Ta bắt đầu với một số phép đổi biến.

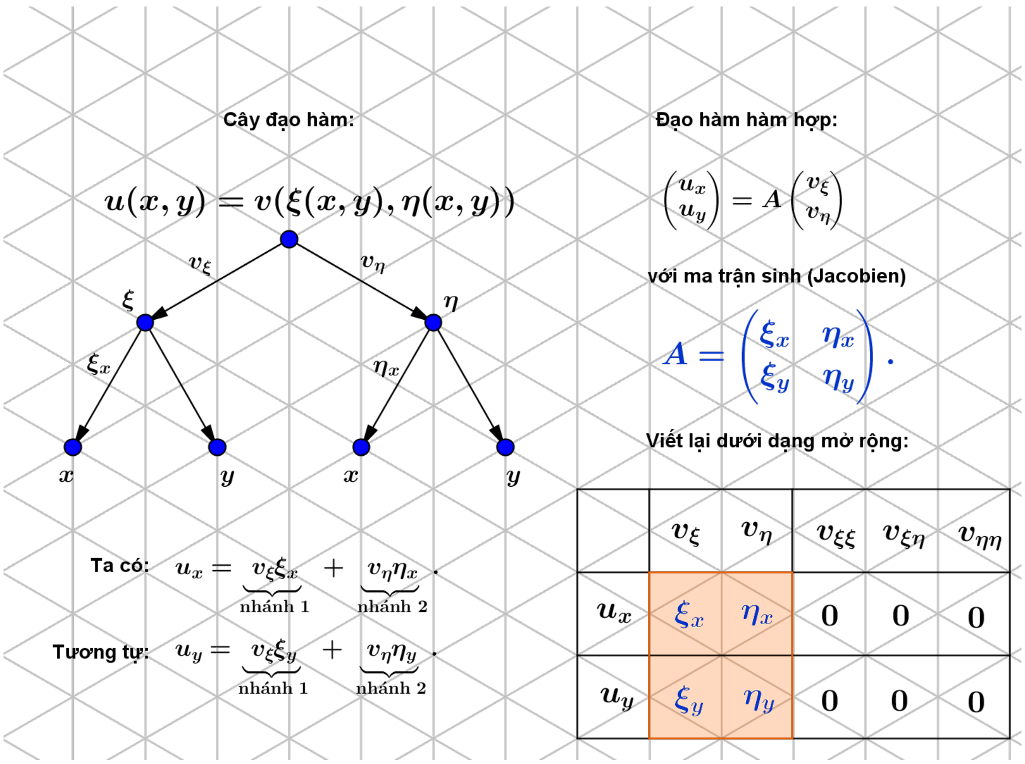
Ví dụ 1 (Đổi biến tuyến tính)**.** *Cho $u : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega$ là tập mở trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, là hàm khả vi liên tục đến cấp 2. Xét phép đổi biến tuyến tính (không suy biến*

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (\xi, \eta) = A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Khi đó ta có hàm $v(\xi, \eta) = v(ax + by, cx + dy) = u(x, y)$. Hãy tính các đạo hàm riêng $u_x, y_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ theo các đạo hàm riêng $v_\xi, v_\eta, v_{\xi\xi}, v_{\xi\eta}, v_{\eta\eta}$.

Chú ý. Theo Schwarz: $u_{xy} = u_{yx}, v_{\xi\eta} = v_{\eta\xi}$.

Lời giải. Để tính toán đạo hàm riêng cấp 1 ta sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp như lược đồ dưới đây.



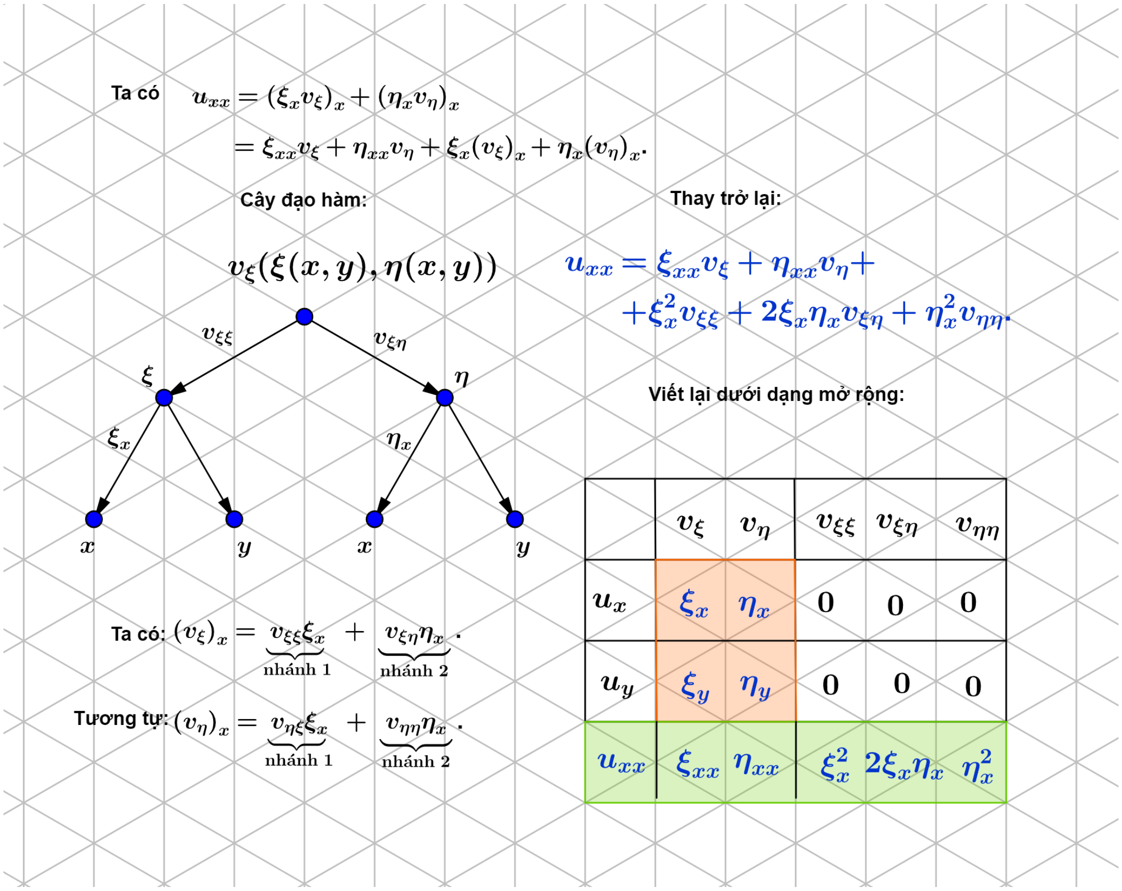
Từ đề bài $\xi = ax + by, \eta = cx + dy$ ta có ngay ma trận sinh:

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

nên

$$u_x = av_\xi + cv_\eta,$$
$$u_y = bv_\xi + dv_\eta.$$

Tiếp theo ta tính đạo hàm riêng u_{xx} như lược đồ sau.



Việc tính các đạo hàm riêng u_{yy}, u_{xy} ta làm tương tự như tính u_{xx}. Khi đó ta có bảng các đạo hàm riêng sau.

	v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
u_x	ξ_x	η_x	0	0	0
u_y	ξ_y	η_y	0	0	0
u_{xx}	ξ_{xx}	η_{xx}	ξ_x^2	$2\xi_x\eta_x$	η_x^2
u_{xy}	ξ_{xy}	η_{xy}	$\xi_x\xi_y$	$\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x$	$\eta_x\eta_y$
u_{yy}	ξ_{yy}	η_{yy}	ξ_y^2	$2\xi_y\eta_y$	η_y^2

Để ý rằng ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \text{ là ma trận hằng nên } \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \eta_{xx} \\ \xi_{xy} & \eta_{xy} \\ \xi_{yy} & \eta_{yy} \end{pmatrix} \text{ là ma trận 0.}$$

Như vậy, ta có các đạo hàm riêng cấp 2 được tính như sau:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= a^2 v_{\xi\xi} + 2ac v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}, \\ u_{yy} &= b^2 v_{\xi\xi} + 2bd v_{\xi\eta} + d^2 v_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= ab v_{\xi\xi} + (ad + bc) v_{\xi\eta} + cd v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Ta có thể viết gọn lại việc tính toán trên thành bảng sau:

	v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
u_x	a	c	0	0	0
u_y	b	d	0	0	0
u_{xx}	0	0	a^2	$2ac$	c^2
u_{xy}	0	0	ab	$ad + bc$	cd
u_{yy}	0	0	b^2	$2bd$	d^2

Chú ý. Với phương trình tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng ta có thể dùng phép đổi biến tuyến tính để chuyển nó về dạng chính tắc.

Ví dụ 2. *Xác định dạng và chuyển phương trình sau về dạng chính tắc.*

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0. \tag{1}$$

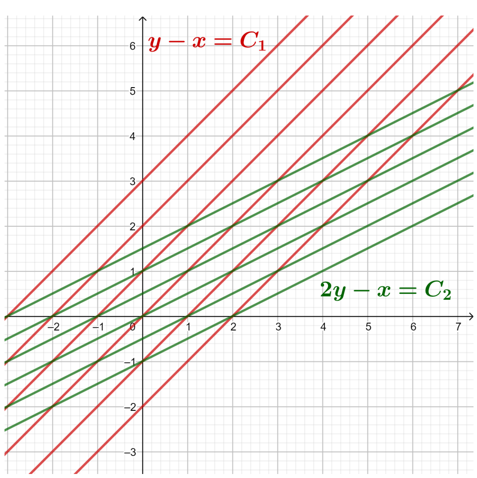
Lời giải. Xét phương trình đặc trưng của (1)

$$2(dy)^2 - 3dxdy + (dx)^2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm thực $dy - dx = 0, 2dy - dx = 0$ nên (1) là hyperbolic. Tích phân hai nghiệm này ta được:

$$y - x = C_1, 2y - x = C_2$$

là hai họ đường đặc trưng của (1).



