KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC
BỘ MÔN GIẢI TÍCH

Phương trình đạo hàm riêng: Ví dụ và Bài tập

Dư Đức Thắng, Đặng Anh Tuấn

Hà Nội, ngày 28 tháng 9 năm 2021

Mục lục

Chương 1
Giới thiệu về phương trình đạo hàm riêng. Phương trình cấp 1

1.1. Mở đầu

Trong Chương này, chúng tôi giới thiệu về những kiến thức đã có trong lí thuyết PTĐHR và cung cấp kiến thức về PTĐHR cấp 1, cũng như cách giải một số phương trình dạng tương đối đặc biệt. Các kiến thức cần chuẩn bị bao gồm

- PTĐHR là gì? Định nghĩa, tính chất. Nghiệm của PTĐHR
- Các điều kiện của PTĐHR
- Bài toán của PTĐHR
- Phân loại PTĐHR
- Đổi biến trong PTĐHR
- Phương trình cấp 1 (tuyến tính, nửa tuyến tính, tựa tuyến tính)
- Phương pháp đường đặc trưng, cách giải.

Các kiến thức này sẽ dần dần được sử dụng trong các phần bài tập tiếp theo.

1.2. Giới thiệu phương trình đạo hàm riêng

1.2.1. Tóm tắt lí thuyết

Để biểu diễn một PTĐHR, ta thường dùng biểu thức

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^k u) = 0,$$

với $F(\cdot)$ là một hàm nhiều biến chứa biến $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ẩn hàm $u = u(x)$ và các đạo hàm riêng của chúng. Khi nói đến việc nghiên cứu về PTĐHR, người ta hàm chỉ việc giải các bài toán PTĐHR, xác định biểu thức của nghiệm của chúng và các tính chất của chúng. Để làm được điều này, việc đầu tiên ta phải xác định biểu thức của PTĐHR, từ đó phân loại và nêu ra một số tính chất của chúng. Trên thực tế, có một số cách phân loại PTĐHR. Một trong số cách đó là việc phân loại theo biểu thức của phương trình. Nhắc lại rằng theo cách phân loại này thì ta có thể chia ra thành

- Phương trình tuyết tính (linear equations)
- Phương trình nửa tuyến tính (semi-linear equations)
- Phương trình tựa tuyến tính (quasi-linear equations)
- Phương trình hoàn toàn phi tuyến (fully-nonlinear equations)

Ngoại trừ phương trình tuyến tính, các loại phương trình còn lại đều là phi tuyến (không tuyến tính, nonlinear equations). Ta phân loại chúng dựa vào biểu thức của chính phương trình. Ví dụ:

- Phương trình tuyến tính
  1. $u_x + u_y = 0$
  2. $x^2u_{xx} + xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 1.$
  3. $2xu_{xx} + yu_x = (x^2 + y^2)u.$
- Phương trình nửa tuyến tính (semi-linear equations)
  1. $u_x + u_y + u^2 = 0$
  2. $x^2u_{xx} + xyu_{xy} + y^2u_y^2 = 1.$
  3. $2xu_{xx} + yu_x = (x^2 + y^2 + u^2)^2.$
- Phương trình tựa tuyến tính (quasi-linear equations)
  1. $u_x + uu_y = 0$
  2. $2xu_{xx} + yuu_{xy} = xyu.$
- Phương trình hoàn toàn phi tuyến (fully-nonlinear equations)
  1. $u_x^2 + u_y^2 = 1$
  2. $(\Delta u)^2 + \omega u_x = 1.$

1.2.2. Một số ví dụ về phân loại PTĐHR và tìm nghiệm trực tiếp

Các bài tập trong Mục này tập trung vào phân loại các PTĐHR theo biểu thức của nó, và tìm nghiệm trực tiếp của một số phương trình đơn giản.

1.2.2.1. Phân loại phương trình theo biểu thức

Hãy phân loại phương trình đạo hàm riêng dưới đây và cho biết cấp tương ứng của các phương trình.

1. $(u_y)^2 + u_{xxx} = 0$ (Đáp án: Phương trình nửa tuyến tính cấp 3)

2. $\sin(1 + u_x)^2 + u^3 = \sin x$ (Đáp án: Phương trình phi tuyến cấp 1)

3. $xu_{xx} + (x - y)u_{xy} - yu_{yy} = 0$ (Đáp án: Phương trình tuyến tính cấp 2)

4. $u_t + u^2 u_{xx} = 0$. (Đáp án: Phương trình tựa tuyến tính cấp 2)

1.2.2.2. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình dưới đây bằng các phương pháp thích hợp *(tích phân trực tiếp, chuyển về phương trình vi phân, tách biến hoặc kết hợp các phương pháp)*

1. $u_x = 3x^2 + y^2$, $u = u(x, y)$.

   Lời giải. Tích phân phương trình theo x ta được $u(x, y) = x^3 + y^2 x + C(y).$

2. $u_{xyz} = 0$, $u = u(x, y, z)$.

   Lời giải. Nghiệm cần tìm là $u(x, y, z) = A(x, y) + B(y, z) + C(z, x).$

3. $yu_x = x^2 y$, $u = u(x, y)$.

4. $u_x - 2u = 0$, $u = u(x, y)$.

5. $u_x + 2xu = 4xy$.

6. $yu_{xy} + 2u_x = x$ *(Gợi ý: tích phân phương trình theo x, sau đó dùng phương pháp chuyển về phương trình vi phân)*

1.2.3. Bài tập thực hành

1. Xác định bậc của phương trình sau

   (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

   (b) $u_{xxx} + u_{xy} + a(x)u_y + \log u = f(x, y)$

   (c) $u_x + cu_y = d$

   (d) $uu_{xx} + u_{yy}^2 + e^u = 0.$

2. Phương trình nào sau đây là tuyến tính? tựa tuyến tính? phi tuyến? nếu là phương trình tuyến tính thì nó có thuần nhất không?

(a) $e^{\Delta u} = x$

(b) $u_t + u_{txx} + uu_x = 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $u_t + (f(u))_x = 0$

(d) $u_{xx} + u_{yy} - 2u = x^2$

(e) $u_{xy} = u$

(f) $uu_x + xu_y = 0$

(g) $u_x(1 + u_y) = u_{xx}$

(h) $(\sin u_x)u_x + u_y = e^x$

3. Để tìm nghiệm của phương trình dạng đặc biệt, đôi khi người ta dùng phương pháp đổi biến dạng e^{rx+sy}. Cách làm này giúp chuyển phương trình đạo hàm riêng về một hệ phương trình vi phân thường với các biến r, s. Hãy dùng phương pháp này để giải các phương trình sau

   (a) $2u_x + 3u_y - 2u = 0$.

   (b) $u_{xyz} - u = 0$.

   (c) $4u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$.

   (d) $u_{xx} + u_{yy} = u$.

4. Xét phương trình tuyến tính cấp hai $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$, với các hằng số thực a, b, c. Chứng minh rằng nếu biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (trường hợp phương trình loại hyperbolic) thì phương trình có nghiệm tổng quát dạng $u(x, y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\gamma x + \delta y)$, với các hệ số thực α, β, γ,δ, còn f, g là các hàm số thuộc C^2.

5. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau.

   (a) $u_x + u = 0$

   (b) $u_{yy} - x^2u = 0$.

   (c) $u_{xx} - u_x = 0$.

   (d) $u_x^2 + u_y^2 = 0$. Nếu vế phải là một hằng số khác 0 thì nghiệm sẽ được tìm như thế nào?

1.3. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1

Trong phần này, chúng ta tìm hiểu các cách giải PTĐHR tuyến tính cấp 1 với hệ số hằng và hệ số biến thiên. Chúng ta cũng nghiên cứu cách giải của bài toán Cauchy tương ứng với phương trình này.

1.3.1. Phương trình tuyến tính với hệ số hằng số

1.3.1.1. Tóm tắt lí thuyết

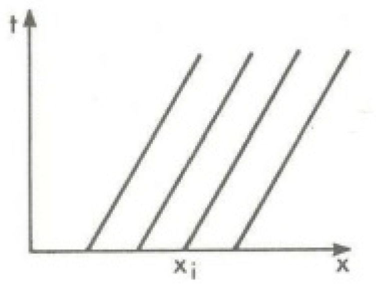
Xét phương trình

$$au_x + bu_t = cu + f(x,t),$$

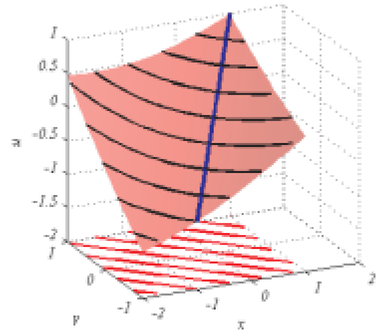
với điều kiện cho trên một đường cong $\ell = \ell(x,t)$ là $u(x,t) = g(x(t))$. Khi đó phương pháp đường đặc trưng giúp ta tìm thiết lập một hệ phương trình vi phân thường, được xác dịnh dọc theo các đường cong "đặc trưng" của phương trình, được tham số hóa $x = x(t)$, liên kết với phương trình trên là

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{b}{a}, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{c}{a}u + \frac{1}{a}f(x,t), \\ u(x(t),t) &= g(x(t)), \end{aligned}$$

với (x,t) được lấy dọc theo đường cong ℓ với điểm xuất phát $t = t_0$ nào đó.



(a) Ví dụ về một họ đường đặc trưng



(b) Ví dụ về nghiệm của PTĐHR tuyến tính cấp 1.

Giải phương trình đầu ta tìm được họ đường cong tích phân,sau đó thay vào phương trình sau, ta sẽ tìm được nghiệm u.

1.3.1.2. Ví dụ thực hành

1. Giả sử u_1, u_2 là các nghiệm của phương trình $au_x + bu_t = 0$. Chứng minh rằng $c_1u_1 + c_2u_2$ cũng là nghiệm của phương trình, với c_1, c_2 là các hằng số bất kì.

2. Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng $u(x,t) = f(bx - at)$. Hãy viết nghiệm đó với điều kiện ban đầu tương ứng sau.

   (a) $u(x,0) = xe^{-x^2}$.

   Lời giải. $u(x,t) = \frac{bx-at}{b} e^{-\left(\frac{bx-at}{b}\right)^2}$.

   (b) $u(0,t) = t$.

   Lời giải. $u(x,t) = \frac{1}{a}(at - bx)$.

   (c) Biết $a = 1$, $b = -2$, hãy tìm nghiệm của phương trình khi $u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$.

   Lời giải. Nghiệm tổng quát của phương trình là $u(x,t) = f(x+t)$. Thay vào điều kiện đầu ta tìm được nghiệm của bài toán $u(x,t) = \frac{1}{1+(x+t)^2}$.

3. Ta xét phương trình không thuần nhất (tức là phương trình có vế phải khác 0), hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau

$$u_t - 2u_x = 2.$$

Lời giải. Để tìm nghiệm của phương trình, ta viết nó dưới dạng $u = u_0 + u_*$, trong đó u_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất, $u_0(x,t) = f(x+2t)$, còn u_* là một nghiệm riêng của phương trình, có dạng $u_* = 2t$ (các bạn có thể kiểm tra lại điều này một cách dễ dàng!). Vậy nghiệm nghiệm cần tìm là $u(x,t) = f(x+2t) + 2t$. Thử lại ta được điều phải chứng minh.

4. Tìm nghiệm của các phương trình sau

   (a) $u_x + 2u_y + u = 0$

   Lời giải. Nghiệm của phương trình được xác định từ việc giải hệ phương trình vi phân tìm đường cong tham số hóa $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ (\ell), \qquad \frac{du}{dx} = u \quad \text{trên họ đường cong } (\ell).$$

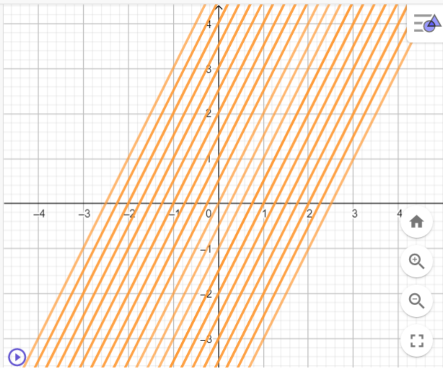
   Giải ra ta được $(\ell) = \{(x,y) : y - 2x = C\}$, $u(x,y) = C(y-2x)e^x$.

   (b) Tìm nghiệm của các phương trình trên với điều kiện ban đầu $u(x,0) = x^2$.

