Ứng dụng đại số tuyến tính

Lê Huy Hoàng

Khoa Toán-Cơ-Tin học
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

Tháng 8, 2022

Content

Hai bài toán quan trọng của đại số tuyến tính

(i) Giải hệ phương trình tuyến tính $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(ii) Tìm giá trị riêng $A\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$.

Tìm ra một thuật toán nhanh và ổn định để giải các bài toán trên là rất quan trọng.

Trong các bài toán kỹ thuật, hay có liên quan đến bốn họ các ma trận, thường được ký hiệu là $K_n,\ C_n,\ T_n,\ B_n$.

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ K_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ K_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Câu hỏi: Nhận xét chung về các ma trận K_n (ma trận Toeplitz)?

(i) K_n là ma trận đối xứng, $K_n^\top = K_n$.

(ii) K_n là ma trận thưa.

(iii) K_n là ma trận ba đường chéo. **Chú ý:** Các hệ số $-1,\ 2,\ -1$ liên quan đến hệ số của sai phân cấp hai và K_n còn được gọi là ma trận sai phân cấp hai.

(iv) Nếu ta thay các giá trị ở các vị trí $(1, n)$ và $(n, 1)$ thành -1 thì ta thu được ma trận C_n (ma trận xoay vòng).

$$C_4 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(v) K_n là ma trận khả nghịch, nhưng K_n^{-1} không phải là ma trận thưa.

(vi) K_n là ma trận đối xứng xác định dương.

- Có đủ n phần tử trục dương.
- Có đủ n giá trị riêng dương.

Chú ý: Các ma trận C_n chỉ là ma trận nửa xác định dương.

Ma trận T_n thu được từ ma trận K_n bằng cách thay giá trị ở vị trí $(1, 1)$ thành 1

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quá trình khử chuyển ma trận T_n thành ma trận tam giác trên

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; U_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nhận xét

- T_n là ma trận xác định dương.
- U là ma trận khả nghịch, và

$$U_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; U_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận B_n nhận được từ ma trận T_n bằng cách đổi giá trị ở vị trí (n, n) thành 1

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Content

Xét phương trình vi phân

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \text{ với các điều kiện biên tại } x = 0 \text{ và } x = 1.$$

Chúng ta sẽ xem xét mối liên quan của bài toán biên với các ma trận K_n, C_n, T_n, B_n. Ta chia làm hai phần

- Sử dụng sai phân thay thế vi phân.
- Giải phương trình $-\frac{d^2u}{dx^2} = 1$ rồi sau đó là $-\frac{\Delta^2 u}{(\Delta x)^2} = 1$ bằng cách sử dụng các ma trận K và T.

Sai phân hữu hạn, sử dụng ký hiệu $\Delta x = h$,

- **Sai phân tiến:** $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$.
- **Sai phân lùi:** $\frac{u(x)-u(x-h)}{h}$.
- **Sai phân trung tâm:** $\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$.

Cấp chính xác được xác định thông qua công thức khai triển Taylor

- **Sai phân tiến:** $\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) + \frac{1}{2}hu''(x) + \cdots$.
- **Sai phân trung tâm:** $\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{1}{6}u^{(3)}(x) + \cdots$.

Như vậy sai phân trung tâm có cấp chính xác là hai trong khi sai phân một phía chỉ có cấp chính xác là một!

Sai phân cấp hai là sai phân của sai phân cấp một

$$\frac{1}{h}\left[\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}-\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)\right]=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$$

Do đó

$$\frac{d^2u}{dx^2}\approx\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}=\frac{u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Cấp chính xác được xác định thông qua công thức khai triển Taylor

$$\Delta^2 u(x)=u(x+h)-2u(x)+u(x-h)=h^2u''(x)+ch^4u^{(4)}(x)+\cdots$$

Do đó

$$\frac{\Delta^2 u}{h^2}=u''(x)+ch^2u^{(4)}(x)+\cdots$$

Chú ý:

- Cấp chính xác của công thức là cấp hai
- Với hàm số $u=x^2$ thì công thức sai phân cấp hai trên chính xác là đạo hàm cấp hai

$$\frac{(x+h)^2-2x^2+(x-h)^2}{h^2}=2.$$

Một số phép nhân quan trọng của ma trận sai phân cấp hai

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{2it} \\ e^{3it} \\ e^{4it} \end{bmatrix} = (2\cos t - 2) \begin{bmatrix} e^{it} \\ e^{2it} \\ e^{3it} \\ e^{4it} \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \text{ với các điều kiện biên tại } x = 0 \text{ và } x = 1.$$

Chuyển thành phương trình sai phân hữu hạn

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{(\Delta x)^2} = f_i$$

Phương trình thứ nhất ($i = 1$) liên quan đến u_0 và phương trình cuối cùng ($i = n$) liên quan đến u_{n+1} được xác định thông qua các điều kiện biên.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân và sai phân tương ứng với $f(x) \equiv 1$

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1, \text{ với } u(0) = 0 \text{ và } u(1) = 0.$$

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = 1, \text{ với } u_0 = 0 \text{ và } u_{n+1} = 0.$$

Xét bài toán biên với điều kiện biên vi phân

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \text{ với } \frac{du}{dx}(0) = 0 \text{ và } u(1) = 0.$$

Khi đó điều kiện biên vi phân chuyển thành điều kiện của sai phân cấp một.

Ví dụ

Giải phương trình vi phân và sai phân tương ứng với $f(x) \equiv 1$

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1, \text{ với } \frac{du}{dx}(0) = 0 \text{ và } u(1) = 0.$$

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = 1, \text{ với } \frac{u_1 - u_0}{h} = 0 \text{ và } u_{n+1} = 0.$$

- Nghiệm của phương trình vi phân là: $u(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.
- Nghiệm của phương trình sai phân là: $u_i = \frac{1}{2}h^2(n+i)(n+1-i)$

Nghiệm của phương trình sai phân có sai số so với nghiệm của phương trình vi phân!

Content

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Do K là một ma trận đối xứng nên

- Quá trình khử dẫn đến $K = LU$.
- Do tính đối xứng của K nên $K = LDL^\top$.

$$K\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$K = LU, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Khi đó việc giải hệ phương trình $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ trở thành giải lần lượt hai hệ phương trình $L\mathbf{c} = f$ và $U\mathbf{u} = \mathbf{c}$ với L, U là các ma trận tam giác!

Chú ý khi phân tích một ma trận A bất kỳ

- Nếu A khả nghịch và quá trình khử không cần đổi hàng thì $A = LU$.
- Nếu A khả nghịch và quá trình khử cần đổi hàng thì $PA = LU$.
- Nếu A không có đủ n phần tử trục thì A không khả nghịch.

Chú ý: Phân tích $K = LU$ có ý nghĩa khi dùng để giải hệ phương trình $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Tuy nhiên, phân tích này làm mất tính đối xứng của ma trận K vì $L,\ U$ không phải là các ma trận đối xứng (các ma trận tam giác).

$$K = LDL^\top, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Mọi ma trận A đối xứng đều có phân tích $A = LDL^\top$**
- **Với ma trận A bất kỳ thì $A^\top A$ là một ma trận vuông và đối xứng.**

- Định thức của ma trận K_n là $\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{i-1}{i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{i-1} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{i+1}{i} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{ hàng } i \text{ của } K_n$$

- Do n phần tử trục đều dương nên K_n là ma trận đối xứng xác định dương.
- Số lượng các phép toán (phép nhân và phép cộng) để giải hệ phương trình $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$ là $8n$.

Content

Xét phương trình vi phân và phương trình sai phân tương ứng với nó

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad \text{và} \quad K\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

- Trong trường hợp phương trình sai phân: $\mathbf{f} = \boldsymbol{\delta}_j$ (cột thứ j của ma trận đơn vị).
- Trong trường hợp phương trình vi phân: $f(x) = \boldsymbol{\delta}(x - a)$ (hàm **delta**)

Hàm delta (còn gọi là hàm xung) được định nghĩa không chặt chẽ như sau

$$\boldsymbol{\delta}(x) = \begin{cases} \infty & \text{nếu } x = 0, \\ 0 & \text{nếu } x \neq 0 \end{cases}$$

và thỏa mãn đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\delta}(x)dx = 1.$$

- Nghiệm của phương trình vi phân là hàm $u(x) = u(x, a)$ được gọi là **hàm Green**.
- Nghiệm của phương trình sai phân là cột thứ j của ma trận K^{-1}. Ma trận K^{-1} được gọi là **hàm Green rời rạc**.

