Lý thuyết hàm điều hòa

Đặng Anh Tuấn

Ngày 12 tháng 1 năm 2020

Mục lục

Chương 1

Tính chất cơ bản

1.1 Định nghĩa - Biểu diễn tích phân

1.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d (d \geq 2)$.

Định nghĩa 1.1. Hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm điều hòa tại điểm x nếu nó khả vi đến cấp 2 tại x và $\Delta u(x) = 0$.
Hàm u được gọi là điều hòa trong Ω nếu nó điều hòa tại mọi điểm $x \in \Omega$.
Ký hiệu $H(\Omega)$ là không gian các hàm điều hòa trong Ω.

Chú ý. Ta cũng có lúc xét đến hàm điều hòa giá trị phức $u : \Omega \to \mathbb{C}$, nghĩa là hàm có phần thực và phần ảo là các hàm điều hòa thực.

Ví dụ 1.1. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, không gian các hàm hằng là không gian các đa thức thuần nhất bậc 0 và điều hòa. Tiếp đến không gian các đa thức bậc nhất

$$ax + by, a, b \in \mathbb{R},$$

là không gian các đa thức thuần nhất bậc 1 và điều hòa.
Tổng quát hơn, ta cần đến hệ tọa độ cực $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Khi đó

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}$$

trong đó $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Đa thức thuần nhất bậc n có dạng:

$$r^n \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta.$$

Không gian các đa thức thuần nhất bậc n và điều hòa gồm:

$$r^n(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)), a, b \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 1.1. *Một cách tổng quát, trong $\mathbb{R}^d$, ta ký hiệu $\mathscr{P}_n$ là không gian các đa thức thuần nhất bậc n và $\mathscr{H}_n$ là không gian các đa thức điều hòa, thuần nhất bậc n. Khi đó, với $n = 0, 1$ ta có $\mathscr{P}_0 = \mathscr{H}_0$ và $\mathscr{P}_1 = \mathscr{H}_1$. Khi $n \geq 2$ ta có*

$$\mathscr{P}_n = \mathscr{H}_n \oplus |x|^2 \mathscr{P}_{n-2}.$$

Tính số chiều của không gian $\mathscr{P}_n, \mathscr{H}_n$.

Tính điều hòa bất biến với phép dịch chuyển và phép co giãn. Cụ thể, nếu u điều hòa trong Ω thì ta có các kết luận sau:

(i) Hàm $T_h u = u(\cdot - h), h \in \mathbb{R}^d$, là hàm điều hòa trong $T_h\Omega = \{x + h : \ x \in \Omega\}$. Hơn nữa $T_h : H(\Omega) \to H(T_h\Omega)$ là đẳng cấu tuyến tính.

(ii) Hàm $M_\lambda u = u(\cdot/\lambda), \lambda > 0$, là hàm điều hòa trong $M_\lambda\Omega = \{\lambda x : \ x \in \Omega\}$. Hơn nữa $M_\lambda : H(\Omega) \to H(M_\lambda\Omega)$ là đẳng cấu tuyến tính.

Trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tính điều hòa bất biến với phép biến đổi trực giao T (ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ thỏa mãn $TT^t = T^tT = Id$).

Bài tập 1.2. *Cho $u \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Chứng minh rằng*

$$\Delta(u(Tx)) = (\Delta u)(Tx).$$

Điều này dẫn đến việc tìm hàm điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ có dạng $u(x) = \varphi(|x|)$, trong đó hàm $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{d-1}{r}\varphi'(r) + \varphi''(r) = 0, r > 0.$$

Giải phương trình trên có hai trường hợp sau:

(i) $d = 2$ có nghiệm $\varphi(r) = c_1 + c_2 \ln r, r > 0$.

(ii) $d \geq 3$ có nghiệm $\varphi(r) = c_3 + c_4 r^{2-d}, r > 0$.

Ta chuẩn hóa nghiệm bởi

$$\int_{\partial B_r} \partial_\nu u(x) dS = 1, r > 0,$$

trong đó ν pháp tuyến ngoài đơn vị trên mặt cầu $\partial B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x| = r\}$. Khi đó

$$\int_{\partial B_r} \varphi'(r) dS = \varphi'(r)|\partial B_r| = 1, r > 0,$$

nên

(i) $n = 2$ có $c_2 = 1/\omega_2, \omega_2 = 2\pi$ là chu vi đường tròn đơn vị,

(ii) $n \geq 3$ có $c_4 = \dfrac{1}{(2-n)\omega_d}, \omega_d = \dfrac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ là diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$.

Để đơn giản ta chọn $c_1 = c_3 = 0$. Ta định nghĩa nghiệm cơ bản của toán tử Laplace $E \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ xác định bởi

$$E(x) = \varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_2} \ln |x| & \text{khi } d = 2, \\ \dfrac{1}{(2-d)\omega_d} |x|^{2-d} & \text{khi } d \geq 3. \end{cases}$$

Bài tập 1.3. *Chứng minh rằng* $\lim_{r \to 0_+} r^{d-1} \varphi(r) = 0$.

Bài tập 1.4. *Chứng minh rằng:*

$$\begin{aligned} \nabla E(x) &= \frac{x}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_d}\frac{x}{|x|^d}, \\ \nabla^2 E(x) &= \frac{\varphi'(r)}{r}\left(I_d - \frac{d}{r^2} x \otimes x\right) = \frac{1}{|x|^d \omega_d}\left(I_d - d\frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}\right) \end{aligned}$$

trong đó I_d là ma trận vuông đơn vị cấp d.

1.1.2 Biểu diễn tích phân

Trong mục này ta xét Ω là mở, liên thông và bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ có biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 với pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên ν.

Trước hết ta nhắc lại Định lý Divergence: Cho trường véc-tơ $F : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ thỏa mãn $F \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Khi đó

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x)dS.$$

Với $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, sử dụng Định lý Divergence cho trường $F = v\nabla\omega$ ta thu được công thức Green thứ nhất

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla\omega + v\Delta\omega)dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu\omega dS.$$

Bằng cách sử dụng công thức Green thứ nhất cho $v, \omega \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ta thu được công thức Green thứ hai

$$\int_\Omega (v\Delta\omega - \omega\Delta v)dx = \int_{\partial\Omega} (v\partial_\nu\omega - \omega\partial_\nu v)dS.$$

Chú ý. Lấy $v \equiv 1$ từ công thức Green ta có

$$\int_\Omega \Delta\omega(x)dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\omega(x)dS. \tag{1.1}$$

Bài tập 1.5. *Xét bài toán biên Neumann trong:*

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{1.2}$$

$$\partial_\nu u = \psi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Chứng minh rằng nếu bài toán biên Neumann (1.2)-(1.3) *có nghiệm* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *thì*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\psi(x)dS \text{ và } \int_{\partial\Omega} \psi(x)dS = 0.$$

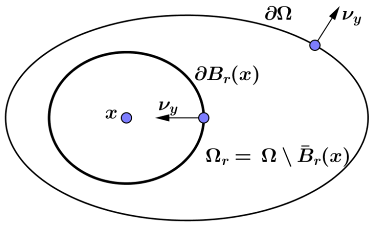
Từ đó chứng minh rằng bài toán biên Neumann (1.2)-(1.3) *trong* Ω *nếu có nghiệm thì có vô số nghiệm sai khác nhau hằng số.*

Tiếp theo ta đến với đồng nhất thức Green hay biểu diễn tích phân sau:

Định lý 1.1 (Đồng nhất thức Green)**.** *Cho* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. *Khi đó, với* $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\Delta_y u(y)dy - \int_{\partial\Omega} (E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y) - u(y)\partial_{\nu_y} E(x-y))dS_y.$$

Chứng minh. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Khi đó $E(x - \cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}_r)$, $\Omega_r = \Omega \setminus \bar{B}_r(x)$ và thỏa mãn



- $\Delta E(x - \cdot) = 0$ trong Ω_r,
- nếu ν là trường véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị của $\partial\Omega_r$ thì khi $y \in \partial B_r(x)$ có $E(x-y) = \varphi(r)$ và
$$\partial_{\nu_y} E(x-y) = -\varphi'(|x-y|) = -\frac{1}{r^{d-1}\omega_d}.$$

Áp dụng công thức Green thứ hai cho $v = E(x - \cdot), \omega = u$ trong Ω_r ta thu được

$$\int_{\Omega_r} E(x-y)\Delta_y u(y)dy = \int_{\partial\Omega} (E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y) - u(y)\partial_{\nu_y} E(x-y))dS_y +$$
$$+\varphi(r)\int_{\partial B_r(x)} \partial_{\nu_y} u(y)dS_y + \frac{1}{r^{d-1}\omega_d}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y. \tag{1.4}$$

Do $\lim_{r\to 0_+} r^{d-1}\varphi(r) = 0$ nên

$$\lim_{r\to 0_+} \left|\varphi(r)\int_{\partial B_r(x)} \partial_{\nu_y} u(y)dS_y\right| = 0.$$

Bằng cách dùng công thức giá trị trung bình cho hàm liên tục ta có

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{1}{r^{d-1}\omega_d}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y = u(x).$$

Kết hợp các điều trên ta dễ dàng có chứng minh cho đồng nhất thức Green khi cho $r \to 0_+$ hai vế của (1.4). □

Nhận xét. Nếu $u \in C_0^2(\Omega)$ thì $u = 0$ gần biên $\partial\Omega$. Do đó đồng nhất thức Green trở thành

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy, \forall x \in \Omega.$$

Nếu $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa trong Ω thì đồng nhất thức Green trở thành:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (u(y)\partial_{\nu_y} E(x-y) - E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y))dS_y, \forall x \in \Omega.$$

Bài tập 1.6. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $\psi \in C(\Omega)$. Chứng minh rằng*

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \int_{\partial B_\epsilon(x)} \psi(y)\partial_{\nu_y} E(x-y)dS_y = \psi(x), \forall x \in \Omega.$$

1.2 Đặc trưng hàm điều hòa

1.2.1 Tính chất trung bình cầu

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$. Giả sử u là hàm điều hòa trong Ω. Xét hình cầu đóng $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Sử dụng đồng nhất thức Green cho hàm điều hòa trong $B_r(x)$ ta có

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} (u(y)\partial_{\nu_y} E(x-y) - E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y)) dS_y.$$

Do $E(x-y) = \varphi(r)$ khi $y \in \partial B_r(x)$ và u là hàm điều hòa nên từ (1.1) ta có

$$\int_{\partial B_r(x)} E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y) dS_y = 0.$$

Khi $y \in \partial B_r(x)$ có $\partial_{\nu_y} E(x-y) = \varphi'(r) = |\partial B_r|^{-1}$. Do đó

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y.$$

Tính chất này được gọi là tính chất trung bình trên mặt cầu của hàm điều hòa.

Định nghĩa 1.2. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và hàm $u \in C(\Omega)$.

(i) Ta nói u thỏa mãn tính chất trung bình trên mặt cầu nếu

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y, \forall \bar{B}_r(x) \subset \Omega.$$

(ii) Ta nói u thỏa mãn tính chất trung bình trong hình cầu nếu

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y) dy, \forall \bar{B}_r(x) \subset \Omega.$$

Chú ý. Ta có $|\partial B_r| = r^{d-1}\omega_d$ và

$$|B_r| = \int_0^r |\partial B_s| ds = r^d \omega_d / d.$$

Ngoài ra

$$\int_{B_r(x)} u(y) dy = \int_0^r ds \int_{\partial B_s(x)} u(y) dS_y.$$

Do đó ta có

- tính chất trung bình trên mặt cầu suy ra tính chất trung bình trong hình cầu nhờ việc lấy nguyên hàm,
- tính chất trung bình trong hình cầu suy ra tính chất trung bình trên mặt cầu nhờ việc lấy đạo hàm.

Như vậy các tính chất trung bình (i) và (ii) tương đương nhau. Ta gọi chung hai tính chất này là tính chất trung bình cầu.
Ngoài ra, bằng cách đổi biến ta có thể viết lại định nghĩa các tính chất trung bình cho hàm liên tục u trên Ω như sau:

(i) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trên mặt cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$
$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_1} u(x + ry) dS_y.$$

(ii) Ta nói u thỏa mãn tính chất giá trị trung bình trong hình cầu nếu với bất kỳ hình cầu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$
$$u(x) = \frac{d}{\omega_d} \int_{B_1} u(x + ry) dy.$$

Như vậy hàm điều hòa trên tập mở có tính chất trung bình cầu. Đây chính là đặc trưng của hàm điều hòa.

Định lý 1.2. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C(\Omega)$ thỏa mãn tính chất trung bình cầu. Khi đó $u \in C^\infty(\Omega)$ và u điều hòa trong Ω.*

Để chứng minh đặc trưng trên ta cần đến hàm $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho(t) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{nếu } 0 \le t < 1, \\ 0 & \text{nếu } t \ge 1, \end{cases}$$

trong đó hằng số $C > 0$ thỏa mãn $\int_0^1 t^{d-1}\rho(t)dt = 1/\omega_d$.
Ngoài ra ta cần đến trung bình cầu:

$$I_x(t) = \frac{1}{|\partial B_t|} \int_{\partial B_t(x)} u(y) dS = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial B_1} u(x + t\omega) dS_\omega,$$

trong đó $\bar{B}_t(x) \subset \Omega$. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1.3. *Cho $u \in C^1(\Omega), B_r(x) \subset \Omega$. Khi đó với $0 < t < r$ ta có:*

$$I'_x(t) = \frac{1}{|\partial B_t|} \int_{\partial B_t(x)} \partial_\nu u(y) dS_y.$$

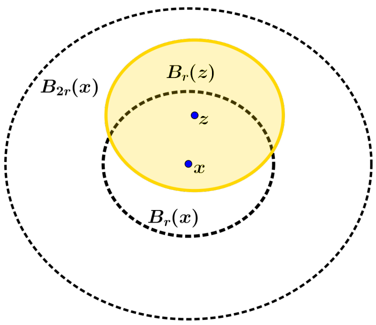
Chứng minh Bổ đề 1.3 xem như bài tập.

Chứng minh đặc trưng trung bình cầu. **B1.** Ta sẽ chứng minh $u \in C^\infty(\Omega)$. Cụ thể, với mỗi $x \in \Omega$ có $r > 0$ sao cho $\bar{B}_{2r}(x) \subset \Omega$. Ta sẽ chỉ ra hàm $v \in C^\infty(B_r(x))$ sao cho $u = v$ trong $B_r(x)$.

Xét hàm

$$v(z) = r^{-d} \int_\Omega u(y) \rho \left(\frac{|z-y|}{r} \right) dy.$$

Có supp $\rho(\frac{|z-\cdot|}{r}) \subset B_r(z) \subset B_{2r}(x)$ khi $z \in B_r(x)$ nên ta có các kết luận sau:

- 

$$v(z) = r^{-d} \int_{B_{2r}(x)} u(y) \rho \left(\frac{|z-y|}{r} \right) dy, z \in B_r(x).$$

Lại do $u \in C(\Omega), \rho(|\cdot - y|/r) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ nên

$$v \in C^\infty(B_r(x)).$$

- Ngoài ra, ta có

$$\begin{aligned} v(z) =& r^{-d} \int_{B_r(z)} u(y) \rho \left(\frac{|z-y|}{r} \right) dy \\ =& r^{-d} \int_0^r \rho(t/r) dt \int_{\partial B_t(z)} u(y) dS_y \\ =& u(z) \int_0^1 \omega_d t^{d-1} \rho(t) dt \quad \text{(do } u \text{ có tính chất trung bình cầu)} \\ =& u(z). \end{aligned}$$

B2. Ta sẽ chứng minh u điều hòa tại từng điểm $x \in \Omega$. Cố định $x \in \Omega$ có $r > 0$ sao cho $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Từ (1.1) và Bổ đề 1.3 ta có

$$\int_{B_t(x)} \Delta u(y) dy = |\partial B_t| I'_x(t), \forall 0 < t < r.$$

Do u có tính chất trung bình cầu nên $I_x(t) = u(x)$ là hằng theo t. Từ đây không khó để có đpcm. $\square$

Bài tập 1.7. *Cho* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

(a) Với $r > 0$ *đủ nhỏ, ta ký hiệu* $\Omega_r = \{x \in \Omega : \ d(x, \partial\Omega) > r\}$. *Chứng minh rằng hàm*

$$u_r(x) = r^{-d} \int_\Omega u(y)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right) dy$$

là hàm khả vi vô hạn trong Ω_r.

(b) Nếu u *thỏa mãn tính chất trung bình trong hình cầu thì* u *điều hòa trong* Ω.

Bài tập 1.8. *Chứng minh hàm điều hòa phức cũng có đặc trưng trung bình cầu.*

1.2.2 Tích phân trên biên

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$. Giả sử u điều hòa trong Ω. Khi đó từ (1.1) ta có

$$\int_{\partial\Omega'} \partial_\nu u(x) dS = 0$$

với mọi Ω' mở trong Ω thỏa mãn $\overline{\Omega'} \subset \Omega, \partial\Omega' \in C^1$. Đây chính là đặc trưng của hàm điều hòa:

Mệnh đề 1.4. *Cho* $u \in C^2(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\int_{\partial B} \partial_\nu u(x) dS = 0$$

với mọi hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$. *Khi đó* u *điều hòa trong* Ω.

Chứng minh. Cố định $x \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r_0 > 0$ sao cho $B_{r_0}(x) \subset \Omega$. Khi đó từ giả thiết và (1.1) ta có

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0, \forall 0 < r < r_0.$$

Từ đây không khó để thấy đpcm. $\square$

Sử dụng Bổ đề 1.3 ta có thể giảm nhẹ giả thiết về độ trơn trong đặc trưng trên như sau.

Bài tập 1.9. *Cho* $u \in C^1(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\int_{\partial B} \partial_\nu u(x) dS = 0$$

với mọi hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$. *Chứng minh các khẳng định sau:*

(a) u *thỏa mãn tính chất trung bình cầu trong* Ω.

(b) u *là hàm điều hòa trong* Ω.

1.2.3 Bổ đề Weyl

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$, $u \in C^2(\Omega)$ và $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Khi đó sử dụng công thức Green thứ 2 ta có

$$\int_\Omega u(x)\Delta\psi(x)dx = \int_\Omega \psi(x)\Delta u(x)dx.$$

Nếu u điều hòa trong Ω thì

$$\int_\Omega u(x)\Delta\psi(x)dx = 0.$$

Đây là đặc trưng tiếp theo của hàm điều hòa:

Định lý 1.5 (Bổ đề Weyl)**.** *Cho* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *thỏa mãn*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\psi(x)dx = 0, \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Khi đó có hàm điều hòa v *trên* Ω *sao cho* $u = v$ *h.k.n. trong* Ω.

Chứng minh. Với $r > 0$ đủ nhỏ ta ký hiệu $\Omega_r = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > r\}$. Khi đó với $x \in \Omega_r$ đặt

$$u_r(x) = r^{-d} \int_\Omega u(y)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right) dy.$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 1.2 ta có $u_r \in C^\infty(\Omega_r)$.

B1. u_r là hàm điều hòa trong Ω_r. Thật vậy với $\psi \in C_0^\infty(\Omega_r)$, sử dụng công thức Green thứ 2 và Fubini ta có

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} \psi(x)\Delta u_r(x)dx &= \int_{\Omega_r} r^{-d}\left(\int_\Omega u(y)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dy\right)\Delta\psi(x)dx \\ &= \int_\Omega r^{-d}\left(\int_\Omega \Delta\psi(x)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dx\right)u(y)dy. \qquad (1.5)\end{aligned}$$

Lại áp dụng công thức Green thứ 2 ta có

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta\psi(x)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dx &= \int_\Omega \psi(x)\Delta_x\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dx \\ &= \Delta_y\left(\int_\Omega \psi(x)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dx\right). \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Do hàm $\psi_r(y) = r^{-d}\int_\Omega \psi(x)\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dx \in C_0^\infty(\Omega)$ nên từ (1.5)-(1.6) và giả thiết ta có

$$\int_{\Omega_r} \psi(x)\Delta u_r(x)dx = 0, \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega_r).$$

Do đó u_r điều hòa trong Ω_r.

B2. Cố định K là tập compact trong Ω. Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{r\to 0_+} ||u_r - u||_{L^1(K)} = 0.$$

Do K compact trong Ω nên $R = d(K, \partial\Omega) > 0$. Khi đó $K_{R/2} = \{x : d(x, K) \leq R/2\}$ là tập compact trong $\Omega_{R/2}$. Lại có $C(K_{R/2})$ trù mật trong $L^1(K_{R/2})$ nên tồn tại dãy $g_j \in C(K_{R/2}), j \in \mathbb{N}$, sao cho:

$$\lim_{j\to\infty} ||g_j - u||_{L^1(K_{R/2})} = 0.$$

Với $0 < r < R/2$ và $x \in K_{R/2}$ ta có

$$g_{jr}(x) - g_j(x) = r^{-d}\int_\Omega (g_j(y) - g_j(x))\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)dy = \int_{B_1}(g_j(x+rz) - g_j(x))\rho(|z|)dz.$$

Do đó g_{jr} hội tụ đều đến g_j trên $K_{R/2}$ khi $r \to 0_+$.

Lại do $||u_r - g_{jr}||_{L^1(K)} \leq ||u - g_j||_{L^1(K_{R/2})}$ nên từ trên ta không khó để có đpcm.

B3. Cố định K là tập compact trong Ω. Khi đó với $R = d(K, \partial\Omega) > 0$, họ các hàm $\{u_r\}_{0<r<R/2}$ bị chặn đều và đồng liên tục đều trên K. Khi đó theo Arzela-Ascoli có dãy $r_n \in (0, R/2)$, $n \in \mathbb{N}$, giảm về 0 sao cho dãy hàm $\{u_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên K.
Quay trở lại chứng minh tính bị chặn đều và đồng liên tục đều.
Từ tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa $u_r, 0 < r < R/2$, với $x \in K$ ta có

$$\begin{aligned}|u_r(x)| &\le \frac{1}{|B_{R/2}|}\int_{B_{R/2}(x)} r^{-d}\left(\int_{K_R}|u(z)|\rho\left(\frac{|y-z|}{r}\right)dz\right)dy\\ &\le \frac{1}{|B_{R/2}|}\int_{K_R}|u(z)|dz.\end{aligned}$$

Như vậy $\{u_r\}_{0<r<R/2}$ bị chặn đều trên K.
Tiếp tục sử dụng tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa $u_r, 0 < r < R/2$, với $x, y \in K$ ta có

$$\begin{aligned}|u_r(x) - u_r(y)| &= \frac{1}{|B_{R/2}|}\left|\int_{B_{R/2}(x)} u_r(z)dz - \int_{B_{R/2}(y)} u_r(z)dz\right|\\ &\le 2\frac{|B_{R/2}(x)\setminus B_{R/2}(y)|}{|B_{R/2}|}\sup_{K_R}|u_r| \le \frac{2|\partial B_{R/2}|\cdot|x-y|}{|B_{R/2}|}\sup_{K_R}|u_r|.\end{aligned}$$

Do K_R là tập compact trong Ω nên $\{u_r\}_{0<r<R/2}$ đồng liên tục đều trên K. Ta đã hoàn thành **B3.**
B4. Ta có thể phân tích $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, trong đó Ω_k là các tập mở thỏa mãn

$$\Omega_k \subset \bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \text{ và } \bar{\Omega}_k \text{ là compact.}$$

Khi đó từ **B3** ta xây dựng được hàm v trên Ω sao cho có một dãy $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ giảm về 0 mà u_{r_n} hội tụ đều đến v trên mỗi Ω_k. Sử dụng tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa u_{r_n} ta có v cũng thỏa mãn tính chất trung bình cầu nên v điều hòa trong Ω. Lại dùng **B2** ta có $u = v$ h.k.n. trong Ω. Như vậy ta đã chứng minh xong Bổ đề Weyl. □

1.3 Tính chính quy

1.3.1 Tính trơn

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$.
Từ chứng minh tính chất trung bình cầu hàm điều hòa ta có ngay kết quả: nếu u điều

hòa trong Ω thì $u \in C^\infty(\Omega)$.

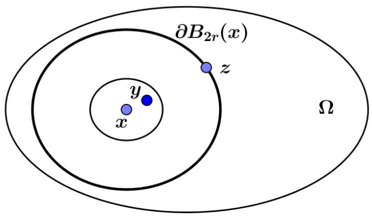
Dưới đây ta sẽ chứng minh kết quả sau:

Định lý 1.6. *Giả sử $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn $f = \Delta u \in C^\infty(\Omega)$. Khi đó $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh u khả vi vô hạn tại bất kỳ $x \in \Omega$. Do Ω là tập mở nên có hình cầu đóng $\bar{B}_{2r}(x) \subset \Omega$. Từ giả thiết ta có $u \in C^2(\bar{B}_{2r}(x))$. Sử dụng đồng nhất thức Green cho u trong hình cầu $B_{2r}(x)$, với chú ý $\Delta u = f$ trong $B_{2r}(x)$ ta có

$$u(y) = \underbrace{\int_{B_{2r}(x)} E(y-z)f(z)dz}_{u_1(y)} + \underbrace{\int_{\partial B_{2r}(x)} \left(u(z)\partial_{\nu_z}E(y-z) - E(y-z)\partial_{\nu_z}u(z)\right) dS_z}_{u_2(y)},$$

khi $y \in B_r(x)$.



Do $|y - z| \geq r$ khi $y \in B_r(x), z \in \partial B_{2r}(x)$ nên

$$E(\cdot - z) \in C^\infty(B_r(x)), \forall z \in \partial B_{2r}(x).$$

Như vậy $u_2 \in C^\infty(B_r(x))$.

Lấy $\psi \in C_0^\infty(B_{2r}(x))$ thỏa mãn $\psi = 1$ trong $B_r(x)$. Khi đó ta có:

$$u_{11}(y) = \int_{B_{2r}(x)} E(y-z)\psi(z)f(z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} E(z)(\psi f)(y+z)dz$$

là hàm khả vi vô hạn theo y vì $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d), \psi f \in C_0^\infty(B_{2r}(x))$.

Lại có hàm

$$u_{12}(y) = \int_{B_{2r}(x)} E(y-z)(1-\psi(z))f(z)dz$$

điều hòa trong $B_{r/2}(x)$. Như vậy $u_{12} \in C^\infty(B_{r/2}(x))$ hay ta có đpcm. □

1.3.2 Đánh giá gradient

Giả sử Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và u là hàm điều hòa trong Ω. Nếu $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$ thì theo tính chất trung bình cầu:

$$|u(x)| = \frac{1}{|B_r|}\left|\int_{B_r(x)} u(y)dy\right| \leq \frac{d}{r^d\omega_d}||u||_{L^1(B_r(x))}. \tag{1.7}$$

Tiếp theo ta cũng có đánh giá gradient của hàm điều hòa như sau:

Mệnh đề 1.7. *Với các giả thiết trên ta có*

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{2d^2 2^d}{r^{d+1}\omega_d}||u||_{L^1(B_r(x))}.$$

Chứng minh. Do u điều hòa trong $B_r(x)$ nên $u_{x_i}, i = 1, \ldots, n$, là các hàm điều hòa trong $B_r(x)$. Khi đó, từ tính chất giá trị trung bình ta có

$$u_{x_i}(x) = \frac{1}{|B_{r/2}|}\int_{B_{r/2}(x)} u_{x_i}(y)dy = \frac{1}{|B_{r/2}|}\int_{\partial B_{r/2}(x)} u(y)\nu_i(y)dS.$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$|u_{x_i}(x)|^2 \leq \frac{1}{|B_{r/2}|}\left(\int_{\partial B_{r/2}(x)} |u(y)|dS\right)\left(\int_{\partial B_{r/2}(x)} |u(y)|\nu_i^2(y)dS\right).$$

Như vậy ta có

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{1}{|B_{r/2}|}\int_{\partial B_{r/2}(x)} |u(y)|dS \leq \frac{2d}{r}\max_{\partial B_{r/2}(x)} |u|. \tag{1.8}$$

Sử dụng (1.7) cho $B_{r/2}(y), y \in \partial B_{r/2}(x)$ ta có

$$|u(y)| \leq \frac{d2^d}{r^{d+1}\omega_d}||u||_{L^1(B_{r/2}(y))} \leq \frac{d2^d}{r^{d+1}\omega_d}||u||_{L^1(B_r(x))}.$$

Từ đây và (1.8) ta có đpcm. □

Bài tập 1.10. *Cho u là hàm điều hòa không âm trên B_R. Chứng minh rằng*

$$|\nabla u(0)| \leq \frac{d}{R}u(0).$$

Từ đó hãy chứng minh Định lý Liouville: Nếu hàm điều hòa u trên $\mathbb{R}^d$ bị chặn dưới thì $u = const$. Đặc biệt hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bị chặn dưới cũng là hàm hằng. (Gợi ý: xét $v(x, y) = u(e^x \cos y, e^x \sin y)$.)

Bài tập 1.11. *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là tập mở, bị chặn với biên $\partial\Omega \in C^1$.*
(a) Cho u là hàm điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Giả sử có $R > 0$ sao cho $\Omega \subset B_R$ và

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-d} \text{ khi } |x| > R.$$

Chứng minh rằng

$$|\nabla u(x)| \leq 2^{d-1}dC|x|^{1-d} \text{ khi } |x| > 2R.$$

(b) Xét bài toán biên Neumann ngoài

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \tag{1.9}$$

$$\partial_\nu u = \psi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{1.10}$$

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-d} \text{ khi } |x| \to \infty. \tag{1.11}$$

Khi $d \geq 3$ và $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ liên thông bài toán biên Neumann (1.9)-(1.10)-(1.11) *tối đa một nghiệm.*

1.3.3 Tính giải tích

Hàm khả vi vô hạn u trên Ω có khai triển Taylor tại mọi điểm $x_0 \in \Omega$:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha.$$

Hàm khả vi vô hạn u được gọi là giải tích trên Ω nếu tại mỗi $x_0 \in \Omega$ đều có $r_0 = r_0(x_0) > 0$ sao cho khai triển Taylor trên hội tụ trong $B_{r_0}(x_0)$.
Để chứng minh tính giải tích của hàm điều hòa ta cần đánh giá cho đạo hàm riêng cấp cao như sau:

Định lý 1.8. *Cho u là hàm điều hòa trong Ω. Giả sử $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$ và $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d, k = |\alpha|$, ta có:*

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{2d(kd2^d)^k}{r^{d+k}\omega_d}||u||_{L^1(B_r(x))}$$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo k. Với $k = 0, 1$ ta đã chứng minh ở trên. Giả sử ta đã chứng minh được cho mọi $k \leq n, n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh kết quả trên cho mọi $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d, |\alpha| = n+1$. Khi đó có $j \in \{1, 2, \cdots, d\}$ sao cho $\alpha_j \geq 1$. Ta có thể viết

$$D^\alpha u = D_j(D^\beta u).$$

Tương tự như trong chứng minh đánh giá gradient ta có:

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{(n+1)d}{r} \max_{\partial B_{r/(n+1)}(x)} |D^\beta u|. \tag{1.12}$$

Với $y \in \partial B_{r/(n+1)}(x)$, sử dụng giả thiết quy nạp cho $|\beta| = n, B_{nr/(n+1)}(y)$ ta có

$$|D^{\beta}u(y)| \le \frac{2d(nd2^d)^n}{(nr/(n+1))^{d+n-1}\omega_d}||u||_{L^1(B_{nr/(n+1)}(y))}. \tag{1.13}$$

Do $B_{nr/(n+1)}(y) \subset B_r(x), \forall y \in \partial B_{r/(n+1)}(x)$, và $(n+1)/n \le 2, \forall n \ge 1$, nên từ (1.12)-(1.13) ta có đpcm. □

Ta chuyển sang chứng minh tính giải tích của hàm điều hòa.

Định lý 1.9. *Nếu u là hàm điều hòa trong Ω thì u giải tích trong Ω.*

Chứng minh. Cố định $x_0 \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_{2r}(x_0) \subset \Omega$. Với $x \in B_r(x_0)$ xét hàm $g(t) = u(x_0 + t(x - x_0)), t \in (-1, 1)$. Khai triển Taylor dạng Lagrange hàm $g(t)$ tại $t = 0$ đến cấp N ta có

$$R_N(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^{\alpha}u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=N}\frac{D^{\alpha}u(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!}(x - x_0)^{\alpha},$$

trong đó $t \in (0, 1)$ phụ thuộc x, x_0.
Đặt $M = 2dr^{-d}\omega_d^{-1}||u||_{L^1(B_{2r}(x_0))}$. Dùng đánh giá đạo hàm riêng cấp cao, với $y \in B_r(x_0)$, $|\alpha| = N$, ta có

$$|D^{\alpha}u(y)| \le \frac{2d(Nd2^d)^N}{r^{d+N}\omega_d}||u||_{L^1(B_r(x))} \le M\left(\frac{Nd2^d}{r}\right)^N.$$

Từ công thức Stirling ta có $N^N \le Ce^N N!$. Mà $x_0 + t(x - x_0) \in B_r(x_0)$ khi $x \in B_r(x_0)$, $t \in (0, 1)$, nên

$$|R_N(x)| \le M\left(\frac{d2^de}{r}\right)^N \sum_{|\alpha|=N}\frac{N!}{\alpha!}|(x - x_0)^{\alpha}| \le M\left(\frac{d2^de|x - x_0|}{r}\right)^N.$$

Chọn $r_0 = r/(2d2^de)$ ta có $R_N(x)$ hội tụ đều đến 0 trên $B_{r_0}(x_0)$ khi $N \to \infty$ hay ta có đpcm. □

Bài tập 1.12. *Cho Ω là tập mở, liên thông trong $\mathbb{R}^d$ và u điều hòa trong Ω. Giả sử có hình cầu $B \subset \Omega$ sao cho $u = const$ trên B. Chứng minh rằng $u = const$ trên Ω.*

1.4 Nguyên lý cực đại

1.4.1 Nguyên lý cực đại yếu - Nguyên lý so sánh

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$.

Định nghĩa 1.3. Cho $u \in C^2(\Omega), \Omega$ là miền trong $\mathbb{R}^n$. Ta nói hàm u là điều hòa dưới (điều hòa trên) trong Ω nếu

$$\Delta u \geq 0 \quad (\Delta u \leq 0, \text{ tương ứng}) \text{ trong } \Omega.$$

Ví dụ 1.2. Hàm $u(x) = |x|^2$ điều hòa dưới trong $\mathbb{R}^d$.

Ví dụ 1.3. Giả sử u là hàm điều hòa trong Ω. Khi đó u^2 là hàm điều hòa dưới trên Ω.

Ví dụ 1.4. Hàm u điều hòa trên trong Ω khi và chỉ khi $(-u)$ điều hòa dưới trong Ω. Hàm u điều hòa trong Ω khi và chỉ khi u vừa điều hòa dưới vừa điều hòa trên trong Ω.

Bài tập 1.13. *Cho $u \in C^2(\Omega)$. Chứng minh rằng: u điều hòa dưới trên Ω khi và chỉ khi*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\psi(x)dx \geq 0, \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \geq 0.$$

Định lý 1.10. *Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa dưới trong Ω. Khi đó u đạt GTLN trên $\partial\Omega$, nghĩa là*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Định lý này được gọi là nguyên lý cực đại yếu cho hàm điều hòa dưới. Để chứng minh nó ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề 1.11. *Cho $u \in C^2(\Omega)$ thỏa mãn $\Delta u > 0$ trong Ω. Khi đó u không thể đạt cực đại địa phương trong Ω. Từ đó ta có, nếu $u \in C(\bar{\Omega})$ thì*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Chứng minh Bổ đề 1.11. Ta chứng minh bằng phản chứng, nghĩa là giả sử có điểm x_0 mà u đạt cực đại địa phương tại đó. Khi đó

$$u_{x_i x_i}(x_0) \leq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Do đó $\Delta u(x_0) \leq 0$ hay ta có điều mâu thuẫn với giả thiết. Vậy điều giả sử sai hay ta đã chứng minh xong Bổ đề. □

Quay trở lại chứng minh nguyên lý cực đại yếu cho hàm điều hòa dưới:

Chứng minh nguyên lý cực đại yếu. Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ để $\bar{\Omega} \subset B_R$. Với mỗi $\epsilon > 0$ xét

$$u_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon |x|^2.$$

Có $u_\epsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và

$$\Delta u_\epsilon = \Delta u + 2d\epsilon > 0 \text{ trong } \Omega.$$

Do đó theo Bổ đề 1.11 ta có

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\epsilon = \max_{\partial\Omega} u_\epsilon.$$

Lại do $\bar{\Omega} \subset B_R$ nên

- $\max\limits_{\bar{\Omega}} u_\epsilon \geq \max\limits_{\bar{\Omega}} u$,
- $\max\limits_{\partial\Omega} u_\epsilon \leq \max\limits_{\partial\Omega} u + \epsilon R^2$.

Từ trên, cho $\epsilon \to 0^+$ ta hoàn thành chứng minh. □

Bài tập 1.14. *Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương sao cho $\Delta u + cu \geq 0$ trong Ω. Khi đó, nếu $u\Big|_{\partial\Omega} \leq 0$ thì $u \leq 0$ trong Ω.*

Ta có nguyên lý so sánh:

Định lý 1.12. *Cho $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Giả sử*

$$\Delta u + cu \geq \Delta v + cv \textit{ trong } \Omega,$$
$$u \leq v \textit{ trên } \partial\Omega.$$

Khi đó $u \leq v$ trong Ω.

Chứng minh. Đặt $w = u - v$ và sử dụng Bài tập 1.14 ta có đpcm. □

Hệ quả 1.13. *Cho $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ và $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Giả sử*

$$\Delta u + cu = \Delta v + cv \textit{ trong } \Omega,$$
$$|u| \leq v \textit{ trên } \partial\Omega.$$

Khi đó $|u| \leq v$ trong Ω.

Tiếp theo ta có kết quả về tính duy nhất nghiệm:

Định lý 1.14. *Cho $c \in C(\Omega)$ là hàm không dương. Khi đó bài toán*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu &= f \text{ trong } \Omega, \\ u &= g \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$, có tối đa một nghiệm trong $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Chứng minh định lý về tính duy nhất nghiệm xem như bài tập.

Bài tập 1.15. *Cho $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa trên trong Ω. Khi đó u đạt GTNN trên $\partial\Omega$, nghĩa là*

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

1.4.2 Ước lượng tiên nghiệm

Như ta đã thấy nguyên lý cực đại chỉ ra tính duy nhất nghiệm của các bài toán biên. Bây giờ ta sẽ thấy nguyên lý so sánh còn dẫn đến ước lượng tiên nghiệm hay tính ổn định của bài toán biên.

Định lý 1.15. *Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và $c, f \in C(\bar{\Omega})$ với $c \leq 0$, còn $g \in C(\partial\Omega)$. Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu &= f \text{ trong } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + C \sup_{\Omega} |f|,$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc d và $d(\Omega)$.