Để chuyển về dạng chính tắc ta dùng phép đổi biến tuyến tính:

$$\xi = x - y, \eta = x - 2y.$$

Khi đó ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
1	u_x	1	1	0	0	0
-1	u_y	-1	-2	0	0	0
2	u_{xx}	0	0	1	2	1
3	u_{xy}	0	0	-1	-3	-2
1	u_{yy}	0	0	1	4	4
Tổng	0	2	3	0	-1	0

Vậy dạng chính tắc của (1) là

$$2v_\xi + 3v_\eta - v_{\xi\eta} = 0.$$

Ví dụ 3. *Xác định dạng và chuyển phương trình sau về dạng chính tắc.*

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = u. \tag{2}$$

Lời giải. Xét phương trình đặc trưng của (2)

$$2(dy)^2 - 2dxdy + (dx)^2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm ảo $idy + dy - dx = 0, -idy + dy - dx = 0$ nên (2) là elliptic. Tích phân hai nghiệm này ta được:

$$iy + y - x = C_1, -iy + y - x = C_2$$

là hai họ đường đặc trưng ảo của (2). Để chuyển về dạng chính tắc ta dùng phép đổi biến tuyến tính:

$$\xi = x - y, \eta = y.$$

Khi đó ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
1	u_x	1	0	0	0	0
1	u_y	-1	1	0	0	0
2	u_{xx}	0	0	1	0	0
2	u_{xy}	0	0	-1	1	0
1	u_{yy}	0	0	1	-2	1
Tổng	u	0	1	1	0	1

Vậy dạng chính tắc của (2) là

$$v_\eta + (v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}) = v.$$

Ví dụ 4. *Xác định dạng và chuyển phương trình sau về dạng chính tắc.*

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + u = 1. \tag{3}$$

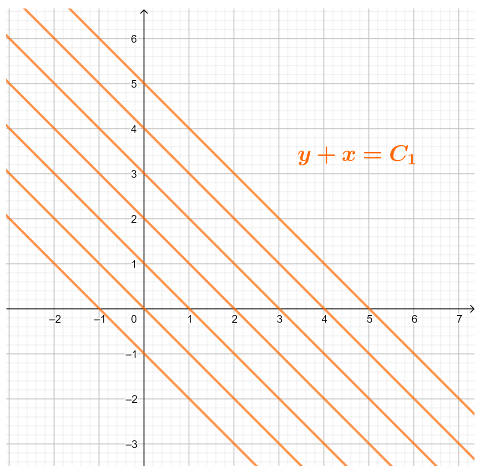
Lời giải. Xét phương trình đặc trưng của (3)

$$(dy)^2 + 2dxdy + (dx)^2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có một nghiệm kép thực $dy + dx = 0$. nên (3) là parabolic. Tích phân nghiệm này ta được:

$$y + x = C_1$$

là họ đường đặc trưng của (3).



Để chuyển về dạng chính tắc ta dùng phép đổi biến tuyến tính:

$$\xi = x + y, \eta = x.$$

Khi đó ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
1	u_x	1	1	0	0	0
-1	u_y	1	0	0	0	0
1	u_{xx}	0	0	1	2	1
-2	u_{xy}	0	0	1	1	0
1	u_{yy}	0	0	1	0	0
Tổng	$1-u$	0	1	0	0	1

Vậy dạng chính tắc của (3) là

$$v_\eta + v_{\eta\eta} = 1 - v.$$

Tiếp theo ta xét phép đổi biến không tuyến tính đặc biệt.

Ví dụ 5 (Tọa độ cực)**.** *Cho* $u : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega$ *là tập mở trong mặt phẳng* $\mathbb{R}^2$*, là hàm khả vi liên tục đến cấp* 2*. Xét phép đổi biến sang tọa độ cực*

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Khi đó ta có hàm $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$*. Hãy tính các đạo hàm riêng* $u_x, y_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ *theo các đạo hàm riêng* $v_r, v_\theta, v_{rr}, v_{r\theta}, v_{\theta\theta}$*. Từ đó viết* $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ *trong hệ tọa độ cực.*

Lời giải. Theo Định lý hàm ẩn ta có nghịch đảo của ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} r_x & \theta_x \\ r_y & \theta_y \end{pmatrix}$$

là ma trận

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Do đó ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} r_x & \theta_x \\ r_y & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.$$

Khi đó ma trận

$$\begin{pmatrix} r_{xx} & \theta_{xx} \\ r_{xy} & \theta_{xy} \\ r_{yy} & \theta_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_x\sin\theta & -\dfrac{\theta_x\cos\theta}{r} + \dfrac{r_x\sin\theta}{r^2} \\ -\theta_y\sin\theta & -\dfrac{\theta_y\cos\theta}{r} + \dfrac{r_y\sin\theta}{r^2} \\ \theta_y\cos\theta & -\dfrac{\theta_y\sin\theta}{r} - \dfrac{r_y\cos\theta}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin^2\theta}{r} & \dfrac{\sin(2\theta)}{r^2} \\ -\dfrac{\sin(2\theta)}{2r} & -\dfrac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ \dfrac{\cos^2\theta}{r} & -\dfrac{\sin(2\theta)}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Ta có thể viết gọn lại việc tính toán trên thành bảng sau:

	v_r	v_θ	v_{rr}	$v_{r\theta}$	$v_{\theta\theta}$
u_x	$\cos\theta$	$-\dfrac{\sin\theta}{r}$	0	0	0
u_y	$\sin\theta$	$\dfrac{\cos\theta}{r}$	0	0	0
u_{xx}	$\dfrac{\sin^2\theta}{r}$	$\dfrac{\sin(2\theta)}{r^2}$	$\cos^2\theta$	$-\dfrac{\sin(2\theta)}{r}$	$\dfrac{\sin^2\theta}{r^2}$
u_{xy}	$-\dfrac{\sin(2\theta)}{2r}$	$-\dfrac{\cos(2\theta)}{r^2}$	$\dfrac{\sin(2\theta)}{2r}$	$\dfrac{\cos(2\theta)}{r}$	$-\dfrac{\sin(2\theta)}{2r}$
u_{yy}	$\dfrac{\cos^2\theta}{r}$	$-\dfrac{\sin(2\theta)}{r^2}$	$\sin^2\theta$	$\dfrac{\sin(2\theta)}{r}$	$\dfrac{\cos^2\theta}{r^2}$

Như vậy ta có

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{v_r}{r} + v_{rr} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Trong một số tình huống ta có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 2. Dưới đây ta xem xét các tình huống này qua các ví dụ sau.

Ví dụ 6. *Cho a, b là các hằng số, và hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Xét phương trình sau:*

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + au_x + bu_y + f = 0. \tag{4}$$

(i) Xác định dạng và chuyển về dạng chính phương trình (4).

(ii) Khi $a = b = 0$ chứng minh rằng

$$F(x, y) = \int_0^y G(t, x, y)dt, \text{ trong đó } G(t, x, y) = \int_{2t+x-2y}^{t+x-y} f(s, t)ds$$

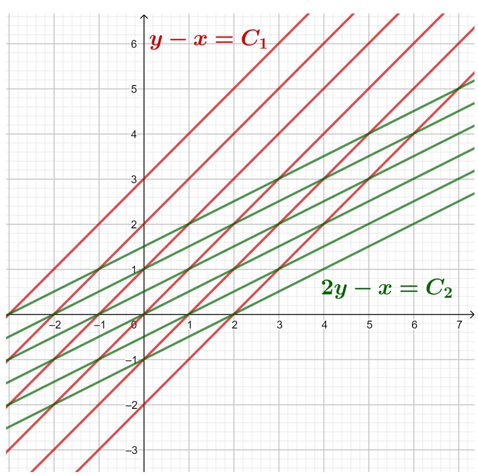
là một nghiệm của (4). Từ đó tìm nghiệm tổng quát của (4).

(iii) Khi $a = b = 1$ và $f = 0$, hãy tìm nghiệm tổng quát của (4). Trong trường hợp này hãy thiết lập đẳng thức hình bình hành.

Lời giải. (i) Tương tự như Ví dụ 2 ta có phương trình đặc trưng của (4) $2(dy)^2 - 3dxdy + (dx)^2 = 0$ có hai nghiệm thực $dy - dx = 0, 2dy - dx = 0$ nên (4) là hyperbolic. Tích phân hai nghiệm này ta được:

$$y - x = C_1, 2y - x = C_2$$

là hai họ đường đặc trưng của (4).



Để chuyển về dạng chính tắc ta dùng phép đổi biến tuyến tính:

$$\xi = x - y, \eta = x - 2y$$

rồi tính toán ta có bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
a	u_x	1	1	0	0	0
b	u_y	-1	-2	0	0	0
2	u_{xx}	0	0	1	2	1
3	u_{xy}	0	0	-1	-3	-2
1	u_{yy}	0	0	1	4	4
Tổng	$-f$	$a-b$	$a-2b$	0	-1	0

Vậy dạng chính tắc của (4) là

$$(a-b)v_\xi + (a-2b)v_\eta - v_{\xi\eta} = -f(2\xi-\eta, \xi-\eta). \tag{5}$$

(ii) Để chứng minh $F(x,y)$ là một nghiệm của (4) ta chỉ cần chứng minh sau khi đổi biến $\xi = x-y, \eta = x-2y$ hàm $F(2\xi-\eta,\xi-\eta)$ thỏa mãn (5) với $a=b=0$, nghĩa là

$$\partial_\xi\partial_\eta(F(2\xi-\eta,\xi-\eta)) = f(2\xi-\eta,\xi-\eta).$$

Thật vậy, ta có

$$F(2\xi-\eta,\xi-\eta) = \int_0^{\xi-\eta} g(t,\xi,\eta)dt, \text{với } g(t,\xi,\eta) = G(t,2\xi-\eta,\xi-\eta) = \int_{2t+\eta}^{t+\xi} f(s,t)ds.$$

Khi đó

$$\partial_\eta(F(2\xi-\eta,\xi-\eta)) = -g(\xi-\eta,\xi,\eta) + \int_0^{\xi-\eta}\partial_\eta(g(t,\xi,\eta))dt.$$

Lại có

$$g(\xi-\eta,\xi,\eta) = \int_{2\xi-\eta}^{2\xi-\eta} f(s,t)ds = 0,$$
$$\partial_\eta(g(t,\xi,\eta)) = -f(2t+\eta,t),$$

nên

$$\partial_\eta(F(2\xi-\eta,\xi-\eta)) = -\int_0^{\xi-\eta} f(2t+\eta,t)dt.$$

Do đó

$$\partial_\xi\partial_\eta(F(2\xi-\eta,\xi-\eta)) = f(2\xi-\eta,\xi-\eta)$$

nghĩa là ta có $F(2\xi-\eta,\xi-\eta)$ là một nghiệm của (5), hay $F(x,y)$ là một nghiệm của (4).