Xét phương trình vi phân với các điều kiện biên khác nhau

Ví dụ

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

với các điều kiện biên

- $u(0) = 0$ *và* $u(1) = 0$.
- $u'(0) = 0$ *và* $u(1) = 0$.

Hàm Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm dốc

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Và chúng ta có mối quan hệ

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}, \qquad H(x) = \frac{dR(x)}{dx}$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \boldsymbol{\delta}(x-a) \quad \text{với} \quad u(0) = 0 \text{ và } u(1) = 0,$$

có nghiệm là hàm Green

$$u(x,a) = \begin{cases} (1-a)x & \text{nếu } x \le a \\ (1-x)a & \text{nếu } x \ge a \end{cases}$$

chuyển thành phương trình sai phân

$$-\Delta^2 u = \boldsymbol{\delta}_j \quad \text{với} \quad u_0 = 0 \text{ và } u_{n+1} = 0.$$

Dẫn đến hệ phương trình tuyến tính $K\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}_j$.

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \boldsymbol{\delta}(x-a) \quad \text{với} \quad u'(0) = 0 \text{ và } u(1) = 0.$$

có nghiệm là hàm Green

$$u(x,a) = \begin{cases} 1-a & \text{nếu } x \le a \\ 1-x & \text{nếu } x \ge a \end{cases}$$

chuyển thành phương trình sai phân

$$-\Delta^2 u = \boldsymbol{\delta}_j \quad \text{với} \quad u_1 - u_0 = 0 \text{ và } u_{n+1} = 0.$$

Dẫn đến hệ phương trình tuyến tính $T\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta}_j$.

Content

Giả sử

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$$

- $\boldsymbol{\lambda}$ là giá trị riêng của ma trận A. Để tìm $\boldsymbol{\lambda}$ ta giải phương trình $\det(A - \boldsymbol{\lambda} I) = 0$.
- $\mathbf{x}$ là véc tơ riêng của ma trận A. Để tìm $\mathbf{x}$ ta giải hệ phương trình $(A - \boldsymbol{\lambda} I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Mọi ma trận đối xứng đều có đủ n véc tơ riêng đôi một trực giao.
- Tích của n giá trị riêng bằng định thức của ma trận.
- Tổng của n giá trị riêng bằng vết của ma trận.

Chú ý:

- Các giá trị riêng của ma trận tam giác chính là các phần tử nằm trên đường chéo chính.
- Nếu giá trị riêng của A là $\boldsymbol{\lambda}$ thì $\boldsymbol{\lambda}^2$ là giá trị riêng của A^2, $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$ là giá trị riêng của A^{-1} (với $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$).
- Các giá trị riêng của các ma trận $A + B$, AB không liên quan đến các giá trị riêng của các ma trận A và B.

Ma trận Markov

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Các bước tìm $\mathbf{u}_k = A^k \mathbf{u}_0$ từ các giá trị riêng và các véc tơ riêng của ma trận A bất kỳ

- Biểu diễn $\mathbf{u}_0$ thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ riêng

$$\mathbf{u}_0 = a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + a_n \mathbf{x}_n.$$

- Nhân mỗi số a_j với $\boldsymbol{\lambda}_j^k$.
- Khi đó $\mathbf{u}_k = a_1 \boldsymbol{\lambda}_1^k \mathbf{x}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{\lambda}_n^k \mathbf{x}_n$.

Viết lại theo ngôn ngữ ma trận

- Biểu diễn $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = S\mathbf{a}$ dẫn đến $\mathbf{a} = S^{-1}\mathbf{u}_0$.
- Nhân $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\lambda}_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \Lambda^k \mathbf{a} = \Lambda^k S^{-1} \mathbf{u}_0$

- Cuối cùng là tái tổ hợp $\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1^k)a_1 \\ \vdots \\ (\lambda_n^k)a_n \end{bmatrix} = S\Lambda^k \mathbf{a}$. Vậy,

  $\mathbf{u}_k = S\Lambda^k S^{-1}\mathbf{u}_0$.