Chứng minh. Đặt

$$F = \sup_{\Omega} |f|, \quad \Phi = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \Delta(\pm u) + c(\pm u) &= \pm f \geq -F \text{ trong } \Omega, \\ \pm u &= \pm \varphi \leq \Phi \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ để $\Omega \subset B_R$. Xét hàm

$$v(x) = \Phi + \frac{F}{2d}(R^2 - |x|^2).$$

Có $v \geq 0$ trong B_R. Lại do $c \leq 0$ trong Ω nên

$$\Delta v + cv = -F + cv \leq -F \leq \Delta(\pm u) + c(\pm u) \text{ trong } \Omega.$$

Khi $x \in \partial\Omega \subset B_R$ có $R^2 - |x|^2 \geq 0$. Do đó

$$v \geq \Phi \geq (\pm u) \text{ trên } \partial\Omega.$$

Sử dụng nguyên lý so sánh ta có

$$|u| \leq v \text{ trong } \Omega$$

hay

$$|u(x)| \leq \Phi + \frac{F}{2d}(R^2 - |x|^2) \leq \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \frac{R^2}{2d} \sup_{\Omega} |f|, x \in \Omega.$$

Vậy ta có ước lượng tiên nghiệm với $C = R^2/(2d)$. □

Trong trường hợp đặc biệt $\Omega = B_R(x_0)$ ta có ước lượng

$$\sup_{B_R(x_0)} |u| \leq \sup_{\partial B_R(x_0)} |\varphi| + \frac{R^2}{2d} \sup_{B_R(x_0)} |f|.$$

Trong trường hợp $f = 0$ ta có thể xét trường hợp nghiệm có giá trị phức. Cụ thể ta có nguyên lý modun-cực đại sau:

Bài tập 1.16. *Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^n, c \in C(\Omega; \mathbb{C})$ với $\operatorname{Re} c \leq 0$. Giả sử $u \in C^2(\Omega; \mathbb{C}) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{C})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu = 0 \text{ trong } \Omega.$$

Khi đó $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$. *(Gợi ý: tính $\Delta|u|^2$.)*

1.4.3 Nguyên lý cực đại mạnh

Cho Ω là tập mở, liên thông trong $\mathbb{R}^d$. Ta có nguyên lý cực đại mạnh cho hàm điều hòa như sau:

Định lý 1.16. *Giả sử u là hàm điều hòa trong Ω. Nếu u đạt GTLN (hoặc GTNN) trong Ω thì $u = const$ trong Ω.*

Chứng minh. Ta sẽ chỉ chứng minh GTLN, còn GTNN chứng minh tương tự (coi như bài tập). Giả sử u có GTLN $M = \max\limits_{\bar{\Omega}} u$. Xét tập

$$D = \{x \in \Omega : \; u(x) = M\}.$$

Ta có $D \neq \emptyset$. Từ tính liên tục của u nên D đóng trong Ω. Nếu ta chứng minh được thêm D là tập mở trong Ω thì từ tính liên thông của Ω ta có $D = \Omega$ hay $u = M$ trong Ω (đpcm).
Như vậy ta chỉ còn phải chứng minh D mở trong Ω. Lấy $x_0 \in D \subset \Omega$. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Sử dụng tính chất trung bình cầu cho hàm điều hòa u trong $B_r(x_0)$ và $u(x_0) = M$ là GTLN của u ta có

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy \leq M.$$

Do $u(y) \leq M$ và u liên tục nên $u(y) = M, \forall y \in B_r(x_0)$, hay $B_r(x_0) \subset D$. Từ đó D là tập mở trong Ω. Ta hoàn thành chứng minh. □

Từ nguyên lý cực đại mạnh ta chứng minh lại được nguyên lý cực đại yếu cho hàm điều hòa.

Hệ quả 1.17. *Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa trong Ω. Khi đó ta có*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \forall x \in \Omega.$$

Ta có thể mở rộng kết quả về tính duy nhất nghiệm như sau:

Mệnh đề 1.18. *Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và u điều hòa trong Ω thỏa mãn*

$$\lim_{\substack{x \in \Omega \\ a \to x_0}} u(x) = 0, \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Khi đó $u = 0$ trong Ω.

Chứng minh. Giả sử $u \neq 0$ trong Ω. Khi đó ta có thể giả sử $s = \sup_\Omega u > 0$. Theo định nghĩa của sup ta có dãy $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}, x_k \in \Omega$, sao cho $\lim_{k\to\infty} u(x_k) = s$.
Do $\bar{\Omega}$ là tập compact nên ta có thể giả sử dãy $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đến $y \in \bar{\Omega}$. Từ giả thiết ta có $y \in \Omega$. Khi đó u đạt GTLN trong Ω tại y.
Ký hiệu D là thành phần liên thông chứa y trong Ω. Khi đó theo nguyên lý cực đại mạnh $u = s > 0$ trong D. Lấy $x_0 \in \partial D \subset \partial\Omega$ ta có

$$0 = \lim_{\substack{x\in D\\ x\to x_0}} u(x) = s > 0 \text{ (vô lý)}.$$

Như vậy điều giả sử sai hay ta có đpcm. □

Bài tập 1.17. *Mở rộng kết quả về tính duy nhất nghiệm trên cho tập không bị chặn.*

Bài tập 1.18. *Nếu hàm điều hòa u trong Ω đạt cực đại địa phương (hoặc cực tiểu địa phương) trong Ω thì $u = const$ trong Ω. (Gợi ý: dùng Bài tập 1.12.)*

Bài tập 1.19. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C^2(\Omega)$. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:*

(a) u là hàm điều hòa dưới trong Ω.

(b) u thỏa mãn tính chất dưới trung bình trên mặt cầu:

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS, \forall \bar{B}_r(x) \subset \Omega.$$

(c) u thỏa mãn tính chất dưới trung bình trong hình cầu:

$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(y)dy, \forall \bar{B}_r(x) \subset \Omega.$$

Trong trường hợp $u \in C(\Omega)$, chứng minh rằng (b) và (c) tương đương. Ta gọi chung hai tính chất (b) và (c) là tính chất dưới trung bình cầu.

Ta mở rộng khái niệm hàm điều hòa dưới sau.

Định nghĩa 1.4. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C(\Omega)$. Ta nói u điều hòa dưới trong Ω nếu u thỏa mãn tính chất dưới trung bình cầu.

Ví dụ 1.5. Hàm $u(x) = |x|$ là hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{R}^d$.

Ví dụ 1.6. Cho u điều hòa trong Ω. Khi đó hàm $|u|$ điều hòa dưới trong Ω.

Ví dụ 1.7. Cho Ω là tập mở, lồi trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C(\Omega)$ là hàm lồi trên Ω. Khi đó u là hàm điều hòa dưới trong Ω.

Bài tập 1.20. *Một cách tương tự hãy làm như trên cho hàm điều hòa trên. Khi đó hãy chứng minh nếu $u \in C(\Omega)$ vừa điều hòa dưới vừa điều hòa trên trong Ω thì u điều hòa trong Ω.*

Bài tập 1.21. *Cho $u \in C(\Omega)$. Chứng minh rằng u điều hòa dưới trong Ω khi và chỉ khi*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\psi(x)dx \geq 0, \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \geq 0.$$

Bài tập 1.22. *Cho $u \in C(\Omega)$ là hàm điều hòa dưới trong Ω. Nếu u đạt GTLN trong Ω thì $u = const$ trong Ω. Tìm ví dụ về hàm điều hòa dưới khác hằng đạt cực đại địa phương trong Ω.*

Ở trên ta dùng tính chất trung bình cầu (hay dưới trung bình cầu) để có được nguyên lý cực đại mạnh. Ta có thể tiếp cận nguyên lý cực đại mạnh theo cách sau:

Bài tập 1.23 (Bổ đề Hopf). *Cho hình cầu $B \subset \mathbb{R}^n, x_0 \in \partial B$. Giả sử $c \in C(\bar{B}), c \leq 0$, và $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ trong } B.$$

Nếu $u < u(x_0)$ trong $B \setminus \{x_0\}$ và $u(x_0) \geq 0$ thì

$$\partial_\nu u(x_0) > 0$$

với ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên ∂B.
Gợi ý: xét hàm $v(x) = u(x) - u(x_0) + \epsilon(e^{-\alpha|x|^2} - 1)$ trong $B \setminus \bar{B}_{1/2}$.

Từ Bổ đề Hopf ta có nguyên lý cực đại mạnh sau:

Bài tập 1.24. *Cho Ω là tập mở, liên thông trong $\mathbb{R}^d$. Giả sử $c \in C(\Omega)$, $c \leq 0$, và $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

$$\Delta u + cu \geq 0 \text{ trong } \Omega.$$

Khi đó nếu u đạt GTLN không âm trong Ω thì nó là hằng số.

Ngoài ra ta còn dẫn đến tính duy nhất nghiệm của bài toán biên Neumann sau:

Bài tập 1.25. *Cho Ω là tập mở, liên thông và bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^1 có pháp tuyến ngoài đơn vị ν. Giả sử Ω thỏa mãn điều kiện hình cầu trong tại mọi điểm trên biên $\partial\Omega$ và $c \in C(\Omega), c \leq 0$. Nếu $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là nghiệm của bài toán*

$$\begin{aligned} \Delta u + cu =& f \text{ trong } \Omega, \\ \partial_\nu u =& \varphi \text{ trên } \partial\Omega, \end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega)$ thì

- *hoặc u là nghiệm duy nhất của bài toán khi $c \not\equiv 0$,*
- *hoặc các nghiệm của bài toán sai khác u một hằng số khi $c \equiv 0$.*

1.5 Các định lý hội tụ

1.5.1 Định lý hội tụ đều

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$. Ta có định lý về sự hội tụ đều sau:

Định lý 1.19. *Cho dãy các hàm $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liên tục trên $\bar{\Omega}$ và điều hòa trong Ω. Giả sử dãy hàm này hội tụ đều trên $\partial\Omega$ đến ψ. Khi đó ta có các kết luận sau:*

(i) $\psi \in C(\partial\Omega)$ và tồn tại hàm $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \text{ trong } \Omega, \\ v &= \psi \text{ trên } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(ii) Dãy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều đến v trong $\bar{\Omega}$.

(iii) Cố định $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$. Dãy các đạo hàm riêng $\{D^\alpha u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên từng compact đến $D^\alpha v$.

Chứng minh. (i)-(ii) Do $\bar{\Omega}$ compact nên dãy Cauchy trong $C(\bar{\Omega})$ hội tụ. Do dãy hàm $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên $\partial\Omega$ nên theo nguyên lý cực đại và tiêu chuẩn Cauchy tồn tại hàm

$v \in C(\bar{\Omega})$ sao cho dãy hàm này hội tụ đều đến v trong $\bar{\Omega}$. Hiển nhiên $v\Big|_{\partial\Omega} = \psi \in C(\partial\Omega)$. Sử dụng tính chất trung bình cầu của các hàm điều hòa u_k và chuyển giới hạn qua dấu tích phân của dãy hàm hội tụ đều $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ta có $v \in C(\bar{\Omega})$ cũng có tính chất trung bình cầu. Do đó v điều hòa trong Ω.
(iii) Lấy K compact trong Ω có $R = d(K, \partial\Omega) > 0$. Đặt $r = R/2$ có

$$B_{2r}(x) \subset \Omega, \forall x \in K, \text{ và } K \subset \cup_{x\in K} B_r(x).$$

Do K compact nên có hữu hạn các điểm $x_1, x_2, \cdots, x_N$ trong K sao cho

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} B_r(x_j).$$

Do $B_{2r}(x_j) \subset \Omega$ nên $B_r(x) \subset B_{2r}(x_j) \subset \Omega, \forall x \in B_r(x_j)$. Khi đó theo Định lý 1.8 về đánh giá đạo hàm riêng cấp cao ta có, với $x \in B_r(x_j)$,

$$|D^\alpha(u_k - u_l)(x)| \leq \frac{2d(|\alpha|d2^d)^{|\alpha|}}{r^{d+|\alpha|}\omega_d} ||u_k - u_l||_{L^1(B_r(x))} \leq \frac{C_{d,\alpha}}{r^{|\alpha|}} \max_{\bar{\Omega}} |u_k - u_l|.$$

Như vậy

$$\sup_{x\in K} |D^\alpha(u_k - u_l)(x)| \leq \frac{C_{d,\alpha}}{r^{|\alpha|}} \max_{\bar{\Omega}} |u_k - u_l|$$

nên từ (ii) ta có $\{D^\alpha u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên K. Ta đã chứng minh xong. □

Để đi tiếp ta cần đến khái niệm hội tụ trong không gian các hàm điều hòa $H(\Omega)$.

Định nghĩa 1.5. Dãy $u_k \in H(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ được gọi là hội tụ đến $u \in H(\Omega)$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\Omega'} |\partial^\alpha u_k - \partial^\alpha u| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \overline{\Omega'} \text{ là tập compact trong } \Omega.$$

Như vậy theo Định lý 1.19, dãy các hàm điều hòa $u_k \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), k \in \mathbb{N}$, hội tụ trong $H(\Omega)$ nếu chúng hội tụ đều trên biên $\partial\Omega$.

Bài tập 1.26. *Chứng minh các đẳng cấu tuyến tính sau là liên tục:*

$$T_h : H(\Omega) \to H(T_h\Omega), h \in \mathbb{R}^d, \text{ và } M_\lambda : H(\Omega) \to H(M_\lambda\Omega), \lambda > 0.$$

Tiếp theo ta đến với các kết quả về tính compact trong $H(\Omega)$.

Định lý 1.20. *Cho dãy* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *trong* $H(\Omega)$ *thỏa mãn: với bất kỳ tập compact* K *trong* Ω *đều có hằng số* $C_K > 0$ *sao cho*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|dx \leq C_K.$$

Khi đó tồn tại hàm $v \in H(\Omega)$ *và một dãy con* $\{u_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *hội tụ trong* $H(\Omega)$ *đến* v.

Chứng minh. Đặt $\Omega_n = \{x \in \Omega : \ |x| < n, d(x, \partial\Omega) > 1/n\}, n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có các tính chất sau của Ω_n:

(i) $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ và $\cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n = \Omega$.

(ii) Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ để $\Omega_n \neq \emptyset, \forall n \geq n_0$.

(iii) Khi $n \geq n_0$ ta có bao đóng trong Ω của Ω_n

$$\bar{\Omega}_n = \{x \in \Omega : \ |x| \leq n, d(x, \partial\Omega) \geq 1/n\}$$

là tập compact trong Ω. Hơn nữa $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$.

Bằng kỹ thuật lấy dãy đường chéo, để chứng minh định lý này ta chỉ cần chứng minh có một dãy con $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $H(\Omega_n)$ với mỗi $n \geq n_0$.
Cố định $n \geq n_0$. Tương tự chứng minh (iii) trong Định lý về hội tụ đều, ta chỉ cần chứng minh có một dãy con $\{u_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trong Ω_n. Theo Arzela-Ascoli, do $\bar{\Omega}_n$ compact nên ta chỉ cần chứng minh dãy hàm đã cho bị chặn đều và đồng liên tục đều trên $\bar{\Omega}_n$.
Từ định nghĩa Ω_n ta có

$$B_{1/n}(x) \subset \Omega, \forall x \in \bar{\Omega}_n.$$

Do $\bar{\Omega}_n$ compact và họ $B_{1/(4n)}(x), x \in \bar{\Omega}_n$, phủ $\bar{\Omega}_n$ nên có hữu hạn điểm $x_1, x_2, \ldots, x_N$ trong $\bar{\Omega}_n$ sao cho

$$\bar{\Omega}_n \subset \cup_{j=1}^{N} B_{1/(4n)}(x_j).$$

Do đó ta chỉ còn phải chứng minh dãy hàm đã cho bị chặn đều và đồng liên tục đều trên mỗi $B_{1/(4n)}(x_j), j = 1, 2, \ldots, N$. Do $\bar{B}_{1/(2n)}(x_j)$ là tập compact trong Ω nên theo giả thiết ta có

$$M = \max_{j=\overline{1,N}} \int_{\bar{B}_{1/2n}(x_j)} |u_k(y)|dy < +\infty.$$

Ta có $B_{1/(4n)}(x) \subset B_{1/(2n)}(x_j), \forall x \in B_{1/(4n)}(x_j)$ nên theo Định lý 1.8 về đánh giá đạo hàm riêng, với $x \in B_{1/(4n)}(x_j)$,

$$|D^\alpha u_k(x)| \leq \frac{2d(|\alpha|d2^d)^{|\alpha|}}{r^{d+|\alpha|}\omega_d}||u_k||_{L^1(B_r(x))} \leq \frac{2d(|\alpha|d2^d)^{|\alpha|}M}{r^{d+|\alpha|}\omega_d}, r = \frac{1}{4n},$$

và Định lý số gia giới nội

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq |x - y| \sup_{t\in[0,1]} |\nabla u_k(x + t(y - x))|$$

ta có đpcm. □

Bài tập 1.27. *Chứng minh các tính chất của Ω_n trong chứng minh trên.*

Từ kết quả trên về tính compact trong $H(\Omega)$ ta dễ dàng thấy ngay kết quả về tính Heine-Borel của $H(\Omega)$ sau:

Hệ quả 1.21. *Cho dãy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ trong $H(\Omega)$ thỏa mãn: với bất kỳ tập compact K trong Ω đều có hằng số $C_K > 0$ sao cho*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{x\in K} |u_k(x)| \leq C_K.$$

Khi đó tồn tại hàm $v \in H(\Omega)$ và một dãy con $\{u_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ trong $H(\Omega)$ đến v.

1.5.2 Bất đẳng thức Harnack

Cho Ω là tập mở, liên thông trong $\mathbb{R}^d$ và u là hàm điều hòa không âm trong Ω.

Mệnh đề 1.22. *Giả sử $B_{3r}(x) \subset \Omega$. Khi đó với mọi $y \in B_r(x)$ ta có*

$$2^{-d}u(y) \leq u(x) \leq 2^d u(y).$$

Chứng minh. Sử dụng tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa ta có

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(z)dz = \frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}(x)} u(z)dz,$$
$$u(y) = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(y)} u(z)dz = \frac{1}{|B_{2r}|}\int_{B_{2r}(y)} u(z)dz.$$

Do $y \in B_r(x)$ nên

$$B_r(x) \subset B_{2r}(y) \subset B_{3r}(x), B_r(y) \subset B_{2r}(x).$$

Lại có u không âm nên từ trên ta có ngay đpcm. □

Định lý 1.23 (Bất đẳng thức Harnack)**.** *Giả sử K là tập compact trong Ω. Chứng minh rằng tồn tại hằng số $C = C(K, \Omega, d) > 1$ sao cho*

$$\sup_K u \leq C \inf_K u.$$

Chú ý. Hằng số $C = C(K, \Omega, d)$ không phụ thuộc vào hàm u, hay nói cách khác bất đẳng thức Harnack trên đúng cho mọi hàm điều hòa không âm trên Ω.

Chứng minh. Nếu hàm điều hòa không âm trên Ω có không điểm trong Ω, theo nguyên lý cực đại mạnh nó đồng nhất bằng 0 nên bất đẳng thức Harnack hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần xét hàm điều hòa $u > 0$ trong Ω.
Để chứng minh định lý này ta tìm $C = C(K, \Omega, d) > 1$ sao cho

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq C, \forall x, y \in \Omega.$$

Ta xét hàm trên $\Omega \times \Omega$ sau:

$$s(x, y) = \sup\{u(x)/u(y) : \ u > 0 \text{ điều hòa trong } \Omega\}.$$

Dễ thấy $s(x, y) \geq 1$.
B1. Ta chứng minh

$$s(x, y) < \infty, \forall x, y \in \Omega.$$

Cố định $x \in \Omega$, xét $E = \{y \in \Omega : s(x, y) < \infty\}$. Dễ thấy $x \in E$ mà Ω liên thông nên ta chỉ cần chứng minh E vừa đóng vừa mở trong Ω.
Lấy $y \in E$. Do Ω mở nên có $r > 0$ để $B_{3r}(y) \subset \Omega$. Theo Mệnh đề 1.22, với bất kỳ hàm điều hòa u không âm trong Ω ta có

$$u(z) \leq 2^d u(y), \forall z \in B_r(y).$$

Do đó $B_r(y) \subset E$ hay E mở.
Lấy $y \in \Omega$ là giới hạn của dãy $y_n \in E, n \in \mathbb{N}$. Do Ω mở nên có $r > 0$ sao cho $B_{3r}(y) \subset \Omega$. Do $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ nên có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $y_{n_0} \in B_r(y)$. Theo Mệnh đề 1.22, với bất kỳ hàm điều hòa u không âm trong Ω ta có

$$u(y) \leq 2^d u(y_{n_0}).$$

Do đó $y \in E$ hay E đóng. Ta đã chứng minh xong **B1.**

B2. Do K compact nên $R = d(K, \partial\Omega) > 0$. Lấy $r = R/3$ ta có

$$B_{3r}(x) \subset \Omega, \forall x \in K, \text{ và } K \subset \cup_{x \in K} B_r(x).$$

Do K compact nên có hữu hạn các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_N$ trong K sao cho

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} B_r(x_j).$$

Đặt $M = \max\{s(x_j, x_k) : \ j, k = 1, 2, \ldots, N\}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc K, Ω. Khi đó hằng số cần tìm

$$C = 4^d M \text{ chỉ phụ thuộc } K, \Omega, d.$$

Thật vậy, lấy $x, y \in K$. Khi đó có $j, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ sao cho

$$x \in B_r(x_j), y \in B_r(x_k).$$

Do $B_{3r}(z) \subset \Omega, \forall z \in K$, nên Mệnh đề 1.22, với bất kỳ hàm điều hòa u không âm trong Ω ta có

$$u(x) \leq 2^d u(x_j) \leq 2^d s(x_j, x_k) u(x_k) \leq 4^d M u(y).$$

Ta đã hoàn thành việc chứng minh. $\square$

Bài tập 1.28. *Cho hàm u điều hòa không âm trong $B_R \backslash \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 0 < |x| < R\}$. Chứng minh rằng tồn tại hằng số $C = C(d) > 1$ sao cho*

(i) $u(x) \leq Cu(y), \forall x, y \in \partial B_r, 0 < r \leq R/2.$

(ii) $u(x) \leq Cu(y), \forall x, y \in B_{R/2} \setminus B_{R/3}.$

1.5.3 Định lý hội tụ đơn điệu

Cho Ω là tập mở, liên thông trong $\mathbb{R}^d$.

Định lý 1.24. *Cho dãy hàm $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ điều hòa, đơn điệu tăng trong Ω. Giả sử có điểm $y \in \Omega$ sao cho dãy $\{u_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ bị chặn trên. Khi đó tồn tại hàm v điều hòa trên Ω sao cho dãy $\{u_n\}_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến v trong $H(\Omega)$.*

Chứng minh. Đặt $\Omega_k = \{x \in \Omega : \ |x-y| < k, d(x, \partial\Omega) > d(y, \partial\Omega)/(k+1)\}, k \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có:

(i) $y \in \Omega_k$.

(ii) Bao đóng (trong Ω) của Ω_k:

$$\bar{\Omega}_k = \{x \in \Omega : \ |x-y| \leq k, d(x, \partial\Omega) \geq d(y, \partial\Omega)/(k+1)\}$$

là tập compact.

(iii) $\Omega_k \subset \bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ và $\Omega = \cup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$.

Để chứng minh định lý ta chỉ cần chứng minh dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên từng Ω_k. Do $\bar{\Omega}_k$ compact trong Ω chứa y và $u_n - u_m, n > m$, là hàm điều hòa không âm trong Ω nên sử dụng bất đẳng Harnack ta có

$$\sup_{\Omega_k} |u_n - u_m| \leq C(u_n(y) - u_m(y))$$

với $C > 0$ chỉ phụ thuộc Ω, Ω_k, d.
Lại có dãy $\{u_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tăng, bị chặn trên nên nó hội tụ. Do đó sử dụng tiêu chuẩn Cauchy ta có dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên Ω_k. Ta đã hoàn thành chứng minh. □

Bài tập 1.29. *Chứng minh các tính chất của Ω_k trong chứng minh trên. Hơn nữa, hãy chứng minh khi k đủ lớn ta có Ω_k liên thông.*

Chương 2

Hàm Green - Công thức Poisson

2.1 Hàm Green

2.1.1 Định nghĩa

Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega \in C^1$. Với mỗi $x \in \Omega$ cố định xét bài toán

$$\begin{aligned} \Delta u =& 0 \text{ trong } \Omega, \\ u(y) =& E(x-y), \text{ khi } y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Trong mục này ta chưa quan tâm đến việc chỉ ra sự tồn tại nghiệm của bài toán trên, ta giả sử nó có nghiệm $\Phi(x,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Định nghĩa 2.1. Hàm Green cho miền Ω được xác định bởi

$$G(x,y) = E(x-y) - \Phi(x,y), x \in \Omega, y \in \bar{\Omega} \setminus \{x\}.$$

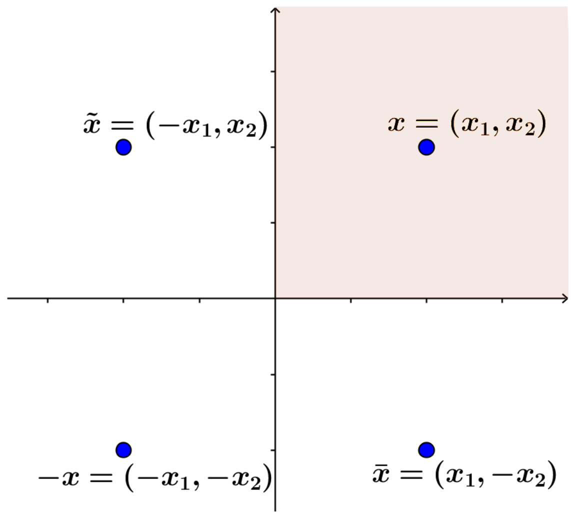
Ví dụ 2.1. Xét $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \ x_d > 0\}$ là nửa không gian. Ta xét phép phản xạ $x = (x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) \mapsto \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d)$. Lấy $x \in \mathbb{R}^d_+$. Khi đó $\bar{x} \notin \mathbb{R}^d_+$ và $|x-y| = |\bar{x}-y|$ khi $y_d = 0$. Do đó hàm $\Phi(x,y) = E(\bar{x}-y)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Delta E(\bar{x}-y) =& 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d_+, \\ E(\bar{x}-y) =& E(x-y) \text{ khi } y_d = 0. \end{aligned}$$

Như vậy hàm Green cho nửa không gian $\mathbb{R}^d_+$ được cho bởi

$$G(x,y) = E(x-y) - E(\bar{x}-y), x \in \mathbb{R}^d_+, y \in \bar{\mathbb{R}}^d_+.$$

Bài tập 2.1. *Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, giả sử $G(x,y), x \in \mathbb{R}^2_+, y \in \bar{\mathbb{R}}^2_+$, là hàm Green cho nửa mặt phẳng $\mathbb{R}^2_+$. Xét phép phản xạ $x = (x_1, x_2) \mapsto \tilde{x} = (-x_1, x_2)$. Chứng minh rằng $G(x,y) - G(\tilde{x}, y)$ là hàm Green cho góc dương $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.*



Bài tập 2.2. *Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ tìm hàm Green cho các tập sau:*

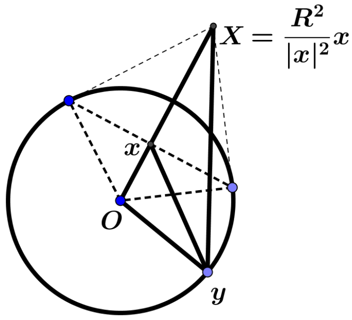
(a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2 > 0\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, x_2 > 0\}$.

Bài tập 2.3. *Trong không gian $\mathbb{R}^3$ tìm hàm Green cho góc dương*

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

Ví dụ 2.2. Xét $\Omega = B_R$ là hình cầu tâm tại gốc bán kính R trong $\mathbb{R}^d$. Ta xét phép nghịch đảo $x \mapsto X = \dfrac{R^2}{|x|^2}x$ qua mặt cầu ∂B_R. Lấy $x \in B_R$ ta có $X \notin B_R$.



Để ý

$$\frac{|X|}{R} = \frac{R}{|x|}$$

nên với $y \in \partial B_R$ có $\Delta Oxy \sim \Delta OyX$. Do đó

$$\frac{|y - X|}{R} = \frac{|x - y|}{|x|}, y \in \partial B_R.$$

Do đó hàm $\Phi(x,y) = E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}\Delta E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right) =& 0 \text{ trong } B_R,\\ E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right) =& E(x-y), \text{ khi } y \in \partial B_R.\end{aligned}$$

Như vậy hàm Green cho hình cầu B_R được cho bởi

$$G(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right), x \in B_R, y \in \bar{B}_R.$$

Bài tập 2.4. *Giả sử $G(x,y), x \in B_R, y \in \bar{B}_R$, là hàm Green cho hình cầu B_R. Xét phép phản xạ $x = (x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d) \mapsto \bar{x} = (x_1, \cdots, x_{d-1}, -x_d)$. Chứng minh rằng $G(x,y) - G(\bar{x},y)$ là hàm Green cho nửa hình cầu*

$$B_R^+ = \{x \in B_R : \ x_d > 0\}.$$

Bài tập 2.5. *Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ tìm hàm Green cho các tập sau:*

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_1 > x_2 > 0\}$.

Bài tập 2.6. *Trong không gian $\mathbb{R}^3$ tìm hàm Green cho tập sau*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}.$$

Giả sử thêm Ω bị chặn và $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson

$$\begin{aligned}\Delta u =& f \text{ trong } \Omega,\\ u\Big|_{\partial\Omega} =& \psi,\end{aligned}$$

với $f \in C(\bar{\Omega}), \psi \in C(\partial\Omega)$.
Sử dụng đồng nhất thức Green ta có

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \big(\psi(y)\partial_{\nu_y}E(x-y) - E(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)\big)\, dS_y. \qquad (2.1)$$

Sử dụng công thức Green thứ 2 cho $\Phi(x, \cdot), u$ ta có

$$\int_\Omega \Phi(x, y)f(y)dy = -\int_{\partial\Omega} \big(\psi(y)\partial_{\nu_y}\Phi(x, y) - E(x-y)\partial_{\nu_y}u(y)\big)\, dS_y. \tag{2.2}$$

Từ (2.1)-(2.2) ta có biểu diễn

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \psi(y)\partial_{\nu_y}G(x, y)dS_y. \tag{2.3}$$

Khi $f = 0$ ta có công thức nghiệm Poisson cho bài toán biên Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ trong } \Omega, \\ u\Big|_{\partial\Omega} &= \psi. \end{aligned}$$

Trước khi đi chi tiết phần này ta xem hàm Green (nếu có) sẽ có tính chất gì.

2.1.2 Một số tính chất

Có thể thấy hàm Green $G(x, y)$ có các tính chất sau:

(i) $\Delta G(x, \cdot) = 0$ trong $\Omega \setminus \{x\}$.

(ii) $G(x, \cdot) = 0$ trên $\partial\Omega$.

Cố định $x \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r > 0$ sao cho $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Lấy $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sử dụng công thức Green thứ nhất cho $\phi, G(x, \cdot)$ và tập $\Omega \setminus B_\epsilon(x), 0 < \epsilon < r$, ta có

$$\int_{\Omega\setminus B_\epsilon(x)} \nabla G(x, y)\cdot\nabla\phi(y)dy = -\int_{\partial B_\epsilon(x)} \phi(y)\partial_{\nu_y}E(x-y)dS_y$$

trong đó ν_y là pháp tuyến ngoài đơn vị tại y trên mặt cầu $\partial B_\epsilon(x)$.
Tương tự như trong chứng minh đồng nhất thức Green, khi cho $\epsilon \to 0_+$ ta có tính chất tiếp theo của hàm Green

$$\int_\Omega \nabla G(x, y)\cdot\nabla\phi(y)dy = -\phi(x), \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.4}$$

Để có các tính chất khác của hàm Green ta giả sử thêm Ω bị chặn. Khi đó hàm Green thỏa mãn:

$$G(x, y) < 0, \forall x, y \in \Omega, x \neq y. \tag{2.5}$$

Cố định $x \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r > 0$ sao cho $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Lại do $\Phi(x, \cdot) \in C(\bar{\Omega})$ và $\bar{\Omega}$ compact nên có $M > 0$ sao cho

$$|\Phi(x, y)| \leq M, \forall y \in \bar{\Omega}.$$

Mà $E(x - y) \to -\infty$ khi $|x - y| \to 0$ nên có $r_0 \in (0, r)$ sao cho

$$E(x - y) \leq -M, \forall y \in \bar{B}_{r_0}(x).$$

Do đó ta có

$$G(x, y) = E(x - y) - \Phi(x, y) \leq 0, \forall y \in \bar{B}_{r_0}(x).$$

Trong $\Omega \setminus \bar{B}_{r_0}(x)$, hàm $G(x, \cdot)$ là hàm điều hòa thỏa mãn

$$G(x, y) = 0 \text{ khi } y \in \partial\Omega, G(x, y) \leq 0 \text{ khi } y \in \partial B_{r_0}(x).$$

Do đó theo nguyên lý cực đại và nguyên lý cực đại mạnh ta có đpcm.

Khi số chiều $d \geq 3$, để ý $E(x) \leq 0$ nên theo nguyên lý cực đại ta có $\Phi(x, y) \leq 0$. Như vậy

$$E(x - y) \leq G(x, y), \forall x, y \in \Omega, x \neq y. \tag{2.6}$$

Hơn nữa, khi $x, y \in \Omega, r = |x - y| \leq d(x, \partial\Omega)/2$, có hằng số $C = C(d) \in (0, 1)$ sao cho

$$G(x, y) \leq CE(x - y). \tag{2.7}$$

Thật vậy, lấy $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ thỏa mãn

(i) $\phi = 0$ ngoài $B_{3r/2}(x)$;

(ii) $\phi = 1$ trong $B_{r/2}(x)$;

(iii) $|\nabla\phi| \leq C/r$ trong $B_{3r/2}(x) \setminus B_{r/2}(x)$.

Thay ϕ vào (2.4) ta có

$$\int_{B_{3r/2}(x)\setminus B_{r/2}(x)} \nabla(-G)(x, z) \cdot \nabla\phi(z)dz = 1.$$

Lại có $-G(x,\cdot)$ là hàm điều hòa không âm trong $B_{r/2}(z), z \in B_{3r/2}(x) \setminus B_{r/2}(x)$ nên ta có đánh giá gradient

$$|\nabla(-G(x,z))| \le \frac{2d}{r}(-G(x,z)).$$

Do đó ta có

$$1 \le \frac{2Cd}{r^2} \int_{B_{3r/2}(x)\setminus B_{r/2}(x)} (-G(x,z))dz \le 2C_1 dr^{d-2} \sup_{y\in B_{3r/2}(x)\setminus B_{r/2}(x)} (-G(x,z)).$$

Sử dụng bất đẳng thức Harnack cho hàm điều hòa không âm $-G(x,\cdot)$ trong $B_{2r}(x)\setminus\{x\}$ (xem Bài tập 1.28) tồn tại hằng số $C_2 = C_2(d)$ sao cho

$$\sup_{y\in B_{3r/2}(x)\setminus B_{r/2}(x)} (-G(x,z)) \le C_2(-G(x,y)).$$

Từ đây ta có ngay đpcm.
Tiếp đến, hàm Green có tính đối xứng nghĩa là

$$G(x,y) = G(y,x), \forall x, y \in \Omega, x \ne y. \tag{2.8}$$

Thật vậy, do Ω mở nên có $r > 0$ sao cho

$$\bar{B}_r(x) \subset \Omega, \bar{B}_r(y) \subset \Omega \text{ và } \bar{B}_r(x) \cap \bar{B}_r(y) = \emptyset.$$

Khi đó, với $0 < \epsilon < r$, các hàm

$$v(z) = G(x,z), w(z) = G(y,z)$$

điều hòa lần lượt trong $\Omega \setminus \bar{B}_\epsilon(x), \Omega \setminus \bar{B}_\epsilon(y)$.
Sử dụng công thức Green thứ 2 ta có

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} (v(z)\partial_\nu w(z) - w(z)\partial_\nu v(z))\, dS = \\ = -\int_{\partial B_\epsilon(y)} (v(z)\partial_\nu w(z) - w(z)\partial_\nu v(z))\, dS$$

trong đó ν là pháp tuyến ngoài đơn vị trên các mặt cầu $\partial B_\epsilon(x), \partial B_\epsilon(y)$.
Từ tính chất tích phân trên biên của hàm điều hòa ta có

$$\int_{\partial B_\epsilon(x)} w(z)\partial_{\nu_z} E(x-z) dS_z = \int_{\partial B_\epsilon(y)} v(z)\partial_{\nu_z} E(y-z) dS_z.$$

Làm tương tự như chứng minh đồng nhất thức Green cho $\epsilon \to 0_+$ ta có đpcm.

Bài tập 2.7. *Chứng minh rằng*

$$\partial_{\nu_y} G(x,y) \geq 0, \forall x \in \Omega, y \in \partial\Omega, \text{ và } \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} G(x,y) dS_y = 1, \forall x \in \Omega.$$

Nếu $\partial\Omega$ thỏa mãn tính chất hình cầu trong tại mọi điểm thì $\partial_{\nu_y} G(x,y) > 0$ với mọi $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$.

2.2 Công thức Poisson

2.2.1 Trong nửa không gian

Nhắc lại phép phản xạ qua siêu phẳng $x_d = 0$

$$x \mapsto \bar{x} = (x_1, \cdots, x_{d-1}, -x_d),$$

ta có hàm Green cho nửa không gian $\mathbb{R}^d_+$ xác định bởi

$$G(x,y) = E(y-x) - E(y-\bar{x}), x \in \mathbb{R}^d_+, y \in \bar{\mathbb{R}}^d_+.$$

Bài tập 2.8. *Cố định $x \in \mathbb{R}^d_+$. Khi đó có hằng số $C = C(x)$ sao cho*

$$|\partial_{\nu_y} G(x,y)| \leq CR^{-d}, \forall y \in \partial B_R \cap \mathbb{R}^d_+, \forall R > 2|x|.$$

Từ đó hãy chứng minh

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R \cap \mathbb{R}^d_+} |\partial_{\nu_y} G(x,y)| dS_y = 0.$$

Với $y_d = 0$ có $\nu_y = (0, \cdots, 0, -1)$ là pháp tuyến ngoài đơn vị tại y trên siêu phẳng $x_d = 0$. Khi đó

$$\partial_{\nu_y} E(y-x) = -\partial_{y_d} E(y-x) = \frac{x_d - y_d}{\omega_d |y-x|^d},$$
$$\partial_{\nu_y} E(y-\bar{x}) = -\partial_{y_d} E(y-\bar{x}) = \frac{-x_d - y_d}{\omega_d |y-x|^d}.$$

ta có

$$\partial_{\nu_y} G(x,y) = \frac{2x_d}{\omega_d |y-x|^d}, x \in \mathbb{R}^d, y_d = 0.$$

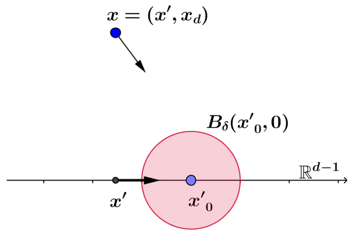
Hàm này được gọi là nhân Poisson cho nửa không gian $\mathbb{R}^d_+$, ký hiệu $K_{d+}(x,y')$. Một số tính chất của nhân Poisson được thể hiện qua bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *(i)* $K_{d+} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1})$.

(ii) $K_{d+}(x, y') > 0, x \in \mathbb{R}^d_+, y' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

(iii) $\Delta_x K_{d+}(x, y') = 0, x \in \mathbb{R}^d_+, y' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

(iv)



Với mỗi $x'_0 \in \mathbb{R}^{d-1}, \delta > 0$ *có*

$$\lim_{\substack{x_d \to 0+ \\ x' \to x'_0}} \int_{|y'-x'_0|>\delta} K_{d+}(x, y')dy' = 0.$$

(v) $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')dy' = 1, x \in \mathbb{R}^d_+$.

Chứng minh. Các tính chất $(i) - (iii)$ khá hiển nhiên.
Ta có

$$\int_{|y'-x'_0|>\delta} K_{d+}(x, y')dy' = \frac{2}{\omega_d} \int_{|y'-x'_0|>\delta} \frac{x_d}{(x_d^2 + |x' - y'|^2)^{d/2}} dy'.$$

Với $|x' - x'_0| < \delta/2$ ta có

$$\{y' \in \mathbb{R}^{d-1} : \ |y' - x'_0| > \delta\} \subset \{y' \in \mathbb{R}^{d-1} : \ |y' - x'| > \delta/2\}.$$

Do đó, bằng cách đặt $(y' - x')/r_d = z'$ ta có

$$\int_{|y'-x'_0|>\delta} K_{d+}(x, y')dy' \le \frac{2\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{2\delta/x_d}^\infty \frac{r^{d-2}dr}{(1 + r^2)^{d/2}}.$$

Do tích phân suy rộng $J_d = \int_0^\infty r^{d-2}(1 + r^2)^{-d/2}dr$ hội tụ nên ta có (iv).
Tính chất (v) dễ dàng có bằng một trong hai cách sau:

- Dùng biểu diễn (2.3) cho hàm $u \equiv 1$ và $\Omega = B_R^+$, cũng như Bài tập 2.8 ta có (v).