Giả sử u là nghiệm của (4) thì $V(\xi,\eta) = U(2\xi-\eta,\xi-\eta) = (u-F)(2\xi-\eta,\xi-\eta)$ là nghiệm của phương trình

$$V_{\xi\eta} = 0.$$

Tích phân lần lượt theo η rồi ξ ta có nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$p(\xi) + q(\eta)$$

trong đó $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục đến cấp 2. Khi đó

$$u(x,y) = p(x-y) + q(x-2y) + F(x,y). \tag{6}$$

Để chứng minh (6) cho ta nghiệm tổng quát của (4) ta cần kiểm tra lại nó có thực sự thỏa mãn (4). Ta đã kiểm tra $F(x, y)$ thỏa mãn (4). Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh $U = u - F = p(x - y) + q(x - 2y)$ thỏa mãn

$$2U_{xx} + 3U_{xy} + U_{yy} = 0.$$

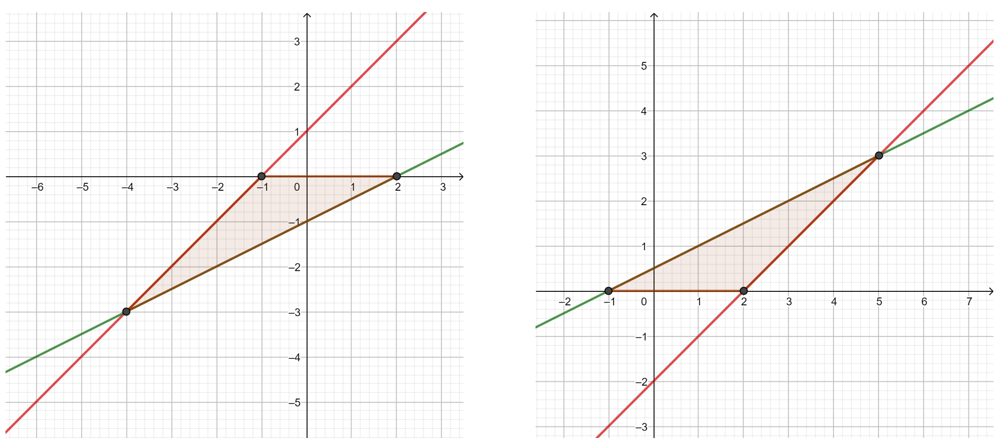
Điều này được chứng minh nhờ bảng sau:

Hệ số		p'	q'	p''	q''
0	U_x	1	1	0	0
0	U_y	-1	-2	0	0
2	U_{xx}	0	0	1	1
3	U_{xy}	0	0	-1	-2
1	U_{yy}	0	0	1	4
Tổng	0	0	0	0	0

Viết lại hàm $F(x, y)$ dưới dạng

$$F(x, y) = \int_0^y \left(\int_{2t+x-2y}^{t+x-y} f(s, t)ds\right)dt = \iint_{\Delta(x,y)} f(s, t)dsdt$$

với $\Delta(x, y)$ là tam giác phụ thuộc:



Như vậy nghiệm tổng quát tìm được hoàn toàn dựa trên f và các đường đặc trưng $x - y = C_1$, $x - 2y = C_2$.
(iii) Khi $a = b = 1$ và $f = 0$ dạng chính tắc (5) có dạng

$$-v_\eta - v_{\xi\eta} = 0.$$

Có nhiều cách giải phương trình trên. Dưới đây ta sẽ thấy hai cách giải.
Cách 1. Đặt $w = v_\eta$ ta có

$$\frac{dw}{w} = -d\xi.$$

Tích phân cả hai vế phương trình trên theo ξ ta được

$$\ln|w| == \xi + C,$$

chú ý C là hằng theo ξ và là hàm theo η. Lấy mũ cả hai vế và bỏ dấu trị tuyệt đối ta được:

$$v_\eta = g(\eta)e^{-\xi}.$$

Tiếp tục tích phân theo η ta có

$$v = G(\eta)e^{-\xi} + H(\xi)$$

với $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục đến cấp 2. Khi đó

$$u(x, y) = e^{y-x}G(x - 2y) + H(x - y). \tag{7}$$

Ta còn phải kiểm tra nghiệm (7) có thực sự thỏa mãn (4) khi $a = b = 1$ và $f = 0$, nghĩa là

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

Điều này được chứng minh nhờ bảng sau:

Hệ số		eG	eG'	eG''	H'	H''
1	u_x	-1	1	0	1	0
1	u_y	1	-2	0	-1	0
2	u_{xx}	1	-2	1	0	1
3	u_{xy}	-1	3	-2	0	-1
1	u_{yy}	1	-4	4	0	1
Tổng	0	0	0	0	0	0

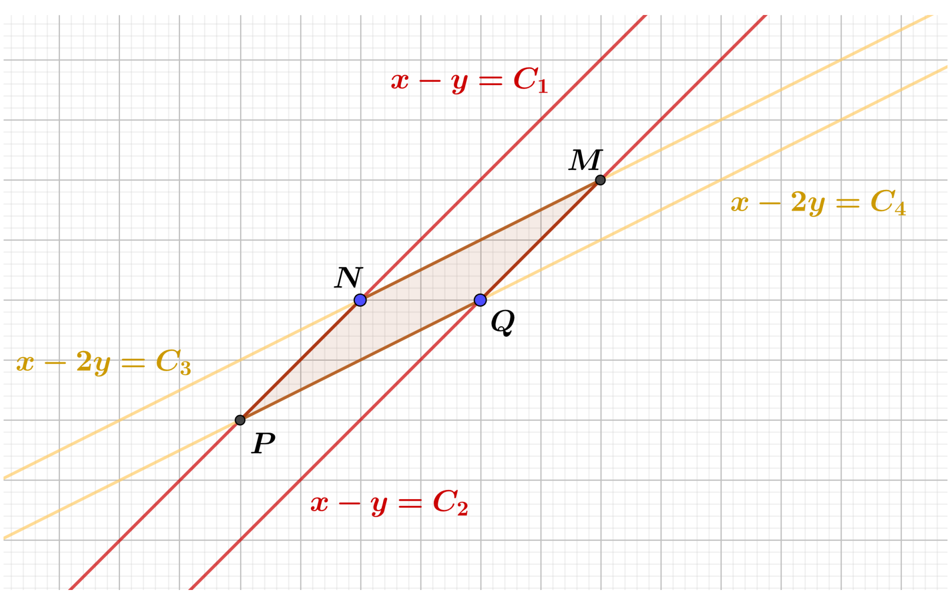
Cách 2. Ta viết lại dạng chính tắc dưới dạng $\partial_\xi(e^\xi v_\eta) = 0$. Tích phân cả hai vế theo ξ ta được $e^\xi v_\eta = f(\xi)$. Đến đây ta có thể giải tiếp như **Cách 1.**

Quay trở lại nghiệm tổng quát (7) ta viết lại

$$e^{x-y}u(x, y) = G(x - 2y) + e^{x-y}H(x - y). \tag{8}$$

Quan sát hình bình hành tạo bởi hai cặp đường đặc trưng

$$x - y = C_1, x - y = C_2 \text{ và } x - 2y = C_3, x - 2y = C4.$$



Bốn đỉnh của hình bình hành được xác định như sau.

(-) M là giao của $x - y = C_2$ và $x - 2y = C_3$.

(-) N là giao của $x - y = C_1$ và $x - 2y = C_3$.

(-) P là giao của $x - y = C_1$ và $x - 2y = C_4$.

(-) Q là giao của $x - y = C_2$ và $x - 2y = C_4$.

Khi đó từ (8) ta có đẳng thức hình bình hành

$$e^{C_2}(u(M) - u(Q)) = e^{C_1}(u(N) - u(P)). \tag{9}$$

Ví dụ 7. *Cho a, b, c là các hằng số và hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Xét phương trình sau:*

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{10}$$

(i) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình (10).

(ii) Hãy tìm nghiệm tổng quát phương trình (10) *trong mỗi trường hợp sau đây.*

(a) $a = b = c = 0$.

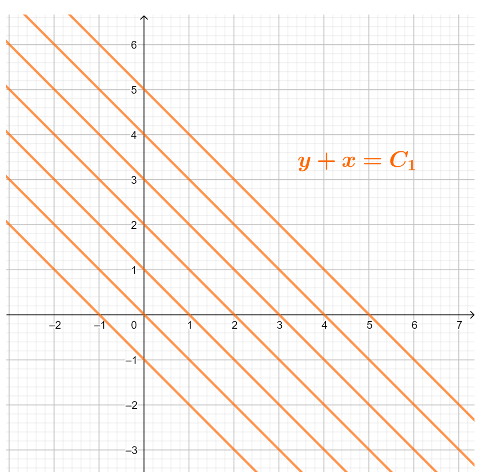
(b) $a = b = 0, c = 1$ *và* $f = 0$.

(c) $a = 1, b = -1, c = 0$ *và* $f = 1$.

Lời giải. (i) Tương tự như Ví dụ 4 phương trình đặc trưng của (10) $(dy)^2 + dxdy + (dx)^2 = 0$ có một nghiệm kép thực $dy + dx = 0$. nên (10) là parabolic. Tích phân nghiệm này ta được:

$$y + x = C_1$$

là họ đường đặc trưng của (10).