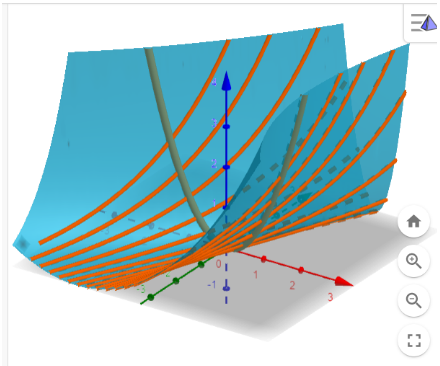
   Lời giải. Thay điều kiện đầu cho phương trình tương ứng ta được $u(x,0) = C(-2x)e^x = x^2$, suy ra $C(-2x) = x^2e^{-x}$. Đổi biến $(-2x \to x)$ ta được $C(x) = \dfrac{x^2}{4}e^{x/2}$.

   Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x,y) = \frac{(y-2x)^2}{4} e^{(y-2x)/2+x} = \frac{(y-2x)^2}{4} e^{y/2}.$$



(a) Đường đặc trưng câu 4a.



(b) Nghiệm câu 4b.

5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sau

$$2u_x - 3u_y = x$$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Đường đặc trưng của phương trình được tìm từ phương trình

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 3x = C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình sẽ là

$$u(x, y) = F(2y + 3x) + \frac{1}{4}x^2.$$

6. Tìm nghiệm của phương trình

$$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y} \tag{1.3.1}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu cho trên đường không đặc trưng $u(x, 0) = \sin(x^2)$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Ta tìm họ đường đặc trưng của phương trình từ phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow y - 2x = C.$$

Ta xét phép đổi biến $(x, y) \to (w, z)$ sao cho nó làm đơn giản hóa phương trình ban đầu. Vì vế phải là một hàm phụ thuộc vào $x + y$ nên trong trường hợp ta xét phép đổi biến

$$\begin{cases} y - 2x = w \\ y + x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{w+2z}{3} \\ x = \frac{z-w}{3}. \end{cases}$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được phương trình đạo hàm riêng tương ứng $(u(x, y) \to v(w, z))$ là

$$3v_z - 4v = e^z. \tag{1.3.2}$$

Để giải phương trình không thuần nhất này ta có một số cách như sau.

Cách 1. Ta viết lại phương trình (1.3.2) dưới dạng

$$(e^{-4z/3}v)_z = \frac{e^{-z/3}}{3}.$$

Tích phân cả hai vế phương trình trên theo z và biến đổi một chút ta có

$$v = -e^z + e^{4z/3}f(w).$$

Do đó ta có nghiệm tổng quát của (1.3.1):

$$u(x,y) = -e^{x+y} + e^{4(x+y)/3}f(y-2x) \tag{1.3.3}$$

với $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi. Ta kiểm tra lại nghiệm (1.3.3) có thỏa mãn (1.3.1) nhờ bảng sau:

Hệ số		e^{x+y}	ef	ef'
1	u_x	-1	$4/3$	-2
2	u_y	-1	$4/3$	1
-4	u	-1	1	0
Tổng	e^{x+y}	1	0	0

Cách 2. Giải phương trình trên bằng phương pháp biến thiên hằng số. Ta tìm nghiệm của (1.3.2) dưới dạng $v = v_0 + v_*$, trong đó v_0 là nghiệm của phương trình thuần nhất $3v_z - 4v = 0$, tức là $v_0(w,z) = C(w)e^{4/3z}$, còn v_* là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, sử dụng biểu thức của phương trình thuần nhất. Ta xét $v_* = C_*(z)e^{4/3z}$. Thay vào biểu thức của phương trình (1.3.2) ta được hệ thức tìm C như sau:

$$3C_*'(z)e^{4/3z} = e^z \Rightarrow C_*'(z) = \frac{1}{3}e^{-1/3z} \Rightarrow C_*(z) = -e^{-1/3z},$$

tức là nghiệm riêng cần tìm $v_*(w,z) = -e^z$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sẽ là

$$v(w,z) = C(w)e^{4/3z} - e^z.$$

Khi đó ta cũng có nghiệm tổng quát (1.3.3).

Cách 3. Ngoài cách tìm nghiệm riêng bằng phương pháp biến thiên hằng số như Cách 2 ở trên, ta còn cách hệ số bất định khi vế phải (số hạng không thuàn nhất) của phương trình có dạng đặc biệt. Cụ thể vế phải của (1.3.2) là e^z nên ta tìm nghiệm dạng $v_* = Ae^z$. Thay vào (1.3.2) ta tính được $A = -1$. Khi đó cũng như Cách 2 ta thu được nghiệm tổng quát (1.3.3).

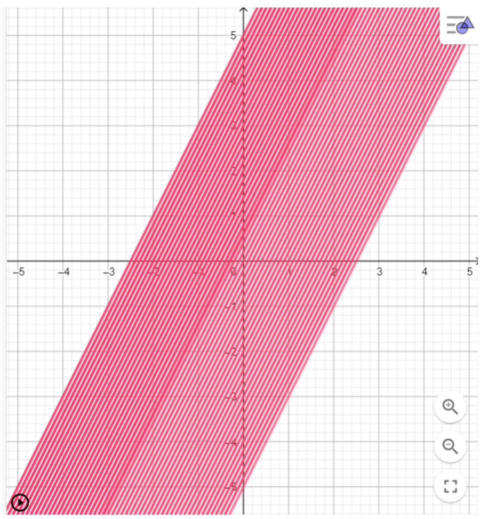
Thay nghiệm (1.3.3) vào điều kiện ban đầu vào ta được

$$u(x,0) = C(-2x)e^{4/3x} - e^{x} = \sin(x^2) \Rightarrow C(-2x) = \sin(x^2)e^{-4/3x} + e^{-1/3x}$$
$$\Rightarrow C(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x^2\right) e^{2/3x} + e^{-1/6x}.$$

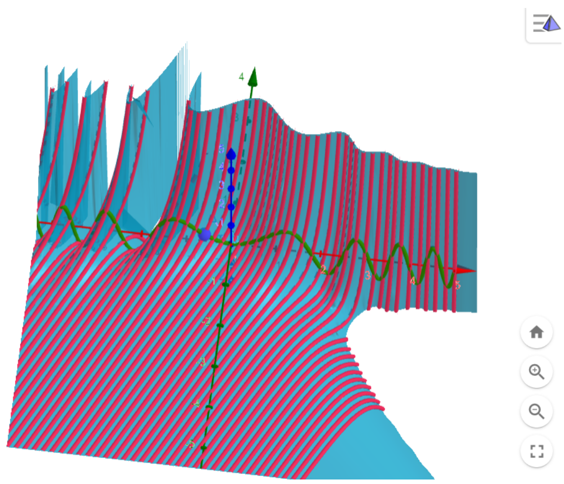
Vậy nghiệm cần tìm là

$$u(x,y) = e^{2y}\sin\left(\frac{(y-2x)^2}{4}\right) + e^{x+3y/2} - e^{x+y}.$$

Không khó khăn khi thay $y = 0$ ta thấy nghiệm tìm được thỏa mãn điều kiện Cauchy đã cho.



(a) Đường đặc trưng câu 6.



(b) Nghiệm câu 6.

7. Chứng minh rằng phương trình $u_x + u_y - u = 0$ với điều kiện đường bên $u(x,x) = \tan(x)$ không có nghiệm.

   Lời giải. Họ các đường đặc trưng của phương trình là $y - x = C$. Khi đó ta tìm được biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu từ phương trình vi phân (trên đường đặc trưng)

   $$\frac{du}{dx} = u \quad \Rightarrow \quad \ln u = x + C \quad \Rightarrow \quad u = C(y-x)e^{x}.$$

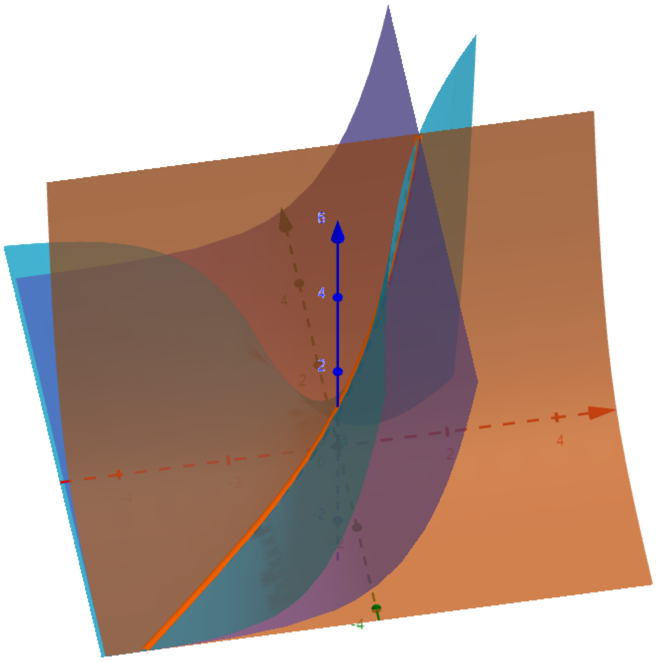
   Thay vào điều kiện trên đường $y = x$, ta được $u(x,x) = C(0)e^{x} = \tan x \Rightarrow C(0) = e^{-x}\tan x$. Vậy phương trình vô nghiệm.

8. Với điều kiện nào của hàm $f(x)$ thì phương trình nói trên với điều kiện đường bên $u(x,x) = f(x)$ có nghiệm?

   Lời giải. Từ phương trình cuối cùng ta suy ra chỉ khi hàm $f(x)$ có dạng Ae^{x} thì phương trình ban đầu mới có nghiệm. Khi đó nghiệm cần tìm có dạng $u(x,y) =$

$C(y-x)e^x$, với $C(x)$ là tất cả các hàm thỏa mãn $C(0) = A$. Rõ ràng, vì là điều kiện cho trên đường đặc trưng nên phương trình có vô số nghiệm.

Khi $f(x) = e^x$ ta có hình ảnh một số nghiệm của bài toán đã cho:



9. Thầy giáo yêu cầu các bạn tìm nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất

$$au_x + bu_y + cu = 0,$$

trong đó a, b, c là các hằng số thỏa mãn $ab \neq 0$. Bạn Lan nói rằng: "Nghiệm của phương trình là $u(x,y) = e^{-cx/a}f(bx-ay)$". Bạn Nam lại cho rằng: "Không đâu, nghiệm của phương trình phải là $u(x,y) - e^{-cy/b}(bx-ay)$." Vậy ai là người có câu trả lời đúng?

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Nhận xét rằng phương trình trên được viết lại dưới dạng (vì sao vậy nhỉ?)

$$u_x + \frac{b}{a}u_y + \frac{c}{a}u = 0,$$

hoặc

$$\frac{a}{b}u_x + u_y + \frac{c}{b}u = 0.$$

Cả hai phương trình trên đều có họ đường đặc trưng là $bx - ay = C$, vì vậy nghiệm của chúng lần lượt sẽ là

$$u(x,y) = C(bx-ay)e^{-c/ax} \quad \text{hoặc} \quad u(x,y) = C(bx-ay)e^{-c/by}.$$

Như vậy hai bạn đều nói đúng. Câu hỏi thêm ở đây là làm thế nào để chuyển từ câu trả lời của Nam sang câu trả lời của Lan, các bạn thử xem sao? (Dễ nhỉ!)

1.3.1.3. Bài tập thực hành

1. Xét phương trình $au_x + bu_y = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

    (a) Đạo hàm theo hướng của u là gì?

    (b) Tìm các đường cong đặc trưng của phương trình.

    (c) Tìm nghiệm của phương trình.

2. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình tuyến tính thuần nhất sau

    (a) $u_x + u_y - u = 0$

    (b) $2u_t + 3u_x = 0$

    (c) $au_t + bu_x = u$, $a, b \neq 0$.

3. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình tuyến tính không thuần nhất sau

    (a) $au_x + bu_y = f, \quad a, b, f \in \mathbb{R}$.

    (b) $u_x + 2u_y + 2u = 1$

    (c) $3u_x - 4u_y = x + e^x$.

    (d) $u_x + 3u_y = 9y^2$

    (e) Tìm nghiệm của các phương trình trên với điều kiện ban đầu $u(x, 0) = 2x^2 + 3x$.

4. Ta nhắc lại phương trình

    $$u_x + 2u_y - 4u = e^{x+y}.$$

    Hãy tìm nghiệm của phương trình với các điều kiện ban đầu cho trên các đường không đặc trưng sau

    (a) $u(0, y) = y^2$

    (b) $u(x, -x) = x$

    (c) $u(x, 4x) = x^2$

    (d) $u(x, x^2) = f(x)$.

5. Cho phương trình

    $$u_x + 3u_y + u = 1.$$

    (a) Tìm điều kiện của hàm $g(x)$ trong điều kiện đường bên $u(x, 3x) = g(x)$ để phương trình nói trên có nghiệm? Khi đó biểu thức nghiệm của phương trình sẽ như thế nào?