- Tính $J_d = \dfrac{\omega_d}{2\omega_{d-1}}$ ta cũng có (v).

□

Bài tập 2.9. *Cố định* $\delta > 0$, *chứng minh rằng giới hạn trong (iv) của Bổ đề 2.1 đều theo* x'_0 *trong* $\mathbb{R}^{d-1}$.

Bài tập 2.10. *Chứng minh các đẳng thức sau, với* $y = (y', 0)$,*:*

(i) $\partial_{x_j} K_{d+}(x, y') = \dfrac{2\delta_{jd}}{\omega_d |x-y|^d} - \dfrac{2d(x_j - y_j)x_d}{\omega_d |x-y|^{d+2}}, j = 1, 2, \cdots, d.$

(ii) $\partial^2_{x_j} K_{d+}(x, y') = -\dfrac{2dx_d}{\omega_d |x-y|^{d+2}} + \dfrac{2d(d+2)(x_j - y_j)^2 x_d}{\omega_d |x-y|^{d+4}}, j = 1, \cdots, d-1.$

(iii) $\partial^2_{x_d} K_{d+}(x, y') = -\dfrac{6dx_d}{\omega_d |x-y|^{d+2}} + \dfrac{2d(d+2)x_d^3}{\omega_d |x-y|^{d+4}}.$

Bài tập 2.11. *Với* $J_d = \int_0^\infty r^{d-2}(1+r^2)^{-d/2} dr$*. Hãy chứng minh các kết quả sau:*

(a) $J_2 = \pi/2, J_3 = 1.$

(b) $J_{d+2} = \dfrac{d-1}{d} J_d.$

Đến đây ta có lời giải cho bài toán biên Dirichlet trong nửa không gian như sau:

Định lý 2.2. *Với bất kỳ* $\psi \in C(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ *công thức tích phân Poisson*

$$P_{d+}[\psi](x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')\psi(y')dy'$$

cho ta nghiệm của bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d_+,$$
$$\lim_{\substack{x \to (x_0', 0) \\ x \in \mathbb{R}^d_+}} u(x) = \psi(x_0'), x_0' \in \mathbb{R}^d_+.$$

Chứng minh. Để chứng minh $P_{d+}[\psi]$ khả vi vô hạn và điều hòa trong $\mathbb{R}^d_+$, ta chỉ cần xét một cách địa phương tại từng $x \in \mathbb{R}^d_+$. Với $r = \dfrac{x_d}{2}$ có $x \in B_r(x) \subset \mathbb{R}^d_+$. Khi đó nhờ tính chất $(i), (iii), (v)$ của nhân Poisson K_{d+} ta có $P_{d+}[u]$ khả vi vô hạn và điều hòa tại $x \in B_r(x)$. Ta còn phải chứng minh với mỗi $x_0' \in \mathbb{R}^{d-1}$ có

$$\lim_{\substack{x \to (x_0', 0) \\ x \in \mathbb{R}^d_+}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')\psi(y')dy' - \psi(x_0') = 0.$$

Nhờ tính chất (v) của nhân Poisson K_{d+}, phần còn phải chứng minh

$$\lim_{\substack{x \to (x_0', 0) \\ x \in \mathbb{R}^d_+}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')(\psi(y') - \psi(x_0'))dy' = 0.$$

Tách tích phân trên thành hai phần

- $\int_{\mathbb{R}^{d-1}\cap B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính liên tục của ψ, tính chất (ii) và (v) của K_{d+};
- $\int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính bị chặn của ψ, tính chất (ii) và (iv) của K_{d+}.

Chi tiết phần này xem như bài tập. $\square$

Bài tập 2.12. *Chứng minh giới hạn trong Định lý 2.2 đều theo x_0' trên từng compact trong $\mathbb{R}^{d-1}$.*

Bài tập 2.13. *Trong mặt phẳng, tính nhân Poisson $K(x,y)$ cho góc dương*

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \ x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Tìm hiểu nhân Poisson vừa tính được.

2.2.2 Trong hình cầu

Nhắc lại phép nghịch đảo qua mặt cầu B_R

$$x \mapsto X = \frac{R^2}{|x|^2}x,$$

ta có hàm Green cho hình cầu B_R xác định bởi

$$G(x,y) = E(y-x) - E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right), x \in B_R, y \in \partial B_R.$$

Với $y \in \partial B_R$ có $\nu_y = y/R$ là pháp tuyến ngoài đơn vị tại y trên ∂B_R. Khi đó

$$\partial_{\nu_y} E(y-x) = \frac{y}{R}\cdot \nabla E(y-x) = \frac{y\cdot(y-x)}{R\omega_d|y-x|^d},$$

$$\partial_{\nu_y}\left(E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right)\right) = \frac{y}{R}\cdot\frac{|x|}{R}\nabla E\left(\frac{|x|}{R}(y-X)\right) = \frac{|x|^2}{R^2}\times\frac{y\cdot(y-X)}{R\omega_d\left|\frac{|x|}{R}(y-X)\right|^d}.$$

Chú ý $\frac{|x|}{R}|y-X| = |y-x|$ và $\frac{|x|^2}{R^2}X = x$ ta có

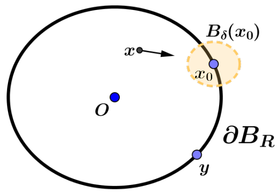
$$\partial_{\nu_y}G(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_d|y-x|^d}, x \in B_R, y \in \partial B_R.$$

Hàm này được gọi là nhân Poisson cho hình cầu B_R, ký hiệu $K_B(x,y)$. Một số tính chất của nhân Poisson được thể hiện qua bổ đề sau:

Bổ đề 2.3. *(i)* $K_B \in C^\infty(B_R \times \partial B_R)$.

(ii) $K_B(x,y) > 0, x \in B_R, y \in \partial B_R$.

(iii)



Với mỗi $x_0 \in \partial B_R, \delta > 0$ *có*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| < R}} \sup_{y \in \partial B_R \setminus B_\delta(x_0)} K_B(x,y) = 0.$$

(iv) $\Delta_x K_B(x,y) = 0, x \in B_R, y \in \partial B_R$.

(v) $\int_{\partial B_R} K_B(x,y) dS_y = 1, x \in B_R$.

Chứng minh. Các tính chất $(i)-(iv)$ khá hiển nhiên. Tính chất (v) dễ dàng có bằng một trong hai cách

- $K_B(x,y) = \partial_{\nu_y}(E(x-y) - \Phi(x,y)), \Phi(x,\cdot)$ là hàm điều hòa nên từ hệ quả của các công thức Green và đồng nhất thức Green ta có (v);
- dùng biểu diễn (2.3) cho hàm $u \equiv 1$ và $\Omega = B_R$ ta sẽ có (v).

$\square$

Bài tập 2.14. *Chứng minh các đẳng thức sau:*

(i) $\partial_{x_j} K_B(x,y) = -\dfrac{2x_j}{R\omega_d |x-y|^d} - \dfrac{d(x_j - y_j)(R^2 - |x|^2)}{R\omega_d |x-y|^{d+2}}, j = 1, 2, \cdots, d.$

(ii) *Với* $j = 1, 2, \cdots, d$ *ta có*

$$\partial^2_{x_j} K_B(x,y) = -\frac{2}{R\omega_d |x-y|^d} - \frac{d(R^2 - |x|^2 - 4(x_j - y_j)x_j)}{R\omega_d |x-y|^{d+2}} + \\ + \frac{d(d+2)(x_j - y_j)^2(R^2 - |x|^2)}{R\omega_d |x-y|^{d+4}}.$$

Đến đây ta có lời giải cho bài toán biên Dirichlet trong hình cầu như sau:

Định lý 2.4. *Với bất kỳ $\psi \in C(\partial B_R)$ công thức tích phân Poisson*

$$P_B[\psi](x) = \int_{\partial B_R} K_B(x,y)\psi(y)dS_y$$

cho ta nghiệm của bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ trong } B_R,$$
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B_R}} u(x) = \psi(x_0), x_0 \in \partial B_R.$$

Chứng minh. Để chứng minh $P_B[\psi]$ khả vi vô hạn và điều hòa trong B_R, ta chỉ cần xét một cách địa phương tại từng $x \in B_R$. Với $r = \dfrac{R+|x|}{2}$ có $x \in B_r \subset B_R$. Khi đó nhờ tính chất $(i), (iv)$ của nhân Poisson K_B ta có $P_B[\psi]$ khả vi vô hạn và điều hòa tại $x \in B_R$. Ta còn phải chứng minh với mỗi $x_0 \in \partial B_R$ có

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B_R}} \int_{\partial B_R} K_B(x,y)\psi(y)dS_y - \psi(x_0) = 0.$$

Nhờ tính chất (v) của nhân Poisson K_B, phần còn phải chứng minh

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B_R}} \int_{\partial B_R} K_B(x,y)(\psi(y) - \psi(x_0))dS_y = 0.$$

Tách tích phân trên thành hai phần

- $\int_{\partial B_R \cap B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính liên tục của ψ, tính chất (ii) và (v) của K_B;
- $\int_{\partial B_R \setminus B_\delta(x_0)}$: ta dùng tính bị chặn của ψ, tính chất (ii) và (iii) của K_B.

Chi tiết phần này xem như bài tập. □

Bài tập 2.15. *Chứng minh giới hạn trong Định lý 2.4 là giới hạn đều, nghĩa là: với mọi $\epsilon > 0$ đều có $\delta \in (0, R)$ sao cho:*

$$|P_B[\psi](x) - \psi(x_0)| < \epsilon, \forall x_0 \in \partial B_R, \forall x \in B_R \cap B_\delta(x_0).$$

Bài tập 2.16. *Trong mặt phẳng, tính nhân Poisson $K(x,y)$ nửa hình tròn*

$$B_R^+ = \{x \in B_R : \ x_2 > 0\}.$$

Tìm hiểu nhân Poisson vừa tính được.

Từ công thức nghiệm Poisson cho bài toán biên Dirichlet trong hình cầu ta có thể thu được một số kết quả cũ sau:

(a) Tính chất trung bình cầu cho hàm điều hòa.

(b) Bất đẳng thức Harnack cho hàm u điều hòa không âm trong B_R:

$$\frac{R^{d-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{d-2}(R-|x|)}{(R-|x|)^{d-1}}u(0), \forall x \in B_R.$$

(c) Định lý Liouville cho hàm điều hòa bị chặn dưới trên $\mathbb{R}^d$.

Bài tập 2.17. *Cho $u \in C(\bar{B}_R)$ điều hòa trong B_R. Chứng minh rằng*

$$\int_{|\omega|=1} u^2(r\omega)dS_\omega = \int_{|\omega|=1} u(\rho\omega)u(R\omega)dS_\omega$$

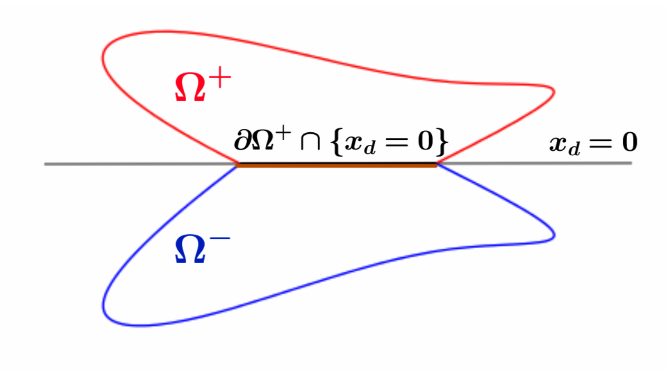
với $0 < \rho < r < R$ thỏa mãn $r^2 = R\rho$.

2.3 Một số hệ quả từ công thức Poisson

2.3.1 Nguyên lý phản xạ Schwarz

Cho Ω^+ là tập mở trong $\mathbb{R}^d_+$ sao cho biên $\partial\Omega^+$ có một phần nằm trên siêu phẳng $x_d = 0$. Ký hiệu

$$\Omega^- = \{-x : \ x \in \Omega_+\}, \Omega = int(\Omega^+ \cup \Omega^- \cup (\partial\Omega^+ \cap \{x_d = 0\})).$$



Giả sử u là hàm điều hòa trong Ω^+. Nguyên lý phản xạ Schwarz nhằm trả lời câu hỏi: Khi nào ta có thác triển điều hòa của u trên Ω?
Trường hợp đơn giản nhất $\partial\Omega^+ \cap \{x_d = 0\}$ không nằm trong Ω. Chẳng hạn

$$\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \ 0 < |x'| < x_n < 1\} \text{ là hình nón.}$$

Dưới đây ta chỉ xét trường hợp $\Sigma = (\partial\Omega^+ \cap \{x_d = 0\}) \cap \Omega \neq \emptyset$. Chẳng hạn

$$\Omega^+ = B_R^+ = \{x \in B_R : \ x_d > 0\} \text{ là nửa hình cầu trên.}$$

Ta bắt đầu với cách thác triển lẻ:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x \in \Omega^+, \\ -u(x', -x_d) & \text{khi } x \in \Omega^-. \end{cases}$$

Bài tập 2.18. *Chứng minh rằng $\bar{u} \in C(\Omega)$ khi và chỉ khi*

$$u \in C(\Omega^+ \cup \Sigma) \textit{ và } u = 0 \textit{ trên } \Sigma.$$

Do u điều hòa trong Ω^+ nên $\bar{u}$ điều hòa trong $\Omega^+ \cup \Omega^-$. Để xem u có điều hòa trong Ω ta còn phải xét các điểm trên Σ. Đầu tiên ta cần đến tính liên tục của $\bar{u}$ trên Σ. Điều này dẫn đến

$$u \in C(\Omega^+ \cup \Sigma) \text{ và } u = 0 \text{ trên } \Sigma.$$

Đây chính là điều kiện để u điều hòa tại các điểm trên Σ hay điều hòa trong Ω. Ta có kết quả cụ thể sau:

Định lý 2.5. *Cho $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\Omega^+ \cup \Sigma)$ là hàm điều hòa trong Ω^+ thỏa mãn $u = 0$ trên Σ. Khi đó thác triển lẻ $\bar{u}$ là hàm điều hòa trong Ω.*

Chứng minh. Ta chỉ còn phải chứng minh tính điều hòa của $\bar{u}$ tại các điểm $x_0 \in \Sigma$. Do $x_0 \in \Sigma \subset \Omega$ và Ω mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Khi đó

$$B_r^+(x_0) = \{x \in B_r^+(x_0) : \ x_d > 0\} \subset \Omega^+, B_r^-(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : \ x_d < 0\} \subset \Omega^-.$$

Để chứng minh $\bar{u}$ điều hòa tại x_0 ta sẽ tìm hàm v điều hòa trong $B_r(x_0)$ và

$$\bar{u} = v \text{ trong } B_r(x_0).$$

Công thức nghiệm Poisson giúp ta làm điều này. Do $u \in C(\Omega^+ \cap \Sigma)$, $u = 0$ trên Σ và $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$ nên $u \in C(\bar{B}_r(x_0))$. Khi đó công thức nghiệm Poisson cho ta hàm $v \in C(\bar{B}_r(x_0)$ điều hòa trong $B_r(x_0)$ và

$$v\Big|_{\partial B_r(x_0)} = \bar{u}\Big|_{\partial B_r(x_0)}.$$

Do tính lẻ của $\bar{u}\Big|_{\partial B_r(x_0)}$ và công thức nghiệm Poisson

$$v(x) = \frac{1}{r\omega_d}\int_{\partial B_r(x_0)} \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{|x-y|^d}\bar{u}(y)dS_y$$

nên $v = 0$ trên $\bar{B}_r(x_0) \cap \{x_d = 0\}$.
Đến đây ta có $\bar{u}, v$ là các hàm điều hòa trong $B_r^+(x_0) \cup B_r^-(x_0)$ và

$$\bar{u} = v \text{ trên } \partial B_r^+(x_0) \text{ và } \partial B_r^-(x_0).$$

Do đó ta có ngay đpcm. □

Ta có thể chứng minh tính điều hòa của thác triển lẻ $\bar{u}$ trong Ω bằng cách dùng đặc trưng trung bình hình cầu sau của hàm điều hòa.

Bài tập 2.19. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C(\Omega)$. Giả sử tại mỗi $x \in \Omega$ đều có dãy giảm $r_n > 0, n \in \mathbb{N}$, hội tụ về 0 sao cho với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có $\bar{B}_{r_n}(x) \subset \Omega$ và*

$$u(x) = \frac{1}{|B_{r_n}|}\int_{B_{r_n}(x)} u(y)dy.$$

Khi đó ta có u điều hòa trong Ω.

Ta có thể thay trung bình hình cầu bằng trung bình mặt cầu.
Đối với thác triển lẻ $\bar{u}$ ta có tính trung bình cầu tốt hơn giả thiết trong bài tập trên: Với mỗi $x \in \Omega$ đều tồn tại $r_0 > 0$ sao cho $B_{r_0}(x) \subset \Omega$ và

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)dS_y, \forall 0 < r < r_0.$$

Bài tập 2.20. *Cho $\psi \in C(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Công thức tích phân Poisson $P_{d+}[\psi]$ cho ta nghiệm bị chặn duy nhất của bài toán biên Dirichlet*

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d_+,$$
$$u(x', 0) = \psi(x').$$

Để chuyển sang thác triển chẵn ta cần đến đặc trưng tích phân trên biên sau của hàm điều hòa.
Từ các lập luận trên và Bổ đề 1.3 ta có:

Bài tập 2.21. *Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C^1(\Omega)$. Giả sử tại mỗi $x \in \Omega$ đều có $r_0 > 0$ sao cho $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$ và*

$$\int_{\partial B_r(x)} \partial_\nu u(y) dS_y = 0, \forall 0 < r < r_0.$$

Khi đó ta có u điều hòa trong Ω.

Ta chuyển sang cách thác triển chẵn:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x \in \Omega^+, \\ u(x', -x_d) & \text{khi } x \in \Omega^-. \end{cases}$$

Bài tập 2.22. *Chứng minh rằng $\tilde{u} \in C^1(\Omega)$ khi và chỉ khi*

$$u \in C^1(\Omega^+ \cup \Sigma) \text{ và } \partial_{x_d} u = 0 \text{ trên } \Sigma.$$

Tương tự thác triển lẻ ta có kết quả sau:

Định lý 2.6. *Cho $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\Omega^+ \cup \Sigma)$ là hàm điều hòa trong Ω^+ thỏa mãn $\partial_{x_d} u = 0$ trên Σ. Khi đó thác triển chẵn $\tilde{u}$ là hàm điều hòa trong Ω.*

Chứng minh. Chứng minh kết quả này ta dùng đặc trưng tích phân trên biên (Bài tập 2.21) của hàm điều hòa. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

2.3.2 Điểm bất thường khử được

Nhắc lại nghiệm cơ bản của phương trình Laplace

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_2} \ln |x| & \text{khi } d = 2, \\ \dfrac{1}{(2-d)\omega_n} |x|^{2-d} & \text{khi } d \geq 3. \end{cases}$$

Các nghiệm này thỏa mãn phương trình Laplace tại mọi điểm trừ gốc tọa độ, và chúng đều bị hút ra vô cùng ở gốc. Dưới đây ta sẽ thấy kỳ dị cô lập của hàm điều hòa có thể khử được nếu chúng tốt hơn nghiệm cơ bản tại đó.

Định lý 2.7. *Cho u là hàm điều hòa trong* $B_R \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^d$ *và thỏa mãn*

$$u(x) = o(E(x)) \textit{ nghĩa là } \lim_{|x|\to 0} \frac{u(x)}{E(x)} = 0.$$

Khi đó ta có để định nghĩa hàm u tại gốc để nó trở thành hàm điều hòa trong B_R.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử u liên tục đến mặt cầu B_R. Khi đó công thức tích phân Poisson cho ta nghiệm của bài toán biên Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta v =& 0 \text{ trong } B_R, \\ v =& u \text{ trên } \partial B_R. \end{aligned}$$

Đặt $M = \max_{\partial B_R} |u|$. Theo nguyên lý cực đại ta có

$$|v| \le M \text{ trong } \bar{B}_R.$$

Ta chỉ còn phải chứng minh $u = v$ trong $B_R \setminus \{0\}$. Đặt $\omega = v - u$ và $M_r = \max_{\partial B_r} |\omega|$, $0 < r < R$. Do $\omega = 0$ trên ∂B_R nên

$$-M_r \frac{E(x/R)}{E(r/R)} \le \omega(x) \le M_r \frac{E(x/R)}{E(r/R)} \text{ trên } \partial B_r \cup \partial B_R.$$

Lại có $\omega(x)$ và $CE(x/R)$ là các hàm điều hòa trong $B_R \setminus \bar{B}_r$ nên theo nguyên lý so sánh ta có

$$|\omega(x)| \le M_r \frac{E(x/R)}{E(r/R)} \text{ trong } B_R \setminus \bar{B}_r.$$

Lại có

$$M_r = \max_{\partial B_r} |\omega| \le M + \max_{\partial B_r} |u|$$

nên

$$|\omega(x)| \le M \frac{E(x/R)}{E(r/R)} + \frac{\max_{\partial B_r} |u|}{E(r/R)} E(x/R), r < |x| < R.$$

Cố định $x \in B_R \setminus \{0\}$, lấy $r \in (0, |x|)$ và cho $r \to 0^+$ ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập 2.23. *Giả sử* $u \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R) \cap C(\mathbb{R}^d \setminus B_R)$ *là nghiệm của bài toán*

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 & \textit{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R, \\ u = 0 & \textit{ trên } \partial B_R. \end{aligned}$$

Nếu ở vô cùng u thỏa mãn

- *khi* $d=2$: $\lim_{|x|\to\infty}\dfrac{u(x)}{\ln|x|}=0$;
- *khi* $d\geq 3$: $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=0$;

thì $u\equiv 0$.

Với hàm điều hòa bị chặn dưới Bôcher cho ta kết quả mạnh hơn sau:

Định lý 2.8 (Định lý Bôcher)**.** *Cho* u *là hàm điều hòa bị chặn dưới trong* $B_R\setminus\{0\}$. *Khi đó tồn tại hàm điều hòa* v *trong* B_R *và hằng số dương* b *sao cho, với* $x\in B_R\setminus\{0\}$ *ta có*

$$u(x)=\begin{cases} v(x)+b\ln(R/|x|) & \textit{khi } d=2,\\ v(x)+b|x|^{2-d} & \textit{khi } d\geq 3.\end{cases}$$

Chú ý. Bằng cách xét $u-\inf_{B_R}u$ ta có thể giả sử $u\geq 0$. Sử dụng phép co giãn $u(R\cdot)$ ta có thể giả sử $R=1$. Ngoài ra ta cũng có thể giả sử $u\in C(\bar{B}_1)$.

Để chứng minh Định lý Bôcher ta cần đến trung bình cầu:

$$M[u](x)=I(r)=\frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r}u(y)dS_y=\frac{1}{\omega_d}\int_{\partial B_1}u(ry)dS, r=|x|.$$

Dễ thấy M là ánh xạ tuyến tính trong $C(B_1\setminus\{0\})$. Ngoài ra ta còn có các tính chất:

Bài tập 2.24. *(a)* $M[u]$ *chỉ phụ thuộc vào* $|x|$. *Nếu* $u\in C(B_1\setminus\{0\})$ *và chỉ phụ thuộc* $|x|$ *thì* $M[u]=u$. *Từ đó ta có* $M[M[u]]=M[u]$.
(b) Nếu $u\in C(B_1\setminus\{0\})$ *không âm trên* $B_1\setminus\{0\}$ *thì* $M[u]$ *cũng không âm.*

Bổ đề 2.9. *Giả sử* u *là hàm điều hòa trong* $B_1\setminus\{0\}$. *Khi đó tồn tại các hằng số* a,b *sao cho:*

$$M[u](x)=\begin{cases} a+b\ln|x| \ \textit{khi } d=2,\\ a+b|x|^{2-d} \ \textit{khi } d\geq 3.\end{cases}$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.3 ta có:

$$I'(r)=\frac{1}{r^{d-1}\omega_d}\int_{\partial B_r}\partial_\nu u(y)dS,$$

trong đó $\nu = \nu_y$ là pháp tuyến ngoài, đơn vị trên mặt cầu ∂B_r.
Lại có u điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$ nên với $0 < r_1 < r_2 < 1$, sử dụng công thức (1.1) ta có

$$0 = \int_{B_{r_2} \setminus \bar{B}_{r_1}} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_{r_2}} \partial_\nu u(y)dS - \int_{\partial B_{r_1}} \partial_\nu u(y)dS.$$

Từ đây không khó để thấy đpcm. □

Chú ý. Từ Chứng minh của Bổ đề 2.9 cho ta cách khác tìm hàm điều hòa $u(x)$ trong $B_R \setminus \{0\}$ chỉ phụ thuộc $|x|$.

Tiếp tục giả sử u là hàm điều hòa không âm trong $B_1 \setminus \{0\}$. Sử dụng Bài tập 1.28 ta có hằng số $c_0 \in (0, 1)$ sao cho

$$c_0 u(y) \le u(x), \forall x \in \partial B_r, \forall 0 < r \le 1/2.$$

Do đó $u(x) - c_0 M[u](x) \ge 0, \forall x \in \bar{B}_{1/2} \setminus \{0\}$.

Bổ đề 2.10. *Giả sử thêm $u(x) = 0$ trên ∂B_1. Khi đó $u = M[u]$ trong B_1.*

Chứng minh. **B1: Chứng minh $u - c_0 M[u] \ge 0$ trong $B_1 \setminus \{0\}$.**
Do $u - c_0 M[u] \ge 0$ trong $\bar{B}_{1/2} \setminus \{0\}$. Từ giả thiết ta có $u - M[u] = 0$ trên ∂B_1. Mà $u, M[u]$ là các hàm điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$ nên theo nguyên lý cực đại ta có đpcm.
B2: Chứng minh $u - M[u] \ge 0$ trong $B_1 \setminus \{0\}$.
Đặt $u_1 = u - c_0 M[u]$. Ta có u_1 là hàm điều hòa không âm trong $B_1 \setminus \{0\}$ nên tương tự trên ta có

$$u_1 - c_0 M[u_1] = u - c_0(2 - c_0)M[u] \ge 0 \text{ trong } B_1 \setminus \{0\}.$$

Cứ tiếp tục như trên ta có dãy $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ xác định bởi:

$$c_0 \in (0, 1), c_{n+1} = c_n(2 - c_n),$$

sao cho $u - c_n M[u] \ge 0$ trong $B_1 \setminus \{0\}$.
Không khó để thấy dãy $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tăng đến 1 nên ta có đpcm.
B3: Chứng minh $u = M[u]$ trong $B_1 \setminus \{0\}$.
Giả sử có $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$ sao cho $u(x_0) > M[u](x_0)$. Khi đó có $r > 0$ sao cho

$$B_r(x_0) \subset B_1 \setminus \{0\}, \text{ và } u(x) > M[u](x), \forall x \in B_r(x_0).$$

Do đó ta có

$$M[u](x_0) > M[M[u]](x_0) = M[u](x_0) \text{ (vô lý).}$$

Vậy điều giả sử sai hay ta có đpcm. $\square$

Chứng minh Định lý Bôcher. Từ công thức nghiệm Poisson ta có hàm $v \in C(\bar{B}_1)$ điều hòa trong B_1 thỏa mãn $v\Big|_{\partial B_1} = u\Big|_{\partial B_1}$.

Ta có thể điều chỉnh các hằng số A, B để hàm $AE(x) + B$ là hàm điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$, bằng 0 trên ∂B_1 và tiến ra $+\infty$ khi $|x| \to 0$.

Xét hàm

$$w = u - v + AE(x) + B$$

là hàm điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$, bằng 0 trên ∂B_1 và tiến ra $+\infty$ khi $|x| \to 0$. Do đó theo nguyên lý cực đại mạnh $w \geq 0$. Theo Bổ đề 2.10 ta có đpcm. $\square$

Từ Định lý Bôcher ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.11. *Khi $d \geq 3$, cho u là hàm điều hòa bị chặn dưới trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Khi đó tồn tại các hằng số a, b trong đó ($b > 0$) sao cho*

$$u(x) = a + b|x|^{2-d}, \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Chú ý. Khi $d = 2$, chỉ có hàm hằng là hàm điều hòa bị chặn dưới trong $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Chứng minh. Theo Định lý Bôcher tồn tại hàm v điều hòa trong B_1 và hằng số $b > 0$ sao cho

$$u(x) = v(x) + b|x|^{2-d}, \forall x \in B_1 \setminus \{0\}.$$

Mở rộng $v(x) = u(x) - b|x|^{2-d}$ ngoài B_1 ta được hàm điều hòa trên toàn $\mathbb{R}^d$. Do u bị chặn dưới nên v cũng bị chặn dưới. Khi đó theo Liouville $v \equiv a$ là hằng số. Như vậy ta có đpcm. $\square$

Bài tập 2.25. *Khi $d \geq 3$ ta có thể thay điều kiện bị chặn dưới trong Định lý Bôcher cũng như hệ quả trên bởi*

$$\liminf_{x \to 0} |x|^{d-2} u(x) = M > -\infty.$$

2.3.3 Biến đổi Kelvin

Trong quá trình tìm hàm Green trong hình cầu ta đã gặp phép nghịch đảo qua mặt cầu ∂B_R:

$$K : x \mapsto X = K(x) = \frac{R^2}{|x|^2}x.$$

Phép nghịch đảo là song ánh trên $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ và ánh xạ ngược của nó chính là nó. Nó biến điểm gốc thành điểm vô cùng, điểm trong B_R khác gốc thành điểm ngoài B_R và bất biến trên mặt cầu ∂B_R. Ngoài ra ta có một số tính chất đơn giản khác của phép nghịch đảo:

(i) K biến mỗi mặt cầu tâm tại gốc thành mặt cầu tâm tại gốc, cụ thể

$$K(\partial B_r) = \partial B_{R^2/r}, \forall r > 0.$$

(ii) K biến mỗi mặt cầu đi qua tâm $B_r(x), |x| = r > 0$, thành siêu phẳng vuông góc với $0x$ và đi qua điểm $\frac{R^2}{2|x|^2}x$, và ngược lại.

(iii) K biến các siêu phẳng đi qua tâm thành chính nó. Chi tiết hơn nó biến các đường thẳng đi qua tâm thành chính nó.

Bài tập 2.26. *Chứng minh các $K \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Hơn nữa, với $j, k = 1, 2, \cdots, d$, ta có:*

$$\partial_{x_j} K_k(x) = \frac{R^2(\delta_{jk}|x|^2 - 2x_j x_k)}{|x|^4},$$
$$\partial^2_{x_j} K_k = -\frac{2R^2((2\delta_{jk}x_j + x_k)|x|^2 - 4x_j^2 x_k)}{|x|^6}.$$

Ngoài ra, với mỗi tập compact $F \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ta có $K(F)$ cũng compact trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Và với mỗi tập mở $G \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ta có $K(G)$ cũng mở trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Cho Ω là tập mở, không chứa gốc trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C^2(\Omega)$. Biến đổi Kelvin

$$K : u \mapsto K[u] = R^{d-2}|x|^{2-d}u(K(x)) \in C^2(K(\Omega)).$$

Dễ thấy K là ánh xạ tuyến tính từ $C^2(\Omega)$ vào $C^2(K(\Omega))$.

Ví dụ 2.3. Cho p là đa thức thuần nhất bậc m trên $\mathbb{R}^d$. Khi đó biến đổi Kelvin của đa thức này:

$$K[p](x) = R^{d-2}|x|^{2-d}p\left(\frac{R^2}{|x|^2}x\right) = R^{d+2m-2}|x|^{2-d-2m}p(x).$$

Bài tập 2.27. *Chứng minh các đẳng thức sau:*

(a) $K[P_B(\cdot, y)](x) = -P_B(x, y), \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0, y\}, y \in \partial B.$

(b) $K[u](x) = \dfrac{R^{d-2}\omega_d}{2}K_{d+}(x, 0)$ *với* $x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d_+$ *và* $u(x', x_d) = x_d$.

Bài tập 2.28. *Cho* $s \in \mathbb{R}$, Ω *là tập mở, không chứa gốc trong* $\mathbb{R}^d$ *và* $u \in C^2(\Omega)$. *Khi đó trong* Ω *ta có:*

(i) $\partial_{x_j}(|x|^s) = sx_j|x|^{s-2}$ *và* $\Delta(|x|^s) = s(s+d-2)|x|^{s-2}$. *Đặc biệt* $\Delta(|x|^{2-d}) = 0$.

(ii) $x \cdot \nabla(|x|^s u(x)) = |x|^s(su(x) + x \cdot u(x))$. *Đặc biệt*

$$x \cdot \nabla(K[u](x)) = |x|^{2-d}((2-d)u(K(x)) + x \cdot \nabla(u(K(x))).$$

(iii) $\Delta(|x|^s u(x)) = s(s+d-2)|x|^{s-2}u(x) + |x|^s\Delta u(x) + 2s|x|^{s-2}x \cdot \nabla u(x)$. *Đặc biệt với* $s = 2-d$ *ta có*

$$\Delta(K[u])(x) = R^{d-2}\left(|x|^{2-d}\Delta(u((K(x))) + 2(2-d)|x|^{-d}x \cdot \nabla(u(K(x)))\right).$$

Do đó với mỗi tập compact $F \subset K(\Omega)$, *đều có hằng số* $C = C(d, K)$ *sao cho*

$$||K[u] - K[v]||_{C^2(F)} \le C||u - v||_{C^2(K(F))}.$$

Bài tập 2.29. *Cho* p *là đa thức thuần nhất bậc* m *và* $s \in \mathbb{R}$. *Khi đó ta có:*

(i) $x \cdot \nabla p = mp$ *trong* $\mathbb{R}^d$

(ii) $\Delta(|x|^s p(x)) = |x|^s\Delta p(x) + s(s+d+2m-2)|x|^{s-2}p(x), \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Như vậy, nếu p là đa thức thuần nhất bậc m thì trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ta có

$$\Delta(K[p])(x) = R^{d+2m-2}|x|^{2-d-2m}\Delta p(x). \tag{2.9}$$

Chú ý rằng $\Delta p(x)$ là đa thức thuần nhất bậc $m-2$ nên

$$\Delta(K[p])(x) = K[|x|^4\Delta p](x), \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{2.10}$$

Do đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2.12. *Cho p là đa thức trong $\mathbb{R}^d$. Khi đó $K[p]$ điều hòa trong $\mathbb{R}^{d-1}$ khi và chỉ khi p điều hòa trong $\mathbb{R}^d$.*

Chứng minh. Do đa thức p là tổ hợp tuyến tính của các đa thức thuần nhất nên chứng minh phần này dễ dàng có được từ các lập luận trên. Chi tiết xem như bài tập. □

Để đi tiếp ta viết lại (2.9) như sau:

$$\Delta(K[p])(x) = R^{d+2}|x|^{-d-2}(\Delta p)(K(x)) \tag{2.11}$$

Sử dụng kết quả xấp xỉ trong Bài tập 2.28 ta có kết quả sau:

Định lý 2.13. *Cho Ω là tập mở, không chứa gốc trong $\mathbb{R}^d$ và $u \in C^2(\Omega)$. Khi đó*

$$(\Delta K[u])(x) = R^{d+2}|x|^{-d-2}(\Delta u)(K(x)), \forall x \in K(\Omega).$$

Như vậy biến đổi Kelvin bảo toàn tính điều hòa, nói cách khác biến đổi Kelvin K là đẳng cấu tuyến tính, liên tục từ $H(\Omega)$ vào $H(K(\Omega))$.

Ta cũng có thể chứng minh kết quả trên bằng các tính toán cụ thể sau:

Bài tập 2.30. *Chứng minh các đẳng thức sau:*

(i) $x \cdot \nabla K_k(x) = -R^2 x_k/|x|^2, k = \overline{1, d}$. *Do đó*

$$2(2-d)|x|^{-d} x \cdot \nabla(u(K(x))) = \frac{2(d-2)R^2}{|x|^{d+2}} x \cdot (\nabla u)(K(x)).$$

(ii) $x \cdot \nabla(u(K(x)) = -\dfrac{R^2}{|x|^2}(x \cdot \nabla u(K(x)).$

(iii) $\Delta K_k(x) = 2(2-d)R^2 x_k/|x|^4, k = \overline{1, d}$ *và*

$$\nabla K_k(x) \cdot \nabla K_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } k \neq \ell, \\ R^4|x|^{-4} & \text{khi } k = \ell. \end{cases}$$

Do đó

$$\Delta(u(K(x)) = \frac{R^4}{|x|^4}(\Delta u)(K(x)) + \frac{2(2-d)R^2}{|x|^4} x \cdot (\nabla u)(K(x)).$$

Từ đây dùng Bài tập 2.28 ta chứng minh được Định lý trên.
Sử dụng biến đổi Kelvin giúp ta chuyển bài toán biên Dirichlet trên tập không bị chặn thành bài toán biên Dirichlet trên tập bị chặn. Cụ thể như sau: Xét Ω là tập mở, chứa gốc và bị chặn trong $\mathbb{R}^d$. Xét bài toán biên Dirichlet:

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \tag{2.12}$$

$$u = \psi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{2.13}$$

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-d} \text{ khi } |x| \to \infty. \tag{2.14}$$

Do $0 \in \Omega$ và Ω mở nên có $R > 0$ sao cho $\bar{B}_R \subset \Omega$. Xét phép biến đổi Kelvin qua mặt cầu ∂B_R ta có $K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$ là tập mở trong B_R mà gốc là điểm biên của nó. Ngoài ra do Ω bị chặn nên có $R_0 > R$ sao cho $\Omega \subset B_{R_0}$. Khi đó ta có:

$$B_{R^2/R_0} \setminus \{0\} = K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R) \subset K(\mathbb{R}^d \setminus \Omega).$$

Như vậy nếu u thỏa mãn (2.12) thì $K[u]$ điều hòa trong $K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$. Nếu thêm điều kiện ở vô cùng (2.14) thì $K[u]$ là hàm điều hòa trong $B_{R^2/R_0} \setminus \{0\}$ thỏa mãn, khi $|x| \to 0$ thì

$$|K[u](x)| \leq C.$$

Như vậy theo Định lý về khử kỳ dị ta có thể xem $K[u]$ như hàm điều hòa trong B_{R^2/R_0} hay trong $K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) \cup \{0\}$. Nói cách khác qua biến đổi Kelvin bài toán biên Dirichlet ngoài Ω trở thành bài toán

$$\Delta K[u] = 0 \text{ trong } K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) \cup \{0\}, \tag{2.15}$$

$$K[u] = K[\psi] \text{ trên } K(\partial\Omega), \tag{2.16}$$

là bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace trong $K(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) \cup \{0\}$ là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$. Từ đây và kết quả về tính duy nhất của bài toán biên Dirichlet trong tập mở, bị chặn ta có kết quả sau:

Định lý 2.14. *Bài toán biên Dirichlet* (2.12)-(2.14) *có duy nhất nghiệm.*

Bài tập 2.31. *Ta có thể thay điều kiện* (2.14) *bởi điều kiện sau:*

(i) Khi $d = 2$*:* $\lim_{|x|\to\infty} \dfrac{u(x)}{\ln|x|} = 0.$

(ii) Khi $d \geq 3: \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$

Bài tập 2.32. *Chứng minh rằng, trong trường hợp đặc biệt* $\Omega = B_R$, *ta có công thức nghiệm Poisson cho bài toán biên Dirichlet* (2.12)-(2.14)

$$u(x) = \frac{1}{R\omega_d}\int_{\partial B_R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^d}\psi(y)dS_y = -\int_{\partial B_R} K_B(x,y)\psi(y)dS_y, x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R.$$

Bài tập 2.33. *Cho* Ω *là tập mở, bị chặn trong* $\mathbb{R}^d$. *Giả sử* u *điều hòa trong* $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$. *Chứng minh rằng có các số dương* C, R *sao cho:*

(i) khi $d = 2$:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}, \forall |x| > R;$$

(ii) khi $d \geq 3$:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{d-1}}, \forall |x| > R.$$

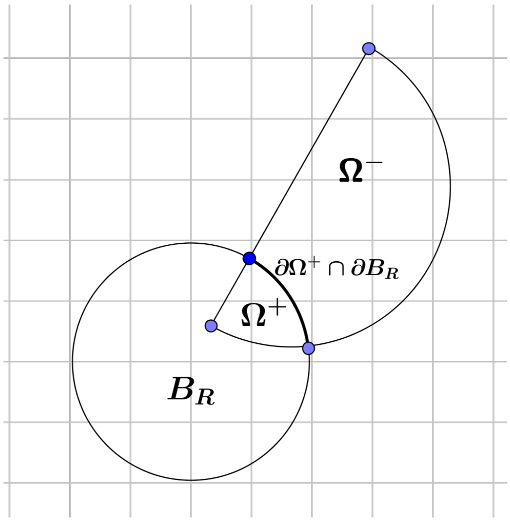
Từ đây chứng minh bài toán biên Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \ &\textit{trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \\ \partial_\nu u = \psi \ &\textit{trên } \partial\Omega, \\ |u(x)| \leq C|x|^{2-d} \ &\textit{khi } |x| \to \infty, \end{aligned}$$

(i) khi $d = 2$: *nếu có nghiệm thì các nghiệm sai khác nhau hằng số trên từng thành phần liên thông;*

(ii) khi $d \geq 3$: *nếu có nghiệm thì các nghiệm sai khác nhau hằng số trên từng thành phần liên thông bị chặn.*

Bài tập 2.34. *Cho* $\Omega^+ \subset B_R$ *là tập mở sao cho* $\partial\Omega^+ \cap \partial B \neq \emptyset$.