Dùng phép đổi biến tuyến tính:

$$\xi = x + y, \eta = x.$$

và tính toán ta được bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
a	u_x	1	1	0	0	0
b	u_y	1	0	0	0	0
1	u_{xx}	0	0	1	2	1
-2	u_{xy}	0	0	1	1	0
1	u_{yy}	0	0	1	0	0
Tổng	$f-cu$	$a+b$	a	0	0	1

Vậy dạng chính tắc của (10) là

$$(a+b)v_\xi + av_\eta + v_{\eta\eta} = f(\eta, \xi-\eta) - cv. \tag{11}$$

(ii - a) Khi $a = b = c = 0$ dạng chính tắc (10) đơn giản

$$v_{\eta\eta} = f(\eta, \xi-\eta).$$

Tích phân cả hai vế phương trình trên theo η ta được

$$v_\eta = \int_0^\eta f(s, \xi-s)ds + g(\xi)$$

với $g(\xi)$ là hằng số theo η và là hàm theo ξ. Lại tiếp tục tích phân theo η ta có

$$v = \int_0^\eta (\int_0^t f(s,\xi-s)ds)dt + \eta g(\xi) + h(\xi).$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

$$v = \int_0^\eta (\eta-s)f(s,\xi-s)ds + \eta g(\xi) + h(\xi).$$

Khi đó nghiệm của (10), khi $a = b = c = 0$, có dạng

$$u(x,y) = \int_0^x (x-s)f(s, x+y-s)ds + xg(x+y) + h(x+y). \tag{12}$$

Ta còn phải kiểm tra lại (12) có thỏa mãn (10), nghĩa là

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = f.$$

Thật vậy, từ (12) ta có

$$u_x = \int_0^x f(s,x+y-s)ds + \int_0^x (x-s)f_t(s,x+y-s)ds + g(x+y) + xg'(x+y) + h'(x+y),$$
$$u_y = \int_0^x (x-s)f_t(s,x+y-s)ds + xg'(x+y) + h'(x+y).$$

Khi đó việc chứng minh được nhìn từ bảng sau.

Hệ số		$f(x,y)$	$\int_0^x f_t(s,x+y-s)ds$	$\int_0^x (x-s)f_{tt}(s,x+y-s)ds$	g'	xg''	h''
1	u_{xx}	1	2	1	2	1	1
-2	u_{xy}	0	1	1	1	1	1
1	u_{yy}	0	0	1	0	1	1
Tổng	f	f	0	0	0	0	0

(ii - b) Khi $a = b = 0, c = 1$ và $f = 0$ dạng chính tắc (10) đơn giản

$$v + v_{\eta\eta} = 0.$$

Ta nhìn phương trình trên như phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 theo biến η, và ξ là tham số. Khi đó phương trình đặc trưng của phương trình vi phân này

$$1 + \lambda^2 = 0 \text{ có hai nghiệm ảo } \lambda = \pm i.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$v = g(\xi)\cos\eta + h(\xi)\sin(\eta)$$

với $g(\xi), h(\xi)$ là các hằng số theo η, và là hàm theo ξ. Khi đó nghiệm của (10) có dạng

$$u(x,y) = g(x+y)\cos x + h(x+y)\sin x. \tag{13}$$

Ta còn phải kiểm tra (13) có thỏa mãn (10) khi $a = b = 0, c = 1$ và $f = 0$, nghĩa là

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u = 0.$$

Việc chứng minh được nhìn từ bảng sau.

Hệ số		$g\cos x$	$g'\sin x$	$g''\cos x$	$h\sin x$	$h'\cos x$	$h''\sin x$
1	u_{xx}	-1	-2	1	-1	2	1
-2	u_{xy}	0	-1	1	0	1	1
1	u_{yy}	0	0	1	0	0	1
Tổng	$-u$	$-g\cos x$	0	0	$-h\sin x$	0	0

(ii - c) Khi $a = -b = 1, c = 0$ và $f = 1$ dạng chính tắc (10) đơn giản

$$v_\eta + v_{\eta\eta} = 1.$$

Ta viết lại phương trình trên thành $\partial_\eta(e^\eta v_\eta) = e^\eta$. Tích phân cả hai vế phương trình trên theo η ta được

$$v_\eta = 1 + g(\xi)e^{-\eta}$$

với $g(\xi)$ là hằng theo η và là hàm theo ξ. Tiếp tục tích phân theo η ta có

$$v = \eta - g(\xi)e^{-\eta} + h(\xi),$$

với $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục đến cấp 2. Khi đó nghiệm của (10) có dạng

$$u(x,y) = x - g(x+y)e^{-x} + h(x+y). \tag{14}$$

Ta còn phải kiểm tra (14) có thỏa mãn (10) khi $a = -b = 1, c = 0$ và $f = 1$, nghĩa là

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 1.$$

Việc chứng minh được nhìn từ bảng sau.

Hệ số		1	eg	eg'	eg''	h'	h''
1	u_x	1	1	-1	0	1	0
-1	u_y	0	0	-1	0	1	0
1	u_{xx}	0	-1	2	-1	0	1
-2	u_{xy}	0	0	1	-1	0	1
1	u_{yy}	0	0	0	-1	0	1
Tổng	1	1	0	0	0	0	0

Sau khi tìm được nghiệm tổng quát ta quan tâm tiếp đến việc nghiệm cần thỏa mãn thêm một số điều kiện. Khi đó ta có thể gặp một trong các tình huống sau:

- Chỉ có đúng một nghiệm thỏa mãn các điều kiện đưa thêm.

- Không có nghiệm nào thỏa mãn các điều kiện đưa thêm.

- Có nhiều nghiệm thỏa mãn các điều kiện đưa thêm.

Ví dụ 8. *Quay trở lại Ví dụ 6 câu (iii), với $a = b = 1$ và $f = 0$ xét phương trình sau:*

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0. \tag{15}$$

(i) Tìm nghiệm của (15) *thỏa mãn điều kiện Cauchy*

$$u(x, 0) = u_0(x), u_y(x, 0) = u_1(x).$$

(ii) Tìm điều kiện đặt lên các hàm $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ để (15) *có nghiệm thỏa mãn điều kiện Cauchy*

$$u(x, x) = \varphi(x), u_y(x, x) = \psi(x).$$

Với điều kiện đó hãy tìm các nghiệm của (15) *thỏa mãn điều kiện Cauchy trên.*

(iii) Tìm nghiệm của (15) *thỏa mãn điều kiện Darboux-Goursat*

$$u(x, x) = u_0(x), u(2x, x) = u_1(x).$$

Lời giải. Nhắc lại nghiệm tổng quát (7) của (15)

$$u(x, y) = e^{y-x}G(x - 2y) + H(x - y). \tag{16}$$

(i) Thay nghiệm tổng quát (16) vào điều kiện Cauchy $u(x, 0) = u_0(x), u_y(x, 0) = u_1(x)$ ta có

$$e^{-x}G(x) + H(x) = u_0(x), \tag{17}$$
$$e^{-x}G(x) - 2e^{-x}G'(x) - H'(x) = u_1(x). \tag{18}$$

Đạo hàm (17) rồi trừ đi (18) và biến đổi một chút ta được $G'(x) = -e^x(u_1(x) + u_0'(x))$. Tích phân cả hai vế phương trình trên và dùng tích phân từng phần ta có

$$G(x) = -e^x u_0(x) + \int_0^x e^s(u_0(s) - u_1(s))ds + C,$$

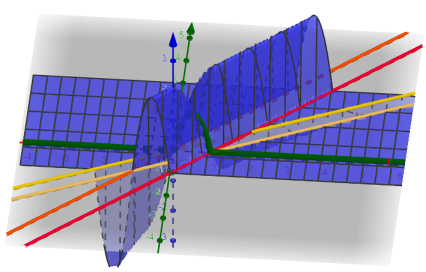
trong đó C là hằng số. Thay vào (17) ta có

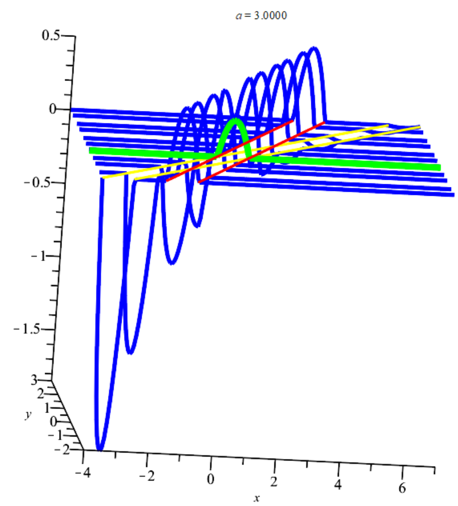
$$H(x) = 2u_0(x) - e^{-x}\int_0^x e^s(u_0(s) - u_1(s))ds - Ce^{-x}.$$

Thay ngược trở lại nghiệm tổng quát (16) dẫn đến nghiệm

$$u(x,y) = 2u_0(x-y) - e^{-y}u_0(x-2y) + e^{y-x}\int_{x-2y}^{x-y} e^s(u_1(s) - u_0(s))ds. \tag{19}$$

Để ý rằng hằng số C bị triệt tiêu trong công thức nghiệm (19). Để nhìn thấy nghiệm này sinh ra từ điều kiện Cauchy như nào ta lấy ví dụ $u_0(x) = u_1(x) = x(1-x)\chi_{[0,1]}(x)$.





Với u_0 khả vi liên tục đến cấp 2 và u_1 khả vi liên tục ta có ngay (19) thỏa mãn (15) vì nó sinh ra từ nghiệm tổng quát (16). Ta cần kiểm tra điều kiện Cauchy. Tính toán

$$\begin{aligned} u_y(x,y) &= -2u_0'(x-y) + 2e^{-y}u_0'(x-2y) + e^{-y}u_0(x-2y) + e^{y-x}\int_{x-2y}^{x-y} e^s(u_1(s) - u_0(s))ds \\ &+ e^{y-x}\Big(e^{x-y}[u_0(x-y) - u_1(x-y)] - 2e^{x-2y}[u_0(x-2y) - u_1(x-2y)]\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Thay $y = 0$ vào (19)-(20) ta có điều kiện Cauchy được thỏa mãn.
(ii) Thay nghiệm tổng quát (16) vào điều kiện Cauchy

$$u(x,x) = \varphi(x), u_y(x,0) = \psi(x) \tag{21}$$

ta có

$$G(-x) + H(0) = \varphi(x), \tag{22}$$
$$G(-x) - 2G'(-x) - H'(0) = \psi(x). \tag{23}$$

Từ (22) ta giải được

$$G(x) = \varphi(-x) - H(0). \tag{24}$$

Khi đó $G'(-x) = -\varphi'(x)$. Thay vào (23) ta được

$$\varphi(x) + 2\varphi'(x) - \psi(x) = H(0) + H'(0) = const. \tag{25}$$

Như vậy để (15) có nghiệm thỏa mãn điều kiện Cauchy (21) ta cần đến điều kiện (25).