Chéo hóa ma trận Giả sử ma trận A vuông cấp a có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính, tạo thành các cột của ma trận S. Khi đó, $S^{-1}AS = \Lambda$ là một ma trận chéo

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

trong đó λ_j là các giá trị riêng.

Ứng dụng vào phương trình vi phân

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} = A\mathbf{u}$$

Ví dụ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2y - z \\ \frac{dz}{dt} &= -y + 2z \end{aligned}$$ được viết dưới dạng ma trận $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$

Định lý

Ma trận đối xứng luôn có đủ n giá trị riêng thực và một hệ các véc tơ riêng trực chuẩn.

Hệ các véc tơ trực chuẩn là hệ các véc tơ đơn vị, đôi một trực giao

$$\mathbf{q}_i^\top \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Khi đó ma trận các véc tơ riêng $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$ là một ma trận trực giao, $Q^\top Q = I$. Như vậy, với ma trận đối xứng ta luôn có

$$A = Q \Lambda Q^\top.$$

Các véc tơ riêng với phương trình vi phân và sai phân

Xét phương trình vi phân

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \boldsymbol{\lambda} y(x)$$

Phương trình này có các nghiệm là $y = \cos \boldsymbol{\omega} x$ và $y = \sin \boldsymbol{\omega} x$, với $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\omega}^2$. Tuy nhiên, các điều kiện biên sẽ xác định các tần số $\boldsymbol{\omega}$ và nghiệm là hàm sine hay hàm cosine.

- Với điều kiện biên fixed-fixed $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ thì $y(x) = \sin k\pi x$.
- Với điều kiện biên free-free $y'(0) = 0,\ y'(1) = 0$ thì $y(x) = \cos k\pi x$.
- Với điều kiện biên tuần hoàn $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1)$ thì $y(x) = \sin 2\pi kx$ hoặc $y(x) = \cos 2\pi kx$.
- Với điều kiện biên free-fixed $y'(0) = 0,\ y(1) = 0$ thì $y(x) = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x$.

Tương ứng các điều kiện biên như trên, khi rời rạc hóa phương trình vi phân, ta thu được phương trình sai phân tương ứng với các ma trận $K_n,\ B_n,\ C_n,\ T_n$.

- Các giá trị riêng của K_n là $\lambda_k = 2 - 2\cos k\pi h,\ k = 1, \ldots, n$.
  Các véc tơ riêng của K_n là $y_k = (\sin k\pi h, \cdots, \sin nk\pi h)$.
- Các giá trị riêng của B_n là $\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0, \ldots, n-1$.
  Các véc tơ riêng của B_n là $y_k = \left(\cos\frac{1}{2}\frac{k\pi}{n}, \cdots, \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{k\pi}{n}\right)$.
- Các giá trị riêng của C_n là $\lambda_k = 2 - \omega^k - \omega^{-k} = 2 - 2\cos\frac{2\pi k}{n}$, với $\omega^n = 1$.
  Các véc tơ riêng của C_n là $y_k = (1, \omega^k, \cdots, \omega^{(n-1)k})$. Ma trận có các cột là các véc tơ riêng của C_n được gọi là ma trận Fourier.

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{bmatrix}$$

Content

- $K = A^\top A$ là một ma trận đối xứng và xác định dương.
- Nếu A_1 và A_2 là các ma trận xác định dương thì $A_1 + A_2$ cũng là ma trận xác định dương.
- Tất cả các phần tử trục, và các giá trị riêng của một ma trận xác định dương đều là các số thực dương.

Định lý

Cực tiểu của $P(u) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top K\mathbf{u} - \mathbf{u}^\top \mathbf{f}$ *là* $P_{\min} = -\frac{1}{2}\mathbf{f}^\top K^{-1}\mathbf{f}$ *khi* $K\mathbf{u} = \mathbf{f}$.