Đặt

$$\Omega^- = K(\Omega^+), \Omega = int(\Omega^+ \cup \Omega^- \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial B)).$$

Giả sử $\Sigma = (\partial\Omega^+ \cap \partial B) \cap \Omega \neq \emptyset$ *và* $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\Omega^+ \cup \Sigma)$ *điều hòa trong* Ω^+.

(a) *Giả sử thêm* $u = 0$ *trên* Σ. *Chứng minh rằng thác triển*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x \in \Omega^+ \cap \Sigma, \\ -K[u](x) & \text{khi } x \in \Omega^- \end{cases}$$

là hàm điều hòa trong Ω.

(b) *Khi* $d = 2$, *giả sử thêm* $u \in C^1(\Omega^+ \cup \Sigma)$ *và* $\partial_\nu u = 0$ *trên* Σ. *Chứng minh rằng thác triển*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{khi } x \in \Omega^+ \cap \Sigma, \\ K[u](x) & \text{khi } x \in \Omega^- \end{cases}$$

là hàm điều hòa trong Ω.

(c) *Hỏi khi* $d \geq 3$ *ta có được (b) hay không?*

Chương 3

Không gian Hardy

3.1 Không gian Hardy trên nửa không gian

3.1.1 Định nghĩa - Tính chất

Định nghĩa 3.1. Cho $0 < p \leq \infty$, không gian Hardy trên nửa không gian $H^p(\mathbb{R}^d_+)$ gồm các hàm $u : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{C}$ điều hòa thỏa mãn

(i) $\sup\limits_{x_d>0} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x', x_d)|^p dx' < \infty$, khi $0 < p < \infty$;

(ii) $\sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} |u(x)| < \infty$, khi $p = \infty$.

Bài tập 3.1. *(a) Khi $1 \leq p \leq \infty$, chứng minh rằng $H^p(\mathbb{R}^d_+)$ là không gian định chuẩn với chuẩn*

(i) $||u||_{H^p} = \sup\limits_{x_d>0} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x', x_d)|^p dx'\right)^{1/p}$, *khi* $0 < p < \infty$;

(ii) $||u||_{H^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} |u(x)|$, *khi* $p = \infty$.

(b) Khi $0 < p < 1$ ta không có kết quả như trên. Tại sao?

Bài tập 3.2. *Cho $u \in H^p(\mathbb{R}^d_+), 1 \leq p < \infty$. Chứng minh rằng*

$$|u(x', x_d)| \leq x_d^{-n/p}(2d/\omega_d)^{1/p}||u||_{H^p}, \forall x_d > 0.$$

Từ đây ta có $H^p(\mathbb{R}^d_+), 1 \leq p \leq \infty$, là các không gian định chuẩn đầy đủ hay không gian Banach.

Nhắc lại nhân Poisson trong nửa không gian $\mathbb{R}^d_+$:

$$K_{d+}(x, y') = \frac{2x_d}{\omega_d |x - y|^d}, x, y \in \mathbb{R}^d, y = (y', 0).$$

Bài tập 3.3. *Chứng minh các khẳng định sau:*

(a) $K_{d+}(x', x_d, y') = K_{d+}(y', x_d, x'), \forall x', y' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0.$

(b) Với $x \in \mathbb{R}^d_+, \delta > 0$ *có*

$$||K_{d+}(x, \cdot)||_p \leq (\omega_d x_d^{d-1})^{1/p-1}, 1 \leq p \leq \infty, \tag{3.1}$$

$$\int_{|x'-y'|>\delta} |K_{d+}(x, y')|^p dy' \leq (C(\delta) x_d)^p, 1 \leq p < \infty. \tag{3.2}$$

(c) $K_{d+}(x, y'), y' \in \mathbb{R}^{d-1}$ *cố định, thuộc* $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ *và không thuộc* $H^p(\mathbb{R}^d_+)$ *với mọi* $1 < p \leq \infty$.

Từ (3.1) ta có tích phân Poisson cho $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p \leq \infty$,

$$P_{d+}[\psi](x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y') \psi(y') dy'.$$

Bài tập 3.4. *Cho* $u \in H^p(\mathbb{R}^d_+), 1 \leq p \leq \infty$. *Chứng minh rằng, với* $s > t > 0$ *ta có*

$$u(x', s) = P_{d+}[u(\cdot, t)](x', s - t), \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Như đã biết, khi $\psi \in C(\mathbb{R}^{d-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$ ta có các khẳng định sau:

(i) $P_{d+}[\psi]$ là hàm điều hòa trong $\mathbb{R}^d_+$, bị chặn bởi

$$|P_{d+}[\psi](x)| \leq ||\psi||_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^d_+.$$

Do đó $P_{d+}[\psi] \in H^\infty(\mathbb{R}^d_+)$.

(ii) $P_{d+}[\psi](\cdot, x_d)$ hội tụ đều trên từng compact đến ψ khi $x_d \to 0_+$. Do đó nếu $\psi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ thì

$$\lim_{x_d \to 0_+} ||P_{d_+}[\psi](\cdot, x_d) - \psi||_\infty = 0.$$

Chú ý rằng đối ngẫu của $C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ là $M(\mathbb{R}^{d-1})$ không gian các độ đo Borel phức trên $\mathbb{R}^{d-1}$. Từ đây ta có kết quả sau:

Định lý 3.1. *Cho* $\mu \in M(\mathbb{R}^{d-1})$. *Khi đó*

$$P_{d+}[\mu](x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')d\mu(y')$$

thuộc không gian $H^1(\mathbb{R}^d_+)$. *Ngoài ra ta còn có*

$$\lim_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} P_{d_+}[\mu](x', x_d)\phi(x')dx' = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(x')d\mu(x'), \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Hơn nữa ta có

$$||P_{d+}[\mu]||_{H^1} = ||\mu||_{M(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính điều hòa của $P_{d+}[\mu]$ qua hai bước:

B1. Chứng minh $P_{d+}[\mu]$ liên tục.

B2. Chứng minh $P_{d+}[\mu]$ thỏa mãn tính chất trung bình cầu.

B1. Cố định điểm $\bar{x} \in \mathbb{R}^d_+$, ta sẽ chứng minh $P_{d+}[\mu]$ liên tục tại $\bar{x}$. Đặt $r = \bar{x}_d/2 > 0$. Lấy $R > 2r$ đủ lớn (chọn sau). Khi đó nhân $K_{d+}(x, y')$ liên tục trên tập compact

$$\bar{B}_r(\bar{x}) \times \{y' \in \mathbb{R}^{d-1} : \ |y' - \bar{x}'| \le R\}$$

nên nó liên tục đều trên đó.
Ngoài ra, khi $x \in \bar{B}_r(\bar{x})$ và $|y' - x'| > R$ thì

$$|y' - x'| > \frac{|y' - \bar{x}'|}{2} \text{ hay } K_{d+}(x, y') \le \frac{2^d 3\bar{x}_d}{\omega_d |y' - \bar{x}'|^d}.$$

Cố định $\epsilon > 0$. Chọn $R > 2r$ đủ lớn để

$$|\int_{|y'-\bar{x}'|>R} K_{d+}(x, y')d\mu(y')| \le \frac{2^d 3\bar{x}_d}{\omega_d} \left| \int_{|y'-\bar{x}'|>R} |y' - \bar{x}'|^{-d} d\mu(y') \right| \le \epsilon, \forall x \in \bar{B}_r(\bar{x}).$$

Dùng tính liên tục đều của K_{d+} tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|K_{d+}(x, y') - K_{d+}(\bar{x}, y')| \le \epsilon, \forall x \in B_\delta(\bar{x}), |y' - \bar{x}'| \le R.$$

Từ đây không khó để thấy $P_{d+}[\mu]$ liên tục tại $\bar{x}$.

B2. Chú ý rằng, với bất kỳ hình cầu đóng $\bar{B} \subset \mathbb{R}^d_+$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |d\mu(y')| \int_B K(x,y')dx < +\infty$$

nên ta có thể dùng Fubini-Tonelli. Khi đó dùng tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa $K(\cdot, y'), y' \in \mathbb{R}^{d-1}$ cố định, ta có tính chất trung bình cầu của $P_{d+}[\mu]$.

Tiếp đến ta để ý:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |d\mu(y')| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x,y')dx' = |\mu|(\mathbb{R}^{d-1}) < +\infty, \forall x_d > 0$$

nên dùng Fubini-Tonelli ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |P_{d+}[\mu](x)|dx' \leq |\mu|(\mathbb{R}^{d-1}) = ||\mu||_{M(\mathbb{R}^{d-1})}, \forall x_d > 0.$$

Do đó ta có $P_{d+}[\mu] \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ và

$$||P_{d+}[\mu]||_{H^1} \leq ||\mu||_{M(\mathbb{R}^{d-1})}. \tag{3.3}$$

Tương tự trên với để ý khi $\phi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |d\mu(y')| \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x,y')|\phi(x')|dx' = |\mu|(\mathbb{R}^{d-1})||\phi||_\infty < +\infty, \forall x_d > 0$$

nên dùng Fubini-Tonelli và $K(x, y' = K(y', x_d, x'))$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(x') \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x,y')d\mu(y') \right) dx' = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} P_{d+}[\phi](y', x_d)d\mu(y'), \forall x_d > 0.$$

Do $\phi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ nên

$$\lim_{x_d \to 0_+} ||P_{d+}[\phi](\cdot, x_d) - \phi||_\infty = 0.$$

Do đó ta có

$$\lim_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(x') \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x,y')d\mu(y') \right) dx' = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(y')d\mu(y')$$

hay $P_{d+}[\mu](\cdot, x_d)$ hội tụ yếu* đến μ.

Lại có

$$|\int_{\mathbb{R}^{d-1}} P_{d+}[\mu](x', x_d)\phi(x')dx'| \leq ||\phi||_\infty ||P_{d+}[\mu]||_{H^1}$$

nên từ (3.3) ta có

$$||P_{d+}[\mu]||_{H^1} = ||\mu||_{M(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Ta hoàn thành chứng minh. $\square$

Tiếp theo ta có kết quả sau:

Định lý 3.2. *Cho* $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \le p \le \infty$. *Khi đó* $P_{d+}[\psi] \in H^p(\mathbb{R}^d_+)$. *Ngoài ra ta còn có:*

(i) Khi $1 \le p < \infty$ *thì*

$$\lim_{x_d \to 0_+} ||P_{d_+}[\psi](\cdot, x_d) - \psi||_p = 0.$$

(ii) Khi $p = \infty$ *thì*

$$\lim_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(P_{d_+}[\psi](x', x_d) - \psi(x')\right) \phi(x') dx' = 0, \forall \phi \in L^1(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Hơn nữa ta có

$$||P[\psi]||_{H^p} = ||\psi||_p.$$

Chứng minh. Trước tiên ta cũng chứng minh tính điều hòa của $P_{d+}[\psi]$ qua hai bước như chứng minh của Định lý 3.1.

B1. Cố định $\bar{x} \in \mathbb{R}^d_+$. Đặt $r = x_d/2 > 0$ và $R > 2r$ đủ lớn (chọn sau). Với $x \in \bar{B}_r(\bar{x})$, dùng bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |(K_{d+}(x, y') - K_{d+}(\bar{x}, y'))\psi(y')| dy' \le ||K_{d+}(x, \cdot) - K_{d+}(\bar{x}, \cdot)||_{p'} ||\psi||_p,$$

trong đó $1/p' + 1/p = 1$.

Cố định $\epsilon > 0$. Tương tự chứng minh Định lý 3.1 tồn tại $R > 2r$ sao cho

$$||K_{d+}(x, \cdot)||_{L^{p'}(\mathbb{R}^{d-1} \setminus B_R(\bar{x}))} \le \epsilon, \forall x \in \bar{B}_r(\bar{x}).$$

Lại dùng tính liên tục đều của K_{d+} tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$||K_{d+}(x, \cdot) - K_{d+}(\bar{x}, \cdot)||_{L^p(B_R(\bar{x}))} \le \epsilon, \forall x \in B_\delta(\bar{x}).$$

Từ đây ta có tính liên tục của $P_{d+}[\psi]$ tại $\bar{x}$. **B1** được chứng minh.

B2. Lấy $\bar{B}_r(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^d_+$ có $a = x_d - r > 0$. Để dùng được Fubini-Tonelli như chứng minh tính chất trung bình cầu của Định lý 3.1 ta cần đến

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x,y')|\psi(y')|dy' &\leq ||K_{d+}(x,\cdot)||_{p'}||\psi||_p\\ &\leq (\omega_d a^{d-1})^{-1/p}||\psi||_p \quad \text{(theo (3.1))}.\end{aligned}$$

Từ đây ta chứng minh được tính chất trung bình cầu của $P_{d+}[\psi]$.

Tiếp theo trường hợp $p = \infty$ chứng minh tương tự như Định lý 3.1. Chi tiết chứng minh xem như bài tập.

Khi $1 \leq p < \infty$, với chú ý $||K_{d+}(x,\cdot)||_1 = 1$ nên dùng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x,y')|\psi(y')|dy' \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x,y')|\psi(y'|^p dy'\right)^{1/p}, \forall x_d > 0.$$

Do đó ta có

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |P_{d+}[\psi](x)|^p dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\psi(y')|^p dy', \forall x_d > 0$$

hay $P_{d+}[\psi] \in H^p(\mathbb{R}^d_+)$ và

$$||P_{d+}[\psi]||_{H^p} \leq ||\psi||_p. \tag{3.4}$$

Từ (3.4) ta chỉ còn phải chứng minh

$$\lim_{x_d \to 0_+} ||P_{d+}[\psi](\cdot, x_d) - \psi||_p = 0. \tag{3.5}$$

Để chứng minh điều này ta viết lại

$$\begin{aligned}P_{d+}[\psi](x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(0,x_d,y')\psi(x'+y')dy',\\ P_{d+}[\psi](x) - \psi(x') &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(0,x_d,y')(\psi(x'+y') - \psi(x'))dy'.\end{aligned}$$

Tương tự trên ta có

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |P_{d+}[\psi](x) - \psi(x')|^p dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(0,x_d,y')|\psi(x'+y') - \psi(x')|^p dy'\right) dx'\\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(0,x_d,y') \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\psi(x'+y') - \psi(x')|^p dx'\right) dy'.\end{aligned}$$

Đến đây sử dụng các kết quả:

- $\lim_{|y'|\to 0}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}|\psi(x'+y')-\psi(x')|^p dx' = 0$;
- với $\delta > 0$ cố định, $\lim_{x_d\to 0_+}\int_{|y'|>\delta}K(0,x_d,y')dy' = 0$; (theo (3.2))

ta có đpcm. □

Bài tập 3.5. *Hãy chứng minh* (3.5) *theo lược đồ sau:*

(i) Chứng minh $||P_{d+}[\psi](\cdot,x_d)||_p \leq ||\psi||_p, \forall x_d > 0, 1 \leq p < \infty$.

(ii) Dùng $C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ *trù mật trong* $L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p < \infty$, *và (i) ta chỉ cần chứng minh* (3.5) *cho* $\psi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$. *Khi đó tồn tại* $R_0 > 0$ *để* $\operatorname{supp}\psi \subset B_{R_0}$. *Cố định* $\epsilon > 0$, *chứng minh rằng có* $R > 2R_0$ *đủ lớn để, với mọi* $x_d > 0$,

$$\int_{|x'|>R}|P_{d+}[\psi](x',x_d)-\psi(x')|^p dx' = \int_{|x'|>R}\left(\int_{|y'|<R_0}K(x,y')|\psi(y')|dy'\right)^p dx' < \epsilon.$$

(iii) Do $\psi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ *nên*

$$\lim_{x_d\to 0_+}||P_{d+}[\psi](\cdot,x_d)-\psi||_\infty = 0.$$

Từ đây ta có thể dẫn đến đpcm.

3.1.2 Đặc trưng

Định lý 3.1 cho ta thấy P_{d+} là đơn ánh, bảo toàn chuẩn từ $M(\mathbb{R}^{d-1})$ vào $H^1(\mathbb{R}^d_+)$. Ta sẽ thấy P_{d+} là đẳng cấu giữa hai không gian này. Cụ thể ta có kết quả sau:

Định lý 3.3. *Cho* $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$. *Khi đó tồn tại duy nhất độ đo* $\mu \in M(\mathbb{R}^{d-1})$ *sao*

$$u = P_{d+}[\mu].$$

Chứng minh. Lấy dãy $s_j, j \in \mathbb{N}$, giảm thực sự về 0. Do $u \in H^1(\mathbb{R}^{d-1})$ nên dãy $\{u(\cdot,s_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ bị chặn trong $L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ hay $M(\mathbb{R}^{d-1})$. Khi đó theo Banach-Alaoglu có một dãy con, không mất tính tổng quát ta ký hiệu luôn là dãy này, hội tụ yếu* đến $\mu \in M(\mathbb{R}^{d-1})$.

Ta còn phải chứng minh $u = P_{d+}[\mu]$.

Cố định $x \in \mathbb{R}^d_+$ và $\epsilon > 0$. Sử dụng Bài tập 3.4 và tính liên tục của u trong $\mathbb{R}^d_+$ ta chỉ cần chứng minh

$$\limsup_{j\to\infty} |P_{d+}[u(\cdot, s_j)](x) - P_{d+}[\mu](x)| < \epsilon. \tag{3.6}$$

Với $|y'| > 2(|x'| + 1)$ ta có

$$|x' - y'| > |y'|/2 \text{ hay } K(x, y') < \frac{2^{d+1}x_d}{\omega_d |y'|^d}.$$

Do đó tồn tại $R > 2(|x'| + 1)$ đủ lớn sao cho

$$\int_{|y'|>R} K(x, y')|u(y', s_j)|dy' \le \frac{2^{d+1}x_d}{\omega_d R^d}||u||_{H^1} < \epsilon/3, \tag{3.7}$$

$$\int_{|y'|>R} K(x, y')d|\mu(y')| \le \frac{2^{d+1}x_d}{\omega_d R^d}||\mu||_{M(\mathbb{R}^{d-1})} < \epsilon/3. \tag{3.8}$$

Lấy hàm $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ thỏa mãn

- $0 \le \phi \le 1$,
- $\phi = 1$ trong B_R và $\phi = 0$ ngoài B_{R+1}.

Khi đó $\phi K(x, \cdot) \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$. Do $u(\cdot, s_j)$ hội tụ yếu* đến μ nên tồn tại $j_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(y')K(x, y')u(y', s_j)dy' - \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(y')K(x, y')d\mu(y')| < \epsilon/3, \forall j \ge j_0. \tag{3.9}$$

Từ (3.7)-(3.8)-(3.9) ta có (3.6) hay đpcm. □

Định lý 3.2 cho ta thấy P_{d+} là đơn ánh, bảo toàn chuẩn từ $L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 < p \le \infty$, vào $H^p(\mathbb{R}^d_+)$. Ta sẽ thấy P_{d+} là đẳng cấu giữa hai không gian này. Cụ thể ta có kết quả sau:

Định lý 3.4. *Cho $u \in H^p(\mathbb{R}^d_+), 1 < p \le \infty$. Khi đó tồn tại duy nhất hàm $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ sao*

$$u = P_{d+}[\psi].$$

Nhận xét. $P_{d+}(L^1(\mathbb{R}^{d-1}))$ là không gian con thực sự của $H^1(\mathbb{R}^d_+)$.

Chứng minh. Tương tự chứng minh Định lý 3.3, lấy dãy $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ giảm thực sự về 0. Do $u \in H^1(\mathbb{R}^{d-1})$ nên dãy $\{u(\cdot, s_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ bị chặn trong $L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 < p \leq \infty$. Khi đó theo Banach-Alaoglu có một dãy con, không mất tính tổng quát ta ký hiệu luôn là dãy này,

(i) khi $1 < p < \infty$, hội tụ yếu đến $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1})$,

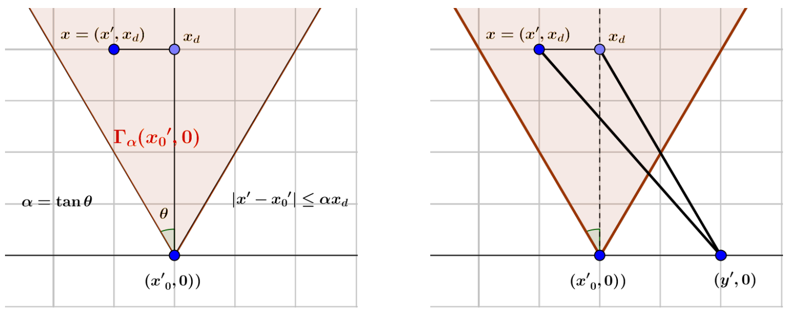
(ii) khi $p = \infty$, hội tụ yếu* đến $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$.

Đến đây sử dụng Bài tập 3.3 và 3.4 □

3.1.3 Giới hạn không tiếp xúc

Để hiểu giới hạn không tiếp xúc ta cần nón. Cụ thể, nón với đỉnh $(x_0', 0), x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, và góc mở $\alpha > 0$ được xác định bởi

$$\Gamma_\alpha(x_0', 0) = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d_+ :\ |x' - x_0'| \leq \alpha x_d\}.$$



Bài tập 3.6. *Cho $x_0' \in \mathbb{R}^{d-1}, \alpha > 0$ và $x \in \Gamma_\alpha(x_0', 0)$. Chứng minh rằng*

$$K_{d+}(x, y') \leq \frac{1}{(1+\alpha)^d} K_{d+}(x_0', x_d, y'), \forall y' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Định lý 3.5. *Cho $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p \leq \infty$ và $\alpha > 0$ cố định. Khi đó ta có*

$$\lim_{\substack{y \to (x',0) \\ y \in \Gamma_\alpha(x',0)}} P_{d+}[\psi](y) = \psi(x'), h.k.n\, x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{3.10}$$

Nói cách khác mọi hàm điều hòa $u = P_{d+}[\psi]$ hội tụ không tiếp xúc h.k.n. đến giá trị biên ψ của nó.

Trước khi chứng minh kết quả này ta cần một số kết quả bổ trợ.

Định nghĩa 3.2. Điểm $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ được gọi là điểm Lebesgue của $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, nếu

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\psi(y') - \psi(x')| dy' = 0.$$

Tập các điểm Lebesgue của ψ được ký hiệu $Leb(\psi)$.

Định lý Lebesgue về đạo hàm của tích phân khẳng định $\mathbb{R}^{d-1} \setminus Leb(\psi)$ có độ đo 0. Ký hiệu

$$\Phi(r) = \int_{B_r} |\psi(x')| dx', r \geq 0.$$

Bài tập 3.7. *Cho $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p \leq \infty$. Chứng minh các khẳng định sau:*

(i) $\Phi(r) \leq \left(\omega_d r^{d-1}/d\right)^{1-1/p} ||\psi||_p$. *Khi đó* $\lim_{r\to\infty} \Phi(r)/r^d = 0$.

(ii) Nếu $0 \in Leb(\psi)$ *và* $\psi(0) = 0$ *thì* $\lim_{r\to 0} \Phi(r)/r^{d-1} = 0$. *Khi đó* $\Phi(r)/r^{d-1}$ *là hàm bị chặn trên* $[0, \infty)$.

Chứng minh Định lý 3.5. Từ Định lý Lebesgue về đạo hàm của tích phân ta chỉ cần chứng minh (3.10) tại các điểm Lebesgue. Bằng phép dịch chuyển ta có thể giả sử $0 \in Leb(\psi)$ và ta chỉ cần chứng minh (3.10) tại 0. Bằng việc thay $\psi(x')$ bằng $\psi(x') - \psi(0)e^{-|x'|^2/2}$ nên ta giả sử $\psi(0) = 0$.
Khi đó (3.10) trở thành

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in\Gamma_\alpha(0)}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')\psi(y')dy' = 0.$$

Dùng Bài tập 3.6 ta có

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')\psi(y')dy'| &\leq C_{d,\alpha} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{x_d}{(x_d^2 + |y'|^2)^{d/2}} |\psi(y')| dy' \\ &\leq C_{d,\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{x_d^{d-1}(1+t^2)^{d/2}} d\Phi(x_d t). \end{aligned}$$

Sử dụng Bài tập 3.7 và dùng tích phân từng phần ta có

$$\int_0^\infty \frac{1}{x_d^{d-1}(1+t^2)^{d/2}} d\Phi(x_d t) = \int_0^\infty \frac{\Phi(x_d t)}{x_d^{d-1} t^{d-1}} \times \frac{dt^d}{(1+t^2)^{d/2+1}} dt.$$

Lại dùng Bài tập 3.7 và chú ý

$$J_{d+2} = \int_0^\infty \frac{t^d}{(1+t^2)^{d/2+1}} dt < \infty$$

nên theo Định lý hội tụ trội Lebesgue ta có đpcm. □

Một cách tiếp cận khác chứng minh Định lý 3.5: ta dùng hàm maximal Hardy-Littlewood như sau:

$$M[\psi](x') = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |\psi(y')| dy'.$$

Ta có bất đẳng thức Kolmogorov (tính bị chặn yếu): Với $\psi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p \leq \infty$, tồn tại hằng số $C = C(p)$ sao cho

$$|\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \; M[\psi](x') > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} ||\psi||_p^p, \forall \lambda > 0.$$

Bài tập 3.8. *Cho $\psi, \phi \in L^p(\mathbb{R}^{d-1}), 1 \leq p \leq \infty$. Chứng minh các khẳng định sau:*

(i) $K_{d+}[|\psi|](x) \leq M[\psi](x'), \forall x \in \mathbb{R}^d_+$.

(ii) $M[\psi + \phi](x') \leq M[\psi](x') + M[\phi](x'), \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1.}$

Xét

$$\Omega[\psi](x'] = \limsup_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x', x_d, y') |\psi(y') - \psi(x')| dy'.$$

Khi đó ta chứng minh Định lý 3.5 khi $1 \leq p < \infty$ theo lược đồ sau:

B1. Sử dụng Bài tập 3.6 ta có đpcm tương đương với $\Omega[\psi] = 0$ h.k.n. trong $\mathbb{R}^{d-1}$ hay

$$|\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \; \Omega[\psi](x') > \lambda\}| = 0, \forall \lambda > 0.$$

B2. Chứng minh

$$\Omega[\psi](x') \leq M[\psi](x') + |\psi|(x'), \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Lại có nếu $\phi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ thì $\Omega[\phi] = 0$ trên $\mathbb{R}^{d-1}$. Do đó

$$\Omega[\psi](x') \leq \Omega[\psi - \phi](x') \leq M[\psi - \phi](x') + |\psi - \phi|(x'), \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1.}$$

B3. Sử dụng $C_0(\mathbb{R}^{d-1})$ trù mật trong $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$, bất đẳng thức Kolmogorov cũng như bất đẳng thức Chebyshev

$$|\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \; |\psi(x')| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} ||\psi||_p^p, \forall \lambda > 0,$$

ta có đpcm.

Khi $p = \infty$ ta làm theo lược đồ sau:

B1. Sử dụng Bài tập 3.6 ta có đpcm tương đương với $\Omega[\psi] = 0$ h.k.n. trong $\mathbb{R}^{d-1}$ hay

$$|\{x' \in B_n : \ \Omega[\psi](x') > 0\}| = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

B2. Phân tích $\psi = \psi_1 + \psi_2$ với

$$\psi_1 = \psi\chi_{B_{2n}} \in L^1(\mathbb{R}^{d-1}), \psi_2 = \psi(1 - \chi_{B_{2n}}).$$

Nhờ kết quả trên ta có

$$|\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \ \Omega[\psi_1](x') > 0\}| = 0.$$

B3. Sử dụng Bài tập 3.7 ta có, khi $x' \in B_n$,

$$\lim_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x', x_d, y')|\psi_2(y') - \psi_2(x')|dy' = 0$$

hay $\Omega[\psi_2](x') = 0$.
Sử dụng

$$\Omega[\psi](x') \leq \Omega[\psi_1](x') + \Omega[\psi_2](x'), \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1}$$

ta có đpcm.

Bài tập 3.9. *Sử dụng cách tiếp cận trên chứng minh Định lý Lebesgue về đạo hàm của tích phân.*

3.2 Không gian Hardy trên hình cầu

3.2.1 Định nghĩa - Tính chất

Ký hiệu $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \ |x| < 1\}$ là hình cầu đơn vị.

Định nghĩa 3.3. Cho $0 < p \leq \infty$, không gian Hardy trên nửa không gian $H^p(B)$ gồm các hàm $u : B \to \mathbb{C}$ điều hòa thỏa mãn

$$\sup_{0<r<1} M_p[u](r) < \infty,$$

với

(i) $M_p[u](r) = \left(\int_{\partial B} |u(rx)|^p dS_x\right)^{1/p}$, khi $0 < p < \infty$;

(ii) $M_\infty[u](r) = \sup_{x\in B} |u(rx)|$, khi $p = \infty$.

Nhận xét. Với $0 < p_1 < p_2 < \infty$ ta có

$$H^\infty(B) \subset H^{p_2}(B) \subset H^{p_1}(B).$$

Ngoài ra, theo nguyên lý cực đại ta có: nếu $u \in H^p(B), 1 \leq p \leq \infty$, thì

$$M_p[u](r_1) \leq M_p[u](r_2), \forall 0 < r_1 < r_2 < 1.$$

Do đó $\sup_{0<r<1} M_p[u](r) = \lim_{r\to 1^-} M_p[u](r)$.

Bài tập 3.10. *(a) Khi $1 \leq p \leq \infty$, chứng minh rằng $H^p(B)$ là không gian định chuẩn với chuẩn*

(i) $||u||_{H^p(B)} = \sup\limits_{0<r<1} M_p[u](r)$, *khi* $0 < p < \infty$;

(ii) $||u||_{H^\infty(B)} = \sup_{x\in B} |u(x)|$, *khi* $p = \infty$.

(b) Khi $0 < p < 1$ ta không có kết quả như trên. Tại sao?

Nhắc lại nhân Poisson trong B:

$$K_B(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{\omega_d |x - y|^d}, x \in B, y \in \partial B.$$

Bài tập 3.11. *Chứng minh các khẳng định sau*

(i) $K_B(rx, y) = K_B(x, ry), \forall x, y \in \partial B, 0 < r < 1$.

(ii) Cho $x \in \partial B, 0 < r < 1$. Khi đó $K_B(rx, \cdot) \in C(\partial B)$. Ngoài ra với $1 \leq p \leq \infty$, $1/p' + 1/p = 1$, ta có

$$||K_B(rx, \cdot)||_p \leq \left((1 + r)/(\omega_d(1 - r)^{d-1})\right)^{1/p'}.$$

Ngoài ra với $\delta > 0$ và $y \in \partial B$ thỏa mãn $|x - y| > \delta$ ta có

$$K_B(rx, y) \leq \frac{1 - r^2}{\omega_d \delta^d}.$$

(iii) Nhân Poisson $K_B(x,y), y \in \partial B$ cố định, thuộc $H^1(B)$ và không thuộc $H^p(B)$ khi $1 < p \leq \infty$.

Ký hiệu tích phân Poisson

$$P_B[\psi](x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_B(x,y)\psi(y)dS_y.$$

Bài tập 3.12. *Cho $u \in H^p(B), 1 \leq p \leq \infty$. Chứng minh rằng, với $0 < r < s < 1$ ta có*

$$u(rx) = P_B[u(s\cdot)]\left(\frac{r}{s}x\right), \forall x \in \partial B.$$

Khi đó, với $0 < r < 1, x \in \partial B$, chứng minh rằng

$$|u(rx)| \leq \left((1+r)/(\omega_d(1-r)^{d-1}\right)^{1/p} ||u||_{H^p(B)}.$$

Từ đó hãy chứng minh $H^p(B)$ là không gian Banach.

Như đã biết, khi $\psi \in C(\partial B)$ ta có

(i) $P_B[\psi]$ là hàm điều hòa trong B bị chặn bởi

$$|P_B[\psi](x)| \leq ||\psi||_\infty, \forall x \in B.$$

Do đó $P_B[\psi] \in H^\infty(B)$.

(ii) $P_B[\psi](r\cdot)$ hội tụ đều trên ∂B đến ψ khi $r \to 1^-$.

Chú ý rằng đối ngẫu của $C(\partial B)$ là $M(\partial B)$ không gian các độ đo Borel phức trên ∂B. Từ đây ta có kết quả sau:

Định lý 3.6. *Cho $\mu \in M(\partial B)$. Khi đó*

$$P_B[\mu](x) = \int_{\partial B} K_B(x,y)d\mu(y)$$

thuộc không gian $H^1(B)$. Ngoài ra ta còn có

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\partial B} P_B[\mu](rx)\phi(x)dS_x = \int_{\partial B} \phi(x)d\mu(x), \forall \phi \in C(\partial B).$$

Hơn nữa ta có

$$||P_B[\mu]||_{H^1(B)} = ||\mu||_{M(\partial B)}.$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự chứng minh Định lý 3.1 với chú ý ∂B compact và $K(rx, y) = K(x, ry), \forall x, y \in \partial B$. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. $\square$

Tiếp theo ta có kết quả sau:

Định lý 3.7. *Cho $\psi \in L^p(\partial B), 1 \leq p \leq \infty$. Khi đó $P_B[\psi] \in H^p(B)$. Ngoài ra ta còn có:*

(i) Khi $1 \leq p < \infty$ thì
$$\lim_{r \to 1^-} ||P_B[\psi](r\cdot) - \psi||_p = 0.$$

(ii) Khi $p = \infty$ thì
$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\partial B} \left(P_B[\psi](rx) - \psi(x)\right) \phi(x) dS_x = 0, \forall \phi \in L^1(\partial B).$$

Hơn nữa ta có
$$||P[\psi]||_{H^p(B)} = ||\psi||_p.$$

Chú ý. Trên ∂B có độ đo sinh bởi vi phân mặt dS là độ đo Borel dương đặc biệt. Nếu chỉ dừng lại ở $\sigma-$đại số Borel trên ∂B thì độ đo này không đủ. Tương tự việc xây dựng độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^d$ ta dùng Caratheodory xây dựng $\sigma-$đại số Lebesgue từ độ đo này. Các tập trong $\sigma-$đại số Lebesgue được gọi là tập đo được (Lebesgue). Khi đó vi phân mặt dS cho ta độ đo Lebesgue trên các tập đo được. Các không gian $L^p(\partial B), 1 \leq p \leq \infty$, là các không gian $p-$khả tích theo đô đo Lebesgue này. Ký hiệu vi phân dS là độ đo Lebesgue và $|E|$ là độ đo Lebesgue của tập $E \subset \partial B$.

Ta cũng có thể hiểu $L^p(\partial B), 1 \leq p < \infty$, là không gian làm đầy $C(\partial B)$ theo chuẩn
$$||\psi||_p = \left(\int_{\partial B} |\psi(x)|^p dS_x \right)^{1/p}.$$
Ngoài ra $L^\infty(\partial B)$ là không gian đối ngẫu của $L^1(\partial B)$.

Chứng minh. Chứng minh về cơ bản giống chứng minh Định lý 3.2 với chú ý ∂B compact. Riêng với việc chứng minh
$$\lim_{r \to 1^-} ||P_B[\psi](r\cdot) - \psi||_p = 0. \tag{3.11}$$
cho trường hợp $1 \leq p < \infty$ ta làm theo lược đồ như Bài tập 3.5. Cụ thể gồm các bước sau:

(i) Chứng minh $||P_B[\psi](r\cdot)||_p \le ||\psi||_p, \forall 0 < r < 1$.

(ii) Dùng $C_0(\partial B)$ trù mật trong $L^p(\partial B), 1 \le p < \infty$, và (i) ta chỉ cần chứng minh (3.11) cho $\psi \in C_0(\partial B)$.

(iii) Do $\psi \in C_0(\partial B)$ nên

$$\lim_{r\to 1^-} ||P_B[\psi](r\cdot) - \psi||_\infty = 0.$$

Từ đó do ∂B compact nên (3.11) được chứng minh.

Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

3.2.2 Đặc trưng

Định lý 3.6 cho ta thấy P_B là đơn ánh, bảo toàn chuẩn từ $M(\partial B)$ vào $H^1(B)$. Ta sẽ thấy P_B là đẳng cấu giữa hai không gian này. Cụ thể ta có kết quả sau:

Định lý 3.8. *Cho $u \in H^1(B)$. Khi đó tồn tại duy nhất độ đo $\mu \in M(\partial B)$ sao*

$$u = P_B[\mu].$$

Chứng minh. Về cơ bản chứng minh tương tự chứng minh Định lý 3.3 với chú ý

$$L^1(\partial B) \subset M(\partial B) = (C(\partial B))^*$$

và sử dụng các Bài tập 3.11 và 3.12. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

Định lý 3.7 cho ta thấy P_B là đơn ánh, bảo toàn chuẩn từ $L^p(\partial B), 1 < p \le \infty$, vào $H^p(B)$. Ta sẽ thấy P_B là đẳng cấu giữa hai không gian này. Cụ thể ta có kết quả sau:

Định lý 3.9. *Cho $u \in H^p(B), 1 < p \le \infty$. Khi đó tồn tại duy nhất hàm $\psi \in L^p(\partial B)$ sao*

$$u = P_B[\psi].$$

Nhận xét. $P_B(L^1(\partial B)$ là không gian con thực sự của $H^1(B)$.