(b) Hãy viết hai nghiệm khác nhau của phương trình trên khi $g(x) = -1 + 2e^x$.

6. Giải phương trình $au_x + bu_y = 0$.

7. Viết nghiệm của phương trình trên với các điều kiện đường bên sau

   (a) $u(x,y)|_{(x,y)\in\{bx-ay=1\}} = h(x)$.

   (b) $u(x,y)|_{(x,y)\in\{x-y=1\}} = h(x)$. Hãy nhận xét về nghiệm của các bài toán nói trên.

8. Hãy tìm tất cả các nghiệm khả vi liên tục khắp nơi (gọi là nghiệm thuộc C^1) của phương trình $u_x = 0$ với điều kiện $u(x, x^2) = x$.

9. Giải phương trình $u_x - 2u_y = 0$ với điều kiện đường bên $u(x, e^x) = e^{2x} + 4xe^x + 4x^2$.

10. Tìm nghiệm của phương trình $3u_x - 2u_y + u = x$ với các điều kiện tương ứng

    (a) $u(x,x) = x$.

    (b) $u(x,y) = 0$ trên đường thẳng $3y + 2x = 1$.

11. Một quần thể dân cư có mật độ dân cư là $C(y)$, với $y \geq 0$. Tốc độ sinh của quần thể này tại thời điểm t tỉ lệ với kích thước của quần thể theo công thức $\alpha \int_0^\infty P(y,t)dy$ với $\alpha > 0$ là một hằng số nào đó. (ta giả thiết rằng $\int_0^\infty C(y)dy < \infty$.) Tốc độ chết là một hằng số, kí hiệu là $D(y,t) = k > 0$ với $y \geq 0$. Hãy tìm hàm mật độ dân cư $P(y,t)$ với mọi $y, t > 0$.

    Gợi ý. Đây là một bài toán xây dựng mô hình cho một vấn đề thực tế. Sinh viên tìm hiểu cách giải trong cuốn [Bleecker D., Basic Partial Differential Equations, trang 67, 68].

1.3.2. Phương trình với hệ số biến thiên

1.3.2.1. Nhắc lại lí thuyết

Xét phương trình

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{1.3.4}$$

Phương pháp thông dụng để giải phương trình này là tìm họ đường cong đặc trưng $\{\varphi(x,y) = C\}$ thông qua phép tham số hóa $y = y(x)$, và giải phương trình vi phân tương ứng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.3.5}$$

Khi đó ta xét phép đổi biến $w = \varphi(x,y), \quad z = y$, và tìm ẩn hàm $v(w,z)$. Qua phép đặt này, phương trình được xét sẽ trở về dạng

$$b_1(w,z)v_z + c_1(w,z)v = f_1(w,z), \tag{1.3.6}$$

trong đó b_1, c_1, f_1 chính là các hàm b, c, f qua phép đổi biến $(x,y) \to (w,z)$. Nếu đặt $m(w,z) = \exp\left(\int_0^z \frac{c_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)}d\zeta\right)$ thì nghiệm của phương trình (1.3.6) được viết dưới dạng

$$v(w,z) = \frac{1}{m(w,z)}\left(\int_0^z m(w,\zeta)\frac{f_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)}d\zeta + \frac{f_1(w,\zeta)}{b_1(w,\zeta)}\right)$$

với giả thiết là các hàm được ghi trong biểu thức đều có nghĩa. Tuy nhiên, việc tính các tích phân trên một cách tường minh không phải lúc nào cũng làm được.

Bên cạnh việc tìm họ đường cong đặc trưng bằng phép tham số hóa $y = y(x)$, với một số trường hợp người ta xét phép tham số hóa $x = x(t)$, $y = y(t)$. Khi đó (hệ) phương trình tìm đường cong đặc trưng sẽ là

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t),y(t)), \quad \frac{dy}{dt} = b(x(t),y(t)).$$

Qua phép đặt $U(t) = u(x(t),y(t))$, $C(t) = c(x(t),y(t))$, $F(t) = f(x(t),y(t))$, hàm $U(t)$ sẽ là nghiệm của phương trình vi phân

$$U'(t) + C(t)U(t) = F(t), \quad U(0) = G.$$

Ở đây tham số trung gian $U(0) = G$ được sử dụng để xác định sự biến thiên của nghiệm của phương trình vi phân. Nghiệm của phương trình này có dạng

$$U(t) = \frac{1}{m(t)}\left(\int_0^t m(s)F(s)ds + U(0)\right), \quad m(t) = \exp\left(\int_0^t C(s)ds\right).$$

Khi đó nghiệm của phương trình ban đầu sẽ có dạng biểu diễn theo tham số t. Thay trở lại các biến ban đầu theo phép tham số hóa được nêu ở trên ta được nghiệm của phương trình được xét.

1.3.2.2. Ví dụ thực hành

1. Xét phương trình (1.3.5) tìm họ đường đặc trưng $\{\varphi(x,y) = C\}$ của phương trình (1.3.4). Hãy kiểm tra rằng phép đổi biến $w = \varphi(x,y)$, $z = y$ giúp đưa phương trình ban đầu về phương trình (1.3.6).

2. Tìm nghiệm của các phương trình thuần nhất sau

   (a) $u_x + x^2u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(y - x^3/3)$.

(b) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

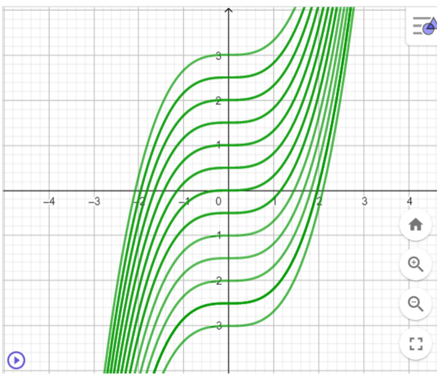
$$\frac{dy}{dx} = x e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Như vậy nghiệm của phương trình ban đầu sẽ là $u(x, y) = F(2y - e^{-x^2})$.

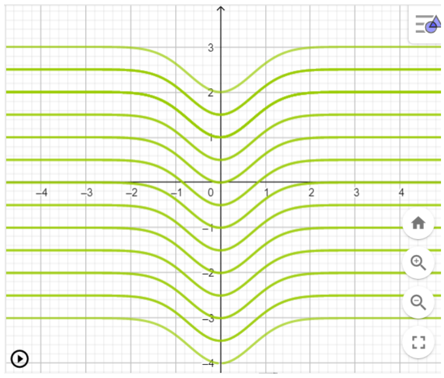
3. Tìm nghiệm của các phương trình thuần nhất sau

(a) $u_x + x^2 u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng là $y' = x^2 \Rightarrow y - x^3/3 = C$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là $u(x, y) = F(y - x^3/3)$.



(a) Đường đặc trưng câu 3a.



(b) Đường đặc trưng câu 3b.

(b) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng là $y' = x e^{-x^2} \Rightarrow y + \frac{1}{2} e^{-x^2} = C$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là $u(x, y) = F(y + \frac{1}{2} e^{-x^2})$.

(c) $u_x + \sin x u_y = 0$

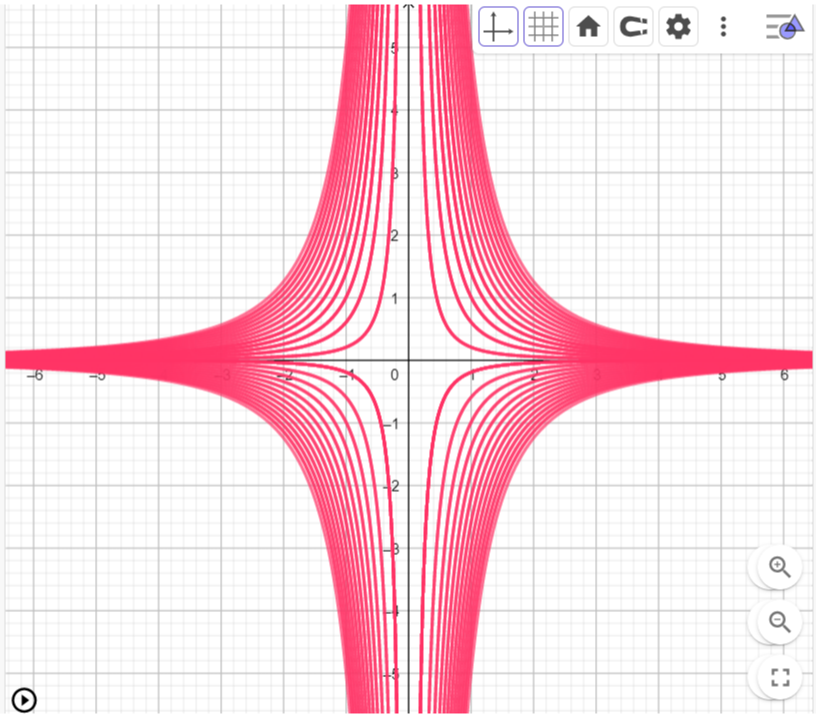
(d) $x u_x + y u_y = 0$

4. $x u_x - 2y u_y + u = e^x, \quad x > 0.$

Lời giải. Phương trình đường đặc trưng của phương trình này là

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -2 \ln x + C \quad \Rightarrow \quad y x^2 = C.$$

Thực hiện phép đổi biến tương ứng với $w = x^2 y, z = x$ ta đưa phương trình đầu về



Hình 1.5: Các đường đặc trưng câu 4.

phương trình với (w, z) như sau, chú ý rằng $x = z, y = w/z^2$, và đặt $v(w, z) = u(x, y)$:

$$zv_z + v = e^z.$$

Như vậy nghiệm của phương trình đầu được xác định từ phương trình vi phân sau (coi w như hệ số)

$$\frac{dv}{dz} + \frac{1}{z}v = \frac{e^z}{z}. \tag{1.3.7}$$

Ta có thể giải phương trình (1.3.7) bằng các cách sau.

Cách 1. Viết lại (1.3.7)

$$\frac{d}{dz}(zv) = e^z$$

rồi tích phân lên ta được $v = (e^z + C(w))/z$. Khi đó ta có nghiệm

$$u(x, y) = \frac{e^x + C(x^2y)}{x}. \tag{1.3.8}$$

Thử lại như sau ta được đây chính là nghiệm tổng quát của phương trình.

Hệ số		e^x	C	C'
x	u_x	$1/x - 1/x^2$	$-1/x^2$	$2xy$
$-2y$	u_y	0	0	x
1	u	$1/x$	$1/x$	0
Tổng	e^x	1	0	0

Cách 2. Giải phương trình (1.3.7) bằng phương pháp biến thiên hằng số, ta được nghiệm cần tìm. Ta có nghiệm $v = v_0 + v_*$, trong đó v_0 thỏa mãn phương trình

$$v_z + \frac{1}{z} v = 0, \quad \Rightarrow v_0(w, z) = \frac{C(w)}{z}.$$

Ta tìm $v_*(w, z)$ là nghiệm có dạng $v_*(w, z) = \frac{C_*(w,z)}{z}$, thỏa mãn phương trình vi phân ở trên. Thay vào ta được phương trình vi phân để tìm C_* là

$$\frac{dC_*(w, z)}{dz} = e^z \Rightarrow C_*(w, z) = e^z.$$

Thay vào biểu thức của v_* ta được $v_*(w, z) = \frac{e^z}{z}$. Khi đó ta cũng thu được nghiệm (1.3.8).

5. Tìm nghiệm của phương trình ở câu 4 thỏa mãn điều kiện Cauchy $u(1, y) = y$.

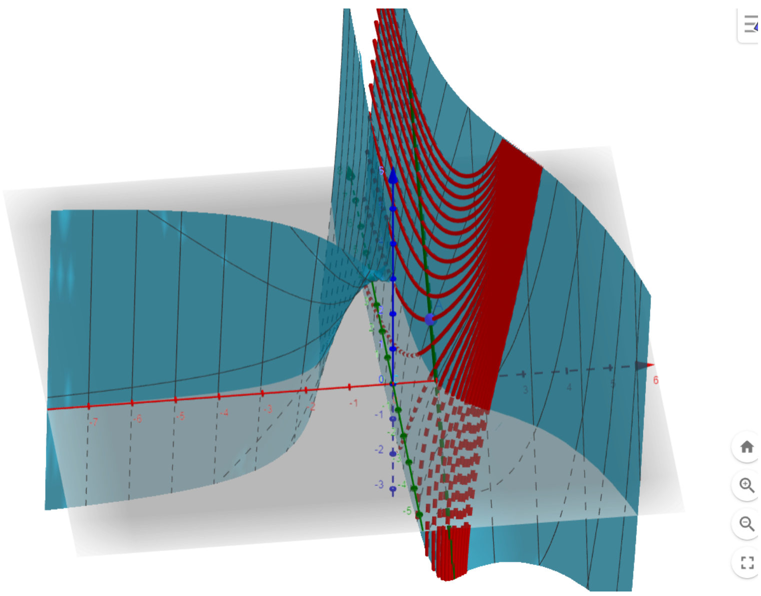
Lời giải. Thay nghiệm tổng quát (1.3.8) vào điều kiện Cauchy ta có

$$e + C(y) = y.$$

Khi đó ta có nghiệm của bài toán đang xét

$$u(x, y) = \frac{x^2 y - e + e^x}{x}.$$

Không khó để thấy nghiệm này thỏa mãn điều kiện Cauchy khi thay $x = 1$.