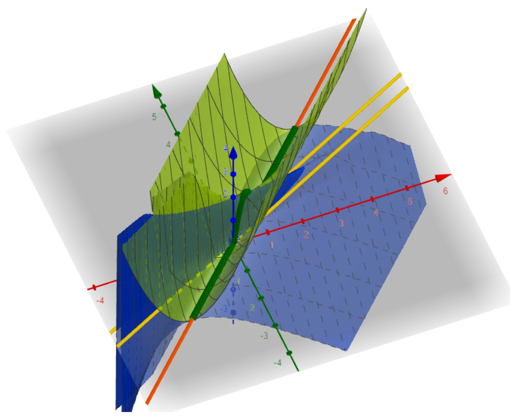
Cố định $H(0) + H'(0) = const$. Giả sử φ, ψ thỏa mãn (25). Ta có khai triển Taylor của H tại $x = 0$

$$H(x) = H(0) + (const - H(0))x + g(x)x^2$$

với $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp 2. Khi đó kết hợp với (24) ta có nghiệm tổng quát (16)

$$u(x,y) = e^{y-x}(\varphi(2y-x) - H(0)) + H(0) + (const - H(0))(x-y) + (x-y)^2 g(x-y). \tag{26}$$

Để nhìn thấy hình ảnh nhiều nghiệm cụ thể ta lấy $\varphi(x) = (x - x^2)\chi_{[0,1]}(x), \psi(x) = (2 - 3x - x^2)\chi_{[0,1]}(x)$ và $const = 0$.



Ta còn phải kiểm tra nghiệm (26) điều kiện Cauchy (21). Điều này có được nhờ (26) và

$$\begin{aligned} u_y(x,y) =& e^{y-x}(\varphi(2y-x) - H(0)) + 2e^{y-x}\varphi'(2y-x) - (const - H(0))(x-y) \\ & -2(x-y)g(x-y) - (x-y)^2 g'(x-y) \end{aligned}$$

và điều kiện (25). Ngoài ra khi hằng số $H(0)$ và hàm g thay đổi ta có nhiều nghiệm (26).

(iii) Với ý này ta có hai cách tiếp cận.

Cách 1. Thay nghiệm tổng quát (16) vào điều kiện Darboux-Goursat

$$u(x,x) = u_0(x), u(2x,x) = u_1(x) \tag{27}$$

ta có

$$G(-x) + H(0) = u_0(x), \tag{28}$$

$$e^{-x}G(0) + H(x) = u_1(x). \tag{29}$$

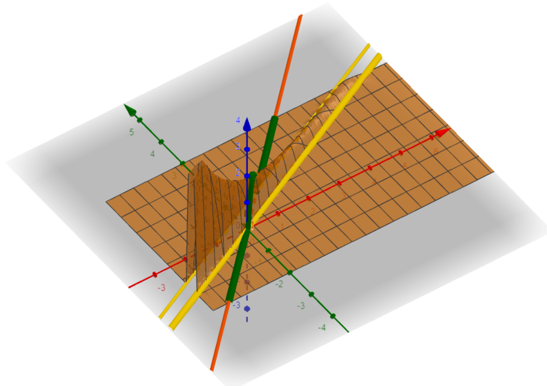
Từ (28)-(29) ta dẫn đến điều kiện tương thích

$$u_0(0) = u_1(0) = G(0) + H(0).$$

Ngoài ra ta có $G(x) = u_0(-x) - H(0), H(x) = u_1(x) - e^{-x}G(0)$. Thay vào nghiệm (16) ta được nghiệm

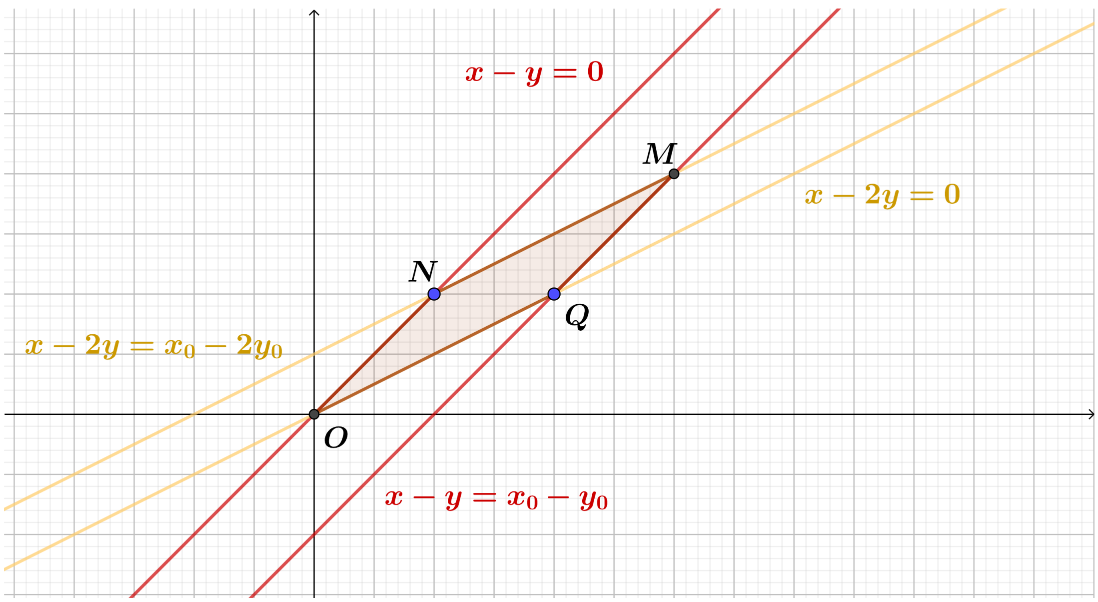
$$u(x,y) = e^{y-x}u_0(2y-x) + u_1(x-y) - e^{y-x}u_0(0).$$

Để thấy hình ảnh cụ thể ta lấy $u_0(x) = x(1-x)\chi_{[0,1]}(x), u_1(x) = 0$.



Cách 2. Để tính $u(x_0, y_0)$ ta sử dụng đẳng thức hình bình hành (9) cho hai cặp đường đặc trưng

$$x - y = 0, x - y = x_0 - y_0 \text{ và } x - 2y = 0, x - 2y = x_0 - 2y_0.$$



Khi đó ta có

$$e^{x_0-y_0}\Big(u(x_0, y_0) - u(2(x_0 - y_0), x_0 - y_0)\Big) = u(2y_0 - x_0, 2y_0 - x_0) - u(0, 0).$$

Đến đây thay điều kiện Darboux-Goursat ta lại có kết quả như **Cách 1.**

Không khó khăn để thấy từ điều kiện tương thích $u_0(0) = u_1(0)$ nghiệm vừa tìm được thỏa mãn điều kiện Darboux-Goursat (27). Dĩ nhiên nó cũng thỏa mãn (15) khi $u_0, u_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục đến cấp 2 vì nó sinh ra từ nghiệm tổng quát (16).

Ví dụ 9 (Cầu vồng - Bài 55 sách thầy Hợp.). *Xét phương trình*

$$xyu_{xx} + (y^2 - x^2)u_{xy} - xyu_{yy} = 0 \text{ trong } y > 0. \tag{30}$$

(i) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình (30).

(ii) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (30).

(iii) Tìm nghiệm của (30) *thỏa mãn điều kiện Cauchy*

$$u(x,1) = x^2, u_y(x,1) = 4.$$

Tìm miền xác định của nghiệm vừa tìm được. Nghiệm vừa tìm được xác định duy nhất trên miền nào?

(iv) Tìm điều kiện đặt lên các hàm $\varphi, \psi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *để* (30) *có nghiệm thỏa mãn*

$$u(x,y) = \varphi(x), \partial_\nu u(x,y) = \psi(x) \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, y > 0,$$

trong đó $\nu = \nu(x,y)$ *là pháp tuyến của đường tròn* $x^2 + y^2 = 1$ *hướng ra xa gốc. Khi đó hãy tìm nghiệm của* (30) *thỏa mãn điều kiện trên.*

(v) Tìm nghiệm của (30) *liên tục đến tận đường* $y = 0$ *thỏa mãn*

$$u(x,0) = x \text{ khi } 1 \le x \le 2, u(x,y) = 1 \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, y > 0.$$

Chứng minh rằng nghiệm vừa tìm xác định duy nhất trong $\{1 < x^2 + y^2 < 4, y > 0\}$*. Cho* $h : (0,1] \to \mathbb{R}$ *là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 thỏa mãn* $h(1) = h'(1) = 1$, $h''(1) = 0$*. Chứng minh rằng ta có thể dán* $v(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2}), 0 < x^2 + y^2 \le 1$ *vào nghiệm vừa tìm để nó trở thành nghiệm của* (30) *thỏa mãn điều kiện của câu này.*

Lời giải. Phương trình đặc trưng của (30)

$$xy(dy)^2 - (y^2 - x^2)dxdy - xy(dx)^2 = 0$$

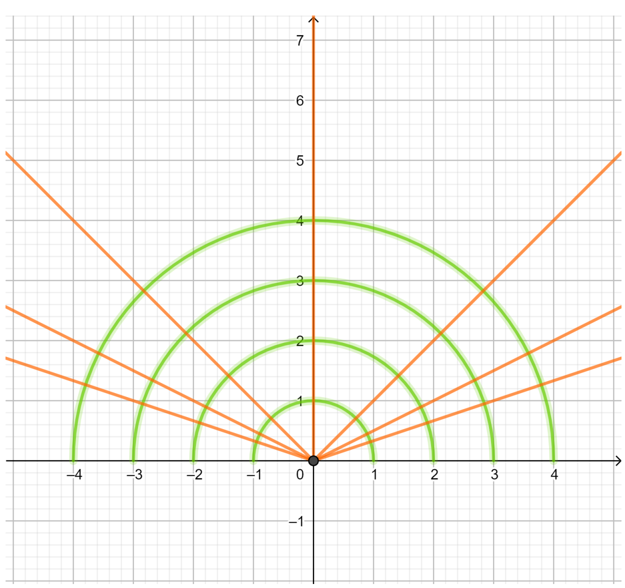
có hai nghiệm thực

$$xdy - ydx = 0, ydy + xdx = 0$$

nên (30) là hyperbolic. Tích phân hai nghiệm này ta được

$$\frac{x}{y} = C_1, x^2 + y^2 = C_2 \text{ với } y > 0$$

là hai họ đường đặc trưng của (30).