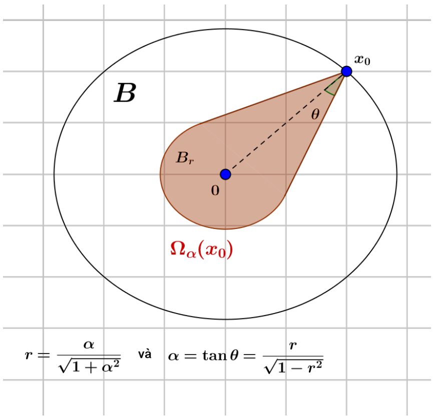
Chứng minh. Về cơ bản chứng minh tương tự chứng minh Định lý 3.4 với chú ý

$$L^p(\partial B) = (L^{p'}(\partial B))^*, 1 < p \le \infty, 1/p' + 1/p = 1,$$

và sử dụng các Bài tập 3.11 và 3.12. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

3.2.3 Giới hạn không tiếp xúc

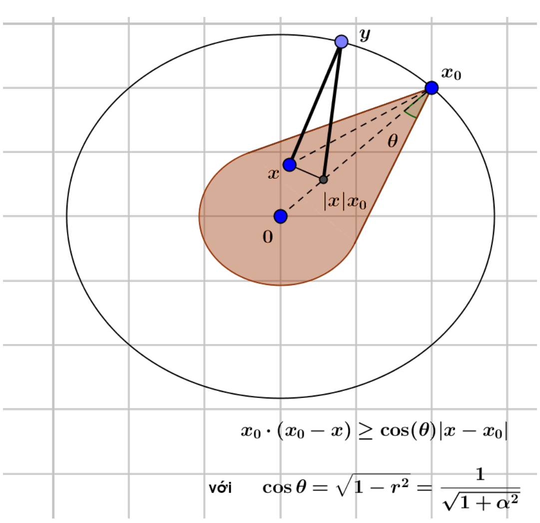
Để hiểu giới hạn không tiếp xúc ta cần miền Stoltz. Cụ thể, miền Stlotz với đỉnh $x_0 \in \partial B$, và góc mở $\alpha \in (0, \infty)$ được xác định bởi

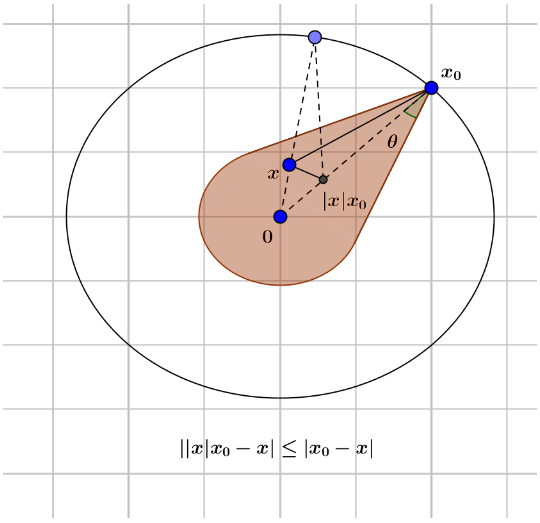


$$\Omega_\alpha(x_0) = \{x = \lambda x_0 + (1-\lambda)y \; y \in B_r, \lambda \in (0,1)\},$$

trong đó $r = \alpha/(1+\alpha^2) \in (0,1)$.

Bài tập 3.13. *Cho $x_0 \in \partial B, \alpha > 0$. Chứng minh các khẳng định sau:*





(i) *Tồn tại hằng số $C = C(\alpha)$ sao cho*

$$|x - x_0| \leq C(1 - |x|), \forall x \in \Omega_\alpha(x_0).$$

(ii) *Với hằng số $C = C(\alpha)$ ở câu trên ta có*

$$K_B(x,y) \leq (1+C)^d K_B(|x|x_0, y), \forall x \in \Omega_\alpha(x_0), y \in \partial B.$$

Định lý 3.10. *Cho $\psi \in L^1(B)$ và $\alpha > 0$ cố định. Khi đó ta có*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega_\alpha(x)}} P_B[\psi](y) = \psi(x), h.k.n.\ x \in \partial\Omega.$$

Nói cách khác mọi hàm điều hòa $u = P_B[\psi]$ hội tụ không tiếp xúc h.k.n. đến giá trị biên ψ của nó.

Trước khi chứng minh Định lý 3.10 ta làm theo cách tiếp cận sau của Định lý 3.5. Cụ thể ta cần đến các hàm maximal sau: Cho $u : B \to \mathbb{C}$.

- Với $\alpha > 0$, hàm maximal không tiếp xúc của u được xác định bởi

$$N_\alpha[u](x) = \sup_{y \in \Omega_\alpha(x)} |u(y)|, x \in \partial B.$$

- Hàm maximal bán kính của u được xác định bởi

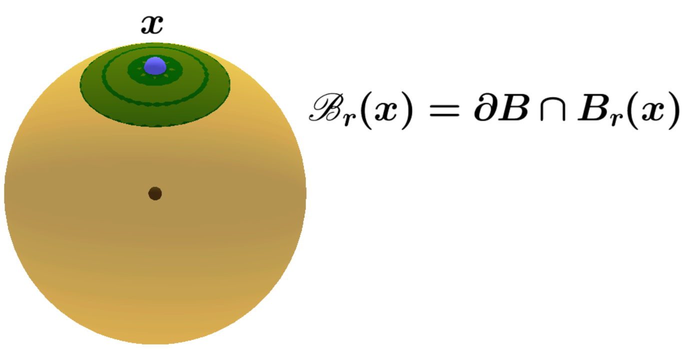
$$M_{rad}[u](x) = \sup_{0<r<1} |u(rx)|, x \in \partial B.$$

Bài tập 3.14. *Cho $\psi \in L^1(\partial B)$. Chứng minh rằng*

$$N_\alpha[P_B[\psi]](x) \leq (1+C)^d M_{rad}[P_B[\psi]](x), \forall x \in \partial B,$$

trong đó $C = C(\alpha)$ là hằng số như Bài tập 3.13.

Với $x \in \partial B, r > 0$, ký hiệu chỏm cầu $\mathscr{B}_r(x) = \{y \in \partial B : \ |y - x| < r\}$.



Bài tập 3.15. *(a) Chứng minh rằng diện tích chỏm cầu*

$$|\mathscr{B}_r(x)| = \int_{\mathscr{B}_r(x)} 1 dS_y$$

không phụ thuộc $x \in \partial B$. Ta ký hiệu $|\mathscr{B}_r| = |\mathscr{B}_r(x)|$ là diện tích chỏm cầu bán kính r.
(b) Tồn tại các hằng số dương $C_1 = C_1(d), C_2 = C_2(d)$ sao cho

$$C_1 r^{d-1} \leq |\mathscr{B}_r| \leq C_2 r^{d-1}, \forall 0 < r < 2.$$

Chẳng hạn trong mặt phẳng chỏm cầu $\mathscr{B}_r(x)$ là dây cung tâm x có chiều dài

$$|\mathscr{B}_r(x)| = 4 \arcsin(r/2).$$

Trong không gian chỏm cầu $\mathscr{B}_r(x)$ có diện tích

$$|\mathscr{B}_r(x)| = \pi r^2.$$

Định nghĩa 3.4. Hàm maximal Hardy-Littlewood của $\psi \in L^1(\partial B)$ được xác định bởi

$$M_B[\psi](x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathscr{B}_r|} \int_{\mathscr{B}_r(x)} |\psi(y)| dS_y.$$

Tương tự hàm maximal Hardy-Littlewood trên $\mathbb{R}^{d-1}$, ta cũng có bất đẳng thức Kolmogorov

$$|\{x \in \partial B : \ |M_B[\psi](x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} ||\psi||_1, \forall \lambda > 0, \psi \in L^1(\partial B),$$

với $C > 0$ là hằng số.

Bài tập 3.16. *Cố định $0 \leq r < 1$, xét hàm*

$$g(t) = \frac{1 - r^2}{\omega_d (1 - 2rt + r^2)^{d/2}}, t \in [-1, 1].$$

Chứng minh các khẳng định sau:

(i) $g(t)$ là hàm không âm, đơn điệu tăng và lồi.

(ii) Với mỗi $\epsilon > 0$ đều có dãy các điểm $-1 = t_1 < \cdots < t_N < 1$ và dãy các số dương $\alpha_j, j = 1, \cdots, N$, sao cho

$$g(t) \leq \sum_{j=1} \alpha_j \chi_{[t_j, 1]} \leq g(t) + \epsilon, \forall t \in [-1, 1].$$

Bổ đề 3.11. *Cho $\psi \in L^1(\partial B)$. Khi đó ta có*

$$M_{rad}[P_B[\psi]](x) \leq M_B[\psi](x), \forall x \in \partial B.$$

Chứng minh Định lý 3.10. Xét hàm

$$\Omega[\psi](x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega_\alpha(x)}} |P_B[\psi](x) - \psi(x)|.$$

Ta dễ dàng thấy:

- Đpcm tương đương với $|\{x \in \partial B : \ \Omega[\psi](x) > \lambda\}| = 0, \forall \lambda > 0$.
- Nếu $\phi \in C(\partial B)$ thì $\Omega[\phi] = 0$ trên ∂B. Do đó ta có

$$\Omega[\psi](x) \leq \Omega[\psi - \phi](x), \forall x \in \partial B.$$

- Từ các kết quả bổ trợ ta có, với $x \in \partial B$,

$$\begin{aligned} \Omega[\psi](x) &\leq N_\alpha[P_B[\psi]](x) + |\psi(x)| \\ &\leq (1 + C)^d M_{rad}[P_B[\psi]](x) + |\psi(x)| \\ &\leq (1 + C)^d M_B[P_B[\psi]](x) + |\psi(x)|. \end{aligned}$$

Đến đây sử dụng $C(\partial B)$ trù mật trong $L^1(\partial B)$, bất đẳng thức Kolmogorov cũng như bất đẳng thức Chebyshev ta sẽ có đpcm. □

Cho $\mu \in M(\partial B)$ ta có $P_B[\mu] \in H^1(B)$. Với $x \in \partial B, \alpha > 0$, ta có các hàm maximal:

$$\begin{aligned} N_\alpha[P_B[\mu]](x) &= \sup_{\Omega_\alpha(x)} |u|, \\ M_{rad}[P_B[\mu]](x) &= \sup_{0<r<1} |u(rx)|, \\ M_B[\mu](x) &= \sup_{r>0} \frac{|\mu|(\mathscr{B}_r(x))}{|\mathscr{B}_r|}. \end{aligned}$$

Ta cũng có bất đẳng thức Kolmogorov:

$$|\{x \in \partial B : \ |M_B[\mu](x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} ||\mu||_{M(\partial B)}, \forall \lambda > 0, \mu \in M(\partial B),$$

với $C > 0$ là hằng số.

Bài tập 3.17. *Cho* $\mu \in M(\partial B), \alpha > 0$. *Chứng minh rằng tồn tại hằng số* $C = C(\alpha) > 0$ *sao cho*

$$N_\alpha[P_B[\mu]](x) \leq (1+C)^d M_{rad}[P_B[\mu]](x) \leq (1+C)^d M_B[\mu](x), \forall x \in \partial B.$$

Mệnh đề 3.12. *Cho* $\mu \in M(\partial B)$ *thỏa mãn* $\mu \perp dS$. *Khi đó*

$$\Omega[\mu](x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega_\alpha(x)}} |P_B[\mu](x)| = 0$$

h.k.n. theo độ đo Lebesgue dS *trên* ∂B.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử μ dương. Ta cần phải chứng minh

$$|\{x \in \partial B : \ \Omega[\mu](x) > \lambda\}| = 0, \forall \lambda > 0,$$

hay

$$|\{x \in \partial B : \ \Omega[\mu](x) > \lambda\}| < C\epsilon, \forall \lambda > 0, \forall \epsilon > 0,$$

trong đó C là hằng số không phụ thuộc ϵ, λ.
Cố định $\epsilon > 0, \lambda > 0$. Do $\mu \perp dS$ nên có tập compact $K \subset \partial B$ sao cho

$$\mu(\partial B \setminus K) < \epsilon \text{ và } |K| = 0.$$

Đặt $\mu_1 = \chi_K \mu, \mu_2 = (1 - \chi_K)\mu$ ta có các khẳng định sau:

- Khi $x \in \partial B \setminus K$ thì

$$\Omega[\mu_1](x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in B}} \int_K K_B(y,z) dS_z = 0.$$

- $||\mu_2||_{M(\partial B)} = \mu(\partial B \setminus K) < \epsilon.$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\{x \in \partial B : \Omega[\mu](x) > \lambda\} &\subset \{x \in \partial B : \Omega[\mu_1](x) > \lambda/2\} \cup \{x \in \partial B : \Omega[\mu_2](x) > \lambda/2\} \\ &\subset K \cup \{x \in \partial B : \Omega[\mu_2](x) > \lambda/2\}.\end{aligned}$$

Do $|K| = 0$ nên

$$|\{x \in \partial B : \Omega[\mu](x) > \lambda\}| \leq |\{x \in \partial B : \Omega[\mu_2](x) > \lambda/2\}|.$$

Đến đây sử dụng bài tập trên và bất đẳng thức Kolmogorov ta có đpcm.

□

Từ đây ta có kết quả sau:

Hệ quả 3.13. *Cho $u \in H^1(B)$. Khi đó u có giới hạn không tiếp xúc h.k.n. (theo dS) trên ∂B.*

3.3 Hàm điều hòa dương

3.3.1 Trong hình cầu

Từ Định lý 3.8 ta có tương ứng $1-1$ giữa không gian $M(\partial B)$ các độ đo Borel phức trên ∂B và $H^1(B)$. Với độ đo dương trên ∂B ta có kết quả sau.

Định lý 3.14. *(a) Cho $\mu \in M(\partial B)$ là độ đo dương. Khi đó $P_B[\mu]$ là hàm điều hòa không âm trong B.*
(b) Ngược lại, giả sử u là hàm điều hòa không âm trên B. Khi đó có duy nhất một độ đo $\mu \in M(\partial B)$ dương sao cho $u = P_B[\mu]$. Hơn nữa

$$||u||_{H^1(B)} = \mu(\partial B).$$

Chứng minh. (a) Hiển nhiên từ tính dương của nhân Poisson K_B.
(b) Do u là hàm điều hòa không âm trong B nên theo tính chất trung bình cầu ta có:

$$u(0) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r} u(y)dy = \frac{1}{\omega_d}M_1[u](r), \forall 0 < r < 1.$$

Do đó $u \in H^1(B)$. Theo Định lý 3.8 tồn tại duy nhất một độ đo $\mu \in M(B)$ sao cho $u = P_B[\mu]$. Khi đó theo Định lý 3.6 ta có $u(r\cdot)$ hội tụ yếu* đến μ, nghĩa là

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\partial B} u(rx)\phi(x)dS_x = \int_{\partial B}\phi(x)d\mu(x), \forall \phi \in C(\partial B).$$

Từ đây không khó để thấy μ là độ đo dương. $\square$

Hệ quả 3.15. *Cho $x_0 \in \partial B$ cố định và $u \in C(\bar{B}\setminus\{x_0\}) \cap C^2(B)$ là hàm điều hòa không âm trong B. Giả sử $u = 0$ trên $\partial B \setminus \{x_0\}$. Khi đó có hằng số $C > 0$ sao cho*

$$u(x) = CP_B(x, x_0), \forall x \in \bar{B}\setminus\{x_0\}.$$

Chứng minh. Từ Định lý 3.14 tồn tại độ đo $\mu \in M(\partial B)$ dương sao cho $u = P_B[\mu]$. Do $u \in C(\bar{B} \setminus \{x_0\})$ và $u = 0$ trên $\partial B \setminus \{x_0\}$ nên $u(r\cdot)$ hội tụ đều về 0 trên từng compact trong $\partial B \setminus \{x_0\}$. Khi đó $\mu(\partial B \setminus \{x_0\}) = 0$ hay μ là độ điểm tại x_0. Từ đây ta có ngay đpcm. □

Bài tập 3.18. *Cho các điểm $X_j \in \partial B, j = 1, 2, \cdots, N$ và $u \in C(\bar{B} \setminus \{X_j, j = \overline{1, N}\}) \cap C^2(B)$ là hàm điều hòa không âm trong B. Giả sử $u = 0$ trên $\partial B \setminus \{x_j, j = \overline{1, N}\}$. Khi đó có các hằng số $C_j > 0, j = \overline{1, N}$, sao cho*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} C_j P_B(x, X_j), \forall x \in \bar{B} \setminus \{x_j, j = \overline{1, N}\}.$$

Từ Định lý 3.14 ta có thể dẫn đến đặc trưng hệ số Fourier của độ đo Borel dương trên đường tròn $\mathbb{S}^1$ của Herglotz. Với mỗi $\mu \in M(\mathbb{S}^1)$ ta định nghĩa hệ số Fourier của nó

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{S}^1} e^{-inx} d\mu(x), n \in \mathbb{Z}.$$

Nếu μ là độ đo dương thì dãy hệ số Fourier $\{\hat{\mu}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ xác định dương theo nghĩa

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}(m-n) z_m \bar{z}_n \geq 0$$

với mọi dãy số phức $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ chỉ có hữu hạn phần tử khác 0.
Đây chính là đặc trưng Herglotz của độ đo Borel dương trên $\mathbb{S}^1$.

Định lý 3.16. *Cho dãy số phức $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Khi đó dãy số phức này là hệ số Fourier của một đô đo $\mu \in M(\mathbb{S}^1)$ dương nếu và chỉ nếu dãy này xác định dương.*

Chứng minh. Chiều "chỉ nếu" hiển nhiên.
Chiều "nếu": Do $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ xác định dương nên

$$a_{-n} = \bar{a}_n \text{ và } |a_n| \leq a_0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Do đó chuỗi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$ hội tụ đều trên từng compact đến hàm điều hòa $u(r, \theta)$ trong hình tròn đơn vị $B = \{re^{i\theta} : \ 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$.
Ngoài ra chuỗi kép

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m-n} r^m e^{im\theta} r^n e^{-in\theta}$$

bị chặn bởi chuỗi $a_0 \sum_{m,n=0}^{\infty} r^{m+n} = a_0/(1-r)^2$ trong B. Do đó chuỗi kép là giới hạn của dãy tổng riêng $\sum_{0\le m,n\le N}$ trong B khi $N \to \infty$. Từ giả thiết về tính xác định dương ta có hàm giới hạn $F(r,\theta) \ge 0$ trong B. Ngoài ra ta có thể viết lại

$$F(r,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty} a_k e^{ik\theta} \sum_{\substack{m-n=k \\ m,n\ge 0}} r^{m+n} = \frac{1}{1-r^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Như vậy $u(r,\theta) = (1-r^2)F(r,\theta)$ là hàm điều hòa không âm trong B. Theo Định lý 3.14 ta có đpcm. □

Bài tập 3.19. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{\substack{m-n=k \\ m,n\ge 0}} r^{m+n} = \frac{r^{|k|}}{1-r^2}.$$

3.3.2 Ánh xạ bảo giác

Phép nghịch đảo qua mặt cầu đơn vị $K : x \mapsto x/|x|^2$ là ánh xạ bảo giác trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Như đã biết K biến siêu phẳng không đi qua tâm thành mặt cầu đi qua tâm, chẳng hạn $K(\{x_d = 1\}) = \partial B_{1/2}(e_d/2)$ với $e_d = (0, \cdots, 0, 1)$.

Bằng cách thay đổi một chút ánh xạ này như sau:

$$L : x \mapsto 2K(x + e_d) - e_d$$

ta được ánh xạ bảo giác từ hình cầu đơn vị B vào nửa không gian $\mathbb{R}^d_+$. Cũng giống phép nghịch đảo K có ánh xạ ngược cũng là K, ánh xạ bảo giác L cũng có ánh xạ ngược là L. Ngoài ra ta có một số tính chất khác của L sau:

(i) $L : \mathbb{R}^d \setminus \{-e_d\} \to \mathbb{R}^d \setminus \{-e_d\}$ là ánh xạ bảo giác, có ánh xạ ngược là chính nó.

(ii) L là song ánh từ $\{x_d = 0\}$ lên $\partial B \setminus \{-e_d\}$.

Bài tập 3.20. *Cho $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{-e_d\}$. Chứng minh rằng*

$$|L(x) - L(y)| = \frac{2|x-y|}{|x+e_d|\cdot|y+e_d|}|, 1 - |L(x)|^2 = \frac{4x_d}{|x+e_d|^2}.$$

Từ đó hãy chứng minh, với $x \in \mathbb{R}^d_+, y = (y', 0), y' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$K_{d+}(x,y) = 2^{d-2}|x+e_d|^{2-d}|y+e_d|^{-d} K_B(L(x), L(y)).$$

Tương tự phép nghịch đảo cho ta biến đổi Kelvin, ánh xạ bảo giác L cho ta biến đổi

$$L[u](x) = 2^{d/2-1}|x+e_d|^{2-d}u(L(x)), x \in \mathbb{R}^d \setminus \{-e_d\}.$$

Do biến đổi Kelvin bảo toàn tính điều hòa nên ta cũng có biến đổi L bảo toàn tính điều hòa. Cụ thể như sau:

Định lý 3.17. *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là tập mở không chứa $\{-e_d\}$. Khi đó biến đổi L là ánh xạ tuyến tính từ $H(\Omega)$ vào $H(L(\Omega))$. Ngoài ra L là song ánh với ánh xạ ngược là chính nó, nghĩa là*

$$L[L[u]] = u.$$

Bài tập 3.21. *Cho $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{-e_d\}$. Chứng minh rằng*

$$|L(x)+e_d| = \frac{1}{|x+e_d|}, L(x)\cdot e_d = \frac{1-|x|^2}{|x+e_d|^2}.$$

Từ đó hãy chứng minh, với $x \in B, y = (y', 0), y' \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$L[P_{d+}(\cdot, y)](x) = \frac{2^{d/2}}{|y+e_d|^d}P_B(x, L(y)).$$

Bài tập 3.22. *(a) Khi $x \in \mathbb{R}^d_+, y \in \partial B \setminus \{-e_d\}$, chứng minh rằng*

$$L[P_B(\cdot, y)](x) = \frac{2^{d/2}}{|y+e_d|^d}P_{d+}(x, L(y))$$

(b) Khi $x \in \mathbb{R}^d_+, y = -e_d$, chứng minh rằng

$$L[P_B(\cdot, -e_d)](x) = \frac{2x_d}{2^{d/2}\omega_d}.$$

Chú ý rằng L biến các đường thẳng thành hoặc đường tròn đi qua $-e_d$ (khi đường thẳng không đi qua $-e_d$) hoặc thành chính nó (khi nó đi qua $-e_d$). Từ nhận xét này ta có kết quả sau:

Bài tập 3.23. *(a) Cho u là hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^d_+$ và $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Khi đó u có giới hạn không tiếp xúc tại $(x', 0)$ khi và chỉ khi $L[u]$ là hàm điều hòa trong B có giới hạn không tiếp xúc tại $L(x', 0) \in \partial B$.*
(b) Hãy sử dụng Định lý về sự hội tụ không tiếp xúc của hàm điều hòa trong B để chứng minh Định lý về sự hội tụ không tiếp xúc của hàm điều hòa trong $\mathbb{R}^d_+$.
(c) Cho $\mu \in M(\mathbb{R}^{d-1})$ thỏa mãn $\mu \perp dx', dx'$ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^{d-1}$. Chứng minh rằng $P_{d+}[\mu]$ có giới hạn không tiếp xúc h.k.n. đến 0 trên $\mathbb{R}^{d-1}$.

3.3.3 Trong nửa không gian

Trước hết ta đến với các trường hợp đặc biệt sau:

Mệnh đề 3.18. *Cho $x_0' \in \mathbb{R}^{d-1}$ cố định và $u \in C(\bar{\mathbb{R}}^d_+ \setminus \{x_0'\}) \cap C^2(\mathbb{R}^d_+)$ là hàm điều hòa không âm trong $\mathbb{R}^d_+$. Giả sử $u(x', 0) = 0$ khi $x' \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{x_0'\}$ và*

$$\lim_{x_d \to \infty} \frac{u(0, x_d)}{x_d} = 0.$$

Khi đó có hằng số $C > 0$ sao cho

$$u(x) = CP_{d+}(x, x_0'), \forall x \in \bar{\mathbb{R}}^d_+ \setminus \{(x_0', 0)\}.$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $L[u] \in C(\bar{B} \setminus \{x_0, -e_d\}) \cap C^2(B)$ điều hòa, không âm trong B thỏa mãn

$$L[u] = 0 \text{ trên } \partial B \setminus \{x_0, -e_d\}.$$

Sử dụng Bài tập 3.18 có các hằng số dương c_1, c_2 sao cho

$$L[u](x) = c_1 P_B(x, L(x_0', 0) + c_2 P_B(x, -e_d), x \in \bar{B} \setminus \{L(x_0', 0), -e_d\}.$$

Khi đó, sử dụng Bài tập 3.22 ta có

$$u(x) = L[L[u]](x) = c_3 P_{d+}(x, x_0') + c_4 x_d.$$

Từ giả thiết $\lim_{x_d \to \infty} \dfrac{u(0, x_d)}{x_d} = 0$ ta có $c_4 = 0$ hay đpcm. □

Nhận xét. Hàm điều hòa không âm trong Mệnh đề 3.18 sinh bởi độ đo Dirac $\delta_{x_0'}$, $x_0' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Mệnh đề 3.19. *Cho $u \in C(\bar{\mathbb{R}}^d_+) \cap C^2(\mathbb{R}^d_+)$ là hàm điều hòa không âm trong $\mathbb{R}^d_+$. Giả sử $u(x', 0) = 0$ khi $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Khi đó có hằng số $C > 0$ sao cho*

$$u(x', x_d) = Cx_d, \forall x \in \mathbb{R}^d_+.$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $L[u] \in C(\bar{B} \setminus \{-e_d\}) \cap C^2(B)$ điều hòa, không âm trong B thỏa mãn

$$L[u] = 0 \text{ trên } \partial B \setminus \{-e_d\}.$$

Theo Hệ quả 3.15 ta có đpcm. □

Nhận xét. Hàm điều hòa không âm trong Mệnh đề 3.19 không thuộc vào bất kỳ không gian Hardy $H^p(\mathbb{R}^d_+)$ nào.
Hàm hằng 1 sinh bởi độ đo Lebesgue $dx' \notin M(\mathbb{R}^{d-1})$. Ngoài ra các độ đo Borel dương μ trên $\mathbb{R}^{d-1}$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{d\mu(x')}{(1+|x'|^2)^{d/2}} < \infty \tag{3.12}$$

cũng cho ta

$$P_{d+}[\mu](x) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y')d\mu(y') = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{2x_d d\mu(y')}{\omega_d(x_d^2 + |x' - y'|^2)^{d/2}}$$

là hàm điều hòa không âm trên $\mathbb{R}^d_+$.

Bài tập 3.24. *Cho μ là độ đo Borel dương trên $\mathbb{R}^{d-1}$ thỏa mãn* (3.12). *Chứng minh rằng*

$$\lim_{x_d \to 0_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(x')P_{d+}[\mu](x', x_d)dx' = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \phi(x')d\mu(x'), \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Hai nhận xét trên cho ta toàn bộ hàm điều hòa không âm trên $\mathbb{R}^d_+$.

Định lý 3.20. *Cho u là hàm điều hòa không âm trên $\mathbb{R}^d_+$. Khi đó tồn tại hằng số $c \geq 0$ và độ đo Borel μ dương trên $\mathbb{R}^{d-1}$ thỏa mãn* (3.12) *sao cho*

$$u(x) = cx_d + P_{d+}[\mu](x), \forall x \in \mathbb{R}^d_+.$$

Trước khi chứng minh Định lý 3.20 ta cần đến công thức đổi biến tích phân sau: Cho $\nu \in M(\partial B)$. Ta định nghĩa độ đo $\nu_L \in M(\mathbb{R}^{d-1})$ xác định như sau:

$$\nu_L(A) = \nu(L(A)), A \text{ tập Borel trong } \mathbb{R}^{d-1}.$$

Khi đó với f đo được Borel, dương trên $\partial B \setminus \{-e_d\}$, ta có công thức đổi biến tích phân:

$$\int_{\partial B \setminus \{-e_d\}} f(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(L(y))d\nu_L(y). \tag{3.13}$$

Để chứng minh (3.13) trước tiên ta chứng minh cho các hàm đặc trưng χ_E, E là tập Borel trong $\partial B \setminus \{-e_d\}$, sau đó tiến qua giới hạn.

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $L[u]$ điều hòa, không âm trong B nên theo Định lý 3.14 tồn tại độ đo $\lambda \in M(\partial B)$ dương sao cho

$$L[u] = P_B[\lambda].$$

Phân tích $\lambda = \nu + \lambda(\{-e_d\})\delta_{-e_d}$, với δ_{-e_d} là độ đo Dirac tại $-e_d$ và $\nu \in M(\partial B \setminus \{-e_d\})$. Khi đó ta có

$$L[u] = P_B[\nu] + \lambda(\{-e_d\})K_B(\cdot, -e_d).$$

Do đó ta có

$$u(x) = L[L[u]](x) = L[P_B[\nu]](x) + \frac{2\lambda(\{-e_d\})x_d}{2^{d/2}\omega_d}.$$

Do $\nu(\{-e_d\}) = 0$ nên

$$\begin{aligned} L[P_B[\nu]](x) &= 2^{d/2-1}|x + e_d|^{2-d} \int_{\partial B \setminus \{-e_d\}} K_B(L(x), y) d\nu(y) \\ &= 2^{d/2-1}|x + e_d|^{2-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_B(L(x), L(y)) d\nu_L(y) \\ &= 2^{1-d/2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K_{d+}(x, y)|y + e_d|^d d\nu_L(y). \end{aligned}$$

Như vậy độ đo cần tìm $\mu = 2^{1-d/2}|\cdot + e_d|^d \nu_L$ và

$$c = \frac{2\lambda(\{-e_d\})}{2^{d/2}\omega_d}.$$

□

Từ Định lý 3.20 ta có thể dẫn đến đặc trưng tích phân Fourier của độ đo $\mu \in M(\mathbb{R})$ dương của Bochner. Với mỗi $\mu \in M(\mathbb{R})$ ta định nghĩa biến đổi Fourier của nó

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x), \xi \in \mathbb{R}.$$

Nếu μ là độ đo dương thì biến đổi Fourier $\hat{\mu}(\xi) \in C(\mathbb{R})$ xác định dương theo nghĩa

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{\mu}(\xi_m - \xi_n) z_m \bar{z}_n \geq 0$$

với mọi dãy số phức $\{z_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ chỉ có hữu hạn phần tử khác 0 và mọi dãy điểm $\xi_n \in \mathbb{R}$. Đây chính là đặc trưng Bochner của độ đo $\mu \in M(\mathbb{R})$ dương.

Định lý 3.21. *Cho hàm $\psi \in C(\mathbb{R})$. Khi đó hàm ψ là biến đổi Fourier của một độ đo $\mu \in M(\mathbb{R})$ dương nếu và chỉ nếu hàm này xác định dương.*

Chứng minh. Chiều "chỉ nếu" hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh chiều "nếu" như sau.
Do ψ xác định dương nên $|\psi(\xi)| \leq \psi(0), \forall \xi \in \mathbb{R}$.
Khi đó ta thấy ngay hàm

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) e^{ix\xi} e^{-y|\xi|} d\xi$$

là hàm điều hòa trong nửa không gian $\mathbb{R}^2_+$.
Lại để ý rằng, với $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ cố định, hàm

$$\psi(\xi - \eta) e^{-(\xi+\eta)y} e^{i(\xi-\eta)x}$$

bị chặn bởi $\psi(0)e^{-(\xi+\eta)y}$ nên ta có các khẳng định sau:

- Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, tích phân

$$\int_{[0,R]^2} \psi(\xi - \eta) e^{-(\xi+\eta)y} e^{i(\xi-\eta)x} d\xi d\eta \tag{3.14}$$

  xấp xỉ bởi tổng Riemann

$$\frac{R^2}{N^2} \sum_{m,n=1}^{N} \psi(\xi_m - \eta_n) z_m \bar{z}_n$$

  với $\xi_m = \eta_m = mR/N, z_m = e^{-\xi_m(y-ix)}$. Khi đó từ tính xác định dương của ψ ta có tích phân (3.14) không âm khi $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$.

- Với $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ tích phân (3.14) hội tụ đến

$$F(x,y) = \int_{[0,\infty)^2} \psi(\xi - \eta) e^{-(\xi+\eta)y} e^{i(\xi-\eta)x} d\xi d\eta$$

  khi $R \to \infty$. Do đó $F(x,y) \geq 0$ trên $\mathbb{R}^2_+$.

- Dùng Fubini-Tonelli ta có

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^\infty d\eta \int_0^\infty \psi(\xi-\eta) e^{-(\xi+\eta)y} e^{i(\xi-\eta)x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{itx} dt \int_{-t}^\infty e^{-(t+2\eta)y} d\eta + \int_0^\infty \psi(t) e^{itx} dt \int_0^\infty e^{-(t+2\eta)y} d\eta \\ &= \frac{1}{2y} u(x,y). \end{aligned}$$

Như vậy $u(x,y)$ là hàm điều hòa không âm trên $\mathbb{R}^2_+$. Khi đó theo Định lý 3.20 có hằng số $c \geq 0$ và độ đo Borel μ dương trên $\mathbb{R}^{d-1}$ thỏa mãn (3.12) sao cho

$$u(x,y) = cy + \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\pi(y^2 + (x-t)^2)} d\mu(t), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Cho $y \to +\infty$ cả hai vế đẳng thức trên ta có $c = 0$. Lại có

$$\frac{2y}{y^2 + x^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-y|\xi|} d\xi$$

nên với $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ ta có

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) e^{ix\xi} e^{-y|\xi|} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-x)\xi} e^{-y|\xi|} d\xi. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Lấy $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ thỏa mãn $\phi(x) = 1$ khi $|x| \leq 1$ và $\phi(x) = 0$ khi $|x| \geq 2$. Đặt $\phi_R(x) = \phi(x/R), R > 0$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(x,y) \phi_R(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \widehat{\phi}_R(\xi) e^{-y|\xi|} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}_R(-\xi) e^{-it\xi} e^{-y|\xi|} d\xi. \end{aligned}$$

Cho $y \to 0_+$ ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \widehat{\phi}_R(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \phi_R(t) d\mu(t).$$

Tiếp tục cho $R \to \infty$ ta có μ là độ đo Borel dương hữu hạn trên $\mathbb{R}$ với $\mu(\mathbb{R}) = \psi(0)$. Quay trở lại (3.15) ta có

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) e^{ix\xi} e^{-y|\xi|} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu}(\xi) e^{i\xi x} e^{-y|\xi|} d\xi.$$

Đến đây không khó để thấy đpcm. $\square$

Bài tập 3.25. *Chứng minh đặc trưng Bochner cho độ đo dương $\mu \in M(\mathbb{R}^{d-1})$.*

Chương 4

Phương pháp Perron

Trong chương này ta quan tâm đến phương pháp Perron giải bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{4.1}$$

$$u = \psi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{4.2}$$

với Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và $\psi \in C(\partial\Omega)$.

4.1 Hàm điều hòa dưới

Trước hết ta quan tâm đến hàm điều hòa dưới.

4.1.1 Hàm nửa liên tục trên

Trong Chương 1 ta đã đưa ra khái niệm hàm điều hòa dưới trong lớp các hàm liên tục. Giờ ta sẽ mở rộng khái niệm này trong lớp các hàm nửa liên tục trên.

Định nghĩa 4.1. Hàm $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là nửa liên tục trên tại $x \in \Omega$ nếu: với mọi $\epsilon > 0$ đều có $r = r_\epsilon > 0$ sao cho

$$B_r(x) \subset \Omega \text{ và } u(x) \geq u(y) - \epsilon, \forall y \in B_r(x),$$

hay $u(x) \geq \lim_{r \to 0_+} \left(\sup_{B_r(x)} u\right)$.
Hàm u được gọi là nửa liên tục trên trong Ω nếu nó nửa liên tục trên tại mọi điểm x trong Ω.

Một cách tương tự ta định nghĩa hàm nửa liên tục dưới.

Ví dụ 4.1. Hàm $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x_d < 0, \\ 1 & \text{khi } x_d \geq 0, \end{cases}$$

là hàm nửa liên tục trên trong $\mathbb{R}^d$. Một cách tổng quát, lấy F là tập đóng trong $\mathbb{R}^d$ ta có hàm đặc trưng χ_F là hàm nửa liên tục trên trong $\mathbb{R}^d$.

Ví dụ 4.2. Hàm u là nửa liên tục dưới trong Ω khi và chỉ khi $(-u)$ nửa liên tục trên trong Ω. Hàm u liên tục trong Ω khi và chỉ khi nó vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới trong Ω.

Ví dụ 4.3. Cho $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Khi đó hàm

$$\hat{u}(x) = \lim_{r \to 0_+} \left(\operatorname{esssup}_{B_r(x)} u\right)$$

là hàm nửa liên tục trên trong Ω.

Mệnh đề 4.1. *Cho u là hàm nửa liên tục trên trong Ω. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) Tập $\{x \in \Omega : \ u(x) = -\infty\}$ mở.

(b) Với $c \in [-\infty, +\infty)$, tập $\Omega_c = \{x \in \Omega : \ u(x) < c\}$ mở.

(c) Với K là tập compact trong Ω thì u bị chặn trên trong K. Hơn nữa, nếu $v \in C(K)$ thì $u - v$ đạt GTLN trong K.

Chứng minh. (a) Không khó để thấy từ định nghĩa.
(b) Nếu $c = -\infty$ thì $\Omega_{-\infty} = \emptyset$ là tập mở.
Nếu $c > -\infty$, lấy $x \in \Omega_c$ và $\epsilon = (c - u(x))/2$. Theo định nghĩa tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B_r(x) \subset \Omega \text{ và } u(y) \leq u(x) + \epsilon < c, \forall y \in B_r(x).$$

Do đó $B_r(x) \subset \Omega_c$ hay Ω_c là tập mở.
(c) Từ (b) và $u(x) < +\infty, \forall x \in \Omega$, ta có K được phủ bởi họ các tập mở $\Omega_k, k \in \mathbb{N}$. Do K compact nên có hữu hạn các $k_1, k_2, \cdots, k_N$ sao cho

$$K \subset \cup_{j=1}^N \Omega_{k_j} \text{ hay } u(x) < \max\{k_j, j = \overline{1, N}\}, \forall x \in K.$$

Như vậy u bị chặn trên trong K hay $M = \sup_K u < +\infty$. Khi đó, từ tính compact của K, có dãy $x_n \in K, n \in \mathbb{N}$, hội tụ đến $x \in K$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = M.$$

Giả sử $u(x) < M$. Đặt $C = (u(x) + M)/2$ có $x \in \Omega_C$. Do Ω_C mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B_r(x) \subset \Omega_C.$$

Lại có $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ nên có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in B_r(x), \forall n \geq n_0$. Khi đó

$$u(x_n) < C, \forall n \geq n_0, \text{ hay } M = \lim_{n\to\infty} u(x_n) \leq C.$$

Điều này vô lý hay điều giả sử sai. Vậy $u(x) = M$ là GTLN của u trong K.
Ta vừa chứng minh cho TH $v \equiv 0$. Chứng minh cho TH tổng quát xem như bài tập. □

Chú ý. Tính chất (b) chính là đặc trưng của hàm nửa liên tục trên, nghĩa là nếu $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ thỏa mãn (b) thì u nửa liên tục trên trong Ω.
Thật vậy, lấy $x \in \Omega$ và dãy $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ giảm thực sự ($M_n > M_{n+1}$) và hội tụ đến $u(x)$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, Ω_{M_n} là tập mở chứa x nên có $r_n > 0$ sao cho $B_{r_n}(x) \subset \Omega_{M_n}$. Do đó

$$\sup_{B_{r_n}(x)} u \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $\sup_{B_r(x)} u$ là hàm tăng theo r nên từ trên ta có

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} M_n \geq \lim_{r\to 0_+} \left(\sup_{B_r(x)} u \right).$$

Bài tập 4.1. *Cho S là họ các hàm nửa liên tục trên trong Ω. Chứng minh các kết luận sau:*

(i) Với $u, v \in S, \lambda, \mu > 0$, ta có $\max\{u, v\}, \lambda u + \mu v$ cũng là các hàm nửa liên tục trên trong Ω.

(ii) $\inf_{u\in S} u$ cũng là hàm nửa liên tục trên trong Ω.

Ngoài đặc trưng (b), hàm nửa liên tục trên còn có đặc trưng khác.

Định lý 4.2. *Cho* $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ *bị chặn trên,* $u \not\equiv -\infty$. *Các khẳng định sau là tương đương:*

(i) u *là nửa liên tục trên trong* Ω.

(ii) Tồn tại một dãy giảm các hàm $u_k \in C(\Omega), k \in \mathbb{N}$, *sao cho dãy này hội tụ điểm đến* u *trong* Ω.