Hình 1.6: Hình ảnh nghiệm.

6. Với hàm $f(x)$ như nào để phương trình ở câu 4 có nghiệm thỏa mãn điều kiện Cauchy $u(x, 0) = f(x)$. Khi đó hãy chỉ ra bài toán đang xét có vô số nghiệm.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Thay nghiệm tổng quát (1.3.8) vào điều kiện Cauchy ta có

$$\frac{e^x + C(0)}{x} = f(x).$$

Như vậy bài toán đang xét sẽ vô nghiệm nếu

$$xf(x) - e^x \text{ không phải hằng số.}$$

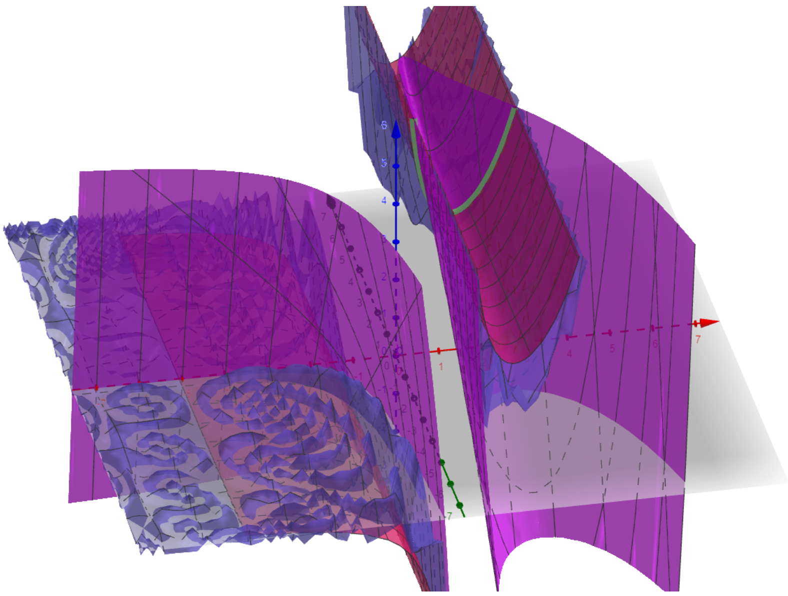
Khi $xf(x) - e^x = C_0$ là hằng số cho trước thì $C(0) = C_0$. Khi đó có vô số hàm

$$C(x) = C_0 + xh(x), h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ khả vi,}$$

thỏa mãn $C(0) = C_0$. Các nghiệm của bài toán

$$u(x, y) = xyh(x^2y) + \frac{e^x + C_0}{x}.$$

Không khó để kiểm tra điều kiện Cauchy cho các nghiệm này khi thay $y = 0$.



Hình 1.7: Hình ảnh ba nghiệm khi $f(x) = (e^x + 1)/x$.

1.3.2.3. Bài tập thực hành

1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trong miền xác định của nó

   (a) $u_x + \sin x u_y = 0$

   (b) $xu_x + yu_y = 0$

   (c) $xu_x + 2yu_y = 0, \quad x > 0, y > 0.$

   (d) $yu_x - 4xu_y = 2xy$, với mọi (x, y)

2. Chứng minh rằng phương trình $-yu_x + xu_y = 0$ với điều kiện $u(x,0) = 3x$ không có nghiệm.

3. Hãy tìm một hàm $f(x)$ để phương trình $-yu_x + xu_y = 0$ với điều kiện $u(x,0) = f(x)$ có nghiệm. Với hàm $f(x)$ thế nào thì nghiệm được tìm là duy nhất? là không duy nhất?

4. Tìm nghiệm của phương trình $xu_x - yu_y + yu = 0$.

5. Hãy sử dụng phương pháp đường đặc trưng để viết nghiệm của phương trình trong câu 4 trong trường hợp không thuần nhất, với vế phải là hàm $f(x,y) = y^2$.

6. Tìm nghiệm của các phương trình của bài tập trên ứng với các điều kiện đường bên tương ứng

   (a) $u(x, 1/x) = x, \quad x > 0.$

   (b) $u(1,y) = y^2.$

   (c) $u(x,0) = x^4.$

7. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $xu_y - 2yu_x = 0$ trên mặt phẳng $x0y$.

8. Giải các phương trình dưới đây với điều kiện ban đầu tương ứng

   (a) $yu_x - xu_y = u, \quad u(x,0) = x.$

   (b) $u_t + xtu_x = 0, \quad u(x,0) = \sin x.$

   (c) $xu_t - 2xtu_x = 2tu, \quad u(x,0) = x^2.$

   (d) $yu_x + xu_y = 0, \quad u(0,y) = e^{-y^2}.$

   (e) $yu_x + xu_y = xy,\ x, y > 0$ với $u(x,0) = e^{-x^2}, x > 0$ và $u(0,y) = e^{-y^2}, y > 0.$

1.4. Phương trình không tuyến tính

1.4.1. Tóm tắt lí thuyết

Trong phần này, ta làm quen với một số phương trình nửa tuyến tính và phương trình tựa tuyến tính dạng đơn giản.

(1) Phương trình nửa tuyến tính. Cũng cần nhắc các bạn rằng đối với phương trình nửa tuyến tính

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u),$$

(2) Phương trình tựa tuyến tính. Tương tự như đối với phương trình nửa tuyến tính, ở phần này ta chỉ xét dạng đơn giản của phương trình tựa tuyến tính, thường sẽ được viết dưới dạng

$$a(x,y,u)u_x + b(xy,u)u_y = f(x,y,u).$$

việc tìm nghiệm của các phương trình trên bằng phương pháp đường đặc trưng chính là giải hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}, \quad \frac{du(x, y(x))}{dx} = f(x, y(x), u(x, y(x))).$$

Nhìn chung ta không giải tường minh những phương trình này trong trường hợp tổng quát được. Có thể nói việc tìm nghiệm này hoàn toàn không đơn giản chút nào, và chỉ trong một số rất ít trường hợp, khi mà các hệ số a, b và hàm ở vế phải f có dạng rất đặc biệt thì ta mới làm được. Một số ví dụ dưới đây sẽ cho chúng ta hình dung này.

1.4.2. Ví dụ thực hành

1. Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình nửa tuyến tính

   (a) *Bài tập ví dụ.* $u_t + tu_x = u^2$

   Lời giải. Phương trình tìm đường đặc trưng tương ứng là

   $$\frac{dx}{dt} = t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}t^2 + C \quad \Rightarrow C = x - \frac{1}{2}t^2.$$

   Xét phép đổi biến $w(x,t) = x - \frac{1}{2}t^2, z = t$ thì ta sẽ có phương trình đối với $v(w,z) = u(x,t)$

   $$v_z = v^2 \quad \Rightarrow v(w,z) = \frac{1}{C(w) - z}.$$

   Vậy nghiệm cần tìm sẽ là

   $$u(x,t) = \frac{1}{C\left(x - \frac{1}{2}t^2\right) - t}.$$

   (b) $yu_x + xu_y = u^2 + u.$

   (c) $u_x + xyu_y = \dfrac{1}{u}.$

2. Tìm nghiệm của các phương trình tựa tuyến tính với điều kiện cho trước tương ứng

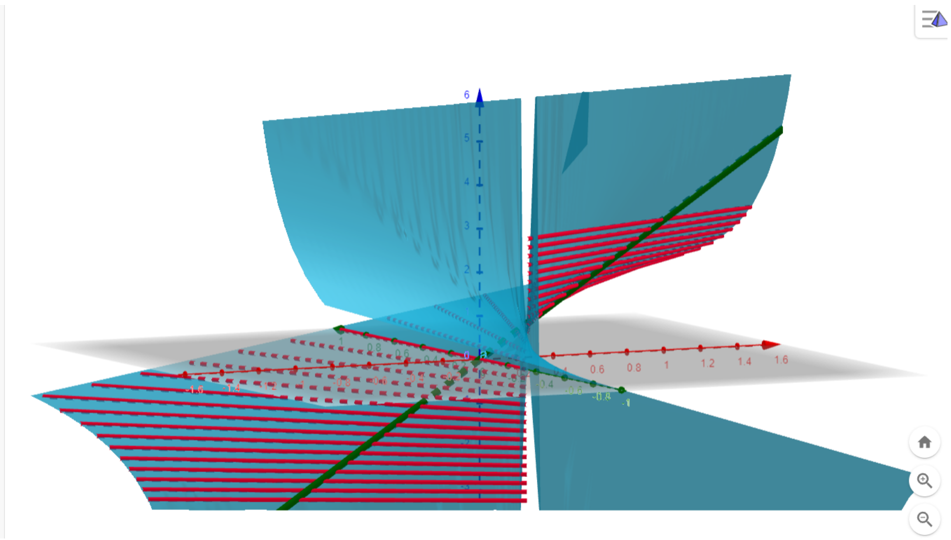
   (a) *Bài tập ví dụ.* $u_t + uu_x = 0$ ứng với điều kiện đầu $u(x, 0) = 3x.$

   Lời giải. Ta tìm nghiệm của phương trình từ hệ sau

   $$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

   Giải phương trình thứ nhất ta được $u(x,t) = \text{const} = u(x(0), 0) = 3x(0)$. Thay giá trị này của u vào phương trình thứ hai, ta được

   $$\frac{dx}{dt} = 3x(0) \quad \Rightarrow x = 3x(0)t + x(0) \quad \Rightarrow x(0) = \frac{x}{3t+1}.$$



Hình 1.8: Hình ảnh nghiệm.

Vậy nghiệm cần tìm sẽ có dạng

$$u(x,t) = \frac{3x}{3t+1}.$$

Nhận xét. Việc áp dụng một cách linh hoạt phép tham số hóa đường cong giúp ta tìm ra nghiệm một cách dễ dàng hơn.

(b) $u_t - u^2 u_x = 3u$, $u(x,0) = f(x)$.

(c) $u_t - t^2 u u_x = -u$, $u(x,0) = f(x)$.

(d) $u_t + t^2 u u_x = 5$, $u(x,0) = x$.

3. Viết nghiệm của phương trình với điều kiện là hàm gián đoạn sau.

$$u_t + u u_x = 0, u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 2 & x > 0. \end{cases}.$$

Lời giải. Ta xét hệ phương trình vi phân

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Phương trình thứ nhất cho nghiệm $u(x,t) = \text{const} = u(x(0),0)$, còn đường cong đặc trưng của phương trình này có dạng

$$x(t) = u(x(0),0)t + x(0) = \begin{cases} t + x(0) & x(0) < 0, \\ 2t + x(0) & x(0) > 0. \end{cases},$$

Khi $x(0) < 0$ thì đường đặc trưng sẽ có hệ số góc bằng 1, còn khi $x(0) > 0$ thì có hệ số góc bằng 1/2. Vì $u(x(0),0)$ không xác định tại điểm $x(0) = 0$, nên không có đường đặc trưng nào đi qua điểm $t = 0$ ứng với $x(0) = 0$. Nếu viết lại dưới dạng

$$x(0) = \begin{cases} x - t & x < t \\ x - 2t & x > 2t \end{cases}$$

thì trong dải $t < x < 2t$, giá trị $x(0) = 0$, và không có đường đặc trưng nào trong dải này. Nghiệm của phương trình lúc đó sẽ có dạng $u = \dfrac{x}{t}$ với $t < x < 2t$. Như vậy nghiệm cần tìm của phương trình sẽ là

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x - t < 0, \\ 2, & x - 2t > 0, \\ \dfrac{x}{t}, & t < x < 2t. \end{cases}$$

1.4.3. Bài tập thực hành

1. Hãy tìm nghiệm của các bài toán sau

   (a) $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 1, \\ 12 & x > 1. \end{cases}.$

   (b) $u_t + uu_x = 0$, $u(x,0) = -x$.