Để chuyển về dạng chính tắc ta dùng phép đổi biến:

$$\xi = x/y, \eta = x^2 + y^2.$$

Khi đó ma trận sinh

$$A = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y & 2x \\ -x/y^2 & 2y \end{pmatrix}.$$

Khi đó ma trận

$$\begin{pmatrix} \xi_{xx} & \eta_{xx} \\ \xi_{xy} & \eta_{xy} \\ \xi_{yy} & \eta_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/y^2 & 0 \\ 2x/y^3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó bảng các đạo hàm riêng và tổng hợp nó:

Hệ số		v_ξ	v_η	$v_{\xi\xi}$	$v_{\xi\eta}$	$v_{\eta\eta}$
xy	u_{xx}	0	2	$1/y^2$	$4x/y$	$4x^2$
$y^2 - x^2$	u_{xy}	$-1/y^2$	0	$-x/y^3$	$2(y^2 - x^2)/y^2$	$4xy$
$-xy$	u_{yy}	$2x/y^3$	2	x^2/y^4	$-4x/y$	$4y^2$
Tổng	0	$(y^2 + x^2)/y^2$	0	0	$-2(y^2 + x^2)^2/y^2$	0

Vậy dạng chính tắc của (30) là

$$v_\xi - 2\eta v_{\xi\eta} = 0.$$

(ii) Đặt $w = v_\xi$ ta viêt lại dạng chính tắc

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\eta}{2\eta}.$$

Tích phân cả hai vế phương trình trên theo η ta được

$$v_\xi = w = f(\xi)\sqrt{\eta},$$

trong đó $f(\xi)$ là hằng theo η và là hàm theo ξ. Tiếp tục tích phân theo ξ ta có

$$v = F(\xi)\sqrt{\eta} + G(\eta).$$

Khi đó nghiệm của (30) có dạng

$$u(x, y) = F(x/y)\sqrt{x^2 + y^2} + G(x^2 + y^2). \tag{31}$$

Ta còn phải kiểm tra (31) có thỏa mãn (30). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= x(x^2 + y^2)^{-1/2}F(x/y) + y^{-1}(x^2 + y^2)^{1/2}F'(x/y) + 2xG'(x^2 + y^2), \\ u_y(x, y) &= y(x^2 + y^2)^{-1/2}F(x/y) - xy^{-2}(x^2 + y^2)^{1/2}F'(x/y) + 2yG'(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Việc kiểm tra lại được thấy từ bảng sau.

Hệ số		$(x^2+y^2)^{-3/2}F$	$(x^2+y^2)^{-1/2}F'$	$(x^2+y^2)^{1/2}F''$	G'	G''
xy	u_{xx}	y^2	$2x/y$	$1/y^2$	2	$4x^2$
y^2-x^2	u_{xy}	$-xy$	$-2x^2/y^2$	$-x/y^3$	0	$4xy$
$-xy$	u_{yy}	x^2	$2x^3/y^3$	x^2/y^4	2	$4y^2$
Tổng	0	0	0	0	0	0

(iii) Thay nghiệm tổng quát (31) vào điều kiện $u(x,1)=x^2, u_y(x,1)=4$ ta được

$$(x^2+1)^{1/2}F(x)+G(x^2+1)=x^2, \tag{32}$$

$$(x^2+1)^{-1/2}F(x)-x(x^2+1)^{1/2}F'(x)+2G'(x^2+1)=4. \tag{33}$$

Đạo hàm (32) rồi trừ đi x nhân với (33) ta được

$$F'(x)=-2x(x^2+1)^{-3/2}.$$

Tích phân lên ta được $F(x)=2(x^2+1)^{-1/2}$. Thay vào (32) ta được

$$G(x^2+1)=x^2-2-C(x^2+1)^{1/2}.$$

Khi đó

$$G(t)=t^2-3-Ct^{1/2}, t\geq 1. \tag{34}$$

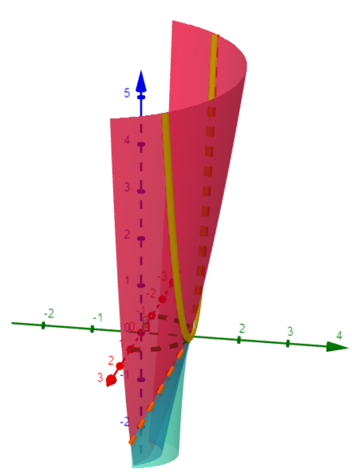
Do đó nghiệm cần tìm

$$u(x,y)=2y+x^2+y^2-3 \text{ khi } y>0, x^2+y^2\geq 1.$$

Không khó để thấy hàm $2y+x^2+y^2-3$ xác định trên toàn mặt phẳng và thỏa mãn (30) cũng như các điều kiện $u(x,1)=x^2, u_y(x,1)=4$. Tuy nhiên miền nghiệm này xác định duy nhất lại là $\{y>0, x^2+y^2\geq 1\}$. Lý do là ta chỉ xác định hàm $G(t)$ như (34) khi $t\geq 1$. Để thấy rõ điều này ta có thể dán vào nghiệm u ở trên bởi

$$v(x,y)=-3+2y+x^2+y^2+\phi(x^2+y^2), \text{ với } y>0, x^2+y^2<1,$$

trong đó $\phi:(0,1]\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 thỏa mãn $\phi(1)=\phi'(1)=\phi''(1)=0$.



(iv) Chú ý véc-tơ pháp tuyến của đường tròn đơn vị $x^2 + y^2 = 1$ hướng ra xa gốc là $\nu(x, y) = (x, y)$. Do đó

$$\partial_\nu u(x, y) = x u_x(x, y) + y u_y(x, y) \text{ khi } x^2 + y^2 = 1.$$

Khi đó thay nghiệm tổng quát (31) vào điều kiện

$$u(x, y) = \varphi(x), \partial_\nu u(x, y) = \psi(x) \text{ khi } x^2 + y^2 = 1, y > 0, \tag{35}$$

ta được

$$F(x/y) + G(1) = \varphi(x), \tag{36}$$

$$F(x/y) + 2G'(1) = \psi(x), \tag{37}$$

trong đó $y = \sqrt{1 - x^2} > 0$. Ở đây ta gặp hiện tượng vô định vì nói chung xác định G khá mơ hồ! Trước hết từ (36)-(37) ta dẫn đến

$$\varphi(x) - \psi(x) = G(1) - 2G'(1) = const. \tag{38}$$

Như vậy để (30) có nghiệm thỏa mãn các điều kiện (35) ở câu (iv) ta cần điều kiện (38).

Cố định $const = G(1) - 2G'(1)$ và giả sử φ, ψ thỏa mãn (38). Ta đi tìm các nghiệm của (30) thỏa mãn (35). Trước hết từ (36) ta có

$$F(x/\sqrt{1 - x^2}) = \varphi(x) - G(1), -1 < x < 1.$$

Đặt $t = x/\sqrt{1 - x^2}$ ta có $x = t/\sqrt{1 + t^2}$. Khi đó $F(t) = \varphi(t/\sqrt{1 + t^2}) - G(1)$.

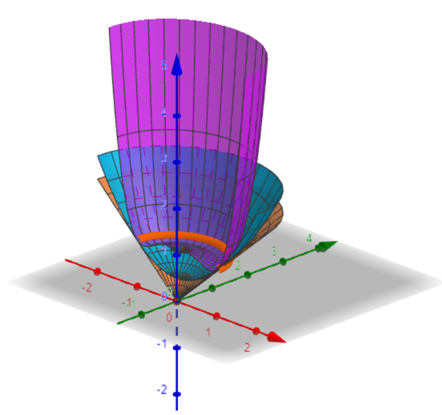
Lại có $G(1) - 2G'(1) = const$ cố định, ta có khai triển Taylor tại $x = 1$ của G:

$$G(x) = G(1) + (x - 1)(G(1) - const)/2 + (x - 1)^2 q(x)$$

với $q : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 bất kỳ. Khi đó nghiệm cần tìm

$$\begin{aligned} u(x, y) = {} & (\varphi(x/\sqrt{x^2 + y^2}) - G(1))\sqrt{x^2 + y^2} + G(1) + (x^2 + y^2 - 1)(G(1) - const)/2 \\ & + (x^2 + y^2 - 1)^2 q(x^2 + y^2), y > 0. \end{aligned}$$

Ta có thể thấy khi hàm q và hằng số $G(1)$ thay đổi ta có vô số nghiệm. Các nghiệm này thỏa mãn điều kiện (35). Để thấy được một số nghiệm ta lấy $\varphi = \psi = 1$.