Chứng minh. (ii) $\Rightarrow$ (i): Giả sử có (ii). Lấy $c \in [-\infty, +\infty)$. Nếu $c = -\infty$ thì ta có ngay $\Omega_{-\infty} = \emptyset$ mở. Nếu $c > -\infty$, lấy $x \in \Omega_c$. Khi đó ta có

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) < c.$$

Do đó có $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{k_0}(x) < c$. Như vậy

$$\Omega_c \subset \cup_{k=1}^{\infty}\{x \in \Omega : \ u_k(x) < c\}.$$

Do dãy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là dãy giảm trong Ω nên từ trên ta có

$$\Omega_c = \cup_{k=1}^{\infty}\{x \in \Omega : \ u_k(x) < c\}.$$

Do u_k liên tục trong Ω nên $\{x \in \Omega : \ u_k(x) < c\}$ mở. Do đó Ω_c mở hay theo đặc trưng (b) ta có (i).
(i) $\Rightarrow$ (ii): Đặt $M = \sup_\Omega u$, từ giả thiết có M hữu hạn. Ta xây dựng dãy giảm các hàm liên tục như sau:

$$u_k(x) = \sup_{y\in\Omega}(u(y) - k|x-y|), x \in \Omega.$$

Do $u \not\equiv -\infty$ nên $u_k(x) > -\infty, \forall x \in \Omega$.
Dễ thấy:

$$u(x) \leq u_k(x) \leq u_{k+1}(x) \leq M, \forall x \in \Omega.$$

Như vậy dãy hàm $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ là dãy giảm trong Ω.
Tiếp theo ta sẽ chứng minh với mỗi $k \in \mathbb{N}$, hàm u_k liên tục đều trong Ω. Thật vậy, cố định $\epsilon > 0$ lấy $x, y \in \Omega$ thỏa mãn $|x - y| < \epsilon/k$ ta có

$$u(z) - k|x-z| - \epsilon \leq u(z) - k|x-z| \leq u(z) - k|y-z| + \epsilon, \forall z \in \Omega.$$

Do đó ta có

$$u_k(x) - \epsilon \leq u_k(y) \leq u_k(x) + \epsilon$$

hay ta có đpcm.

Ta chỉ còn phải chứng minh

$$\lim_{k \to \infty} u_k(x) = u(x), \forall x \in \Omega.$$

Lấy $x \in \Omega$. Nếu $u(x) = -\infty$ thì từ tính chất (a) của hàm nửa liên tục trên u tồn tại $r > 0$ sao cho

$$B_r(x) \subset \Omega \text{ và } u(y) = -\infty, \forall y \in B_r(x).$$

Khi đó

$$u_k(x) = \sup_{\Omega \setminus B_r(x)} (u(y) - k|x-y|) \leq M - kr.$$

Do đó $\lim_{k \to \infty} u_k(x) = -\infty = u(x)$.

Nếu $u(x) > -\infty$, lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ và đặt $C = u(x) + \epsilon$. Ta có $x \in \Omega_C$ và Ω_C mở nên có $r > 0$ để $B_r(x) \subset \Omega_C$. Khi đó

$$u(y) - k|x-y| < C = u(x) + \epsilon, \forall y \in B_r(x).$$

Lấy $k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k > (M + |u(x)|)/r$ ta có

$$u(y) - k|x-y| \leq M - kr < -|u(x)| \leq u(x), \forall y \in \Omega \setminus B_r(x).$$

Do đó khi $k \in \mathbb{N}, k > (M + |u(x)|)/r$ thì

$$u(x) \leq u_k(x) \leq u(x) + \epsilon$$

hay ta có đpcm. □

Bài tập 4.2. *Cho dãy giảm $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ các hàm nửa liên tục trên trong Ω. Chứng minh rằng hàm $u(x) = \lim_{k \to \infty} u_k(x)$ là nửa liên tục trên trong Ω.*

4.1.2 Định nghĩa - Tính chất

Định nghĩa 4.2. Cho hàm nửa liên tục trên $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ thỏa mãn $u \not\equiv -\infty$. Ta nói u điều hòa dưới trong Ω nếu: với mọi hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$, với bất kỳ hàm $v \in C(\bar{B})$ điều hòa trong B thỏa mãn $v\Big|_{\partial B} \geq u\Big|_{\partial B}$ thì

$$v \geq u \text{ trong } B.$$

Một cách tương tự ta định nghĩa hàm điều hòa trên trong lớp các hàm nửa liên tục dưới.

Ví dụ 4.4. Cho $u : \Omega \to [0, \infty)$ là hàm điều hòa. Khi đó $-\ln u$ là hàm điều hòa trên trong Ω.

Ví dụ 4.5. Hàm u điều hòa trên trong Ω khi và chỉ khi $(-u)$ điều hòa dưới trong Ω. Hàm u điều hòa trong Ω khi và chỉ khi nó vừa điều hòa dưới vừa điều hòa trên trong Ω.

Bài tập 4.3. *Cho u, v là các hàm điều hòa dưới trong Ω. Chứng minh các hàm sau cũng điều hòa dưới trong Ω:*

$$\max\{u, v\}, \lambda u + \mu v \ (\forall \lambda, \mu > 0).$$

Chú ý. Trong Chương 1 ta đã thấy, khi $u \in C^2(\Omega)$, ta có các định nghĩa tương đương về hàm điều hòa dưới sau:

(i) $\Delta u \geq 0$ trong Ω.

(ii) $\int_\Omega u(x)\Delta\phi(x)dx \geq 0, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$.

(iii) u thỏa mãn tính chất dưới trung bình cầu.

(iv) u thỏa mãn định nghĩa trên.

Cũng trong Chương 1, khi $u \in C(\Omega)$ ba định nghĩa (ii), (iii) và (iv) là tương đương.

Định lý 4.3. *Cho $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ là hàm nửa liên tục trên, $u \not\equiv -\infty$. Khi đó các khẳng định sau tương đương.*

(i) u điều hòa dưới trong Ω.

(ii) u thỏa mãn tính chất dưới trung bình trên mặt cầu.

(iii) u thỏa mãn tính chất dưới trung bình trong hình cầu.

Chứng minh. (i) $\Rightarrow$ (ii): Giả sử ta đã có (i). Lấy hình cầu đóng $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Theo Định lý 4.2 tồn tại dãy giảm $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ các hàm liên tục trong $\bar{B}_r(x)$, hội tụ điểm đến u trong $\bar{B}_r(x)$. Công thức Poisson cho ta hàm $v_k \in C(\bar{B}_r(x))$ điều hòa trong $B_r(x)$ thỏa mãn

$$v_k\Big|_{\partial B_r(x)} = u_k\Big|_{\partial B_r(x)} \geq u\Big|_{B_r(x)}.$$

Theo định nghĩa hàm điều hòa dưới ta có

$$v_k \geq u \text{ trong } B_r(x).$$

Sử dụng tính chất trung bình cầu của hàm điều hòa v_k ta có:

$$u(x) \leq v_k(x) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} v_k(y)dS_y = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u_k(y)dS_y.$$

Do dãy $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ đơn điệu giảm, hội tụ đến u trên $\partial B_r(x)$ nên từ trên, cho $k \to \infty$ ta có (ii).

<u>(ii) ⇒ (iii):</u> Giả sử ta đã có (ii). Bằng cách lấy tích phân từ mặt cầu lên hình cầu ta có ngay đpcm.

<u>(iii) ⇒ (i):</u> Giả sử ta đã có (iii). Lấy hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$ và $v \in C(\bar{B})$ điều hòa trong B và thỏa mãn $v\Big|_{\partial B} \geq u\Big|_{\partial B}$.

Do u nửa liên tục trên trong Ω và $v \in C(\bar{B})$ nên theo Mệnh đề 4.1 hàm $u - v$ đạt GTLN trong $\bar{B}$. Đặt $M = \max_{\bar{B}}(u - v)$.

Giả sử $M > 0$ ta có tập $D = \{x \in B : (u-v)(x) = M\}$ khác rỗng. Ngoài ra, do $u - v$ nửa liên tục trên trong B nên

$$D = B \setminus \{x \in B : (u - v)(x) < M\}$$

là tập đóng trong B.

Do u thỏa mãn tính chất dưới trung bình cầu và v điều hòa nên $(u-v)$ cũng thỏa mãn tính chất dưới trung bình cầu. Tương tự như chứng minh nguyên lý cực đại mạnh ta có tập D mở trong B.

Như vậy $D \neq \emptyset$ vừa đóng vừa mở trong B nên $D = B$ hay $u - v = M$ trong B.

Lấy $x \in \partial B$. Do u nửa liên tục trên trong Ω và $v \in C(\bar{B})$ nên có $r > 0$ sao cho với mọi $y \in B_r(x) \cap B$ ta có

$$u(x) \geq u(y) - \frac{M}{3}, v(x) \leq v(y) + \frac{M}{3}.$$

Do đó với $x \in \partial B, y \in B_r(x) \cap B$ ta có

$$M/3 = (u(y) - M/3) - (v(y) + M/3) \leq u(x) - v(x) \leq 0.$$

Ta có điều mâu thuẫn hay giả sử sai. Vậy $M \leq 0$ hay ta có (i). □

Bài tập 4.4. *Cho u là hàm điều hòa dưới trong Ω. Chứng minh rằng nếu u đạt GTLN trong Ω thì u là hằng trong Ω. Từ đó, với Ω bị chặn, hãy chứng minh khẳng định sau:*

$$\text{Nếu } \limsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) \le 0, \forall x_0 \in \partial\Omega, \text{ thì } u(x) \le 0, \forall x \in \Omega.$$

Để phục vụ cho phần tiếp theo dưới đây ta chỉ quan tâm đến tính chất của hàm điều hòa dưới liên tục.

Mệnh đề 4.4 (Nguyên lý so sánh)**.** *Cho Ω mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và $u, v \in C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn*

(i) u điều hòa dưới, v điều hòa trên trong Ω;

(ii) $u\Big|_{\partial\Omega} \le v\Big|_{\partial\Omega}$.

Khi đó $u \le v$ trong Ω.

Chứng minh. Từ giả thiết ta có $u - v \in C(\bar{\Omega})$ điều hòa dưới trong Ω và $(u-v)\Big|_{\partial\Omega} \le 0$. Khi đó tồn tại $M = \max_{\bar{\Omega}}(u-v)$.
Giả sử $M > 0$ ta có $D = \{x \in \Omega : (u-v)(x) = M\}$ khác rỗng. Tương tự chứng minh trên ta có D vừa đóng vừa mở trong Ω. Khi đó $\partial D \cap \partial\Omega \ne \emptyset$. Lấy $x \in \partial D \cap \partial\Omega$, do $(u-v) \in C(\bar{\Omega})$ nên

$$M = (u-v)(x) \le 0.$$

Ta có điều mâu thuẫn hay điều giả sử sai. Như vậy $M \le 0$ hay ta có đpcm. □

Bài tập 4.5. *Cho $D \ne \emptyset$ là tập con vừa đóng, vừa mở trong Ω. Chứng minh rằng $\partial D \subset \partial\Omega$.*

Bài tập 4.6. *Cho Ω mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và u điều hòa dưới, v điều hòa trên trong Ω thỏa mãn*

$$\limsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} u(x) \le \liminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} v(x), \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Chứng minh rằng $u \le v$ trong Ω.

Mệnh đề 4.5 (Khoét cầu)**.** *Cho $u \in C(\Omega)$ là hàm điều hòa dưới trong Ω và hình cầu đóng $\bar{B} \subset \Omega$. Công thức Poisson cho ta hàm $\bar{u} \in C(\bar{B})$ điều hòa trong B thỏa mãn $\bar{u}\Big|_{\partial B} = u\Big|_{\partial B.}$ Khi đó nếu cho $\bar{u} = u$ trong $\Omega \setminus \bar{B}$ thì $\bar{u} \in C(\Omega)$ điều hòa dưới trong Ω và $u \le \bar{u}$ trong Ω.*

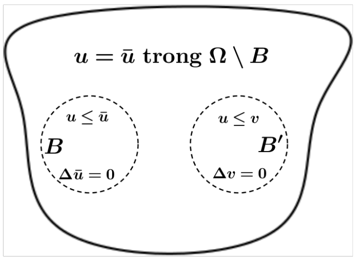
Chứng minh. Từ tính điều hòa dưới của u ta có ngay $u \le \bar{u}$ trong B. Từ đó ta có $u \le \bar{u}$ trong Ω.

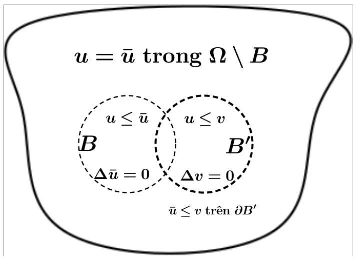
Ta còn phải chứng minh tính điều hòa dưới của $\bar{u}$ bằng định nghĩa. Lấy hình cầu đóng $\bar{B}' \subset \Omega$ và $v \in C(\bar{B}')$ điều hòa trong B' và $\bar{u} \le v$ trên $\partial B'$. Việc còn phải chứng minh lúc này $\bar{u} \le v$ trong B'.

Có $u \le \bar{u}$ trong Ω và $\bar{u} \le v$ trên $\partial B'$ nên $u \le v$ trên $\partial B'$. Lại có u là hàm điều hòa dưới trong Ω và v điều hòa trong B' nên $u \le v$ trong B'.

TH1: $B \cap B' = \emptyset$ thì $B' \subset \bar{\Omega} \setminus B$. Từ giả thiết $\bar{u} = u$ trong $\Omega \setminus B$ ta có $\bar{u} \le v$ trong B' hay đpcm.

TH2: $B \cap B' \ne \emptyset$. Tương tự TH1 có $\bar{u} \le v$ trong $B' \setminus (B \cap B')$. Việc còn phải chứng minh lúc này $\bar{u} \le v$ trong $B \cap B'$. Để ý rằng $\bar{u}, v$ là các hàm điều hòa trong $B \cap B'$ nên theo nguyên lý so sánh ta chỉ còn phải chứng minh $\bar{u} \le v$ trên $\partial(B \cap B')$. Từ giả thiết ta có $\bar{u} \le v$ trên $\partial(B \cap B') \cap \partial B'$. Lại có $\bar{u} \le v$ trong $B' \setminus (B \cap B')$ nên $\bar{u} \le v$ trên $\partial(B \cap B') \cap \partial B$.





□

4.2 Cận trên các hàm điều hòa dưới

Xét tập các hàm điều hòa dưới

$$S_\psi = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ điều hòa dưới trong } \Omega, v\Big|_{\partial\Omega} \le \psi\}.$$

Bài tập 4.7. *(a) Cho* $v_1, v_2, \cdots, v_n \in S_\psi$*. Chứng minh rằng* $\max\{v_j, j = \overline{1,n}\} \in S_\psi$*.*
(b) Cho $v \in S_\psi$ *và hình cầu đóng* $\bar{B} \subset \Omega$*. Hàm* u *được xác định từ* v *như trong Mệnh đề khoét cầu. Chứng minh rằng* $\bar{v} \in S_\psi$*.*

Định lý 4.6. *S_ψ khác rỗng và bị chặn trên, nghĩa là có hằng số $M > 0$ sao cho*

$$v \leq M \text{ trong } \Omega, \forall v \in S_\varphi.$$

Đặc biệt $u_\psi = \sup_{S_\psi} v$ là hàm điều hòa trong Ω.

Chứng minh. Cho $\partial\Omega$ compact và $\psi \in C(\partial\Omega)$ nên ψ có GTLN và GTNN trên $\partial\Omega$. Đặt

$$m = \min_{\partial\Omega} \psi, M = \max_{\partial\Omega} \psi.$$

Dễ thấy $v_0 \equiv m \in S_\psi$. Do đó $S_\psi \neq \emptyset$.
Do $v_1 \equiv M \in C(\bar{\Omega})$ điều hòa trong Ω và $v_1\Big|_{\partial\Omega} \geq \psi$ nên theo nguyên lý so sánh ta có

$$v \leq M \text{ trong } \Omega, \forall v \in S_\psi.$$

Như vậy $m \leq u_\psi = \sup_{S_\psi} v \leq M$ trong Ω.
Ta còn phải chứng minh u_ψ điều hòa trong Ω.
Cố định $x \in \Omega$. Do Ω mở nên có $r > 0$ sao cho $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$. Để chỉ ra u điều hòa tại x ta sẽ tìm hàm v điều hòa trong $B_r(x)$ và

$$u = v \text{ trong } B_r(x).$$

B1: Xây dựng hàm điều hòa v trong $B_r(x)$. Từ định nghĩa của u_ψ ta có dãy các hàm $u_n \in S_\psi, n \in \mathbb{N}$, sao cho

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

Bằng cách xét $u_1, \max\{u_1, u_2\}, \cdots, \max\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ta có thể giả sử dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ đơn điệu tăng trong Ω.
Dùng Mệnh đề khoét cầu cho mỗi u_n ta có

$$\bar{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) \text{ khi } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(x), \\ \text{điều hòa trong } B_r(x), \end{cases}$$

điều hòa dưới trong Ω và $\bar{u}_n\Big|_{\partial\Omega} = u_n\Big|_{\partial\Omega} \leq \psi$. Do đó $\bar{u}_n \in S_\psi$. Ngoài ra, theo nguyên lý so sánh ta có

$$u_n \leq \bar{u}_n \leq \bar{u}_{n+1} \leq u_\psi \text{ trong } \Omega.$$

Do đó ta cũng có

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(x) = u_\psi(x).$$

Ngoài ra dãy $\{\bar{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy hàm điều hòa đơn điệu tăng trong $B_r(x)$ nên theo Định lý hội tụ đơn điệu tồn tại hàm v điều hòa trong $B_r(x)$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(y) = v(y), \forall y \in B_r(x).$$

B2: Chứng minh $u = v$ trong $B_r(x)$. Dễ thấy

$$u(x) = v(x) \text{ và } u(y) \geq v(y), \forall y \in B_r(x).$$

Giả sử $u \neq v$ trong $B_r(x)$. Khi đó có $x_0 \in B_r(x)$ sao cho

$$u(x_0) > v(x_0).$$

Làm tương tự trên với điểm x_0 ta thu được dãy đơn điệu tăng $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ các hàm điều hòa trong $B_r(x)$ thỏa mãn:

(i) $\lim_{n\to\infty} w_n(x_0) = u(x_0)$;

(ii) $\bar{u}_n \leq w_n \leq w_{n+1} \leq u_\psi$ trong $B_r(x)$;

Khi đó có hàm điều hòa w trong $B_r(x)$ là giới hạn điểm của dãy $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Từ (i) và (ii) ta có

(iii) $v(x_0) < u(x_0) = w(x_0)$;

(iv) $v(x) = u(x) = w(x)$;

(v) $v \leq w$ trong $B_r(x)$.

Như vậy $w - v$ là hàm điều hòa không âm trong $B_r(x)$ đạt GTNN tại tâm x nên theo nguyên lý cực đại mạnh $w = v$ trong $B_r(x)$. Do đó $w(x_0) = v(x_0)$ mâu thuẫn với (iii). Vậy điều giả sử sai hay $u = v$ trong $B_r(x)$. Ta hoàn thành chứng minh. $\square$

Bài tập 4.8. *Viết chi tiết việc xây dựng dãy $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ trong chứng minh trên.*

4.3 Tính chính quy của điểm biên

Ta giữ nguyên các ký hiệu như mục trước. Mục này ta quan tâm đến hàm điều hòa $u_\psi = \sup_{S_\psi} v$ thỏa mãn điều kiện biên $u_\psi\Big|_{\partial\Omega} = \psi$ như nào?

4.3.1 Tính chính quy - Điều kiện biên

Trước hết ta đến với khái niệm điểm biên chính quy.

Định nghĩa 4.3. Điểm $x_0 \in \partial\Omega$ được gọi là điểm chính quy nếu

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to x_0}} u_\psi(x) = \psi(x_0), \forall \psi \in C(\partial\Omega).$$

Ta nói biên $\partial\Omega$ là chính quy nếu mọi điểm trên đó đều chính quy.

Định nghĩa này cho ta một cách trực tiếp trả lời câu hỏi về cách thỏa mãn điều kiện biên của u_ψ. Tuy nhiên định nghĩa này khó thực hành. Ta cần đến định nghĩa kỹ thuật sau:

Định nghĩa 4.4. Cho $x_0 \in \partial\Omega$. Hàm $w \in C(\bar{\Omega})$ được gọi là hàm cản tại x_0 đối với Ω nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $w(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, và $w(x_0) = 0$.

(ii) w điều hòa trên trong Ω.

Bài tập 4.9. *Việc tồn tại hàm cản có tính địa phương, nghĩa là giả sử $D \subset \Omega$ là tập mở và $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial D$ sao cho có $r > 0$ để*

$$B_r(x_0) \cap \Omega = B_r(x_0) \cap D.$$

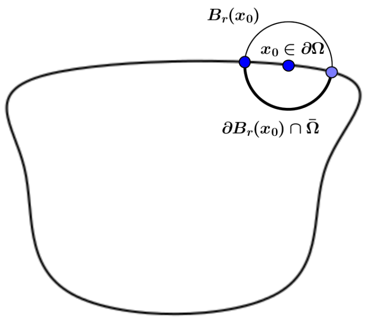
Khi đó có hàm cản tại x_0 đối với Ω khi và chỉ khi có hàm cản tại x_0 đối với D.

Mệnh đề 4.7. *Cho $x_0 \in \partial\Omega$. Nếu tồn tại $w \in C(\bar{\Omega})$ là hàm cản tại x_0 đối với Ω thì x_0 là điểm biên chính quy.*

Chứng minh. Lấy $\psi \in C(\partial\Omega)$ ta có $u_\psi = \sup_{v \in S_\psi} v$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\psi(x_0) = 0$. Ta cần phải chứng minh x_0 là điểm biên chính quy hay

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \to x_0}} |u_\psi(x)| = 0.$$

Đặt $M = \max_{\partial\Omega} |\psi|$.



Cố định $\epsilon > 0$. Do $\psi \in C(\partial\Omega)$ nên có $r > 0$ sao cho

$$|\psi(x)| < \epsilon, \forall x \in B_r(x_0) \cap \Omega.$$

Do tính chất của hàm cản w tại x_0 đối với Ω ta có

$$m = \min\{w(y) : y \in \partial B_r(x_0) \cap \bar{\Omega}\} > 0.$$

Xét hàm $v_1 : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$v_1(x) = \begin{cases} -M & \text{khi } x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{B}_r(x_0), \\ -\frac{M}{m} \min\{w, m\} & \text{khi } x \in \bar{\Omega} \cap \bar{B}_r(x_0). \end{cases}$$

Dễ thấy $v_1 \in C(\bar{\Omega})$ là hàm điều hòa dưới trong Ω và $v_1(x_0) = 0$. Hơn nữa $v_1\Big|_{\partial\Omega} - \epsilon \le \psi$ hay $v_1 - \epsilon \in S_\psi$. Do đó ta có

$$v_1 - \epsilon \le u_\psi \text{ trong } \Omega.$$

Ngoài ra $\epsilon - v_1$ là hàm điều hòa trên trong Ω và $\epsilon - v_1\Big|_{\partial\Omega} \ge \psi$ nên theo nguyên lý so sánh ta có

$$v \le \epsilon - v_1 \text{ trong } \Omega, \forall v \in S_\psi,$$

hay $u_\psi \le \epsilon - v_1$ trong Ω.
Như vậy ta có

$$|u_\psi| \le |\epsilon - v_1| \text{ trong } \Omega.$$

Lấy $\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \to x_0}}$ cả hai vế ta có đpcm. □

Chú ý. Chứng minh trên vẫn đúng khi thay khái niệm hàm cản trên bởi:

Định nghĩa 4.5 (Mở rộng hàm cản). Cho $x_0 \in \partial\Omega$. Hàm $w : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ được gọi là hàm cản tại x_0 đối với Ω nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\liminf_{\substack{x\in\Omega \\ x\to y}} w(x) > 0, \forall y \in \bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, và $\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to x_0}} w(x) = 0$.

(ii) w điều hòa trên trong Ω.

Bài tập 4.10. *Chứng minh cho $\psi \in C(\partial\Omega)$ tổng quát (không giả sử $\psi(x_0) = 0$).*

Bài tập 4.11. *Chứng minh các tính chất của v_1 trong chứng minh trên.*

Tiếp theo ta sẽ chứng minh việc có hàm cản chính là đặc trưng của tính chính quy.

Mệnh đề 4.8. *Nếu $\partial\Omega$ chính quy thì tại mọi điểm $x_0 \in \partial\Omega$ đều tồn tại hàm cản tại x_0 đối với Ω.*

Chứng minh. Cố định $x_0 \in \partial\Omega$. Lấy hàm $\psi(x) = |x - x_0|$ là hàm liên tục trên $\partial\Omega$ ta có hàm $u_\psi = \sup_{S_\psi} u$ là hàm điều hòa trong Ω. Từ giả thiết ta có

$$\lim_{\substack{x\in\Omega \\ x\to y}} u_\psi(x) = \psi(y), \forall y \in \partial\Omega.$$

Hàm $w : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$w(x) = \begin{cases} u_\psi(x) & \text{khi } x \in \Omega, \\ |x - x_0| & \text{khi } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

chính là hàm cản tại x_0 đối với Ω. □

Bài tập 4.12. *Cho $x_0 \in \partial\Omega$ và $\psi(x) = |x - x_0| \in C(\partial\Omega)$. Chứng minh khẳng định sau:*

$$|\cdot - x_0| \in S_\psi \text{ và } u_\psi \geq |\cdot - x_0| \text{ trong } \Omega.$$

Từ đó hãy chứng minh khẳng định sau:

Nếu $x_0 \in \partial\Omega$ là điểm biên chính quy thì tồn tại hàm cản (theo định nghĩa mở rộng) tại x_0 đối với Ω.

Như vậy từ trên ta thu được kết quả sau:

Định lý 4.9. *Bài toán biên Dirichlet* (4.1)-(4.2) *có nghiệm với mọi $\psi \in C(\partial\Omega)$ khi và chỉ khi biên $\partial\Omega$ chính quy.*

Hệ quả 4.10. *Cho Ω là tập mở, bị chặn với biên chính quy. Khi đó trên Ω có hàm Green.*

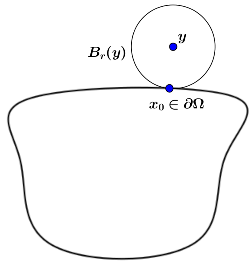
4.3.2 Tập có biên chính quy

Định nghĩa 4.6 (Poincare)**.** Điểm $x_0 \in \partial\Omega$ được gọi là thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài nếu:

tồn tại hình cầu $B_r(y)$ thỏa mãn

(i) $B_r(y) \cap \Omega = \emptyset$;

(ii) $\partial B_r(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$.



Nếu $x_0 \in \partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài, nghĩa là có hình cầu $B_r(y)$ như trong định nghĩa. Khi đó hàm $E(\cdot - y) - E(x_0 - y)$ là hàm cản tại x_0 đối với Ω. Do đó x_0 là điểm biên chính quy.

Ví dụ 4.6. Trong mặt phẳng, hình chữ nhật, hình ellipse hay tổng quát các tập mở, lồi, bị chặn có biên gồm các điểm thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài. Do đó các tập mở, lồi, bị chặn là các tập có biên chính quy.
Một cách tương tự, trong $\mathbb{R}^d$, các tập mở, lồi, bị chặn có tập biên chính quy.

Ví dụ 4.7. Trong mặt phẳng, tứ giác lõm có đỉnh lõm là điểm không thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài.

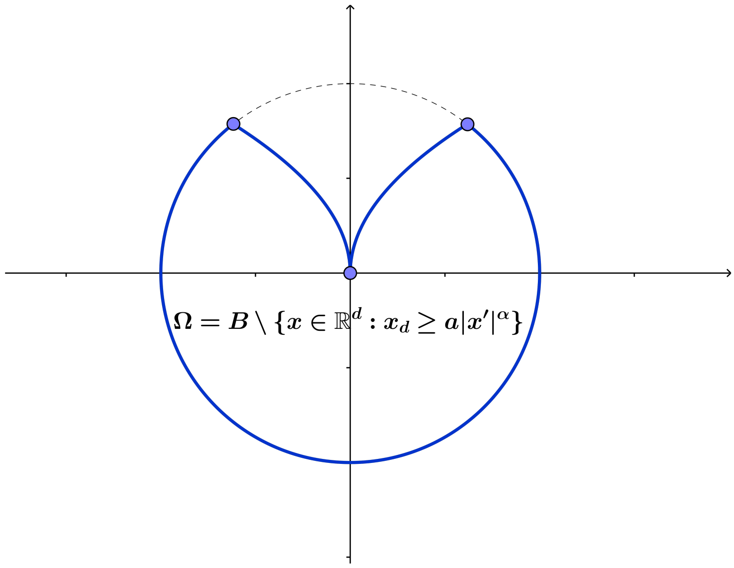
Bài tập 4.13. *Nếu $\partial\Omega \in C^2$ thì $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài.*

Định nghĩa 4.7 (Lebesgue)**.** Giả sử $0 \in \partial\Omega$. Khi đó điểm 0 được gọi là thỏa mãn điều kiện Lebesgue nếu có các số dương a, α và hình cầu B_r sao cho

$$x_d < a|x'|^\alpha, \forall x \in B_r \cap \Omega.$$

Một cách tổng quát cho $x_0 \in \partial\Omega$, dùng phép dịch chuyển và phép quay ta định nghĩa được điều kiện Lebesgue cho điểm x_0.
Khi $\alpha = 1$ điều kiện Lebesgue trở thành điều kiện nón ngoài của Zaremba.

Bài tập 4.14. *Xét tập $\Omega = B \setminus \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d \geq a|x'|^\alpha\}, a, \alpha$ là các hằng số dương.*



(i) Chứng minh rằng tất cả các điểm biên của Ω trừ gốc đều thỏa mãn điều kiện hình cầu ngoài.

(ii) Xét $\psi(x) = |x| \in C(\partial\Omega)$. Khi $\alpha = 1$, chứng minh rằng hàm $u_\psi = \sup_{S_\psi} v$ chính là hàm cản tại gốc đối với Ω.

(iii) Khi $d \geq 4$ và $0 < \alpha < 1$, chứng minh rằng điểm gốc là điểm biên không chính quy đối với Ω.

Ví dụ 4.8. Trong mặt phẳng, các đa giác đều thỏa mãn điều kiện nón ngoài. Do đó biên của các đa giác là chính quy.

Bài tập 4.15. *Nếu $\partial\Omega \in C^1$ thì $\partial\Omega$ thỏa mãn điều kiện nón ngoài.*

Lebesgue cũng chỉ ra miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ có một điểm biên không có hàm chặn tại đó như sau.

Ví dụ 4.9. Trong $\mathbb{R}^3$, ký hiệu đoạn $I = \{(0,0,s) : 0 \leq s \leq 1\}$. Với mỗi $s \in [0,1]$ ký hiệu $p(s) = (0,0,s)$, ta có $v_s(x) = s|x - p(s)|^{-1}$ là hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^3 \setminus I$. Do đó, sử dụng tính chất giá trị trung bình ta có

$$v(x) = \int_0^1 v_s(x)ds = \int_0^1 \frac{s}{|x - p(s)|}ds$$

là hàm điều hòa trên $\mathbb{R}^3 \setminus I$. Tích toán trực tiếp ta thu được, với $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$v(x) = |x - p(1)| - |x| + x_3 \ln |(1 - x_3 + |x - p(1)|)(x_3 + |x|)| - x_3 \ln(x_1^2 + x_2^2). \quad (4.3)$$

Khi $|x| \to 0$, tổng ba số hạng đầu của vế phải của (4.3) hội tụ về 1. Riêng số hạng thứ tư của (4.3) hội tụ đến α, khi $|x| \to 0$ và $x_1^2 + x_2^2 = e^{-\alpha/x_3}, x_3 > 0$ và $\alpha > 0$. Như vậy $v(x)$ không có giới hạn khi $|x| \to 0$. Cố định $c > 0$ xét tập mở

$$\Omega = \{x \in B_1 : \ v(x) < 1 + c\}.$$

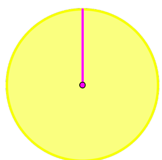
Để $v(x)$ liên tục trên mặt cong $\partial\Omega$ ta chọn $v(0) = 1 + c$. Khi đó bài toán biên Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \quad (4.4)$$

$$u = v \text{ trên } \partial\Omega, \quad (4.5)$$

không có nghiệm trong $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Cụ thể hơn, nếu hàm điều hòa u trong Ω, bằng v trên $\partial\Omega$ thì $u = v$ trong Ω. Khi đó $u = v$ không liên tục tại gốc!

Ví dụ 4.10. Trong mặt phẳng, tập $\Omega = B \setminus I$ với $I = \{(0, t) : \ 0 \leq t \leq 1\}$



có điểm gốc 0 không thỏa mãn điều kiện Lebesgue. Tuy nhiên theo Osgood điểm gốc vẫn là điểm biên chính quy.

Định lý 4.11 (Osgood)**.** *Giả sử Ω là tập mở trong mặt phẳng, $x_0 \in \partial\Omega$ thỏa mãn thành phần liên thông của $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ chứa x_0 thì nó chứa ít nhất hai điểm. Khi đó tại x_0 có hàm chặn đối với Ω.*

Trước khi đến với tiêu chuẩn Wiener về điểm biên chính quy ta cần đến khái niệm dung lượng (capacity) sau.

Định nghĩa 4.8. Cho $F \subset \mathbb{R}^d$ là tập compact. Ký hiệu

$$K = \{v \in C_0^1(\mathbb{R}^d) : \ v = 1 \text{ trong } F\}.$$

Dung lượng của tập F xác định bởi

$$cap(F) = \inf_{v \in K} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Bài tập 4.16. *Khi $d \geq 3$, chứng minh rằng $cap(\bar{B}_R) = (d-2)\omega_d R^{d-2}$. Khi $d = 3$, chứng minh rằng*

$$cap(E) = 8\pi \left(\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \right)^{-1}$$

với ellipsoid $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 \leq 1\}$.

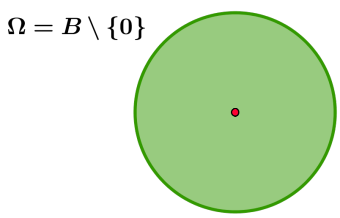
Tiêu chuẩn Wiener được phát biểu như sau:

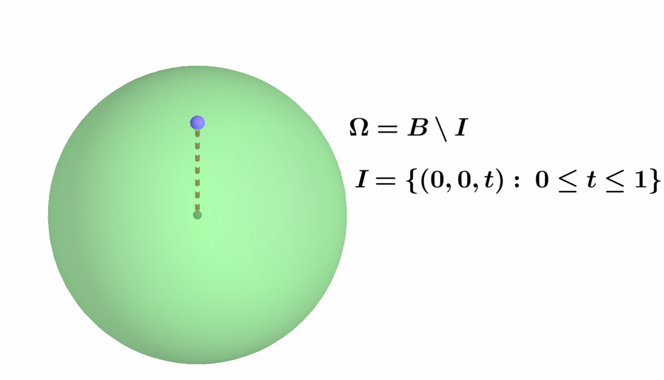
Định lý 4.12. *Điểm $x_0 \in \partial\Omega$ là điểm biên chính quy khi và chỉ khi:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j(d-2)} C_j = +\infty$$

trong đó $C_j = cap(\bar{B}_{\lambda^j}(x_0) \setminus \Omega)$ và $\lambda \in (0,1)$ bất kỳ.

Chú ý rằng nếu K là tập compact trong $\mathbb{R}^d$ có số chiều Hausdorff không quá $d-2$ thì $cap(K) = 0$. Khi đó sử dụng tiêu chuẩn Wiener các tập sau có biên không chính quy:





Bài tập 4.17. *Với Ω như trong Bài tập 4.14. Khi $d = 3$ chứng minh rằng điểm gốc là điểm chính quy.*

Chương 5

Phương pháp thế vị

5.1 Chuẩn bị

5.1.1 Giới thiệu chung

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và biên $\partial\Omega \in C^1$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị ν. Giả sử $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Khi đó ta có đồng nhất thức Green:

$$u(x) = \int_\Omega E(x-y)\Delta u(y)dy + \int_{\partial\Omega} \big(u(y)\partial_{\nu_y} E(x-y) - E(x-y)\partial_{\nu_y} u(y)\big)\, dS_y, \forall x \in \Omega.$$

Từ vế phải đồng nhất thức Green ta phân tích mỗi số hạng là một loại thế vị. Cụ thể như sau:

Định nghĩa 5.1. Một cách hình thức ta định nghĩa các loại thế vị sau:

(a) Thế vị khối (hay còn gọi thế vị Newton) với hàm mật độ f bị chặn trên Ω được xác định bởi

$$N[f](x) = \int_\Omega E(x-y)f(y)dy.$$

(b) Thế vị lớp kép với hàm mật độ ψ liên tục trên $\partial\Omega$ đươc xác định bởi

$$D[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y)dS_y.$$

(c) Thế vị lớp đơn với hàm mật độ ψ liên tục trên $\partial\Omega$ đươc xác định bởi

$$S[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y)\psi(y)dS_y.$$

Sử dụng thế vị khối giúp ta tìm nghiệm của phương trình Poisson

$$\Delta u = f \text{ trong } \Omega.$$

Điều này giúp ta chuyển từ bài toán biên cho phương trình Poisson trong Ω thành bài toán biên cho phương trình Laplace trong Ω.
Thế vị lớp kép giúp ta giải các bài toán biên Dirichlet sau:

- Bài toán biên Dirichlet trong:

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{5.1}$$

$$u = \psi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{5.2}$$

- Bài toán biên Dirichlet ngoài:

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \tag{5.3}$$

$$u = \psi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{5.4}$$

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-d} \text{ khi } |x| \to \infty. \tag{5.5}$$

Cụ thể bằng cách tìm nghiệm dưới dạng thế vị lớp kép các bài toán biên Dirichlet chuyển thành các phương trình tích phân (sẽ viết rõ trong mục thế vị lớp kép).
Thế vị lớp đơn giúp ta giải các bài toán biên Neumann sau:

- Bài toán biên Neumann trong:

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{5.6}$$

$$\partial_\nu u = \psi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{5.7}$$

- Bài toán biên Neumann ngoài:

$$\Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \tag{5.8}$$

$$\partial_\nu u = \psi \text{ trên } \partial\Omega, \tag{5.9}$$

$$|u(x)| \leq C|x|^{2-d} \text{ khi } |x| \to \infty. \tag{5.10}$$

Cụ thể bằng cách tìm nghiệm dưới dạng thế vị lớp đơn các bài toán biên Neumann chuyển thành các phương trình tích phân (sẽ viết rõ trong mục thế vị lớp kép).

5.1.2 Hình học của biên

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ và biên $\partial\Omega \in C^2$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị ν.
Xét ánh xạ $F : \partial\Omega \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^d$ xác định bởi

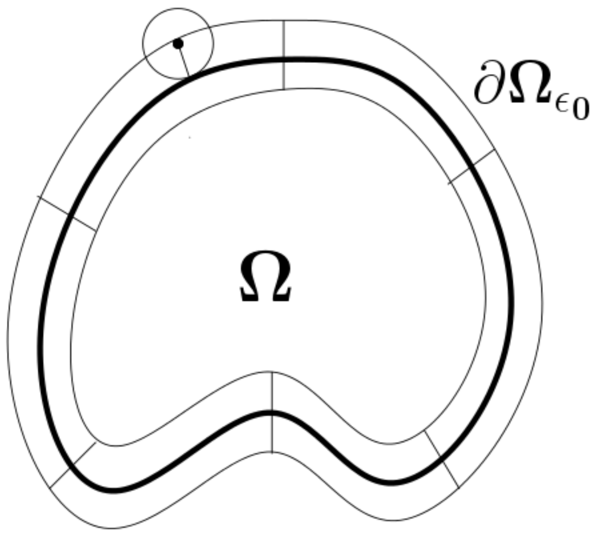
$$F(x, t) = x + t\nu(x), x \in \partial\Omega, t \in (-1, 1).$$

Do $\partial\Omega \in C^2$ nên $F \in C^1(\partial\Omega \times (-1, 1); \mathbb{R}^d)$. Hơn nữa ta có bổ đề sau:

Bổ đề 5.1. *Tồn tại $\epsilon_0 > 0$ đủ nhỏ và $\partial\Omega_{\epsilon_0}$ là lân cận của biên $\partial\Omega$ trong $\mathbb{R}^d$ sao cho ánh xạ F là phép vi phôi từ $\partial\Omega \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ lên $\partial\Omega_{\epsilon_0}$. Nói cách khác tập*

$$\partial\Omega_{\epsilon_0} = \{x + t\nu(x) : \ x \in \partial\Omega, t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)\}$$

là lân cận ống (tubular neighborhood) của $\partial\Omega$ trong $\mathbb{R}^d$.