   (c) $u_t + u^2u_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 4 & x < 0, \\ 3 & x > 0. \end{cases}.$

   (d) $u_t + 4uu_x = 0$, $u(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 1, \\ 2 & x > 1. \end{cases}.$

2. Hãy tìm nghiệm của *phương trình Burgers không nhớt*

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Phương trình này sẽ cho ta khái niệm về "shock". Các bạn có thể tìm hiểu thêm vấn đề này ở các công trình nghiên cứu về phương trình mô tả các định luật bảo toàn.

1.5. Phương trình cấp 1 dạng tổng quát

1.5.1. Tóm tắt lí thuyết

Ta xét phương trình cấp 1 dạng tổng quát

$$F(x, y, u(x,y), u_x(x,y), u_y(x,y)) = 0 \text{ trong } \Omega, \tag{1.5.9}$$

trong đó Ω là tập mở chứa gốc trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, và hàm

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

là hàm khả vi liên tục cho trước. Bài toán Cauchy đặt ra: Tìm hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục thỏa mãn phương trình (1.5.9) và điều kiện Cauchy (dưới dạng tham số):

$$x = x_0(s), y = y_0(s), u = u_0(s), s \in (-T, T), T > 0, \tag{1.5.10}$$

với $x_0, y_0, u_0 : (-T, T) \to \mathbb{R}$ là các hàm khả vi liên tục thỏa mãn $x_0(0) = y_0(0) = 0$. Lưu ý rằng lời giải nói chung chỉ quanh lân cận của gốc.

Trước hết ta quan tâm đến điều kiện tương thích tại gốc:

$$F(0, 0, u_0(0), p_0, q_0) = 0, \tag{1.5.11}$$

$$x_0'(0)p_0 + y_0'(0)q_0 = u_0'(0). \tag{1.5.12}$$

Điều kiện này nhằm kiểm tra tính tương tương thích giữa phương trình (1.5.9) và điều kiện Cauchy tại gốc (1.5.10). Cụ thể hơn liệu có

$$p_0 = u_x(0, 0), q_0 = u_y(0, 0)$$

vừa đảm bảo thỏa mãn phương trình (1.5.9) vừa đảm bảo thỏa mãn điều kiện Cauchy (1.5.10) theo nghĩa

$$u_0'(s) = \frac{d}{ds}[u(x_0(s), y_0(s)] = x_0'(s)u_x(x_0(s), y_0(s)) + y_0'(s)u_y(x_0(s), y_0(s)).$$

- Nếu điều kiện tương thích không thỏa mãn nghĩa là hệ (1.5.11)-(1.5.12) không có nghiệm (p_0, q_0) thì bài toán vô nghiệm.

- Nếu hệ (1.5.11)-(1.5.12) giải được (có thể nhiều) nghiệm (p_0, q_0). Ta xét tiếp điều kiện hoành, hay điều kiện không đặc trưng tại gốc đối với (p_0, q_0)

$$x_0'(0)F_q(0, 0, u_0(0), p_0, q_0) - y_0'(0)F_p(0, 0, u_0(0), p_0, q_0) \neq 0. \tag{1.5.13}$$

  Nếu điều kiện (1.5.13) không xảy ra ta gặp hiện tượng vô định. Lúc này ta cần xem điều kiện Cauchy cần thỏa mãn thêm tính chất gì để bài toán có nghiệm. Khi đó bài toán nói chung sẽ có nhiều lời giải.

  Nếu điều kiện (1.5.13) thỏa mãn thì hệ (1.5.11)-(1.5.12) sẽ giải được quanh lân cận của gốc, cụ thể hệ

$$F(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = 0, \tag{1.5.14}$$

$$x_0'(s)p_0(s) + y_0'(s)q_0(s) = u_0'(s) \tag{1.5.15}$$

sẽ giải được (có thể nhiều) cặp $(p_0(s), q_0(s))$ khi $|s|$ đủ nhỏ. Với mỗi cặp $(p_0(s), q_0(s))$ ta xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'(t) = & F_p(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)), \\ y'(t) = & F_q(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)), \\ u'(t) = & p(t)F_p(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) + q(t)F_q(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)), \\ p'(t) = & -F_x(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) - p(t)F_u(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)), \\ q'(t) = & -F_y(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) - q(t)F_u(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)), \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x(0) & = x_0(s), \\ y(0) & = y_0(s), \\ u(0) & = u_0(s), \\ p(0) & = p_0(s), \\ q(0) & = q_0(s). \end{cases}$$

Giải bài toán Cauchy trên ta được nghiệm dạng tham số $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $u = u(t, s)$. Nếu được ta nên giải $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$ rồi viết được nghiệm hiển $u = u(x, y)$.

1.5.2. Ví dụ thực hành

1. Xét phương trình trong mặt phẳng:

$$u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) = 1.$$

   (a) Với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = f(x)$ hãy biện luận lời giải bài toán này quanh lân cận của gốc theo $f'(0)$.

   (b) Với điều kiện Cauchy $u(x, y) = 0$ khi $x^2 + y^2 = 1$ hãy giải bài toán này.

Lời giải. (a) Ta có $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 1$ và tham số hóa lại điều kiện Cauchy

$$x_0(s) = s, y_0(s) = 0, u_0(s) = f(s).$$

Khi đó điều kiện tương thích tại gốc

$$F(0, 0, f(0), p_0, q_0) = p_0^2 + q_0^2 = 1,$$
$$x_0'(0)p_0 + y_0'(0)q_0 = p_0 + 0 = f'(0).$$

Nếu $|f'(0)| > 1$ thì điều kiện tương thích tại gốc không thỏa mãn. Cũng không khó khăn để thấy bài toán vô nghiệm.

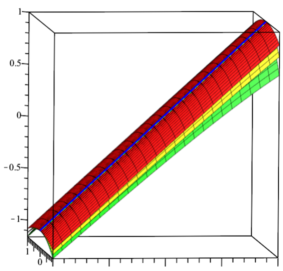
Nếu $|f'(0)| \leq 1$ từ điều kiện tương thích ta giải được $p_0 = f'(0), q_0 = \pm\sqrt{1 - [f'(0)]^2}$. Ta kiểm tra điều kiện không đặc trưng tại gốc:

$$x_0'(0)F_q(0, 0, f(0), p_0, q_0) - y_0'(0)F_p(0, 0, f(0), p_0, q_0) = 2q_0 \neq 0.$$

Nếu $|f'(0)| = 1$ thì điều kiện không đặc trưng tại gốc không thỏa mãn. Ta gặp hiện tượng vô định. Cụ thể như sau:

(-) Nếu $f(x) = x + x^2 \operatorname{sgn}(x)$ thì không khó để thấy bài toán vô nghiệm.

(-) Nếu $f(x) = x$ thì bài toán Cauchy này có vô số nghiệm trong hình cầu đơn vị, chẳng hạn $u_C(x) = C - \sqrt{(x - C)^2 + y^2}$ với hằng số $C > 1$ bất kỳ.



Hình 1.9: Các nghiệm của bài toán khi $f(x) = x$.

Nếu $|f'(0)| < 1$ sẽ có $\delta > 0$ sao cho $|f'(s)| < 1$ khi $|s| < \delta$. Khi đó bài toán sẽ có hai nghiệm trong lân cận của gốc ứng với hai trường hợp

$$q_0 = \sqrt{1 - [f'(0)]^2} \text{ hay } q_0 = -\sqrt{1 - [f'(0)]^2}.$$

Cụ thể như sau. Quay lại điều kiện tương thích, khi $|s| < \delta$,

$$F(0, 0, f(s), p_0(s), q_0(s)) = p_0^2(s) + q_0^2(s) = 1,$$
$$x_0'(s)p_0(s) + y_0'(s)q_0(s) = p_0(s) + 0 = f'(s).$$

Giải điều kiện tương thích này ta thu được hai trường hợp:

TH1: $p_0(s) = f'(s), q_0(s) = \sqrt{1 - [f'(s)]^2}$;

TH2: $p_0(s) = f'(s), q_0(s) = -\sqrt{1 - [f'(s)]^2}$.

Ta có hệ phương trình đặc trưng của bài toán:

$$\begin{cases} x'(t) = & F_p = 2p(t), \\ y'(t) = & F_q = 2q(t), \\ u'(t) = & pF_p + qF_q = 2p^2 + 2q^2 = 2, \\ p'(t) = & -F_x - pF_u = 0, \\ q'(t) = & -F_y - qF_u = 0, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x(0) &= x_0(s) = s, \\ y(0) &= y_0(s) = 0, \\ u(0) &= u_0(s) = f(s), \\ p(0) &= p_0(s) = f'(s), \\ q(0) &= q_0(s). \end{cases}$$

Giải bài toán Cauchy trên ta có

$$p(t,s) = f'(s), q(t,s) = q_0(s), u(t,s) = 2t + f(s)$$

và

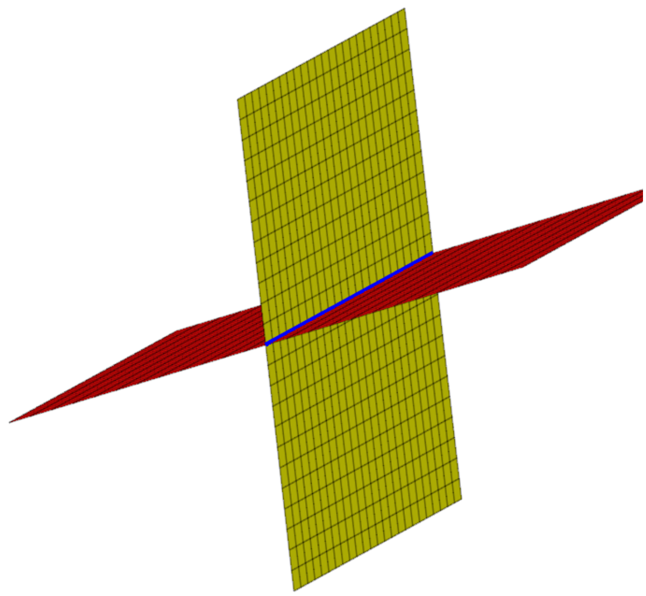
$$x(t,s) = 2f'(s)t + s, y(t,s) = 2q_0(s)t.$$

Ta thu được hai nghiệm dạng tham số

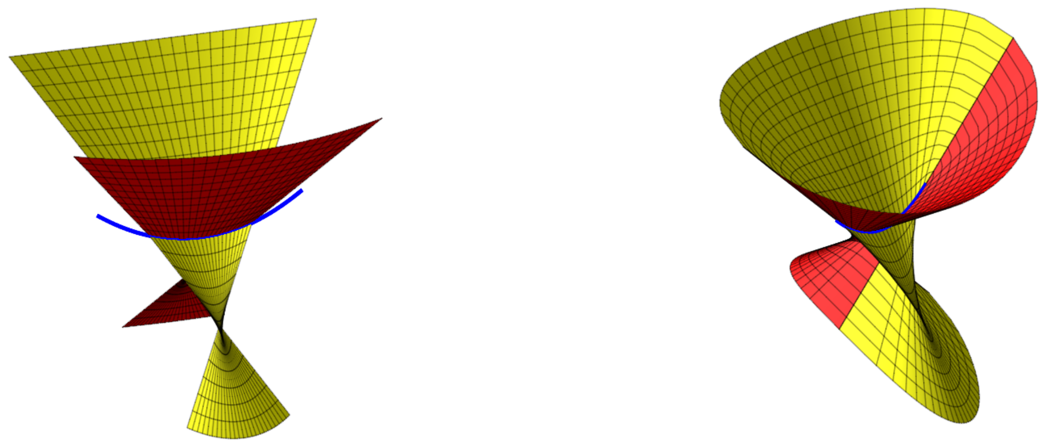
$$\begin{cases} x(t,s) &= 2tf'(s) + s, \\ y(t,s) &= 2t\sqrt{1 - [f'(s)]^2}, \\ u(t,s) &= 2t + f(s), \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x(t,s) &= 2tf'(s) + s, \\ y(t,s) &= -2t\sqrt{1 - [f'(s)]^2}, \\ u(t,s) &= 2t + f(s), \end{cases}$$

Với $f(x)$ cụ thể ta có thể nhìn được hình ảnh hai nghiệm tường minh như dưới đây.

(-) Khi $f(x) = x/2$ ta có hai mặt phẳng nghiệm.



Hình 1.10: Các nghiệm của bài toán khi $f(x) = x/2$.



(a) Các mặt cong nghiệm khi $|s| < 1/2$. (b) Các mặt cong nghiệm khi $|s| < 1$.

Hình 1.11: Các nghiệm của bài toán khi $f(x) = x^2/2$.

(-) Khi $f(x) = x^2/2$ ta có hai mặt cong nghiệm.