Định nghĩa

Ma trận đối xứng S *được gọi là xác định dương nếu* $\mathbf{u}^\top S\mathbf{u} > 0$ *với mọi* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Tính xác định dương của các ma trận $A^\top A$, $A^\top CA$, $LDL^\top$, $Q\Lambda Q^\top$. Các tiêu chuẩn để xét một ma trận xác định dương

- Tất cả các phần tử trục đều dương.
- Các định thức con chính đều dương.
- Tất cả các giá trị riêng đều dương.
- $\mathbf{u}^\top K\mathbf{u} > 0$ với mọi $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
- $K = A^\top A$, và A có hạng đủ theo cột.

Content

Các véc tơ $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ được gọi là hệ véc tơ trực chuẩn nếu

$$\mathbf{q}_i^\top \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$$

Như vậy, $Q^\top Q = I$. Nếu Q là một ma trận vuông thì ta nói Q là một ma trận trực giao.

- $Q^{-1} = Q^\top$.
- $||Q\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x}||$.

Ma trận hoán vị, ma trận của phép quay, ma trận của phép đối xứng là các ví dụ về ma trận trực giao. Có ba cách cơ bản để phân rã một ma trận

- Quá trình khử dẫn đến phân tích $A = LU$.
- Quá trình trực giao hóa dẫn đến phân tích $A = QR$.
- Khai triển kỳ dị SVD $A = U\Sigma V^\top$, trong đó U, V là các ma trận trực giao.
    - Các cột của V là các véc tơ riêng trực giao của $A^\top A$.
    - Các cột của U là các véc tơ riêng trực giao của $AA^\top$.
    - $\Sigma = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots,)$ trong đó $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ là các giá trị riêng của $A^\top A$.

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}_i} A\mathbf{v}_i.$$

Với $r = \mathrm{rk}(A)$, ta có dạng rút gọn của khai triển kỳ dị

$$A = U_{m\times r}\Sigma_{r\times r}V^T_{r\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\sigma}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^\top\end{bmatrix}$$

Dạng đầy đủ của khai triển kỳ dị

$$A = U_{m\times n}\Sigma_{m\times n}V^T_{n\times n} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boldsymbol{\sigma}_r & \\ & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^\top \\ \vdots\end{bmatrix}$$

Thông thường các giá trị kỳ dị được sắp xếp $\boldsymbol{\sigma}_1 \geq \cdots \geq \boldsymbol{\sigma}_r > 0$. Nên

$$A = \mathbf{u}_1\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{v}_1^\top + \cdots + \mathbf{u}_r\boldsymbol{\sigma}_r\mathbf{v}_r^\top$$

Giả nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu là A^+

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top$$

- AA^+ là phép chiếu lên không gian cột của ma trận A.
- A^+A là phép chiếu lên không gian hàng của ma trận A.

Định nghĩa

- *Chuẩn của ma trận* $||A|| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$.
- *Số điều kiện của ma trận* $c(A) = ||A||\,||A^{-1}||$.

Nếu K là một ma trận đối xứng xác định dương thì

$$c(K) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{\max}(K)}{\boldsymbol{\lambda}_{\min}(K)}$$

Trong trường hợp chuẩn $||\cdot||_2$ thì ta luôn có

- $||A||^2 = \boldsymbol{\sigma}^2_{\max}$.
- $c(A) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{\max}}{\boldsymbol{\sigma}_{\min}}$

Bài tập

Sách "Computational Science and Engineering" của tác giả Gilbert Strang, NXB Wellesley-Cambridge Press (2007).

Chapter 1

- Sec. 1.1: Bài 2, 4, 5, 7, 15, 20, 27.
- Sec. 1.2: Bài 3, 7, 11, 14, 16, 18.
- Sec. 1.3: Bài 2, 3, 4, 7, 9, 14.
- Sec. 1.4: Bài 1, 2.
- Sec. 1.5: Bài 3, 4, 6, 10, 12, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 30.
- Sec. 1.6: Bài 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 19, 20, 21, 25.
- Sec. 1.7: Bài 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 18, 22, 25, 26, 28, 31.