(v) Ta có hai cách tiếp cận như sau.
Cách 1. Ta viết lại nghiệm tổng quát (31) dưới dạng

$$u(x,y) = F_1(y/x)\sqrt{x^2+y^2} + G(x^2+y^2). \tag{39}$$

Thay (39) vào điều kiện Darboux-Goursat ta có

$$F_1(0)x + G(x^2) = x, 1 \le x \le 2 \tag{40}$$
$$F_1(\sqrt{1-x^2}/x) + G(1) = 1, -1 < x < 1. \tag{41}$$

Từ (40)-(41) ta có $F_1(0) + G(1) = 1$ và $F_1(x) = 1 - G(1), -\infty < x < \infty$, còn

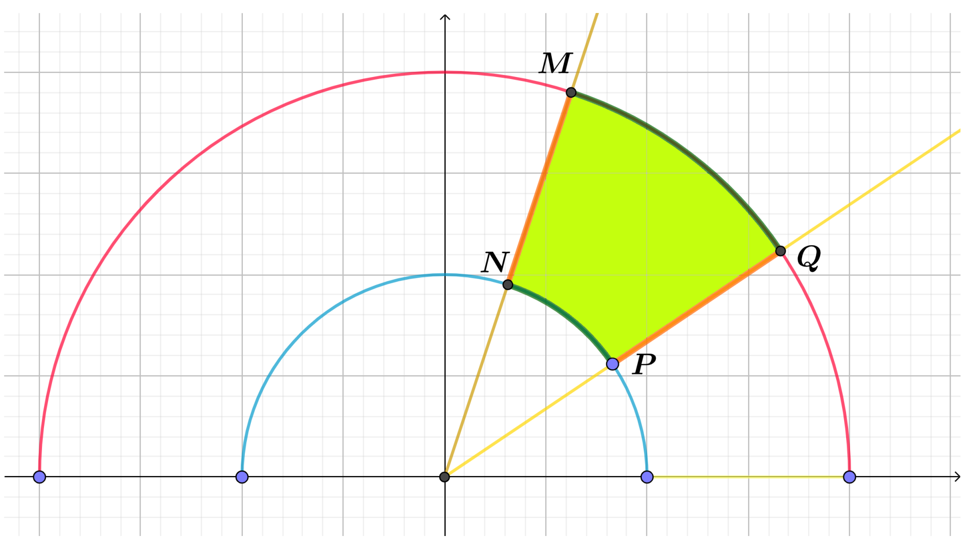
$$G(x) = (1 - F_1(0))\sqrt{x}, 1 \le x \le 4.$$

Do đó nghiệm
$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, 1 \le x^2+y^2 \le 4, y > 0.$$
Cách 2. Ta quay lại nghiệm tổng quát (31) ta thấy

$$\frac{u(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = F(x/y) + \frac{G(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, y > 0.$$

Khi đó quan sát "hình bình hành" tạo bởi các cặp đường đặc trưng

$$x^2+y^2 = C_1^2, x^2+y^2 = C_2^2 \text{ và } x/y = C_3, x/y = C_4, \text{ với } C_j \text{ là các hằng số}, C_1 \ne 0, C_2 \ne 0.$$



Bốn đỉnh của hình bình hành này xác định như sau.

(-) Đỉnh M là giao của đường tròn $x^2+y^2 = C_1^2$ và tia $x/y = C_3$. Khi đó

$$\frac{u(M)}{C_1} = F(C_3) + \frac{G(C_1)}{C_1}.$$

(-) Đỉnh N là giao của đường tròn $x^2+y^2=C_2^2$ và tia $x/y=C_3$. Khi đó

$$\frac{u(N)}{C_2}=F(C_3)+\frac{G(C_2)}{C_2}.$$

(-) Đỉnh P là giao của đường tròn $x^2+y^2=C_2^2$ và tia $x/y=C_4$. Khi đó

$$\frac{u(P)}{C_1}=F(C_4)+\frac{G(C_2)}{C_2}.$$

(-) Đỉnh Q là giao của đường tròn $x^2+y^2=C_1^2$ và tia $x/y=C_4$. Khi đó

$$\frac{u(M)}{C_1}=F(C_4)+\frac{G(C_1)}{C_1}.$$

Do đó ta thu được đẳng thức "hình bình hành" sau

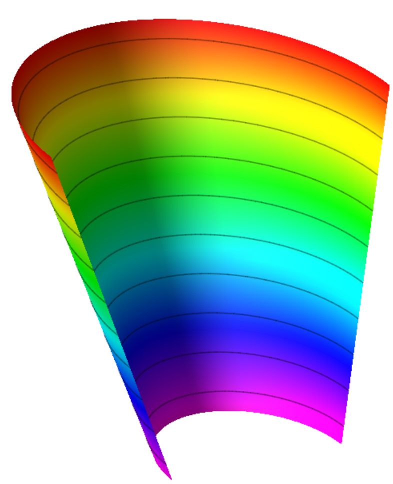
$$\frac{u(M)-u(Q)}{C_1}=\frac{u(N)-u(P)}{C_2}. \tag{42}$$

Quay trở lại bài toán đang xét, lấy $M=(x,y)$ là điểm ta cần tính $u(x,y)$ và $C_2=1$. Từ điều kiện $u(x,y)=1$ khi $x^2+y^2=1, y>0$, nên $u(N)=u(P)$. Do đó từ (42) ta có

$$u(x,y)=u(X,Y), \forall (X,Y) \text{ thỏa mãn } X^2+Y^2=x^2+y^2, Y>0.$$

Do u liên tục đến $Y=0$ nên

$$u(x,y)=u(\sqrt{x^2+y^2},0).$$



Hình 1: Hình ảnh nghiệm câu (v) - Cầu vồng.

Đến đây ta có lời giải như ở **Cách 1**.

Để chứng minh đoạn cuối ta cần tính các đạo hàm riêng $u_x, v_x, u_y, v_y, u_{xx}, v_{xx}, u_{xy}, v_{xy}, u_{yy}, v_{yy}$ trên nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y > 0$. Tóm lại ta hoàn thành việc giải Ví dụ này.

Về bài toán Cauchy cho phương trình loại parabolic ta gặp các tình huống như bài toán Cauchy cho phương trình hyperbolic:

(i) Điều kiện Cauchy đặt trên đường không đặc trưng: bài toán có duy nhất nghiệm quanh điều kiện Cauchy.

(ii) Điều kiện Cauchy đặt trên đường đặc trưng: ta gặp hiện tượng vô định. Khi đó ta cần tìm điều kiện tương thích của vế phải của điều kiện Cauchy để bài toán có nghiệm. Khi bài toán có nghiệm nó sẽ có vô số nghiệm.

Vì phương trình loại elliptic chỉ có đường đặc trưng ảo nên bài toán Cauchy cho phương trình elliptic sẽ luôn có duy nhất nghiệm. Để thấy điều này ta quay trở lại Ví dụ (3)

Ví dụ 10. *Giải bài toán Cauchy cho phương trình*

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = u \tag{43}$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = e^x, u_y(x, 0) = -2e^x$.

Lời giải. Để giảm bớt số hạng của (43) ta lại dùng phép đổi biến

$$\xi = x - y, \eta = y.$$

Khi đó hàm $v(\xi, \eta) = u(\xi + \eta, \eta)$ thỏa mãn phương trình dạng chính tắc

$$v_\eta + v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = v$$

với điều kiện Cauchy $v(\xi, 0) = e^\xi, v_\xi(\xi, 0) - v_\eta(\xi, 0) = e^\xi$. Ta tìm nghiệm của bài toán này dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$v(\xi, \eta) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} \xi^k \eta^l.$$

Thay chuỗi vào phương trình dạng chính tắc rồi đồng nhất hệ số ta được

$$(l+1)a_{k,l+1} + (l+1)(l+2)a_{k,l+2} + (k+1)(k+2)a_{k+2,l} = a_{k,l}, k, l = 0, 1, 2, \dots \tag{44}$$

Thay chuỗi vào điều kiện Cauchy ta được

$$a_{k,0} = 1/k!,\ (k+1)a_{k+1,0} - a_{k,1} = 1/k!, k = 0, 1, 2, \dots$$

Khi đó ta có $a_{k,l} = (-1)^l/(l!k!), l = 0, 1, k = 0, 1, 2, \cdots$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp

$$a_{k,l} = \frac{(-1)^l}{l!k!}, k, l = 0, 1, 2, \dots \tag{45}$$

Ta có (45) với $l = 0, 1, k = 0, 1, 2, \dots$ Giả sử (45) đúng với mọi $m = 0, 1, \dots, l$ $(l \geq 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Ta sẽ chứng minh

$$a_{k,l+1} = \frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Điều này có được nhờ (44). Như vậy ta đã có (45). Khi đó thay vào chuỗi nghiệm

$$v(\xi,\eta)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!k!}\xi^k\eta^l=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k+l=m}\frac{(k+l)!}{k!l!}\xi^k(-\eta)^l$$

hay $v(\xi,\eta)=e^{\xi-\eta}$. Do đó nghiệm cần tìm

$$u(x,y)=e^{x-2y}.$$

Ta kiểm tra lại nghiệm vừa tìm có thỏa mãn phương trình (43) qua bảng

Hệ số		e^{x-2y}
1	u_x	1
1	u_y	-2
2	u_{xx}	1
2	u_{xy}	-2
1	u_{yy}	4
Tổng	u	e^{x-2y}

Để ý $u_y(x,y)=-2e^{x-2y}$ nên việc kiểm tra điều kiện Cauchy là hiển nhiên.

Bài tập về Phương trình cấp 2 tuyến tính.

Bài 1. Cho $u:\Omega\to\mathbb{R},\Omega$ là tập mở trong $\mathbb{R}^3$, là hàm khả vi liên tục đến cấp 2.

(a) Xét phép đổi biến tuyến tính không suy biến $A:\Omega\to\mathbb{R}^3$

$$\xi=Ax=\left(\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j,\sum_{j=1}^{3}a_{2j}x_j,\sum_{j=1}^{3}a_{3j}x_j\right).$$

Khi đó ta có hàm $v(\xi)=u(A^{-1}\xi)$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\partial_x^\alpha u$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $|\alpha|\le 2$, theo các đạo hàm riêng $\partial_\xi^\alpha v$.