(b) Ta có $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 - 1$ và tham số hóa lại điều kiện Cauchy

$$x_0(s) = \cos(s), y_0(s) = \sin(s), u_0(s) = 0, 0 \leq s \leq 2\pi.$$

Khi đó điều kiện tương thích

$$\begin{aligned} F(s, 2s, 0, p_0(s), q_0(s)) = p_0(s)^2 + q_0(s)^2 = 1, \\ x_0'(s)p_0(s) + y_0'(s)q_0(s) = -\sin(s)p_0(s) + \cos(s)q_0(s) = 0. \end{aligned}$$

Ta giải điều kiện tương thích được

$$p_0(s) = \cos(s), q_0(s) = \sin(s).$$

Khi đó điều kiện không đặc trưng

$$x_0'(s)F_q(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) - y_0'(s)F_p(x_0(s), y_0(s), u_0(s), p_0(s), q_0(s)) = -2 \neq 0$$

được thỏa mãn tại mọi điểm trên đường điều kiện Cauchy. Như vậy bài toán Cauchy đang xét có duy nhất nghiệm quanh đường điều kiện Cauchy.

Ta có hệ phương trình đặc trưng của bài toán:

$$\begin{cases} x'(t) = & F_p = 2p(t), \\ y'(t) = & F_q = 2q(t), \\ u'(t) = & pF_p + qF_q = 2p^2 + 2q^2 = 2, \\ p'(t) = & -F_x - pF_u = 0, \\ q'(t) = & -F_y - qF_u = 0, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x(0) &= x_0(s) = \cos(s), \\ y(0) &= y_0(s) = \sin(s), \\ u(0) &= u_0(s) = 0, \\ p(0) &= p_0(s) = \cos(s), \\ q(0) &= q_0(s) = \sin(s). \end{cases}$$

Giải bài toán Cauchy trên ta có

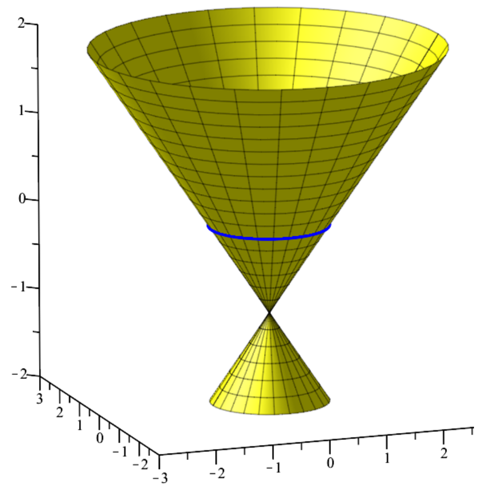
$$p(t,s) = \cos(s), q(t,s) = \sin(s), u(t,s) = 2t$$

và

$$x(t,s) = 2t\cos(s) + \cos(s), y(t,s) = 2t\sin(s) + \sin(s).$$

Ta thu được nghiệm dạng tham số

$$x(t,s) = (2t+1)\cos(s), y(t,s) = (2t+1)\sin(s), u(t,s) = 2t.$$



2. Giải bài toán Cauchy trong mặt phẳng sau

$$p^2 + q^2 + 2(p-x)(q-y) = 2u,$$
$$u(x,0) = 0, 0 \le x \le 1,$$

trong đó $p = u_x, q = u_y$.

Lời giải.

Ta có $F(x,y,u,p,q) = p^2 + q^2 + 2(p-x)(q-y) - 2u$ và tham số hóa lại điều kiện Cauchy

$$x_0(s) = s, y_0(s) = 0, u_0(s) = 0, 0 \le s \le 1.$$

Khi đó điều kiện tương thích

$$\begin{aligned} F(s,0,0,p_0(s),q_0(s)) = p_0(s)^2 + q_0(s)^2 + 2(p_0(s)-s)q_0(s) = 0, \\ x_0'(s)p_0(s) + y_0'(s)q_0(s) = p_0(s) = 0. \end{aligned}$$

Ta giải điều kiện tương thích được các nghiệm

(-) $p_0(s) = 0, q_0(s) = 0$;

(-) $p_0(s) = 0, q_0(s) = 2s$.

Khi đó điều kiện không đặc trưng

$$\begin{aligned} & x_0'(s)F_q(x_0(s),y_0(s),u_0(s),p_0(s),q_0(s)) \\ & \qquad - y_0'(s)F_p(x_0(s),y_0(s),u_0(s),p_0(s),q_0(s)) = 2(q_0(s)-s) \neq 0 \end{aligned}$$

được thỏa mãn khi $0 < s \leq 1$. Như vậy bài toán Cauchy đang xét có duy nhất nghiệm quanh đường điều kiện Cauchy trừ điểm gốc.

Ta có hệ phương trình đặc trưng của bài toán:

$$\begin{cases} x'(t) = & F_p = 2(p(t)+q(t)-y(t)), \\ y'(t) = & F_q = 2(p(t)+q(t)-x(t)), \\ u'(t) = & pF_p + qF_q, \\ p'(t) = & -F_x - pF_u = 2(p(t)+q(t)-y(t)), \\ q'(t) = & -F_y - qF_u = 2(p(t)+q(t)-x(t)), \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} x(0) & = x_0(s) = s, \\ y(0) & = y_0(s) = 0, \\ u(0) & = u_0(s) = 0, \\ p(0) & = p_0(s) = 0, \\ q(0) & = q_0(s). \end{cases}$$

Khác với Ví dụ trước ta có thể giải được một số phương trình từ hệ phương trình đặc trưng, sau đó ta mới giải được các phương trình còn lại, trong ví dụ này ta không thể giải được phương trình nào trong hệ. Ta có hai cách tiếp cận:

- Cách 1: thủ công, dựa trên việc ghép các phương trình thích hợp với nhau.
- Cách 2: dùng kết quả của hệ phương trình vi phân tuyến tính và đại số tuyến tính.

Cách 1: quan sát hệ phương trình đặc trưng ta thấy ngay

$$x'(t) - p'(t) = 0 \text{ và } y'(t) - q'(t) = 0.$$

Do đó ta có

$$x(t) - p(t) = x_0(s) - p_0(s) = s, \tag{1.5.16}$$

$$y(t) - q(t) = y_0(s) - q_0(s) = -q_0(s). \tag{1.5.17}$$

Từ (1.5.16)-(1.5.17) ta có

$$(x(t) + y(t)) - (p(t) + q(t)) = s - q_0(s). \tag{1.5.18}$$

Lại quan sát tiếp hệ phương trình đặc trưng ta thấy

$$x'(t) - y'(t) = 2(x'(t) - y'(t)) \text{ và } x'(t) + y'(t) = 2(x(t) + y(t)) - 4(x(t) + y(t) - p(t) - q(t)).$$

Sử dụng điều kiện ban đầu và (1.5.18) ta có

$$x(t) - y(t) = (x_0(s) - y_0(s))e^{2t} = se^{2t}, \tag{1.5.19}$$

$$x(t) + y(t) = Ae^{2t} + 2(s + q_0(s)) = (2q_0(s) - s)e^{2t} + 2(s - q_0(s)). \tag{1.5.20}$$

Từ (1.5.16)-(1.5.17) và chú ý $u(t) = \dfrac{p^2(t) + q^2(t)}{2} + (p(t) - x(t))(q(t) - y(t))$ ta có

$$u(t) = \frac{x^2(t) + y^2(t) + (s - q_0(s))^2 - 2x(t)s + 2y(t)q_0(s)}{2}. \tag{1.5.21}$$

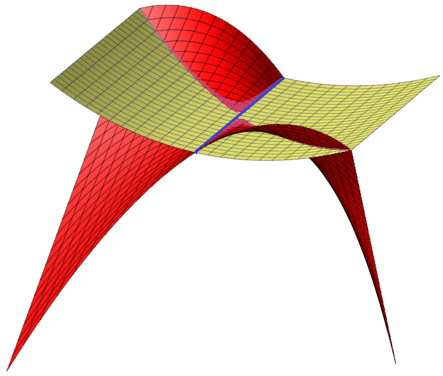
Khi $q_0(s) = 0$ thì từ (1.5.19)-(1.5.20)-(1.5.21) ta có

$$\begin{cases} x(t) - y(t) & = se^{2t}, \\ x(t) + y(t) & = -se^{2t} + 2s, \\ u(t) & = \dfrac{x^2 + y^2 + s^2 - 2xs}{2}. \end{cases}$$

Do đó ta có nghiệm $u = y^2/2$. Dễ dàng thử lại nghiệm này thỏa mãn bài toán đang xét.

Khi $q_0(s) = 2s$ từ (1.5.19)-(1.5.20)-(1.5.21) ta có

$$\begin{cases} x(t) - y(t) & = se^{2t}, \\ x(t) + y(t) & = 3se^{2t} - 2s, \\ u(t) & = \dfrac{x^2 + y^2 + s^2 - 2xs + 4ys}{2}. \end{cases}$$



Hình 1.12: Hai nghiệm của bài toán.

Do đó ta có nghiệm $u = 2xy - 3y^2/2$. Dễ dàng thử lại nghiệm này thỏa mãn bài toán đang xét.

Hình ảnh hai nghiệm của bài toán đang xét:

Cách 2: ta viết lại hệ phương trình đặc trưng dưới dạng

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

theo lý thuyết hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ phương trình đặc trưng có nghiệm

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ p'(t) \\ q'(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \\ p_0(s) \\ q_0(s) \end{pmatrix}$$

trong đó $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots$. Lại để ý $A^2 = 2A$ nên $A^n = 2^{n-1}A$

và $e^{tA} = I + \dfrac{e^{2t}-1}{2}A$. Do đó

$$\begin{cases} x(t) &= x_0(s) + (e^{2t}-1)(-y_0(s)+p_0(s)+q_0(s)) = q_0(s)e^{2t} + s - q_0(s),\\ y(t) &= y_0(s) + (e^{2t}-1)(-x_0(s)+p_0(s)+q_0(s)) = (q_0(s)-s)e^{2t} + s - q_0(s),\\ p(t) &= p_0(s) + (e^{2t}-1)(-y_0(s)+p_0(s)+q_0(s)) = q_0(s)e^{2t},\\ q(t) &= q_0(s) + (e^{2t}-1)(-x_0(s)+p_0(s)+q_0(s)) = (q_0(s)-s)e^{2t} + q_0(s), \end{cases}$$

Lại dùng (1.5.21) như trong Cách 1 ta lại thu được hai nghiệm $u = y^2/2$ và $u = 2xy - 3y^2/2$.

1.5.3. Bài tập thực hành

Dưới đây ta tìm nghiệm $u : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega$ là tập mở trong $\mathbb{R}^2$, của mỗi bài toán Cauchy sau. Sau khi giải được nghiệm hãy vẽ đồ thị của nghiệm. Chú ý các ký hiệu

$$p = u_x, q = u_y.$$

1. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + pq = 5u$$

với điều kiện Cauchy $u(0, y) = 4y^2$.

2. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 - 5q^2 = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, x) = x^2$.

3. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + 8qu - 8yq^2 = 0$$

với điều kiện Cauchy $u(x, x) = x^2$.

4. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 + 2xp + 2yq = 2u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = (1 - x^2)/2$.

5. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 + 2yp + 2xq = 2u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = x^2/2$.

6. Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$4p^2 + q^2 + 4(p - x)(q - 4y) = 8u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = 0$.

7. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$pq = 1$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = \ln x$.

8. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$pq = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 1) = x, 0 \leq x \leq 1$.

9. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$pq = 2$$

với điều kiện Cauchy $u(x, x) = 3x, 0 \leq x \leq 1$.

10. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^3 - q = 0$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = 2x^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$.

11. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p + q^2/2 = 1$$

với điều kiện Cauchy $u(0, y) = y^2, 0 \leq y \leq 1$.

12. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$2p^2x + qy = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 1) = x/2$.

13. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = x^2 + 1$.

14. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 = u^2$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = 1$.

15. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 = u^2$$

với điều kiện Cauchy $u(x, y) = 1$ khi $x^2 + y^2 = 1$.

16. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 + q^2 = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, y) = 1$ khi $x^2 + y^2 = 1$.

17. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$q^2 - p = 0$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = f(x)$.

18. (Chapter2b - Sivaji) Bài toán Cauchy đối với phương trình

$$p^2 - 3q^2 = u$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = x^2$.

1.6. Hiện tượng sốc-chân không

1.6.1. Tóm tắt lí thuyết

Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + \partial_x[F(u(x,t))] = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{1.6.22}$$

với điều kiện Cauchy $u(x, 0) = u_0(x)$, trong đó $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục cho trước.

Ký hiệu $f = F'$ ta có thể viết lại (1.6.22) dưới dạng

$$u_t(x,t) + f(u(x,t))u_x(x,t) = 0.$$

Nguyên tắc giải bài toán Cauchy trên như sau:

(-) Giải tuần tự theo thời gian từ $t = 0$.