Chứng minh. Xét ánh xạ $F : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ xác định bởi

$$F(x, t) = x + t\nu(x), x \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}.$$

Do $\partial\Omega \in C^2$ nên $F \in C^1$ và đạo ánh $DF(x, 0)$ của F khả nghịch. Do đó theo Định lý ánh xạ ngược ta có đpcm. $\square$

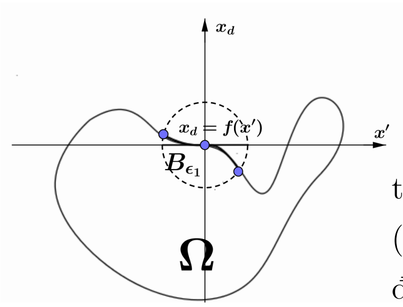
Như vậy với mỗi $y_0 \in \partial\Omega_{\epsilon_0}$ đều có duy nhất cặp $(x_0, t) \in \partial\Omega \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ sao cho $y_0 = x_0 + t\nu(x_0)$. Khi đó

$$t = |y_0 - x_0| = d(y_0, \partial\Omega).$$

Tiếp đến ta tìm $\epsilon_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho: với bất kỳ $x_0 \in \partial\Omega$ ta đều không tìm được hai điểm $y, z \in \partial\Omega \cap B_{\epsilon_1}(x_0)$ sao cho đoạn thẳng $[y, z]$ song song với véc-tơ pháp tuyến $\nu(x_0)$. Khi đó trong lân cận $\partial\Omega \cap B_{\epsilon_1}(x_0)$, bằng phép dịch chuyển và phép quay ta có:

(i) x_0 là gốc tọa độ, véc-tơ pháp tuyến $\nu(x_0)$ nằm trên trục Ox_d và hướng về phía dương.

(ii) Tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{\epsilon_1} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp 2 sao cho



$$\partial\Omega \cap B_{\epsilon_1} \subset \{(x', f(x')) : \ x' \in \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{\epsilon_1}\}, \quad (5.11)$$

$$\Omega \cap B_{\epsilon_1} \subset \{x \in B_{\epsilon_1} : \ x_d < f(x')\}, \quad (5.12)$$

trong đó $B_{\epsilon_1} = B_{\epsilon_1}(x_0)$ là hình cầu tâm tại gốc (chính là điểm x_0) bán kính ϵ_1, còn x' là $d-1$ tọa độ đầu của x.

Bài tập 5.1. *Với hàm f như trên ta có $f(0) = 0, \nabla f(0) = 0$. Chứng minh rằng có hằng số C_1 sao cho:*

$$|f(y')| \le C_1 |y'|^2, \forall y' \in \mathbb{R}^{d-1} \cap \bar{B}_{\epsilon_1/2}.$$

Từ đó hãy chứng minh rằng tồn tại hằng số C_2 sao cho

$$|\nu(x) \cdot (x - y)| \le C_2 |x - y|^2, \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Do $\partial\Omega \in C^2$ nên có hằng số $C_3 = C_3(\partial\Omega)$ sao cho

$$|\nu(x) - \nu(y)| \le C_3 |x - y|, \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Bài tập 5.2. *(a) Cho $x, y \in \partial\Omega$. Nếu $|\nu(x) - \nu(y)| < \sqrt{2}$ thì góc giữa $\nu(x)$ và $\nu(y)$ nhỏ hơn thực sự $\pi/2$.*
(b) Cho $x_0 \in \partial\Omega$. Giả sử có hai điểm $y, z \in \partial\Omega$ sao cho đoạn thẳng $[y, z]$ song song với véc-tơ pháp tuyến $\nu(x_0)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $p \in [y, z] \cap \partial\Omega$ sao cho góc giữa $\nu(x_0)$ và $\nu(p)$ lớn hơn hoặc bằng $\pi/2$.

Từ trên chọn $r_0 = \frac{1}{2}\min\{\epsilon_0, 1/C_2, 1/C_3\}$ ta có:

(a) $|\nu(x)\cdot(x-y)| \le |x-y|/2$ khi $x, y \in \partial\Omega, |x-y| < r_0$.

(b) Lân cận ống $\partial\Omega_{r_0} = \cup_{x\in\partial\Omega} B_{r_0}(x)$. Mỗi điểm $y \in \partial\Omega_{r_0}$ đều có duy nhất cặp $(x,t) \in \partial\Omega \times (-r_0, r_0)$ sao cho $y = x + t\nu(x)$.

(c) Với mỗi $x \in \partial\Omega$, trong lân cận $B_{r_0}(x)$ ta chọn hệ tọa độ địa phương mà x là gốc và pháp tuyến $\nu(x)$ chỉ hướng dương trục Ox_d. Khi đó $\partial\Omega \cap B_{r_0}(x)$ là đồ thị của hàm $f : \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp 2 thỏa mãn

$$f(0) = 0, \nabla f(0) = 0.$$

Ngoài ra $\Omega \cap B_{r_0}(x)$ nằm dưới đồ thị của hàm f.

5.1.3 Toán tử tích phân

Ta cần đến các bổ đề sau:

Bổ đề 5.2. *Cho U là các tập mở trong $\mathbb{R}^d$, Y là tập với độ đo Borel μ. Giả sử $f : U \times Y \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x,\cdot) \in L^1(Y,\mu)$ với mỗi $x \in U$. Đặt $F(x) = \int_Y f(x,y)d\mu(y)$ và cố định điểm $x_0 \in U$. Khi đó ta có các kết luận sau.*

(i) Giả sử tồn tại $r > 0$ sao cho $B_r(x_0) \subset U$ và $f(\cdot, y)$ liên tục trên $B_r(x_0)$ với mỗi $y \in Y$. Ngoài ra tồn tại hàm $g \in L^1(Y)$ sao cho $|f(x,y)| \le g(y)$ với mọi $(x,y) \in B_r(x_0) \times Y$ thì F liên tục tại x_0.

(ii) Giả sử có $m \in \mathbb{N}, r > 0$ sao cho $B_r(x_0) \subset U$ và $f(\cdot, y)$ có đạo hàm riêng $D_x^\alpha f(\cdot, y), \forall |\alpha| \le m$, trên $B_r(x_0)$ với mỗi $y \in Y$. Ngoài ra tồn tại các hàm hàm $g_\alpha \in L^1(Y)$ sao cho $|D_x^\alpha f(x,y)| \le g_\alpha(y)$ với mọi $(x,y) \in B_r(x_0) \times Y$ thì F có các đạo hàm riêng cấp $\alpha, |\alpha| \le m$, trên $B_r(x_0)$. Hơn nữa

$$D^\alpha F(x) = \int_Y D_x^\alpha f(x,y)d\mu(y), x \in B_r(x_0).$$

Chú ý. Thường ta sẽ sử dụng Bổ đề 5.2 khi $Y = \Omega$ là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với độ đo μ là độ đo Lebesgue, hay $Y = \partial\Omega$ là biên của tập mở, bị chặn Ω với μ là độ đo sinh bởi vi phân mặt trên $\partial\Omega$.

Bổ đề 5.3. *Cho U là tập mở, V là tập con trong $\mathbb{R}^d$. Giả sử $F : V \times U \to \mathbb{R}$ và điểm $x_0 \in V$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với mỗi $x \in V$ hàm $F(x, \cdot) \in L^1(U)$.

(ii) Với mỗi $\epsilon > 0$ đều có tập mở $U_\epsilon \subset U$ và $r = r(\epsilon) > 0$ sao cho

$$|\int_{U_\epsilon} F(x, y)dy| \leq \epsilon, \forall x \in B_r(x_0) \cap V, \tag{5.13}$$

$$\int_{U \setminus U_\epsilon} F(x, y)dy \text{ liên tục theo } x \text{ trong } B_r(x_0) \cap V. \tag{5.14}$$

Khi đó tích phân

$$\int_U F(x, y)dy$$

là hàm liên tục tại x_0 trên V.

Chứng minh. Lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ. Ta cần phải chỉ ra $r_0 = r_0(\epsilon, x_0) > 0$ sao cho

$$|\int_U (F(x, y) - F(x_0, y))dy| \leq 2\epsilon, \forall x \in B_{r_0}(x_0) \cap V.$$

Từ giả thiết có tập mở $U_\epsilon \subset U$ và $r = r(\epsilon) > 0$ sao cho ta có (5.13) và (5.14).
Từ (5.14) tồn tại $r_0 = r_0(\epsilon) \in (0, r)$ sao cho

$$|\int_{U \setminus U_\epsilon} (F(x, y) - F(x_0, y))dy| \leq \epsilon, \forall x \in B_{r_0}(x_0) \cap V.$$

Kết hợp với (5.13) ta có đpcm. □

Từ đây trở đi ta xét Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, với biên $\partial\Omega \in C^2$ có pháp tuyến ngoài, đơn vị ν.

Bài tập 5.3. *Cho V là tập con trong $\mathbb{R}^d$ và $x_0 \in V$. Giả sử $F : V \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) Với mỗi $x \in V$ hàm $F(x, \cdot) \in C(\partial\Omega)$.

(ii) Với mỗi $\epsilon > 0$ đều có số dương $r = r(\epsilon)$ sao cho

$$|\int_{\partial\Omega \cap B_{2r}(x_0)} F(x, y)dS_y| \leq \epsilon, \forall x \in B_r(x_0) \cap V,$$

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_{2r}(x_0)} F(x, y)dS_y \text{ liên tục theo } x \text{ trong } B_r(x_0) \cap V.$$

Khi đó tích phân

$$\int_{\partial\Omega} F(x,y)dS_y$$

là hàm liên tục tại x_0 trên V.

Để hiểu thế vị khối ta xét toán tử tích phân trong Ω:

$$K : f \mapsto \int_\Omega \frac{K(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)dy, 0 < \alpha < d,$$

trong đó nhân $K \in L^\infty(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$.
Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ sao cho $\Omega \subset B_R$. Khi đó ta có

$$\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |x-y|^{-\alpha}dy = \sup_{y\in\Omega} \int_\Omega |x-y|^{-\alpha}dx \le \int_{B_R} |z|^{-\alpha}dz = R^{d-\alpha}\omega_d.$$

Bài tập 5.4. *Chứng minh rằng $K : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), 1 \le p < \infty$, là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn*

$$||K||_{p\to p} \le R^{d-\alpha}\omega_d||K||_\infty.$$

Đặc biệt với $p = 2$ toán tử K là compact.

Khi $p = \infty$, và giả sử thêm $K \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \{(x,x) : \ x \in \bar{\Omega}\})$, sử dụng Bổ đề 5.3 ta có kết quả sau:

Mệnh đề 5.4. *Toán tử $K : L^\infty(\Omega) \to \big(C(\bar{\Omega}), ||\cdot||_\infty\big)$ là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn*

$$||K||_{\infty\to\infty} \le R^{d-\alpha}\omega_d||K||_\infty.$$

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chứng minh $K(f), f \in L^\infty(\Omega)$, liên tục tại mỗi điểm $x_0 \in \bar{\Omega}$.
Ta sẽ sử dụng Bổ đề 5.3 cho hàm $F(x,y) = K(x,y)f(y)/|x-y|^\alpha$ với $U = \Omega, V = \bar{\Omega}$, và $x_0 \in \bar{\Omega}$ cố định.
Lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ. Ta chọn $r = r(\epsilon) > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\int_{B_{3r}} |z|^{-\alpha}dz < \epsilon.$$

Khi đó chọn $U_\epsilon = B_{2r}(x_0)$ ta có

$$U_\epsilon \subset B_{3r}(x), \forall x \in B_r(x_0).$$

Do đó ta có

$$|\int_{U_\epsilon} F(x,y)dy| \le ||K||_\infty ||f||_\infty \int_{B_{3r}(x)} |x-y|^{-\alpha} dy \le C\epsilon,$$

với $C = ||K||_\infty ||f||_\infty$.

Ngoài ra khi $y \in \Omega \setminus B_{2r}(x_0)$ thì $F(\cdot, y)$ là hàm liên tục trong $B_r(x_0)$. Lại có F bị chặn nên theo Bổ đề 5.2 ta có

$$\int_{\Omega\setminus U_\epsilon} F(x,y)dy \text{ liên tục trong } B_r(x_0).$$

Như vậy các giả thiết của Bổ đề 5.3 được thỏa mãn. Do đó với $f \in L^\infty(\Omega)$ ta có $K(f) \in C(\bar{\Omega})$.

Việc chứng minh đánh giá chuẩn hiển nhiên, xem như bài tập. □

Để xem xét thế vị lớp kép, thế vị lớp đơn ta quan tâm toán tử tích phân trên $\partial\Omega$:

$$K : f \mapsto \int_{\partial\Omega} \frac{K(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y) dS_y, 0 < \alpha < d-1,$$

trong đó nhân $K \in L^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega)$.

Do $\partial\Omega \in C^2$ nên theo mục hình học của biên ta có $r_0 > 0$ sao cho với bất kỳ $x \in \partial\Omega$, xét trong lân cận $B_{r_0}(x) \cap \partial\Omega$ có hệ tọa độ địa phương mà x là gốc và pháp tuyến $\nu(x)$ chỉ hướng dương của trục Ox_d. Khi đó có hàm $f : \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp 2 sao cho

$$\partial\Omega \cap B_{r_0}(x) \subset \{(x', f(x')) : \ x' \in \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0}\}.$$

Bài tập 5.5. *Chứng minh các khẳng định sau:*

(a) Tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho

$$|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} 1 dS \le C r_0^{d-1}.$$

Khi đó ta có

$$\int_{\partial\Omega\setminus B_{r_0}(x)} |x-y|^{-\alpha} dS_y \le C r_0^{d-1-\alpha}, \forall x \in \partial\Omega.$$

(b) Tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho

$$\int_{\partial\Omega\cap B_{r_0}(x)} |x-y|^{-\alpha} dS_y \le C r_0^{d-1-\alpha}, \forall x \in \partial\Omega.$$

(c) Tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho

$$\int_{\partial\Omega\cap B_{r_0}(x)} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{d/2}} dS_y \le C J_d, \forall x \in \partial\Omega, t > 0,$$

với $J_d = \int_0^\infty s^{d-2}(1+s^2)^{d/2} ds$.

Như vậy có hằng số $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho

$$\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-\alpha} dS_y \le C r_0^{d-1-\alpha}, \forall x \in \partial\Omega.$$

Từ đây ta có kết quả sau:

Bài tập 5.6. *Chứng minh rằng $K : L^p(\partial\Omega) \to L^p(\partial\Omega), 1 \le p < \infty$, là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn*

$$||K||_{p\to p} \le C r_0^{d-1-\alpha} ||K||_\infty.$$

Đặc biệt với $p = 2$ toán tử K là compact.

Khi $p = \infty$, và giả sử thêm $K \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega \setminus \{(x,x) : \ x \in \partial\Omega\})$, sử dụng Bổ đề 5.3 ta có kết quả sau:

Bài tập 5.7. *(a) Toán tử $K : L^\infty(\partial\Omega) \to (C(\partial\Omega), ||\cdot||_\infty)$ là toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn*

$$||K||_{\infty\to\infty} \le C r_0^{d-1-\alpha} ||K||_\infty.$$

(b) Nếu $\phi \in L^2(\partial\Omega), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $K(\psi) - c\psi \in C(\partial\Omega)$ thì $\psi \in C(\partial\Omega)$. (Gợi ý: Với ϵ đủ nhỏ lấy hàm $\phi_0 \in C(\partial\Omega \times \partial\Omega)$ sao cho $\phi_0(x,y) = 1$ khi $|x-y| < \epsilon/2$, và $\phi_0(x,y) = 0$ khi $|x-y| > \epsilon$. Xét $K_0 = \phi_0 K, K_1 = (1-\phi_0)K$.)

5.2 Thế vị khối (Newton)

5.2.1 Tính chất của thế vị khối

Xét Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d, d \ge 3$, với biên $\partial\Omega \in C^1$. Thế vị khối xác định bởi

$$N[f](x) = \int_\Omega E(x-y) f(y) dy, f \in L^\infty(\Omega), x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi $d \geq 3$ thế vị khối có dạng toán tử tích phân trong Ω với

$$E(x-y) = \frac{1}{(2-d)\omega_d |x-y|^{d-2}}$$

nghĩa là $K(x,y)$ là hằng số và $\alpha = d-2$. Do đó theo Mệnh đề 5.4 về toán tử tích phân trên Ω ta có

$$N[f] \in C(\bar{\Omega}), \forall f \in L^\infty(\Omega).$$

Bài tập 5.8. *(a) Chứng minh rằng với $1 \leq p < d/(d-2)$ có $C = C(p,\Omega) > 0$ sao cho*

$$\int_\Omega |E(x-y)|^p dy < C, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Chứng minh rằng $N[f] \in C(\mathbb{R}^d)$ với mọi $f \in L^q(\Omega), q > d/2$.

Bài tập 5.9. *Cho $f \in L^\infty(\Omega)$. Chứng minh các khẳng định sau:*

(i) $N[f] \in C(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $N[f]$ thỏa mãn tính chất trung bình cầu trong $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$. Do đó $N[f]$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$.

(iii) Với $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$, tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d, |\alpha|) > 0$ sao cho khi $|x|$ đủ lớn ta có

$$|D^\alpha u(x)| \leq C|x|^{2-d-|\alpha|}.$$

Như vậy thế vị Newton $N[f]$ rất tốt ngoài $\bar{\Omega}$. Tiếp theo ta quan tâm đến tính chất của $N[f]$ trong Ω. ta có kết quả sau:

Mệnh đề 5.5. *Giả sử $f \in C^{k-1}(\Omega)$ với số nguyên $k \geq 2$. Khi đó $u = N[f] \in C^k(\Omega)$ và thỏa mãn phương trình Poisson*

$$\Delta u = f \text{ trong } \Omega.$$

Hơn nữa nếu f là hàm trơn trong Ω thì $N[f]$ cũng trơn trong Ω.

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp f có giá compact trong Ω. Khi đó ta có thể hiểu f xác định trên toàn $\mathbb{R}^d$, có giá trị bằng 0 ngoài Ω. Do có giá compact trong Ω nên từ giả thiết về độ trơn ta vẫn có $f \in C^{k-1}(\mathbb{R}^d)$ và

$$N[f](x) = \int_{\mathbb{R}^d} E(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} E(z) f(x+z) dz.$$

Do $E_{z_i}, E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d), f \in C_0^{k-1}(\mathbb{R}^d)$ và

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0_+\\ |z|=\epsilon}} \epsilon^{d-1}|E(z)| = 0$$

nên

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}\omega_f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} E(z)f_{x_i}(x+z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} E(z)f_{z_i}(x+z)dz\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} E_{z_i}(z)f(x+z)dz.\end{aligned}$$

Tiếp tục đạo hàm cấp $\alpha, |\alpha| \le k-1$, có

$$\partial^\alpha\partial_{x_i}E[f](x) = -\int_{\mathbb{R}^n} E_{z_i}(z)\partial_z^\alpha f(x+z)dz.$$

Như vậy nếu $f \in C_0^{k-1}(\Omega)$ thì $E[f] \in C^k(\Omega)$. Hơn nữa nếu $f \in C_0^\infty(\Omega)$ thì $E[f] \in C^\infty(\Omega)$. Ngoài ra, với mỗi $x \in \Omega$ ta có

$$\begin{aligned}\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i}E[f](x) &= -\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d E_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\limits_{\epsilon\le|z|\le R}\sum_{i=1}^d E_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz\end{aligned}$$

trong đó $R = R(x)$ đủ lớn để $x + \Omega \subset B_R$, chẳng hạn $R = |x| + 2d(\Omega)$.
Sử dụng công thức Green thứ nhất với chú ý $\operatorname{supp} f \subset B_R$ và $\Delta E = 0$ trong $B_R \setminus B_\epsilon$ ta có

$$\int\limits_{\epsilon\le|z|\le R}\sum_{i=1}^d E_{z_i}(z)f_{z_i}(x+z)dz = \int\limits_{\partial B_\epsilon}\partial_\nu E(z)f(x+z)dS_z.$$

Lại có trên mặt cầu ∂B_ϵ có $\partial_\nu E(z) = -\dfrac{1}{\omega_n\epsilon^{n-1}}$ nên

$$\Delta N[f](x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\omega_n\epsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\epsilon} f(x+z)dS_z = f(x).$$

Ta đã chứng minh cho trường hợp f có giá compact. Ta tiếp tục chứng minh trường hợp tổng quát. Lấy $x_0 \in \Omega$. Ta chỉ cần chứng minh bổ đề ở quanh điểm x_0. Do Ω là tập mở nên có $r > 0$ để $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Lấy $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ thỏa mãn $\varphi = 1$ trong $B_{r/2}(x_0)$.

- $\varphi(\cdot)f(\cdot)$ có giá compact nên theo chứng minh trên
$$N[\varphi f](x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\varphi(y)f(y)dy$$
thuộc lớp $C^k(\Omega)$ khi $f \in C^{k-1}(\Omega)$, trơn khi f trơn. Hơn nữa
$$\Delta N[\varphi f] = f \text{ trong } B_{r/2}(x_0).$$

- Còn
$$\int_\Omega E(x-y)(1-\varphi(y))f(y)dy = \int_{\Omega\setminus B_{r/2}(x_0)} E(x-y)(1-\varphi(y))f(y)dy$$
là hàm điều hòa trong $B_{r/4}(x_0)$ vì với mỗi $y \notin B_{r/2}(x_0)$ có
$$E(\cdot - y) \text{ điều hòa trong } B_{r/4}(x_0)$$
và $(1-\varphi(\cdot))f(\cdot)$ bị chặn trong Ω.

Từ đây ta đã hoàn thành chứng minh. □

Ví dụ sau cho thấy nếu f chỉ liên tục thì phương trình Poisson có thể không có nghiệm trong $C^2(\Omega)$.

Ví dụ 5.1. Lấy $u : B_1 \to \mathbb{R}, B_1$ là hình tròn đơn vị trong mặt phẳng, xác định bởi
$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2} & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$
Với $x \in B_1 \setminus \{0\}$, tính toán ta được
$$\begin{aligned}
u_{x_1} =& 2x_1(-\ln|x|)^{1/2} - \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}}, \\
u_{x_2} =& -2x_2(-\ln|x|)^{1/2} - \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}}, \\
u_{x_1x_1} =& 2(-\ln|x|)^{1/2} - \left(\frac{2x_1^2}{|x|^2} + \frac{x_1^4 + 4x_1^2x_2^2 - x_2^4}{2|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}}\right) - \\
&- \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}}, \\
u_{x_2x_2} =& -2(-\ln|x|)^{1/2} + \left(\frac{2x_2^2}{|x|^2} - \frac{x_1^4 - 4x_1^2x_2^2 - x_2^4}{2|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}}\right) - \\
&- \frac{x_2^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}},
\end{aligned}$$

nên

$$\Delta u = f \text{ trong } B_1 \setminus \{0\}$$

với

$$f(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^2} \left\{ \frac{2}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{4(-\ln|x|)^{3/2}} \right\}, x \in B_1 \setminus \{0\}.$$

Có thể thấy nếu lấy $f(0) = 0$ ta có $f \in C(B_1)$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned}
u_{x_1}(0,0) &= \lim_{h \to 0} h(-\ln|h|)^{1/2} = 0, \\
u_{x_1x_1}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \left(2(-\ln|h|)^{1/2} - \frac{1}{2(-\ln|h|)^{1/2}} \right) = +\infty
\end{aligned}$$

nên $u \notin C^2(B_1)$.
Ta sẽ chứng minh với $f \in C(B_1)$ như trên phương trình Poisson không có nghiệm trong $C^2(B_1)$. Thật vậy, giả sử nó có nghiệm $v \in C^2(B_1)$. Khi đó $\omega = u - v \in C(B_1)$ là hàm điều hòa trong $B_1 \setminus \{0\}$. Từ Định lý 2.7 về kỳ dị khử được ta có ω là hàm điều hòa trên B_1. Do đó $u = \omega + v \in C^2(B_1)$. Ta có điều vô lý.

Bài tập 5.10. *(a) Chứng minh rằng với $1 \leq p < d/(d-1)$ có $C = C(p, \Omega) > 0$ sao cho*

$$\int_\Omega |\nabla E(x-y)|^p dy < C, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Chứng minh rằng $N[f] \in C^1(\mathbb{R}^d)$ với mọi $f \in L^q(\Omega), q > d$. Ngoài ra ta có

$$\partial_{x_i} N[f](x) = \int_\Omega E_{x_i}(x-y) f(y) dy.$$

Bài tập 5.11. *Cho $f \in C^{0,\alpha}(\Omega), 0 < \alpha \leq 1$. Chứng minh rằng $N[f] \in C^2(\Omega)$. Hơn nữa ta có*

$$\begin{aligned}
\partial^2_{x_i x_j} N[f](x) = \int_\Omega & E_{x_i x_j}(x-y)[f(y) - f(x)] dy - \\
& - f(x) \int_{\partial\Omega} E_{x_i}(x-y) \nu_j(y) dS_y.
\end{aligned}$$

5.2.2 Bài toán biên Dirichlet

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, với biên $\partial\Omega \in C^1$.
Xét bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson:

$$\Delta u = f \text{ trong } \Omega, \tag{5.15}$$

$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{5.16}$$

Với $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, theo mục trước ta có thế vị Newton $N[f] \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thỏa mãn phương trình Poisson (5.15). Khi đó $u \in C^2(\Omega) \cap \bar{\Omega}$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet (5.15)-(5.16), với $\varphi \in C(\partial\Omega)$, khi và chỉ khi $v = u - N[f]$ thỏa mãn bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace

$$\Delta v = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{5.17}$$

$$v = \varphi - N[f] \text{ trên } \partial\Omega. \tag{5.18}$$

Sử dụng các kết quả trước đây về bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace ta có kết quả sau:

Định lý 5.6. *Cho $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \varphi \in C(\bar{\Omega})$. Khi đó bài toán biên* (5.15)-(5.16) *có duy nhất nghiệm $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Hơn nữa ta có đánh giá sau:*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq C \sup_{\Omega} |f| + \max_{\partial\Omega} |\varphi|.$$

Bài tập 5.12. *Cho $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) (0 < \alpha \leq 1), \varphi \in C(\bar{\Omega})$. Khi đó bài toán biên* (5.15)-(5.16) *có duy nhất nghiệm $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Cách làm trên, cách dùng thế vị Newton, giúp ta chuyển bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson (5.15)-(5.16) về bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace (5.17)-(5.18). Ngoài ra ta còn có cách tiếp cận khác, ngược với cách tiếp cận trên:

- Bài toán biên Dirichlet cho phương trình Laplace với điều kiện biên φ cho ta nghiệm w.
- Khi đó $u - w$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet cho phương trình Poisson với điều kiện biên 0. Để giải bài toán biên Dirichlet này ta cần đến dạng song tuyến

tính, xác định dương

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

và Định lý Lax-Milgram (phiên bản mở rộng của Định lý Riesz).

5.3 Thế vị lớp kép

5.3.1 Tính trơn của thế vị lớp kép

Xét Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, với biên $\partial\Omega \in C^1$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài, đơn vị ν. Thế vị lớp kép xác định bởi

$$D[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y) dS_y, \psi \in C(\partial\Omega), x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi $d \geq 3$ ta có

$$\partial_{\nu_y} E(x-y) = \frac{\nu(y)\cdot(y-x)}{\omega_d |x-y|^d}, x \in \mathbb{R}^d, y \in \partial\Omega.$$

Mệnh đề 5.7. *Với $\psi \in C(\partial\Omega)$ ta có $D[\psi] \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega)$. Hơn nữa ta có*

$$D^\alpha D[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} D^\alpha \left(\partial_{\nu_y} E(x-y)\right) \psi(y) dS_y, x \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^d_+.$$

Do đó $D[\psi]$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Ngoài ra, tồn tại $R > 0$ sao cho

$$|D[\psi](x)| \leq \frac{C|\partial\Omega|}{|x|^{d-1}} ||\psi||_\infty, \forall |x| > R,$$

trong đó $C = C(d)$ là hằng số.

Chứng minh. Sử dụng Bổ đề 5.2 cho $f(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y)$ với $U = \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$, $Y = \partial\Omega$ với độ đo Borel sinh bởi vi phân mặt dS. Dễ dàng kiểm tra các giả thiết của Bổ đề 5.2 được thỏa mãn (chi tiết xem như bài tập) nên ta chỉ còn phải chứng minh đánh giá cuối cùng.

Do $\bar{\Omega}$ bị chặn nên có $R > 0$ sao cho $\bar{\Omega} \subset B_{R/2}$. Khi đó ta có

$$|x-y| \geq |x|/2, \forall |x| > R, y \in \partial\Omega.$$

Từ đây không khó để có đánh giá cuối. □

Bài tập 5.13. *Một cách khác chứng minh tính điều hòa của thế vị lớp kép: Chứng minh rằng* $D[\psi] \in C(\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega)$ *và* $D[\psi]$ *thỏa mãn tính chất trung bình cầu.*

Để quan sát tính chất của thế vị lớp kép $D[f]$ trên biên $\partial\Omega$ ta viết lại

$$\partial_{\nu_y} E(x-y) = \frac{K(x,y)}{|x-y|^{d-2}}, x, y \in \partial\Omega$$

với $K(x,y) = \dfrac{\nu(y)\cdot(y-x)}{\omega_d|x-y|^2}$.
Từ Bài tập 5.1 có $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho

$$|\nu(y)\cdot(y-x)| \leq C|x-y|^2, \forall x, y \in \partial\Omega.$$

Do đó $K(x,y) \in L^\infty(\partial\Omega \times \partial\Omega) \cap C(\partial\Omega \times \partial\Omega \setminus \{(x,x) :\ x \in \partial\Omega\})$. Khi đó từ Bài tập 5.7 về toán tử tích phân trên biên $\partial\Omega$ ta có:

Mệnh đề 5.8. $D[\psi] \in C(\partial\Omega), \forall\psi \in C(\partial\Omega)$.

5.3.2 Tích phân Gauss

Xét Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega \in C^1$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài, đơn vị ν. Khi $\psi \equiv 1$ thế vị lớp kép

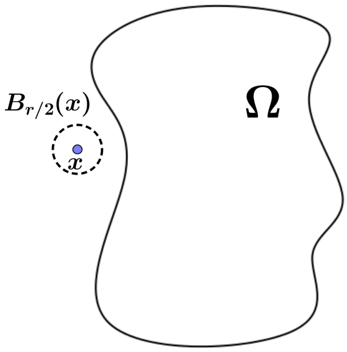
$$G(x) = D[1](x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y$$

được gọi là tích phân Gauss.

Mệnh đề 5.9.

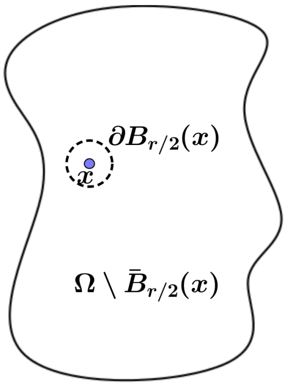
$$G(x) = \begin{cases} 1 & \textit{khi } x \in \Omega, \\ 1/2 & \textit{khi } x \in \partial\Omega, \\ 0 & \textit{khi } x \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Chứng minh. **TH1:** $x \notin \bar{\Omega}$. Ta có $r = d(x, \bar{\Omega}) > 0$.



Khi đó $E(x-\cdot)$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus B_{r/2}(x)$. Do $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \setminus B_{r/2}(x)$ nên đặc trưng tích phân của hàm điều hòa ta có $G(x) = 0$.

TH2: $x \in \Omega$. Ta có $r = d(x, \partial\Omega) > 0$.

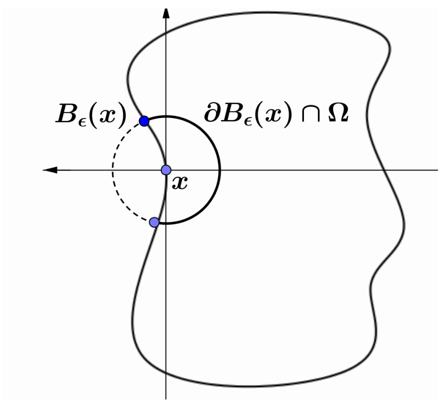


Khi đó $E(x-\cdot)$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus B_{r/2}(x)$. Theo đặc trưng tích phân của hàm điều hòa ta có

$$G(x) = \int_{\partial B_{r/2}(x)} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y.$$

Theo tính chuẩn hóa của nghiệm cơ bản ta có $G(x) = 1$.

TH3: $x \in \partial\Omega$. Trước tiên ta hiểu $G(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\partial\Omega \setminus B_\epsilon(x)} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y$.



Do $\partial\Omega \in C^2$ nên có $r_0 > 0$ như trong mục hình học của biên. Khi đó do $E(x-\cdot)$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ nên theo đặc trưng hàm điều hòa, với $0 < \epsilon < r_0$ ta có

$$\int\limits_{\partial\Omega \setminus B_\epsilon(x)} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y = \int\limits_{\partial B_\epsilon(x) \cap \Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y.$$

Chú ý rằng khi $y \in \partial B_\epsilon(x)$ thì $\nu_y = (y-x)/\epsilon$. Khi đó

$$\int_{\partial B_\epsilon(x) \cap \Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y) dS_y = \frac{|\partial B_\epsilon(x) \cap \Omega|}{|\partial B_\epsilon|}.$$

Do $0 < \epsilon < r_0$ nên trong hệ tọa độ địa phương như phần hình học của biên có hàm

$f : \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0) = 0, \nabla f(0) = 0,$$
$$\partial\Omega \cap B_{r_0} \subset \{(x', f(x') : \; x' \in \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0}\}.$$

Khi đó ta có $|f(x')| \le C|x'|^2, \forall x' \in \mathbb{R}^{d-1} \cap B_{r_0/2}$, trong đó C là hằng số. Do đó

$$\partial B_\epsilon(x) \cap \{(x', x_d) : \; x_d < -C|x'|^2\} \subset \partial B_\epsilon(x) \cap \Omega \subset \partial B_\epsilon(x) \cap \{(x', x_d) : \; x_d < C|x'|^2\}.$$

Đến đây bằng việc tính toán và tiến qua giới hạn ta có $G(x) = 1/2$.

□

5.3.3 Bước nhảy của thế vị lớp kép

Tích phân Gauss $G(x) = D[1](x)$ là trường hợp đặc biệt của thế vị lớp kép. Tuy nhiên bước nhảy qua biên $\partial\Omega$ của tích phân Gauss là hiện tượng chung của thế vị lớp kép. Để thấy được điều này ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 5.10. *Tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d)$ sao cho*

$$\int_{\partial\Omega} |\partial_{\nu_y} E(x-y)| dS_y \le C, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Chứng minh. Ta đã làm cho trường hợp $x \in \partial\Omega$. Ta xét tiếp các trường hợp còn lại. Trước hết do $\partial\Omega \in C^2$ nên có $r_0 > 0$ như mục hình học của biên. Khi đó ta có

$$|\nu(z) \cdot (z-y)| \le |z-y|/2, \forall y, z \in \partial\Omega, |y-z| < r_0.$$

TH1: $d(x, \partial\Omega) \ge r_0/2$. Khi đó ta có

$$|\partial_{\nu_y} E(x-y)| \le C|x-y|^{1-d} \le C r_0^{1-d}, \forall y \in \partial\Omega.$$

Từ đây ta có ngay đpcm.
TH2: $d(x, \partial\Omega) < r_0/2$. Khi đó tồn tại duy nhất cặp $(x_0, t) \in \partial\Omega \times (-r_0, r_0)$ sao cho $x = x_0 + t\nu(x_0)$.
Khi $y \in \partial\Omega \setminus B_{r_0}(x_0)$ thì

$$|x-y| \ge |x_0 - y| - |x - x_0| \ge r_0/2.$$

Do đó

$$|\partial_{\nu_y} E(x-y)| \leq C|x-y|^{1-d} \leq C\delta^{1-d}, \forall y \in \partial\Omega \setminus B_{r_0}(x_0),$$

hay

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_{r_0}(x_0)} |\partial_{\nu_y} E(x-y)| dS_y \leq C|\partial\Omega|\delta^{1-d}.$$

Khi $y \in \partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0)$ thì

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= |x-x_0|^2 + |y-x_0|^2 + 2(x-x_0)\cdot(y-x_0) \\
&\geq |x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 - 2|x-x_0| \times |\nu(x_0)\cdot(y-x_0)| \\
&\geq \frac{1}{2}(|x-x_0|^2 + |y-x_0|^2).
\end{aligned}$$

Khi đó

$$|\partial_{\nu_y} E(x-y)| \leq \frac{2|x-x_0|}{\omega_d(|x-x_0|^2 + |y-x_0|^2)^{d/2}} + \frac{2C}{\omega_d |y-x_0|^{d-2}}, \forall y \in \partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0),$$

hay

$$\int_{\partial\Omega \cap B_\delta(x_0)} |\partial_{\nu_y} E(x-y)| dS_y \leq C + C'\delta.$$

Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh. □

Bổ đề 5.11. *Cho $\psi \in C(\partial\Omega)$ và $x_0 \in \partial\Omega$ thỏa mãn $\psi(x_0) = 0$. Khi đó $D[\psi]$ liên tục tại x_0.*

Chứng minh. Sử dụng Bài tập 5.3 cho $f(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y)$ với $V = \mathbb{R}^d$. Kiểm tra giả thiết của Bài tập 5.3: lấy $\epsilon > 0$ cố định.
Do $\psi \in C(\partial\Omega)$ và $\psi(x_0) = 0$ nên theo Bổ đề 5.10 có $r > 0$ sao cho

$$\left| \int_{\partial\Omega \cap B_{2r}(x_0)} \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y) dS_y \right| \leq \epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Từ Bổ đề 5.2 ta có

$$\int_{\partial\Omega \setminus B_{2r}(x_0)} \partial_{\nu_y} E(x-y)\psi(y) dS_y \text{ liên tục trong } B_r(x_0).$$

Như vậy các giả thiết của Bài tập 5.3 được thỏa mãn. Do đó ta có đpcm. □

Ký hiệu các giới hạn

$$D^{+}[\psi](x) = \lim_{\substack{y \in \Omega \\ y \to x}} D[\psi](y), x \in \partial\Omega, \tag{5.19}$$

$$D^{-}[\psi](x) = \lim_{\substack{y \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega} \\ y \to x}} D[\psi](y), x \in \partial\Omega. \tag{5.20}$$

Từ Bổ đề 5.11 và tích phân Gauss ta có các biểu đồ sau: Với $x_0 \in \partial\Omega$.

