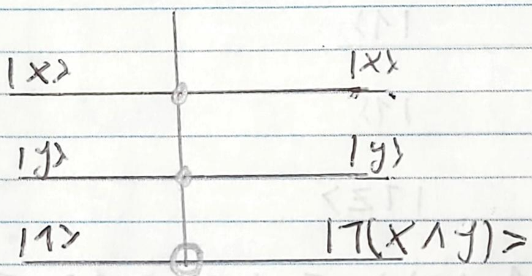
Taller de qubits y compuertas cuanticas

5.3.3

Construir NAND con un toffoli gate. Construir OR gate with 2 toffoli gates

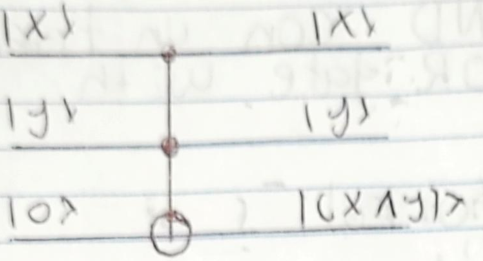
a) NAND con toffoli;



$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\
\hline
000 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
001 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
010 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
011 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
111 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

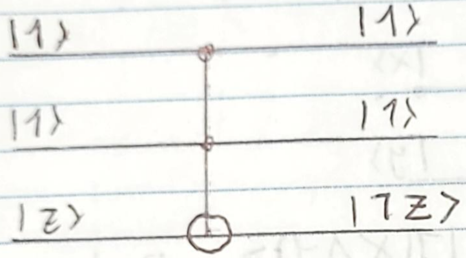
D M A

Teniendo en cuenta que para AND con toffoli es.



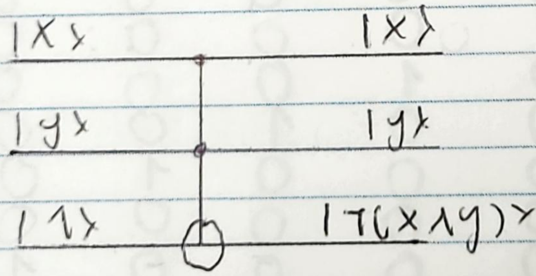
como $|1 \oplus (x \wedge y)\rangle = |x \wedge y\rangle$

y para NOT es



Asi $|z \oplus (1 \wedge 1)\rangle = |z \oplus 1\rangle = |\neg z\rangle$

Al unir NOT y AND decimos NAND porlotanto



D | M | A

5.4.1 Demuestre que cada una de las matrices son unitarias.

Def M unitaria: $U \cdot U^{+} = U^{+} \cdot U = I$

$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $X^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$X \cdot X^{+} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$X^{+} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

por lo tanto X es unitaria.

$y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $y^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

$y \cdot y^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$y^{+} y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto y es unitaria.

$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $z^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Como $z = z^{+}$ su producto da como resultado la matriz I por lo tanto z es unitaria.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} ; \quad S^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$S \cdot S^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{+} \cdot S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Porlo tanto S es unitaria.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

para facilitar los calculos convertimos $e^{i\pi/4}$ a su equivalente rectangular

$$e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$T^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{bmatrix}$$

Al operar las se obtiene la matriz identidad

5.4.2

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ic_1 \\ ic_0 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ -c_1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ i c_1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 + c_1 i) \end{bmatrix}$$

5.4.3

$\rightarrow x^2 = x \cdot x$

i) $x^2 = y^2 = z^2 = I$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 = I$

ii) $H = \frac{1}{2}(x + z)$

D | M | A

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right)$$

iv) $Z = HZH$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

v) $-1Y = HYH$

$$-1\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}$$

KeeperMate

vi) $S = T^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

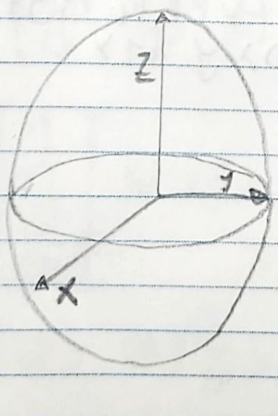
vii) $-1Y = XYX$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: todas las operaciones se hicieron con ayuda computacional

5.4.4



Como solo se necesitan dos numeros reales para hallar un qubit, tomamos en $\mathbb{R}^3$ con radio 1

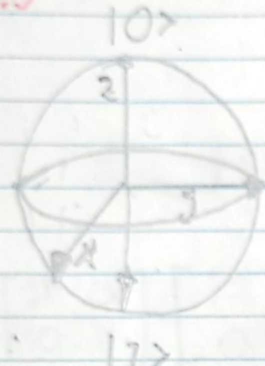
Así $x = \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

$y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta$

$z = \cos\theta$

y para los puntos
(θ, ϕ) en $(\pi - \theta, \phi + \pi)$
con forma de factor -1!

5.4.5



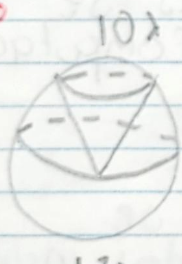
la probabilidad
de que el estado
clasico colapse no
es afectado.

cambio de fase

parametro de fase
siendo |0> y |1>

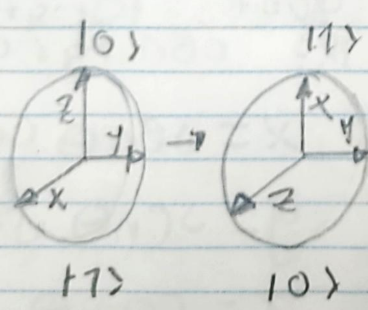
lados opuestos de la esfera, qubit
con dirección ortogonal.

5.4.6



la matriz asigna
a los qubits donde
la matriz es unitaria
segun los ejes x, y, z

por la puerta not y
lleva |0> y |1>



D | M | A

5.4.7

$$^{c}U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$$

$|0\rangle$ or $|1\rangle$

$\Rightarrow$

$|\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ x representa el estado del qubit superior y Y el inferior

Cuando el qubit superior $|0\rangle$

$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |y\rangle$

Despues de aplicar ^{c}U, el estado del sistema debe seguir siendo el mismo entonces calculamos.

$^{c}U \cdot |\psi\rangle = {^{c}U} \cdot (|0\rangle \otimes |y\rangle)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |y\rangle$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |y\rangle$$

Asi la puerta $|0\rangle$ funciona como se esperaba

$= |0\rangle \otimes |y\rangle = |\psi\rangle$

Ahora vamos a considerar el $|1\rangle$

$\Rightarrow |\psi\rangle = |1\rangle \otimes |y\rangle$

$\Leftarrow U \cdot |\psi\rangle = U(|1\rangle \otimes |y\rangle)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |y\rangle$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes |y\rangle$$

$$= |1\rangle \otimes |y\rangle = |\psi\rangle$$

por lo tanto la puerta $|1\rangle$ funciona como se esperaba