(-) Bắt đầu từ $t = 0$ ta xác định các đường đặc trưng $x = x(t)$ thỏa mãn

$$x'(t) = f(u(x(t), t)), x(0) = s, s \in \mathbb{R}.$$

Do $u(x, t)$ là nghiệm của (1.6.22) nên dọc theo đường đặc trưng $x = x(t)$ ta có

$$\frac{d}{dt}[u(x(t), t)] = 0.$$

Do đó $u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(s)$, nghĩa là u là **hằng trên mỗi đường đặc trưng.** Như vậy

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s.$$

Ta vẽ các đường đặc trưng. Chú ý hệ số $u_0(s)$ thay đổi khi s thay đổi sẽ nảy sinh các hiện tượng sốc hoặc chân không.

(-) Xác định các vùng trên nửa mặt phẳng {(x, t): t>0} mà mỗi điểm ở đó chỉ có đúng một đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

đi qua nó. Vùng này ta giải được ngay $u(x, t)$ vì nó là **hằng trên mỗi đường đặc trưng**.

(-) Quan sát các đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

có thể xảy ra các tình huống sau.

(i) Chân không: vùng mà mỗi điểm ở đó không có đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

đi qua nó.

(ii) Sốc: vùng mà mỗi điểm ở đó có ít nhất hai đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

đi qua nó.

Nhắc lại việc giải tuần tự, nghĩa là ta quan sát từ $t = 0$ rồi tăng dần. Cụ thể những vùng xa $t = 0$ bây giờ ta tạm chưa xét đến.

(-) Vùng chân không (nếu có): sẽ có điểm bắt đầu trên đường $t = 0$, chẳng hạn điểm $(s_0, 0)$. Ta sẽ **bổ sung thêm các đường đặc trưng**

$$\frac{x(t) - s_0}{t} = C.$$

Ta lại dùng tính chất nghiệm là **hằng trên mỗi đường đặc trưng** để giải nghiệm trong vùng chân không này. Cụ thể nghiệm sẽ có dạng

$$u(x,t) = g\left(\frac{x - s_0}{t}\right).$$

Thay vào (1.6.22) ta có

$$f[g\left(\frac{x - s_0}{t}\right)] = \frac{x - s_0}{t}.$$

Do đó

$$u(x,t) = f^{-1}\left(\frac{x - s_0}{t}\right)$$

với f^{-1} là hàm ngược của f. Lưu ý nghiệm giải được này chưa chắc là nghiệm cuối cùng khi thời gian t lớn. Nó có thể bị thay đổi khi ta gặp hiện tượng sốc thứ cấp.

(-) Vùng sốc (nếu có): sẽ có điểm bắt đầu chẳng hạn $(s_1, 0)$. Ta sẽ dùng đường sốc $x = s(t)$ để chia vùng sốc này. Đường sốc này thỏa mãn $s(0) = s_1$ và **điều kiện Rankine-Hugoniot**

$$s'(t) = \frac{F(u(s^+(t),t)) - F(u(s^-(t),t))}{u(s^+(t),t) - u(s^-(t),t)}$$

với

(a) $u(s^+(t),t) = \lim_{\substack{x \to s(t) \\ x > s(t)}} u(x,t)$ là giới hạn bên phải đường sốc;

(b) $u(s^-(t),t) = \lim_{\substack{x \to s(t) \\ x < s(t)}} u(x,t)$ là giới hạn bên trái đường sốc.

Để xác định được các giới hạn này việc ta tìm được nghiệm ở vùng mà mỗi điểm ở đó chỉ có một đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

đi qua nó, hay vùng chân không trước đó rất quan trọng.

(-) Sau khi xử lý xong các vùng chân không, vùng sốc xuất phát từ $t = 0$ xong ta sẽ thấy:

(i) Không còn hiện tượng nào cả: ta được toàn bộ nghiệm.

(ii) Có một số vùng mỗi điểm ở đó chỉ có một đường đặc trưng

$$x(t) = tf(u_0(s)) + s$$

đi qua nó sẽ bị bao kín bởi đường đặc trưng $x(t) = tf(u_0(s)) + s, s$ nào đó, và đường sốc nào đó. Vùng này sẽ không tham gia gì vào các hiện tượng sau này.

(iii) Xuất hiện các vùng sốc thứ cấp: ta cần xác định điểm (s_2, t_2) "trong vùng sốc này" có thời gian bé nhất, và vùng sốc này được sinh ra từ các đường đặc trưng nào.

1.6.2. Ví dụ thực hành

1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{1.6.23}$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x < 0, \\ 0 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại vài thời điểm.

Lời giải.

Ta viết lại phương trình (1.6.23)

$$u_t(x,t) + f(u(x,t))u_x(x,t) = u_t(x,t) + (F(u(x,t)))_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với $f(u) = u, F(u) = \displaystyle\int_0^u f(y)dy$. Đường đặc trưng $x = x(t)$ thỏa mãn phương trình đặc trưng

$$x'(t) = f(u(x(t),t)) = u(x(t),t). \tag{1.6.24}$$

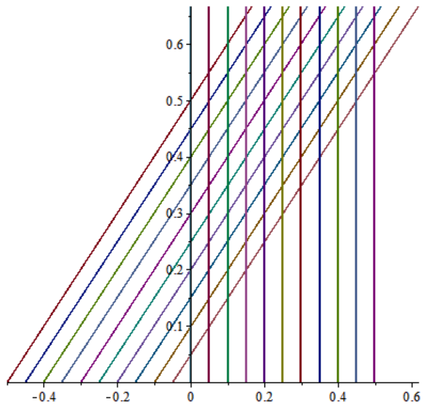
Dọc theo đường đặc trưng $x = x(t)$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(x(t),t)) &= u_t(x(t),t) + x'(t)u_x((x(t),t) \\ &= u_t(x(t),t) + u(x(t),t)u_x(x(t),t) \quad (\text{ theo } (1.6.24)) \\ &= 0 \quad (\text{ vì } u \text{ là nghiệm của phương trình } (1.6.23)). \end{aligned}$$

Như vậy $u(x(t),t)$ là hằng theo t, nghĩa là $u(x(t),t) = u(x(0),0)$. Quay trở lại phương trình đặc trưng (1.6.24) ta có

$$x'(t) = u(x(0),0).$$

Khi đó các đường đặc trưng có phương trình: $x(t) = tu(x(0),0) + x(0)$. Từ đây ta thấy:



Hình 1.13: Hình ảnh các đường đặc trưng đi từ $t = 0$.

- Các vùng mà mỗi điểm trong đó chỉ có đúng một đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\text{vùng 1: } \{(x,t) : x < 0, t > 0\} \text{ và vùng 2: } \{(x,t) : x > t > 0\}.$$

- Vùng sốc là vùng mỗi điểm trong đó có ít nhất hai đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\{(x,t) : \ 0 < x < t\}.$$

Từ tính chất nghiệm u là hằng trên mỗi đường đặc trưng, và điều kiện ban đầu ta có:

(i) Vùng 1: mỗi điểm trong đó có một đường đặc trưng xuất phát từ $\{(x,0) : \ x < 0\}$ nên

$$u(x,t) = 1, x < 0, t > 0.$$

(ii) Vùng 2: mỗi điểm trong đó có một đường đặc trưng xuất phát từ $\{(x,0) : \ x > 0\}$ nên

$$u(x,t) = 0, x > t > 0.$$

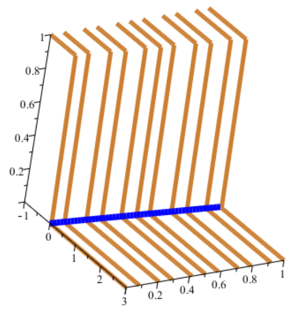
Ta còn phải giải nghiệm trong vùng sốc. Để giải nghiệm trong vùng này thực chất ta xác định đường sốc chia vùng này thành hai phần: nửa bên trái nhận giá trị từ vùng 1 kéo lên, nửa bên phải nhận giá trị từ vùng 2 kéo lên. Đường sốc $x = s(t)$ bắt đầu từ điểm $(0,0)$ (điểm sớm nhất theo thời gian trong vùng sốc), nghĩa là $s(0) = 0$, thỏa mãn điều kiện Rankine-Hugoniot:

$$s'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}$$

trong đó $F(y) = \displaystyle\int_0^y f(t)dt = y^2/2$ và

- $u^+ = \lim\limits_{x\to s(t)^+} u(x,t) = 0$ là giới hạn giá trị của u từ bên phải đường sốc (vùng 2),
- $u^- = \lim\limits_{x\to s(t)^-} u(x,t) = 1$ là giới hạn giá trị của u từ bên trái đường sốc (vùng 1).

Do đó ta có $s'(t) = 1/2, s(0) = 0$ hay ta có đường sốc $s(t) = t/2$.



Hình 1.14: Hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm t.

Như vậy nghiệm cần tìm

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x < t/2, t > 0, \\ 0 & \text{khi } x > t/2, t > 0. \end{cases}$$

Ở Ví dụ 1 ta gặp hiện tượng sốc. Ta chỉ cần thay đổi điều kiện ban đầu của ví dụ này ta sẽ gặp hiện tượng chân không như sau.

2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{1.6.25}$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

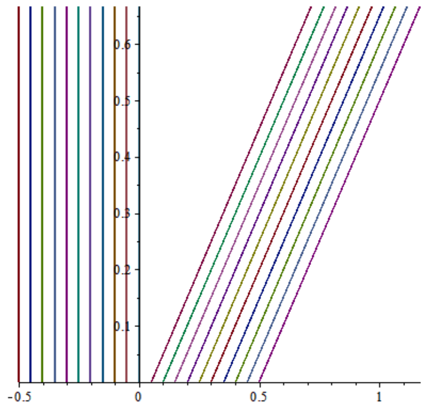
(b) Xây dựng thêm đường đặc trưng trong vùng chân không. Từ đó giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chân không.

(c) Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại vài thời điểm.

Lời giải.

Giống như Ví dụ 1, dọc theo đường đặc trưng $x = x(t)$ nghiệm $u(x(t),t)$ là hằng theo t. Do đó phương trình đặc trưng đơn giản

$$x'(t) = u(x(0), 0)$$



Hình 1.15: Hình ảnh các đường đặc trưng đi từ $t = 0$.

nên đường đặc trưng có phương trình $x(t) = tu(x(0), 0) + x(0)$. Từ đây ta thấy:

- Các vùng mà mỗi điểm trong đó chỉ có đúng một đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\text{vùng 1: } \{(x,t) : x < 0, t > 0\} \text{ và vùng 2: } \{(x,t) : x > t > 0\}.$$

- Vùng chân không là vùng mỗi điểm trong đó không có đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\{(x,t) : \ 0 < x < t\}.$$

Cũng như Ví dụ 1 ta giải được nghiệm ở vùng "chỉ có một đường đặc trưng đi qua":

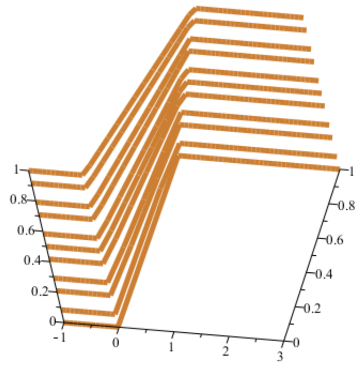
$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, t > 0, \\ 1 & \text{khi } x > t > 0. \end{cases}$$

Để giải nghiệm trong vùng chân không ta bổ sung thêm các đường đặc trưng xuất phát từ điểm $(0, 0)$ (điểm sớm nhất về thời gian trong vùng chân không). Cụ thể ta bổ sung các đường đặc trưng dạng $x/t = C$, chuyển liên tục từ các đường đặc trưng trong vùng 1 sang vùng 2. Do nghiệm là hằng trên từng đường đặc trưng nên trong vùng chân không $u(x,t) = h(x/t)$. Thay vào phương trình (1.6.25) ta có

$$-\frac{xh'(x/t)}{t^2} + \frac{h(x/t)h'(x/t)}{t} = 0.$$

Ta loại tình huống $h' = 0$ ta có $h(x/t) = x/t$. Do đó nghiệm trong vùng chân không

$$u(x,t) = x/t, 0 < x < t.$$



Hình 1.16: Hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm t.

Như vậy nghiệm cần tìm

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, t > 0, \\ x/t & \text{khi } 0 < x < t, \\ 1 & \text{khi } x > t > 0. \end{cases}$$

Tiếp tục thay đổi điều kiện ban đầu ta sẽ gặp cả hai hiện tượng sốc và chân không như sau.

3. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{1.6.26}$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

   (a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc, vùng chân không. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

   (b) Xây dựng thêm đường đặc trưng trong vùng chân không. Từ đó giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chân không.