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y)\,(\psi(y)-\psi(x_0))\, dS_y \arrow[r, "x \in \Omega", "x \to x_0"'] \arrow[d, "x \to x_0"] & D^{+}[\psi](x_0) - \psi(x_0) \arrow[d, equal] \\
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x_0-y)\,(\psi(y)-\psi(x_0))\, dS_y \arrow[r, equal] & D[\psi](x_0) - \frac{1}{2}\psi(x_0)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x-y)\,(\psi(y)-\psi(x_0))\, dS_y \arrow[r, "x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}", "x \to x_0"'] \arrow[d, "x \to x_0"] & D^{-}[\psi](x_0) \arrow[d, equal] \\
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_y} E(x_0-y)\,(\psi(y)-\psi(x_0))\, dS_y \arrow[r, equal] & D[\psi](x_0) - \frac{1}{2}\psi(x_0)
\end{tikzcd}$$

Cụ thể ta có kết quả sau:

Định lý 5.12. *Với $x \in \partial\Omega$ ta có*

$$D^{+}[\psi](x) = D[\psi](x) + \psi(x)/2, \tag{5.21}$$

$$D^{-}[\psi](x) = D[\psi](x) - \psi(x)/2. \tag{5.22}$$

Đến đây ta có thể thấy phương trình tích phân tương ứng với bài toán biên Dirichlet trong (5.1)-(5.2). Thật vậy, ta tìm nghiệm của bài toán này dưới dạng thế vị lớp kép

$D[\phi], \phi \in C(\partial\Omega)$. Khi đó $D[\phi]$ là hàm điều hòa trong Ω, nghĩa là thỏa mãn (5.1). Từ (5.21) ta có $D[\phi]$ thỏa mãn (5.2) khi và chỉ khi $\phi \in C(\partial\Omega)$ thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_{\partial\Omega} K_\Omega(x,y)\phi(y)dS_y + \phi(x)/2 = \psi(x), x \in \partial\Omega, \tag{5.23}$$

trong đó nhân $K_\Omega(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)$.
Hoàn toàn tương tự ta có $D[\phi], \phi \in C(\partial\Omega)$, là nghiệm của bài toán biên Dirichlet ngoài (5.3)-(5.4)-(5.5) khi và chỉ khi $\phi \in C(\partial\Omega)$ thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_{\partial\Omega} K_\Omega(x,y)\phi(y)dS_y - \phi(x)/2 = \psi(x), x \in \partial\Omega. \tag{5.24}$$

Gọn lại ta có bảng quan hệ sau:

	trong	**ngoài**
Bài toán biên Dirichlet	$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u\big\vert_{\partial\Omega} = \psi. \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \\ u\big\vert_{\partial\Omega} = \psi, \\ \lvert u(x)\rvert \leq C\lvert x\rvert^{2-d}. \end{cases}$
Phương trình Tích phân	ϕ **thỏa mãn** $(D + 1/2I)\phi = \psi$	ϕ **thỏa mãn** $(D - 1/2I)\phi = \psi$

$$u = D[\phi] = \int_{\partial\Omega} K_\Omega(x,y)\phi(y)dS_y$$

với $K_\Omega(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)$

5.4 Thế vị lớp đơn

5.4.1 Tính trơn của thế vị lớp đơn

Xét Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, với biên $\partial\Omega \in C^2$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài, đơn vị ν. Thế vị lớp kép xác định bởi

$$S[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} E(x-y)\psi(y)dS_y, \psi \in C(\partial\Omega), x \in \mathbb{R}^d.$$

Khi $d \geq 3$ ta có

$$E(x-y) = \frac{1}{(2-d)\omega_d|x-y|^{d-2}}, x \in \mathbb{R}^d, y \in \partial\Omega.$$

Bài tập 5.14. *(a) Chứng minh rằng: tồn tại hằng số $C = C(\Omega, d) > 0$ sao cho*

$$\int_{\partial\Omega} |E(x-y)|dS_y \leq C, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Chứng minh rằng $S[\psi] \in C(\mathbb{R}^d), \forall \psi \in C(\partial\Omega)$.

Mệnh đề 5.13. *Với $\psi \in C(\partial\Omega)$ ta có $D[\psi] \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega)$. Hơn nữa ta có*

$$D^\alpha S[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} D_x^\alpha E(x-y)\psi(y)dS_y, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Do đó $S[\psi]$ điều hòa trong $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Ngoài ra, tồn tai $R > 0$ sao cho

$$|S[\psi](x)| \leq \frac{C|\partial\Omega|}{|x|^{d-2}}||\psi||_\infty,$$

trong đó $C = C(d)$ là hằng số.

Chứng minh. Chứng minh tương tự chứng minh Mệnh đề 5.7. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

Bài tập 5.15. *Một cách khác chứng minh tính điều hòa của thế vị lớp đơn: Chứng minh rằng $D[\psi] \in C(\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega)$ và $D[\psi]$ thỏa mãn tính chất trung bình cầu.*

5.4.2 Đạo hàm theo pháp tuyến trên biên

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega \in C^2$ có vec-tơ pháp tuyến ngoài, đơn vị ν. Khi đó từ mục hình học của biên có $r_0 > 0$ sao cho với mỗi $x \in \partial\Omega_{r_0} = \cup_{y\in\partial\Omega} B_{r_0}(y)$ đều có duy nhất cặp $(x_0, t) \in \partial\Omega \times (-r_0, r_0)$ thỏa mãn

$$x = x_0 + t\nu(x_0).$$

Chú ý rằng $S[\psi], \psi \in C(\partial\Omega)$, là hàm khả vi vô hạn trong $\mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ và

$$D^\alpha S[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} D^\alpha_x E(x-y)\psi(y)dS_y, \forall\alpha \in \mathbb{Z}^d_+.$$

Khi $t \neq 0$ thì $x \notin \partial\Omega$. Lúc này ta có đạo hàm theo pháp tuyến trên biên $\nu(x_0)$ của thế vị lớp đơn tại x như sau:

$$\partial_{\nu(x_0)} S[\psi](x) = \nu(x_0)\cdot\nabla S[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_{x_0}} E(x-y)\psi(y)dS_y. \tag{5.25}$$

Ta định nghĩa các đạo hàm theo pháp tuyến trên biên của thế vị lớp đơn $S[\psi]$ tại x_0 như sau:

Định nghĩa 5.2. Với $\psi \in C(\partial\Omega), x_0 \in \partial\Omega$ ta định nghĩa

$$\partial^+_{\nu(x_0)} S[\psi](x_0) = \lim_{t\to 0_+} \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_{x_0}} E(x_0 + t\nu(x_0) - y)\psi(y)dS_y, \tag{5.26}$$

$$\partial^-_{\nu(x_0)} S[\psi](x_0) = \lim_{t\to 0_-} \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_{x_0}} E(x_0 + t\nu(x_0) - y)\psi(y)dS_y. \tag{5.27}$$

Câu hỏi: định nghĩa trên có tốt không hay liệu có các giới hạn trên không? Nếu có chúng là gì? Trả lời các câu hỏi này sẽ có ở mục sau.

Một cách tương tự ta cũng định nghĩa hình thức các đạo hàm theo pháp tuyến trên biên của hàm u thuộc $C^1(\Omega)$ hay $C^1(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$. Để đơn giản ta ký hiệu chúng $\partial^-_\nu u, \partial^+_\nu u$. Ta có các mở rộng công thức Green 2 như sau:

Mệnh đề 5.14. *(a) Cho $u, v \in C^2(\Omega)$ có các đạo hàm theo pháp tuyến trên biên $\partial^-_\nu u, \partial^-_\nu v \in C(\partial\Omega)$. Khi đó ta có*

$$\lim_{t\to 0_-} \int_{\Omega\setminus\partial\Omega_{|t|}} (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))dx = \int_{\partial\Omega} (u(x)\partial^-_\nu v(x) - v(x)\partial^-_\nu v(x))dS.$$

(b) Cho $u, v \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$ có các đạo hàm theo pháp tuyến trên biên $\partial_\nu^+ u, \partial_\nu^+ v \in C(\partial\Omega)$ và các điều kiện ở vô cùng sau

$$|u(x)| \le C|x|^{2-d}, |\nabla u(x)| \le C|x|^{1-d}, \forall |x| \text{ đủ lớn.}$$

Khi đó ta có

$$\lim_{t\to 0_+} \int_{(\mathbb{R}^d\setminus\bar{\Omega})\setminus\partial\Omega_{|t|}} (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))dx = -\int_{\partial\Omega} (u(x)\partial_\nu^+ v(x) - v(x)\partial_\nu^+ v(x))dS.$$

5.4.3 Bước nhảy của thế vị lớp đơn

Để thấy được bước nhảy của thế vị lớp đơn ta quan sát hai tích phân sau:

$$\bar{D}[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu_x} E(x-y)\psi(y)dS_y,$$
$$h(t) = \int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_x} E(x+t\nu(x)-y) + \partial_{\nu_y} E(x+t\nu(x)-y)\right)\psi(y)dS_y,$$

trong đó $x \in \partial\Omega, t \in (-r_0, r_0)$ và $r_0 > 0$ như trong mục hình học của biên.
Có thể thấy rằng, với $x \in \partial\Omega$

$$\partial_{\nu_x} E(x-y) = \frac{\nu(x)\cdot(y-x)}{\omega_d|x-y|^d}$$

tương tự như $\partial_{\nu_y} E(x-y)$ trong thế vị lớp kép. Do đó $\bar{D}[\psi] \in C(\partial\Omega)$ khi $\psi \in C(\partial\Omega)$.
Ta quan sát tiếp $h(t)$. Từ mục trước ta có $h(t)$ xác định trong $(-r_0, r_0) \setminus \{0\}$.

Bổ đề 5.15. *Với $\psi \in C(\partial\Omega), x_0 \in \partial\Omega$ cố định, hàm $h(t)$ xác định tại $t = 0$ bởi*

$$h(0) = \bar{D}[\psi](x_0) + D[\psi](x_0).$$

Hơn nữa h liên tục tại $t = 0$.

Chứng minh. Sự xác định của $h(0)$ hiển nhiên.
Để chứng minh tính liên tục ta sử dụng Bài tập 5.3 cho hàm

$$f(x,y) = \partial_{\nu_{x_0}} E(x-y) + \partial_{\nu_y} E(x-y) = \frac{(\nu(x_0)-\nu(y))\cdot(x-y)}{\omega_d|x-y|^d},$$

với $x \in V = \{x_0 + t\nu(x_0) : -r_0 < t < r_0\}$. Kiểm tra giả thiết của Bài tập 5.3.
Trước hết do $\partial\Omega \in C^2$ nên có $r_0 > 0$ như mục hình học của biên. Khi đó ta có

$$|\nu(z)\cdot(z-y)| \le |z-y|/2, \forall y, z \in \partial\Omega, |y-z| < r_0.$$

Khi đó với $y \in \partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0), x = x_0 + t\nu(x_0) \in V$, ta có

- $|(\nu(x_0) - \nu(y)) \cdot (x - y)| \leq C|x_0 - y| \times |x - y|$;
- $|x - y|^2 = |x_0 - y|^2 + t^2 + 2Ct\nu(x_0) \cdot (x_0 - y) \geq |x_0 - y|^2/2$.

Do đó $| \int_{\partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0)} f(x, y) dS_y| \leq C \int_{\partial\Omega \cap B_{r_0}(x_0)} |x_0 - y|^{2-d} dS_y \leq C' r_0, \forall x \in V$.
Chọn $r = \epsilon/(2C' r_0)$ ta thấy các giả thiết của Bài tập 5.3 được thỏa mãn. Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 5.15 ta có các biểu đồ sau: Với $x_0 \in \partial\Omega$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_{x_0}} E(x - y) + \partial_{\nu_y} E(x - y)\right) \psi(y) dS_y \arrow[r, "t \to 0_-", "x = x_0 + t\nu(x_0) \in \Omega"'] \arrow[d, "\begin{array}{c} x = x_0 + t\nu(x_0) \\ t \to 0 \end{array}"] & \partial_\nu^- S[\psi](x_0) + D^+[\psi](x_0) \arrow[d, equal] \\
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_{x_0}} E(x_0 - y) + \partial_{\nu_y} E(x_0 - y)\right) \psi(y) dS_y \arrow[r, equal] & \bar{D}[\psi](x_0) + D[\psi](x_0)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_{x_0}} E(x - y) + \partial_{\nu_y} E(x - y)\right) \psi(y) dS_y \arrow[r, "t \to 0_+", "x = x_0 + t\nu(x_0) \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}"'] \arrow[d, "\begin{array}{c} x = x_0 + t\nu(x_0) \\ t \to 0 \end{array}"] & \partial_\nu^+ S[\psi](x_0) + D^-[\psi](x_0) \arrow[d, equal] \\
\displaystyle\int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_{x_0}} E(x_0 - y) + \partial_{\nu_y} E(x_0 - y)\right) \psi(y) dS_y \arrow[r, equal] & \bar{D}[\psi](x_0) + D[\psi](x_0)
\end{tikzcd}
$$

Bài tập 5.16. *Cho $x_0 \in \partial\Omega, \psi \in C(\partial\Omega)$. Chứng minh tích phân*

$$\int_{\partial\Omega} \left(\partial_{\nu_{x_0}} E(x - y) + \partial_{\nu_y} E(x - y)\right) \psi(y) dS_y$$

liên tục tại x_0.

Kết hợp với tính chất bước nhảy của thế vị lớp kép ta có câu trả lời cho câu hỏi mục trước về các đạo hàm theo pháp tuyến trên biên của thế vị lớp đơn như sau:

Định lý 5.16. *Với $\psi \in C(\partial\Omega), x \in \partial\Omega$ ta có*

$$\partial^+_{\nu(x)} S[\psi](x) = \bar{D}[\psi] + \psi(x)/2, \tag{5.28}$$

$$\partial^-_{\nu(x)} S[\psi](x) = \bar{D}[\psi] - \psi(x)/2. \tag{5.29}$$

Ta tìm nghiệm của bài toán bài toán biên Neumann trong (5.6)-(5.7) dưới dạng thế vị lớp đơn $S[\phi], \phi \in C(\partial\Omega)$. Khi đó $S[\phi]$ là hàm điều hòa trong Ω, nghĩa là thỏa mãn (5.6). Từ (5.29) ta có $D[\phi]$ thỏa mãn (5.2) khi và chỉ khi $\phi \in C(\partial\Omega)$ thỏa mãn

$$\int_{\partial\Omega} K_\Omega(y,x)\phi(y)dS_y - \phi(x)/2 = \psi(x), x \in \partial\Omega, \tag{5.30}$$

trong đó nhân $K_\Omega(y,x) = \partial_{\nu_x} E(x-y)$.

Hoàn toàn tương tự ta có $D[\phi], \phi \in C(\partial\Omega)$, là nghiệm của bài toán biên Neumann ngoài (5.8)-(5.9)-(5.10) khi và chỉ khi $\phi \in C(\partial\Omega)$ thỏa mãn

$$\int_{\partial\Omega} K_\Omega(y,x)\phi(y)dS_y + \phi(x)/2 = \psi(x), x \in \partial\Omega, \tag{5.31}$$

Gọn lại ta có bảng quan hệ sau:

	trong	**ngoài**
Bài toán biên Neumann	$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ trong } \Omega, \\ \partial_\nu u\big\vert_{\partial\Omega} = \psi. \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ trong } \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}, \\ \partial_\nu u\big\vert_{\partial\Omega} = \psi, \\ \vert u(x)\vert \le C\vert x\vert^{2-d}. \end{cases}$
Phương trình Tích phân	ϕ **thỏa mãn** $(\bar{D} - 1/2I)\phi = \psi$	ϕ **thỏa mãn** $(\bar{D} + 1/2I)\phi = \psi$

$$u = S[\phi] = \int_{\partial\Omega} E(x-y)\phi(y)dS_y$$

$$\bar{D}[\phi] = \int_{\partial\Omega} K_\Omega(y,x)\phi(y)dS_y$$

với $K_\Omega(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)$

Sử dụng Mệnh đề 5.14 ta có:

Mệnh đề 5.17. *Cho* $\psi, \phi \in C(\partial\Omega)$ *và* $u = S[\psi], v = S[\phi]$. *Khi đó ta có các đẳng thức sau:*

$$\int_{\partial\Omega} (u(x)\partial_\nu^\pm v(x) - v(x)\partial_\nu^\pm u(x))dS = 0, \tag{5.32}$$

$$\int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu^- u(x)dS_x - \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = 0, \tag{5.33}$$

$$\int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu^+ u(x)dS_x + \int_{\mathbb{R}^d\setminus\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = 0. \tag{5.34}$$

5.5 Tính đối ngẫu

5.5.1 Toán tử Fredholm

Định nghĩa 5.3. Cho H là không gian Hilbert trên trường thực. Toán tử dạng $I + K$, với I là toán tử đồng nhất và K là toán tử compact trên H, được gọi là toán tử Fredholm.

Ví dụ 5.2. Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega \in C^2$. Toán tử tích phân

$$D : \psi \mapsto \int_{\partial\Omega} K(\cdot, y)\psi(y)dS_y,$$

với $K(x, y) = \partial_{\nu_y} E(x - y)$, là toán tử compact trên $L^2(\partial\Omega)$. Khi đó các toán tử

$$I \pm 2D : \psi \mapsto \psi \pm 2\int_{\partial\Omega} K(\cdot, y)\psi(y)dS_y$$

là toán tử Fredholm trong $L^2(\partial\Omega)$.

Bài tập 5.17. *Cho* K *là toán tử compact trong không gian Hilbert thực* H. *Chứng minh rằng toán tử liên hợp* K^* *của* K *cũng là compact.*

Bài tập 5.18. *Chứng minh rằng toán tử tích phân*

$$D : \psi \mapsto \int_{\partial\Omega} K(\cdot, y)\psi(y)dS_y$$

có toán tử liên hợp là toán tử tích phân

$$\bar{D} : \psi \mapsto \int_{\partial\Omega} K(x,\cdot)\psi(x)dS_x.$$

Khi đó các toán tử

$$I \pm 2\bar{D} : \psi \mapsto \psi \pm 2\int_{\partial\Omega} K(x,\cdot)\psi(x)dS_x$$

là toán tử Fredholm trong $L^2(\partial\Omega)$.

Định lý 5.18. *Cho* $I + K$ *là toán tử Fredholm trong không gian Hilbert thực* H. *Khi đó ta có các kết quả sau:*

(i) Không gian hạt nhân

$$N(I+K) = \{f \in H : \ (I+K)f = 0\}$$

có số chiều hữu hạn.

(ii) Không gian ảnh

$$R(I+K) = \{f + Kf : \ f \in H\}$$

là tập đóng.

(iii) $R(I+K)^{\perp} = N(I+K^*)$. *Do đó*

$$R(I+K) \oplus^{\perp} N(I+K^*) = H.$$

(iv) $N(I+K) = \{0\}$ *khi và chỉ khi* $R(I+K) = H$.

(v) $dimN(I+K) \geq dimR(I+K)^{\perp}$. *Do đó*

$$dimN(I+K) = dimN(I+K^*).$$

Chứng minh. (i) Lấy B là hình cầu đơn vị trong $N(I+K)$. Khi đó $K(B) = B$. Do K compact nên B compact tương đối hay ta có đpcm.
(ii) Để chứng minh (ii) ta cần kết quả sau: Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$||f + Kf|| \geq C||f||, \forall f \in N(I+K)^{\perp}. \tag{5.35}$$

Lấy dãy $g_j \in R(I+K), j \in \mathbb{N}$, hội tụ đến $g \in H$. Ta cần chứng minh $g \in R(I+K)$. Thật vậy, do $g_j \in R(I+K)$ nên có $f_j \in N(I+K)^{\perp}$ sao cho

$$g_j = f_j + Kf_j.$$

Do $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ bị chặn nên theo (5.35) ta có $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ cũng bị chặn. Lại do K compact nên ta có thể trích ra dãy con, không mất tính tổng quát ta vẫn ký hiệu $\{Kf_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ hội tụ. Khi đó dãy $f_j = g_j - Kf_j, j \in \mathbb{N}$, cũng hội tụ. Từ đây ta có (ii).
(iii) Lấy $f \in N(I+K^*)$. Khi đó $f + K^*f = 0$ hay

$$\langle f, g + Kg\rangle = \langle f + K^*f, g\rangle = 0, \forall g \in H.$$

Do đó $f \in R(I+K)^{\perp}$.
Không khó để thấy các lập luận trên đều có chiều ngược lại hay ta có

$$R(I+K)^{\perp} = N(I+K).$$

Sử dụng (ii) ta có $R(I+K) = N(I+K)^{\perp}$ hay

$$R(I+K) \oplus^{\perp} N(I+K^*) = H.$$

(iv) Giả sử $N(I+K) = \{0\}$ nghĩa là $I+K$ đơn ánh. Khi đó nếu

$$H_1 = R(I+K) \subsetneqq H$$

thì ta có dãy các không gian con đóng $H_{n+1} = (I+K)(H_n), n \in \mathbb{N}$, sao cho

$$H_{n+1} \subsetneqq H_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó ta có thể chọn được dãy $g_n \in H_n, n \in \mathbb{N}$, thỏa mãn

$$||g_n|| = 1, g_n \perp H_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

- $||g_n - g|| \geq 1, \forall g \in H_{n+1}$.
- $g_m + (g_n - Kg_n) - (g_m - Kg_m) \in H_{n+1}, \forall m > n$. Do đó

$$||Kg_n - Kg_m|| = ||g_n - [g_m + (g_n - Kg_n) - (g_m - Kg_m)]|| \geq 1, \forall m > n.$$

- $\{Kg_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ không có dãy con nào hội tụ. Ta có điều mâu thuẫn vì K compact và $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bị chặn.

Do đó $R(I+K) = H$.
Ngược lại giả sử $R(I+K) = H$. Từ (iv) ta có $N(I+K^*) = \{0\}$. Theo lập luận vừa xong ta có $R(I+K^*) = H$. Lại dùng (iv) ta có $N(I+K) = \{0\}$. Ta hoàn thành chứng minh (iv).
(v) Giả sử phản chứng $dimR(I+K)^\perp > dimN(I+K)$. Khi đó tồn tại ánh xạ tuyến tính

$$A : N(I+K) \to R(I+K)^\perp \text{ đơn ánh, không toàn ánh.}$$

Thác triển lên toàn H bằng cách $Au = 0$ khi $u \in N(I+K)^\perp$ ta có $A : H \to R(I+K)^\perp$ là toán tử compact. Khi đó $I+K-A$ là toán tử Fredholm.
Ta sẽ chứng minh $N(I+K-A) = \{0\}$. Thật vậy, giả sử $f \in N(I+K-A)$ ta có

$$Af = (I+K)f \in R(I+K)^\perp \cap R(I+K).$$

Do đó $f \in N(A) \cap N(I+K)$. Mà $N(A) = N(I+K)^\perp$ nên $f = 0$ hay ta có đpcm.
Như vậy $I+K-A$ là Fredholm và $N(I+K-A) = \{0\}$ nên theo (iv) ta có

$$H = R(I+K-A) = R(I+K) + R(A).$$

Tuy nhiên $R(A)$ là tập con thực sự của $R(I+K)^\perp$ nên ta có điều vô lý hay điều giả sử sai.
Vậy $dimR(I+K)^\perp \le dimN(I+K)$. Tương tự ta cũng có

$$dimR(I+K^*)^\perp \le dimN(I+K^*).$$

Sử dụng (iii) ta có

$$dimN(I+K) = dimN(I+K^*).$$

Ta hoàn thành chứng minh. □

Sử dụng Định lý 5.18 ta có các kết quả sau:

(i) Các không gian hạt nhân $N(D \pm 1/2I), N(\bar{D} \pm 1/2I)$ đều hữu hạn chiều. Hơn nữa ta còn có

$$dimN(D-1/2I) = dimN(\bar{D}-1/2I), dimN(D+1/2I) = dimN(D-1/2I).$$

(ii) Về các không gian ảnh ta có

$$R(D \pm 1/2I) = N(\bar{D} \pm 1/2I)^{\perp}, R(\bar{D} \pm 1/2I) = N(D \pm 1/2I)^{\perp}.$$

5.5.2 Tính giải được của các bài toán biên

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Omega \in C^2$ có véc-tơ pháp tuyến ngoài đơn vị ν.

Bài tập 5.19. *Chứng minh rằng Ω chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông.*

Ký hiệu các thành phần liên thông của Ω gồm

$$U_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

Do Ω bị chặn nên có $R > 0$ sao cho $\Omega \subset B_R$ hay $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R \subset \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$. Ký hiệu thành phần liên thông chứa $\mathbb{R}^d \setminus \bar{B}_R$ của $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ là V_0.

Bài tập 5.20. *Chứng minh rằng $(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}) \setminus V_0$ là tập mở, bị chặn trong $\mathbb{R}^d$. Do đó nó chỉ có hữu hạn thành phần liên thông.*

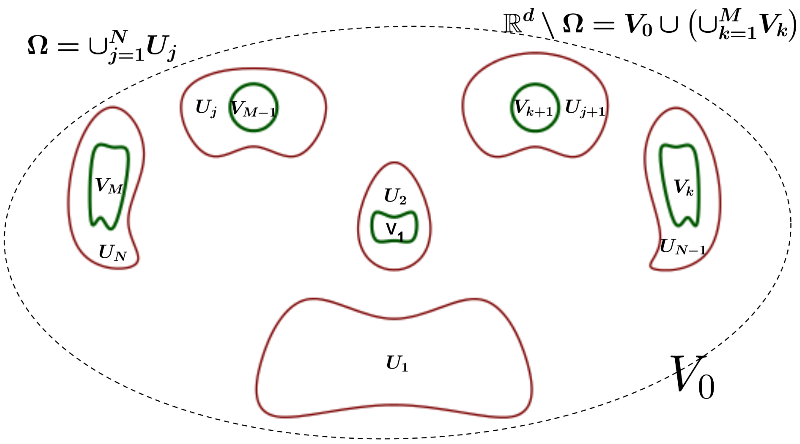
Ký hiệu các thành phần liên thông của $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ gồm

$$V_j, j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Khi đó ta có

$$\partial\Omega = \cup_{j=1}^{N} \partial U_j = \cup_{j=0}^{M} \partial V_j.$$

Do $\partial\Omega \in C^2$ nên các tập biên $\partial U_j, j = 1, 2 \cdots, N$, đôi một rời nhau; và các tập biên $\partial V_j, j = 0, 1, \cdots, M$, đôi một rời nhau.



Để tiếp tục trước hết ta nhắc lại các kết quả về tính duy nhất nghiệm của các bài toán biên.

- Bài toán biên Dirichlet trong: Với $\psi = 0$ bài toán biên (5.1)-(5.2) có duy nhất nghiệm tầm thường $u = 0$.
- Bài toán biên Dirichlet ngoài: Với $\psi = 0$ bài toán biên (5.3)-(5.4)-(5.5) có duy nhất nghiệm tầm thường $u = 0$.
- Bài toán biên Neumann trong: Với $\psi = 0$ bài toán biên (5.6)-(5.7) có nghiệm là hằng trên từng thành phần liên thông. Cụ thể không gian nghiệm của bài toán này gồm
$$\sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{U_j}, c_j \in \mathbb{R},$$
là không gian N chiều.
- Bài toán biên Neumann trong: Với $\psi = 0$ bài toán biên (5.8)-(5.9)-(5.10) có nghiệm bằng 0 trên V_0 và là hằng trên từng thành phần liên thông còn lại. Cụ thể không gian nghiệm của bài toán này gồm
$$\sum_{j=1}^{M} c_k \chi_{V_k}, c_k \in \mathbb{R},$$
là không gian M chiều.

Ngoài ra từ đặc trưng tích phân của hàm điều hòa ta dẫn đến điều kiện cần để bài toán biên Neuman có nghiệm như sau: Cho $\psi \in C(\partial\Omega)$.

- Bài toán biên Neumann trong: Nếu bài toán biên (5.6)-(5.7) có nghiệm thì ψ thỏa mãn
$$\langle \psi, \omega_j^+ \rangle = \int_{\partial U_j} \psi(x) dS = 0, \forall j = 1, 2, \dots, N.$$
- Bài toán biên Neumann ngoài: Nếu bài toán biên (5.8)-(5.9)-(5.10) có nghiệm thì ψ thỏa mãn
$$\langle \psi, \omega_k^- \rangle = \int_{\partial V_k} \psi(x) dS = 0, \forall k = 1, 2, \dots, M.$$

Ta có bảng quan hệ giữa các bài toán biên và các toán tử tích phân $D \pm 1/2I, \bar{D} \pm 1/2I$ như sau:

	trong	**ngoài**
Bài toán biên Dirichlet	$u = D[\phi]$ **với** ϕ **thỏa mãn** $(D + 1/2I)\phi = \psi$	$u = D[\phi]$ **với** ϕ **thỏa mãn** $(D - 1/2I)\phi = \psi$
Bài toán biên Neumann	$u = S[\phi]$ **với** ϕ **thỏa mãn** $(\bar{D} - 1/2I)\phi = \psi$	$u = S[\phi]$ **với** ϕ **thỏa mãn** $(\bar{D} + 1/2I)\phi = \psi$

$$S[\phi] = \int_{\partial\Omega} E(x-y)\phi(y)dS_y$$

$$D[\phi] = \int_{\partial\Omega} K_\Omega(x,y)\phi(y)dS_y$$

$$\bar{D}[\phi] = \int_{\partial\Omega} K_\Omega(y,x)\phi(y)dS_y$$

với $K_\Omega(x,y) = \partial_{\nu_y} E(x-y)$

Quay trở lại các không gian hạt nhân $N(D \pm 1/2I), N(\bar{D} \pm 1/2I)$. Sử dụng tích phân Gauss ta dễ dàng có các khẳng định sau:

- Các hàm $\omega_j^+ = \chi_{U_j}, j = 1, 2, \cdots, N$, đều thuộc $N(D - 1/2I)$. Như vậy ta có $dimN(D - 1/2I) = dimN(\bar{D} - 1/2I) \geq N$.

- Các hàm $\omega_j^- = \chi_{V_j}, j = 1, 2, \cdots, M$, đều thuộc $N(D + 1/2I)$. Như vậy ta có $dimN(D + 1/2I) = N(\bar{D} + 1/2I) \geq M$.

Lấy $\psi \in N(\bar{D} - 1/2I)$. Khi đó $u = S[\psi]$ thỏa mãn bài toán Neumann trong với điều kiện biên thuần nhất. Từ kết quả về tính duy nhất nghiệm ta có

$$u = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{U_j}, c_j \in \mathbb{R}.$$

Xét ánh xạ $\Sigma : N(\bar{D} - 1/2I) \to \mathbb{R}^N$ xác định bởi

$$\psi \mapsto (c_1, \cdots, c_N) = (S[\psi]\Big|_{U_1}, \cdots, S[\psi]\Big|_{U_N}).$$

Ta sẽ chứng minh ánh xạ này là một đẳng cấu tuyến tính.
Thật vậy, tính tuyến tính hiển nhiên. Do $dimN(\bar{D} - 1/2I) \geq N$ nên ta chỉ còn phải chứng minh tính đơn ánh của Σ.
Lấy $\psi \in N(\bar{D} - 1/2I)$ sao cho $\Sigma(\psi) = 0$ hay $S[\psi] = 0$ trong Ω. Do $S[\psi] \in C(\mathbb{R}^d)$ nên $S[\psi]$ là nghiệm của bài toán biên Dirichlet ngoài với điều kiện biên thuần nhất. Từ kết quả về tính duy nhất nghiệm ta có $S[\psi] = 0$ trong $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Do đó $S[\psi] = 0$ trên $\mathbb{R}^d$. Vậy $\psi = \partial_\nu^+ S[\psi] - \partial_\nu^- S[\psi] = 0$ hay Σ là đẳng cấu tuyến tính.
Một cách tương tự lấy $\psi \in N(\bar{D} + 1/2I)$. Khi đó $u = S[\psi]$ thỏa mãn bài toán Neumann ngoài với điều kiện biên thuần nhất. Từ kết quả về tính duy nhất nghiệm ta có

$$u = \sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{V_k}, c_k \in \mathbb{R}.$$

Xét ánh xạ $\Sigma' : N(\bar{D} + 1/2I) \to \mathbb{R}^M$ xác định bởi

$$\psi \mapsto (c_1, \cdots, c_M) = (S[\psi]\Big|_{V_1}, \cdots, S[\psi]\Big|_{V_M}).$$

Chứng minh tương tự trên ta có ánh xạ này là một đẳng cấu tuyến tính.
Tóm lại ta có kết quả sau:

Mệnh đề 5.19. *(a) $dimN(D - 1/2I) = dimN(\bar{D} - 1/2I) = N$. Hơn nữa, $N(D - 1/2I)$ có một cơ sở gồm các $\omega_j^+, j = 1, \cdots, N$. Ngoài ra ta có với mỗi bộ $(c_1, \cdots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ có duy nhất một hàm $\psi \in N(\bar{D} - 1/2I)$ sao cho*

$$S[\psi] = c_j \textit{ trong } U_j, \forall j = 1, \cdots, N.$$

(b) $dimN(D + 1/2I) = dimN(\bar{D} + 1/2I) = M$. Hơn nữa, $N(D + 1/2I)$ có một cơ sở gồm các $\omega_j^-, j = 1, \cdots, M$. Ngoài ra ta có với mỗi bộ $(c_1, \cdots, c_M) \in \mathbb{R}^M$ có duy nhất một hàm $\psi \in N(\bar{D} + 1/2I)$ sao cho

$$S[\psi] = c_j \textit{ trong } V_j, \forall j = 1, \cdots, M,$$

và $S[\psi] = 0$ *trong* V_0.

Đến đây ta có kết quả về tính giải được của các bài toán biên Neumann: Các điều kiện cần để bài toán có nghiệm cũng chính là điều kiện đủ. Cụ thể như sau:

Định lý 5.20. *Cho* $\psi \in C(\partial\Omega)$. *Ta có các khẳng định sau:*

(a) Bài toán biên Neumann trong (5.6)-(5.7) *có nghiệm khi và chỉ khi* ψ *trực giao với* $N(D - 1/2I)$. *Nói cách khác* ψ *thỏa mãn các điều kiện*

$$\langle \psi, \omega_j^+ \rangle = 0, \forall j = 1, \cdots, N.$$

(a) Bài toán biên Neumann ngoài (5.8)-(5.9)-(5.10) *có nghiệm khi và chỉ khi* ψ *trực giao với* $N(D + 1/2I)$. *Nói cách khác* ψ *thỏa mãn các điều kiện*

$$\langle \psi, \omega_j^+ \rangle = 0, \forall j = 1, \cdots, N.$$

Chứng minh. (a) Ta chỉ còn phải chứng minh chiều "đủ", nghĩa là giả sử

$$\psi \in N(D - 1/2I)^\perp = R(\bar{D} - 1/2I).$$

Khi đó tồn tại $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ sao cho $\bar{D}[\phi] - \phi/2 = \psi \in C(\partial\Omega)$. Do đó theo Bài tập 5.7 ta có $\phi \in C(\partial\Omega)$. Nghiệm của bài toán biên Neumann (5.6)-(5.7) được cho bởi

$$u = S[\phi] + \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{U_j}.$$

(b) Chứng minh tương tự. Chi tiết chứng minh xem như bài tập. □

Để đến với tính giải được của các bài toán biên Dirichlet ta cần đến kết quả sau:

Mệnh đề 5.21. *Ta có các phân tích sau:*

$$L^2(\partial\Omega) = N(D - 1/2I)^\perp \oplus N(\bar{D} - 1/2I) = N(D - 1/2I) \oplus N(\bar{D} - 1/2I)^\perp, \quad (5.36)$$
$$L^2(\partial\Omega) = N(D + 1/2I)^\perp \oplus N(\bar{D} + 1/2I) = N(D + 1/2I) \oplus N(\bar{D} + 1/2I)^\perp. \quad (5.37)$$

Chứng minh. Do $dimN(D \pm 1/2I) = dimN(\bar{D} \pm 1/2I)$ và

$$N(D \pm 1/2I)^{\perp} = R(\bar{D} \pm 1/2I), N(\bar{D} \pm 1/2I)^{\perp} = R(D \pm 1/2I)$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$R(\bar{D} \pm 1/2I) \cap N(\bar{D} \pm 1/2I) = \{0\}.$$

Để chứng minh điều này ta sử dụng Mệnh đề 5.14. Cụ thể như sau: giả sử $\psi \in R(\bar{D} + 1/2I) \cap N(\bar{D} + 1/2I)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:

- $\bar{D}[\psi] + \psi/2 = 0$. Do đó theo Bài tập 5.7 ta có $\psi \in C(\partial\Omega)$.
- Tồn tại $\phi \in L^2(\partial\Omega)$ sao cho $\bar{D}[\phi] + \phi/2 = \psi \in C(\partial\Omega)$. Do đó theo Bài tập 5.7 ta có $\phi \in C(\partial\Omega)$.

Đặt $u = S[\psi], v = S[\phi]$ ta có

$$\partial_\nu^+ u = 0, \partial_\nu^- u = -\psi \text{ và } \partial_\nu^+ v = \psi.$$

Áp dụng Mệnh đề 5.14 cho u, v ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu^+ v(x)dS = \int_{\partial\Omega} u(x)\psi(x)dS \\ &= -\int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu^- u(x)dS = -\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Do đó $\psi = -\partial_\nu^- u = 0$ hay ta có $R(\bar{D} + 1/2I) \cap N(\bar{D} + 1/2I) = \{0\}$.
Tương tự ta có chứng minh cho $R(\bar{D} - 1/2I) \cap N(\bar{D} - 1/2I) = \{0\}$. Chi tiết xem như bài tập. □

Từ Mệnh đề 5.21 ta có kết quả về tính giải được sau:

Định lý 5.22. *Các bài toán biên Dirichlet trong cũng như ngoài giải được với mọi* $\psi \in C(\partial\Omega)$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho bài toán biên Dirichlet trong. Với bài toán biên Dirichlet ngoài xem như bài tập.
Lấy $\psi \in C(\partial\Omega)$. Từ (5.37) ta có thể viết

$$\psi = D[\psi_1] + \psi_1/2 + \sum_{k=1}^{M} c_k \omega_k^-$$

trong đó $\psi_1 \in L^2(\partial\Omega), c_k \in \mathbb{R}$.
Khi đó $D[\psi_1] + \psi_1/2 \in C(\partial\Omega)$ nên theo Bài tập 5.7 ta có $\psi_1 \in C(\partial\Omega)$.
Từ Mệnh đề 5.19 với bộ $(c_1, \cdots, c_M)$ có duy nhất một hàm $\psi_2 \in C(\partial\Omega)$ sao cho $S[\psi_2] = 0$ trong V_0 và

$$S[\psi_2] = c_k \text{ trong } V_k, \forall k = 1, \cdots, M.$$

Do $S[\psi_2] \in C(\mathbb{R}^d)$ và $\partial\Omega = \partial V_0 \cup (\cup_{k=1}^M \partial V_k)$ nên $D[\psi_1] + S[\psi_2]$ là nghiệm của bài toán (5.1)-(5.2). $\square$

Kết quả về tính giải được của các bài toán biên:

	trong	**ngoài**	
Bài toán biên Dirichlet	$\psi \in C(\partial\Omega)$ **phân tích** $\psi = (D + 1/2I)\psi_1 + \sum_{k=1}^{M} c_k \omega_k^-$ $\psi_2 \longleftrightarrow S[\psi_2]\Big\vert_{V_k} = c_k.$ **Nghiệm** $u = D[\psi_1] + S[\psi_2].$	$\psi \in C(\partial\Omega)$ **phân tích** $\psi = (D - 1/2I)\psi_1 + \sum_{j=1}^{N} c_j \omega_j^+$ $\psi_2 \longleftrightarrow S[\psi_2]\Big\vert_{U_j} = c_j.$ **Nghiệm** $u = D[\psi_1] + S[\psi_2].$	
Bài toán biên Neumann	**Điều kiện có nghiệm** $\psi \in N(D - 1/2I)^\perp$ **hay** $\langle \psi, \omega_j^+ \rangle = \int_{\partial U_j} \psi dS = 0.$ **Khi đó** $\psi = (\bar{D} - 1/2I)\phi.$ **Nghiệm** $u = S[\phi] + \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{U_j}.$	**Điều kiện có nghiệm** $\psi \in N(D + 1/2I)^\perp$ **hay** $\langle \psi, \omega_k^- \rangle = \int_{\partial V_k} \psi dS = 0.$ **Khi đó** $\psi = (\bar{D} + 1/2I)\phi.$ **Nghiệm** $u = S[\phi] + \sum_{k=1}^{M} c_k \chi_{V_k}.$	