(b) (Hệ tọa độ trụ.) Xét phép đổi biến

$$x_1=r\cos\theta,x_2=r\sin\theta,x_3=x_3,$$

ta có hàm $v(r,\theta,x_3)=u(r\cos\theta,r\sin\theta,x_3)$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\partial_x^\alpha u$, $|\alpha|\le 2$, theo các đạo hàm riêng

$$v_r,v_\theta,v_{x_3},v_{rr},v_{\theta\theta},v_{x_3x_3},v_{r\theta},v_{rx_3},v_{\theta x_3}.$$

(c) (Hệ tọa độ cầu.) Xét phép đổi biến

$$x_1=r\cos\varphi\sin\theta,x_2=r\sin\varphi\sin\theta,x_3=r\cos\theta,$$

ta có hàm $v(r,\theta,\varphi)=u(r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta)$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\partial_x^\alpha u$, $|\alpha|\le 2$, theo các đạo hàm riêng

$$v_r,v_\theta,v_\varphi,v_{rr},v_{\theta\theta},v_\varphi,v_{r\theta},v_{r\varphi},v_{\theta\varphi}.$$

(d) Với $R > a > 0$ và $\Omega = \{(x, y, z) : \ (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 < a^2\}$ là xuyến. Xét phép đổi biến

$$x_1 = (R + r\sin\theta)\cos\varphi, x_2 = (R + r\sin\theta)\sin\varphi, x_3 = r\cos\theta,$$

ta có hàm $v(r, \theta, \varphi) = u((R + r\sin\theta)\cos\varphi, (R + r\sin\theta)\sin\varphi, r\cos\theta)$. Hãy tính các đạo hàm riêng $\partial_x^\alpha u$, $|\alpha| \le 2$, theo các đạo hàm riêng

$$v_r, v_\theta, v_\varphi, v_{rr}, v_{\theta\theta}, v_\varphi, v_{r\theta}, v_{r\varphi}, v_{\theta\varphi}.$$

(e) Viết lại toán tử Laplace Δu cho các phép đổi biến trên.

Bài 2. Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc các phương trình sau.

(i) Cho $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm hai biến (x, y).

(a) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + xu_x = u = 0$.

(b) $u_{xx} + 8xu_{xy} + (\sin^2 x + 16x^2)u_{yy} + \sin x\, u_x - u = 0$.

(c) $u_{xx} + 2\sin x\, u_{xy} + (\sin^2 x + 4x^2)u_{yy} + x\, u_x - u_y = 0$.

(d) $(9\sin^2 x + 16x^2)u_{xx} + 8x\, u_{xy} + u_{yy} + u_x - u = 0$.

(e) $u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} + \sin^2 x\, u_{yy} + y\, u_x - x\, u_y = 0$.

(f) $u_{xx} + 2\sin x\, u_{xy} - (\cos^2 x + 3)u_{yy} + x\, u_y = xy$.

(ii) Cho $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là hàm ba biến (x, y, z).

(a) $u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{xz} = 0$.

(b) $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6uyz + 12u_{xz} = 0$.

(c) $3u_{xx} + 2u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} + 4u_{yz} + 2u_{xz} = 0$.

Bài 3. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Xét phương trình

$$3u_{xx} - 2u_{xy} - 5u_{yy} = f \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình đang xét và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét. Khi $f = 0$ hãy thiết lập đẳng thức hình bình hành.

(c) Khi $f(x, y) = x + xy$, tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, x) = e^x$, $u(3x, -5x) = x + 1$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 4. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Xét phương trình

$$15u_{xx} - 2u_{xy} - u_{yy} = f \textbf{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét. Khi $f = 0$ hãy thiết lập đẳng thức hình bình hành.

(c) Khi $f = 1$ hãy tìm nghiệm của phương trình thỏa mãn $u(3y, y) = \sin(y), u(x, 0) = x$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

(e) Khi $f(x, y) = e^{x+3y}$, tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, 0) = x$, $u_y(x, 0) = \sin x + 1$. Hãy xác định tam giác phụ thuộc cho mỗi điểm (x, y). Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 5. Xét phương trình

$$3u_{xx}(x, y) + 2u_{xy}(x, y) - 5u_{yy}(x, y) + 3u_x(x, y) + 5u_y(x, y) = 0.$$

(a) Xác định dạng của phương trình và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét. Thiết lập đẳng thức hình bình hành.

(c) Biết $u(3x, 5x) = 8x, u_y(3x, 5x) = Cx + 1$. Hỏi với C nào bài toán có nghiệm? Với C đó, hãy chỉ ra hai nghiệm của bài toán. Vẽ đồ thị của các nghiệm.

Bài 6. Xét phương trình

$$u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} = e^x \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình đang xét và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, 0) = e^x - \cos(5x)$, $u_y(x, 0) = \sin(5x)$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 7. Xét phương trình

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = e^x \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình đang xét và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, 0) = e^x + \sin(3x) + x^3$, $u(0, y) = 1 + \sin(y)$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 8. Xét phương trình

$$4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = e^x \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình đang xét và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Biết nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(2x, -x) = C_1 e^{2x}$, $u_y(2x, -x) = C_2 x^2 + x + 1$. Tìm các hằng số C_1, C_2 để bài toán có nghiệm. Với các C_1, C_2 đó hãy tìm hai nghiệm của bài toán. Vẽ đồ thị của các nghiệm này.

Bài 9. Xét phương trình

$$25u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 2u_y = 15e^x \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình đang xét và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Biết nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, -x/5) = Ce^x + e^{2x/5}$. Tìm hằng số C để bài toán có nghiệm. Với C đó hãy tìm hai nghiệm của bài toán. Vẽ đồ thị của các nghiệm này.

Bài 10. Xét phương trình

$$8u_{xx} + 8u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_x - u_y = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(x, 0) = \cos x, u_y(x, 0) = \sin x$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 11*. Xét phương trình cấp 2 sau:

$$2xyu_{xx}(x, y) + (2y^2 - 3x^2)u_{xy}(x, y) - 3xyu_{yy}(x, y) = 0, -\infty < x < \infty, y > 0.$$

(a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét. Thiết lập đẳng thức hình bình hành.

(c) Tìm nghiệm $u(x, y)$ thỏa mãn

$$u(x, 0) = 1 \text{ khi } 1 \le x \le 2, u(x, y) = x \text{ khi } 3x^2 + 2y^2 = 3, y > 0.$$

Tìm miền nghiệm xác định duy nhất. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 12*. Xét phương trình

$$xu_{xx}(x, t) - x^5 u_{tt}(x, t) - 2u_x(x, t) = 0 \text{ trong } x > 0, t > 0.$$

(a) Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \text{ khi } x > 0.$$

Tìm miền nghiệm tìm được là nghiệm duy nhất của phương trình thỏa mãn điều kiện đã cho.

(iv) Tìm hàm điều khiển $h(t)$ sao cho nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn (iii) và

$$u(0,t) = h(t), t \geq 0, \text{ và } u(x,9) = 0, 0 \leq x \leq 3.$$

Bài 13*. Xét phương trình

$$(1+x^2)^2 u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + 2x(1+x^2)u_x = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(c) Tìm điều kiện của φ, ψ để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn

$$u(x,y) = \varphi(x), u_y(x,y) = \psi(x) \text{ khi } \arctan x - y = 0.$$

Khi đó hãy tìm hai nghiệm $u(x,y)$. Sau đó kiểm tra lại hai nghiệm đã tìm được.

Bài 14. Xét phương trình

$$e^{2x}u_{xx} + 2e^x u_{xy} + u_{yy} + e^{2x}u_x = e^{2x} \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng của phương trình và chuyển nó về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đang xét.

(c) Tìm nghiệm của phương trình đang xét thỏa mãn $u(0,y) = 2y+1, u_x(0,y) = 0$. Vẽ đồ thị của nghiệm.

Bài 15*. Xét phương trình

$$\tan^2 x\, u_{xx}(x,y) - 2y\tan x\, u_{xy}(x,y) + y^2 u_{yy}(x,y) + \tan^3 x\, u_x(x,y) + 2y u_y(x,y) = \tan^3 x,$$

với $0 < x < \pi/2, y > 0$.

(a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc. Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

(c) Tìm a, b để phương trình đã cho có nghiệm $u(x,y)$ thỏa mãn $u(x,0) = ax + b\sin x$. Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng. Vẽ đồ thị các nghiệm này.

Bài 16*. Xét phương trình

$$u_{xx}(x,y) - 2\sin x\, u_{xy}(x,y) + (2-\cos^2 x)u_{yy}(x,y) - \cos x\, u_y = 0 \text{ trên } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định dạng và chuyển về dạng chính tắc phương trình trên.

(b) Tìm nghiệm giải tích của phương trình chính tắc trong câu (a) khi biết thêm

$$u(0,y) = 0, u_x(0,y) = y-1.$$

(c) Giải nghiệm của phương trình ban đầu với điều kiện trong câu (b). Kiểm tra lại nghiệm tìm được có thực sự là nghiệm của phương trình với điều kiện trong câu (b).

Bài 17*. Xét phương trình

$$y^2u_{xx}(x,y) - 2y^2u_{xy}(x,y) + (y^2+1)u_{yy}(x,y) - yu_x(x,y) - \frac{1-y^2}{y}u_y(x,y) = 0, y > 0.$$

(a) Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình trên.

(b) Tìm nghiệm dạng chuỗi của phương trình chính tắc ở câu (i) thỏa mãn

$$u(x,1) = (x+1-\pi/4)\ln 2,\ u_y(x,1) = x+1-\pi/4-\ln(\sqrt{2}).$$

(c) Tìm nghiệm của phương trình ban đầu thỏa mãn điều kiện (ii). Kiểm tra lại nghiệm tìm được.

Bài 18*. Xét phương trình

$$u_{xx}(x,y) + 2x^2u_{xy}(x,y) + (x^4+1)u_{yy}(x,y) + 2xu_y(x,y) + u(x,y) = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^2.$$

(a) Xác định loại và chuyển về dạng chính tắc phương trình đã cho.

(b) Tìm nghiệm giải tích của phương trình chính tắc câu (i) thỏa mãn

$$u(0,y) = \cos(y), u_x(0,y) = 0.$$

(c) Tìm nghiệm của phương trình đã cho thỏa mãn câu (ii). Kiểm tra lại nghiệm tìm được.