $OP \parallel MN$, OM, PN 的交点恰为 A , 且 $|MN| = 5\sqrt{13}$, 求直线 MN 的方程.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为实数),

以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M .

- (1) 求线段 AB 长的最小值;
- (2) 求点 M 的轨迹方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知非零实数 a, b 满足 $a < b$.

- (1) 求证: $a^3 - b^3 < 2a^2b - 2ab^2$;
- (2) 是否存在实数 λ , 使得 $\frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} \geq \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ 恒成立? 若存在, 求出实数 λ 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