   (c) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng sốc.

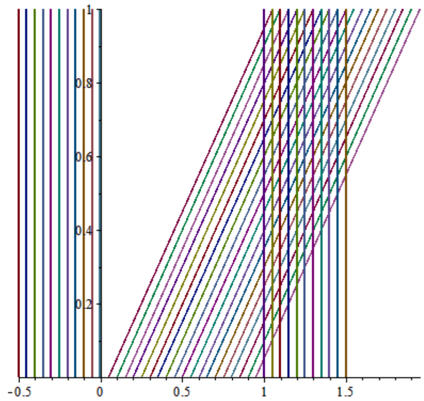
   (d) Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại vài thời điểm.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$

Giống như Ví dụ 1, dọc theo đường đặc trưng $x = x(t)$ nghiệm $u(x(t), t)$ là hằng theo t. Do đó phương trình đặc trưng đơn giản

$$x'(t) = u(x(0), 0)$$

nên đường đặc trưng có phương trình $x(t) = tu(x(0), 0) + x(0)$. Từ đây ta thấy:



Hình 1.17: Hình ảnh các đường đặc trưng đi từ $t = 0$.

- Các vùng mà mỗi điểm trong đó chỉ có đúng một đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\text{vùng 1: } \{(x,t) : x < 0, t > 0\}, \text{ vùng 2: } \{(x,t) : x > t+1, t > 0\},$$
$$\text{và vùng 3: } \{(x,t) :\ t < x < 1, t > 0\}.$$

- Vùng chân không là vùng mỗi điểm trong đó không có đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó:

$$\{(x,t) :\ 0 < x < \min\{t, 1\}\}.$$

- Vùng sốc là vùng mỗi điểm trong đó có ít nhất hai đường đặc trưng xuất phát từ đường $t = 0$ đi qua nó

$$\{(x,t) :\ \max\{1, t\} < x < t+1, t > 0\}.$$

Cũng như Ví dụ 1 ta giải được nghiệm ở vùng "chỉ có một đường đặc trưng đi qua":

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, t > 0, \\ 1 & \text{khi } t < x < 1, t > 0, \\ 0 & \text{khi } x > t+1, t > 0. \end{cases}$$

Cũng như Ví dụ 2 ta bổ sung các đường đặc trưng $x/t = C$ trong vùng chân không $\{(x,t):\ 0 < x < \min\{1,t\}, t > 0\}$. Khi đó nghiệm trong vùng chân không

$$u(x,t) = x/t, 0 < x < \min\{t,1\}, t > 0.$$

Tiếp đến ta giải nghiệm trong vùng sốc. Lưu ý vùng sốc này do các đường đặc trưng từ vùng 2 và vùng 3 tạo nên. Giống như Ví dụ 1 ta tìm đường sốc $x = s_1(t)$ xuất phát từ điểm $(1,0)$ (điểm sớm nhất về thời gian trong vùng sốc) chia vùng sốc. Từ điều kiện Rankine-Hugoniot ta có

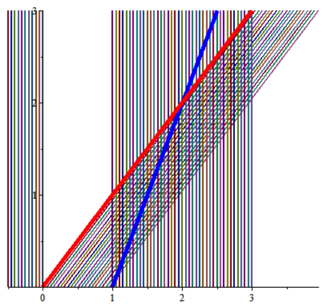
$$s_1'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}$$

trong đó $F(y) = y^2/2$ và

- $u^+ = \lim\limits_{x \to s_1(t)^+} u(x,t) = 0$ là giới hạn giá trị của u từ bên phải đường sốc (vùng 2),
- $u^- = \lim\limits_{x \to s_1(t)^-} u(x,t) = 1$ là giới hạn giá trị của u từ bên trái đường sốc (vùng 3).

Do đó ta có $s_1'(t) = 1/2, s_1(0) = 1$ hay ta có đường sốc $s_1(t) = t/2 + 1$.

Đến đây ta đã hoàn thành lời giải chưa? Trả lời: chưa vì quan sát sau.



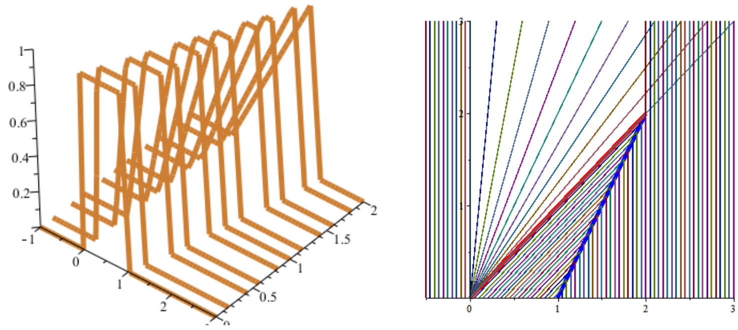
Hình 1.18: Hình ảnh các đường đặc trưng đi từ $t = 0$ và đường sốc.

Có thể thấy đường sốc $s_1(t) = t/2 + 1$ vượt qua vùng sốc $\{(x,t):\ \max\{1,t\} < x < t+1, t > 0\}$ từ điểm $(2,2)$ (giao điểm của đường sốc $s_1(t) = t/2+1$ và đường biên vùng sốc $x = t$). Do đó đường sốc $s_1(t) = t/2 + 1$ chỉ kéo dài trong khoảng thời gian $(0,2)$, làm nhiệm vùng vây quang vùng 3. Cụ thể nghiệm vùng 3 mở rộng thành

$$u(x,t) = 1, t < x < t/2 + 1, 0 < t < 2.$$

Nghiệm trong khoảng thời gian $0 < t < 2$ và các đường đặc trưng trong khoảng thời gian $0 < t < 3$ như sau::

Ta gặp vùng sốc mới $\{(x,t):\ 2 < x < t\}$ được tạo nên từ các đường đặc trưng ở vùng chân không và vùng 2. Khi đó đường sốc $x = s_2(t)$ xuất phát từ điểm $(2,2)$ (điểm sớm



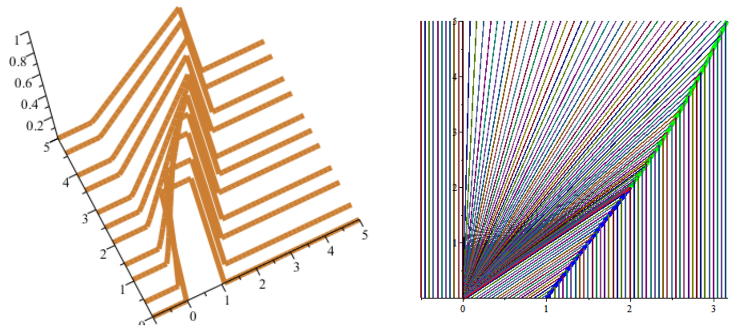
nhất về thời gian trong vùng sốc mới) thỏa mãn điều kiện Rankine-Hugoniot:

$$s_2'(t) = \frac{F(u^+) - F(u^-)}{u^+ - u^-}$$

trong đó $F(y) = y^2/2$ và

- $u^+ = \lim\limits_{x \to s_2(t)^+} u(x,t) = 0$ là giới hạn giá trị của u từ bên phải đường sốc (vùng 2),
- $u^- = \lim\limits_{x \to s_2(t)^-} u(x,t) = s_2(t)/t$ là giới hạn giá trị của u từ bên trái đường sốc (vùng chân không).

Do đó ta có $s_2'(t) = s_2(t)/(2t), s_2(2) = 2$ hay ta có đường sốc $s_2(t) = \sqrt{2t}$. Hình ảnh toàn bộ nghiệm và các đường đặc trưng như sau:



Đến đây ta thu được toàn bộ nghiệm

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, t > 0, \\ x/t & \text{khi } 0 < x < \min\{t, \sqrt{2t}\}, t > 0, \\ 1 & \text{khi } t < x < 1, t > 0, \\ 0 & \text{khi } \max\{t+1, \sqrt{2t}\} \le x, t > 0. \end{cases}$$

1.6.3. Bài tập thực hành

1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 1, \\ 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + (1 - 2u(x,t))u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 1, \\ 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

3. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + (1 - 2u(x,t))u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = 1, x < 0$, và $u(0,t) = 2, t > 0$.

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

4. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u^2(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } 0 < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = 1$ khi $x > 0$, và $u(0,t) = 2$ khi $t > 0$.

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

5. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < -1, \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 1, \\ 2 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Vẽ thêm các đường đặc trưng trong vùng chân không, từ đó xác định nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chận không. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

6. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + (1 - 2u(x,t))u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = 2, x < 0$, và $u(0,t) = 1, t > 0$.

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Vẽ thêm các đường đặc trưng ở vùng chân không, từ đó xác định nghiệm $u(x,t)$ ở vùng chân không. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

7. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + (1 - 3u^2(x,t))u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < 0, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = 2, x < 0$, và $u(0,t) = 1, t > 0$.

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng chân không. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Vẽ thêm các đường đặc trưng ở vùng chân không, từ đó xác định nghiệm $u(x,t)$ ở vùng chân không. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1, 2$.

8. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x,t) + (1 - 2u(x,t))u_x(x,t) = 0 \text{ khi } -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy $u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0, \\ 1/2 & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm $u(x,t)$ trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.

(b) Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm $u(x,t)$. Vẽ đồ thị của $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1/2, 1$.

9. Xét bài toán

$$u_t(x,t) + u^2(x,t)u_x(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 2 & \text{khi } x < 0, \\ 1 & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

(a) Vẽ các đường đặc trưng của phương trình.

(b) Giải bài toán trên miền không có sốc.

(c) Từ điều kiện Rankine-Hugoniot hãy xác định đường sốc. Xác định nghiệm trên toàn miền xác định. Vẽ đồ thị của nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 3/4, 1$.

10. Xét bài toán Cauchy:

$$u_t(x,t) + u^2(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } |x| > 1, \\ 1 & \text{khi } |x| \leq 1, \end{cases}$$

(i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

(ii) Xác định vùng chặn không, bổ sung các đường đặc trưng trong vùng này rồi giải nghiệm trong vùng này.

(iii) Xác định sốc. Từ đó giải nghiệm của bài toán trên.

(iv) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1, 3/2, 2$.

11. Xét bài toán Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + (1-u(x,t))u_x(x,t) &= 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{khi } x < 0, \\ 2 & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

(ii) Xác định vùng chặn không, bổ sung các đường đặc trưng trong vùng này rồi giải nghiệm trong vùng này.

(iii) Xác định sốc. Từ đó giải nghiệm của bài toán trên.

(iv) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1, 2, 3$.

12. Xét bài toán Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) &= 0 \text{ khi } t > 0, x > 0, \\ u(0,t) = 1 \text{ khi } t > 0, \text{ và } u(x,0) &= \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

(ii) Xác định vùng chặn không, bổ sung các đường đặc trưng trong vùng này rồi giải nghiệm trong vùng này.

(iii) Xác định sốc. Từ đó giải nghiệm của bài toán trên.

(iv) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2, 4, 5$.

1.7. Bài tập nâng cao

Trong phần này, chúng tôi cung cấp các bài tập có độ khó cao hơn các phần trước. Các nội dung được nêu trong phần này có thể được sử dụng như chủ đề của các dự án nghiên cứu nhỏ dành cho sinh viên để tập làm nghiên cứu. Các bài tập được lấy từ một số tài liệu (như trích từ Giáo trình của Bernard Deconinck...)

1. Xét bài toán Cauchy:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x < 0, \\ 1 - x & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

   (i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

   (ii) Xác định vùng sốc. Bằng cách nhân $u^\alpha, \alpha \in (-1, \infty)$ vào phương trình, hãy thiết lập điều kiện Rankine-Hugoniot tương ứng. Từ đó xác định đường sốc. Chứng minh rằng, đường sốc tìm được là đường kéo dài của đường đặc trưng xuất phát từ $(x, 0)$ với x là điểm nào đó trong $(0, 1)$. Giải nghiệm của bài toán trên.

   (iii) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1/2, 1, 2, 5$.

2. Xét bài toán Cauchy:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x < -1, \\ x^2 & \text{khi } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

   (i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

   (ii) Xác định vùng sốc. Sử dụng điều kiện Rankine-Hugoniot xác định đường sốc. Giải nghiệm của bài toán trên.

   (iii) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài các thời điểm.

3. Xét bài toán Cauchy:

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 + x & \text{khi } -1 < x < 0, \\ 1 - x & \text{khi } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{khi } |x| > 1. \end{cases}$$

   (i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

(ii) Xác định vùng sốc. Sử dụng điều kiện Rankine-Hugoniot xác định đường sốc. Giải nghiệm của bài toán trên.

(iii) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài các thời điểm.

4. Xét bài toán Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) &= 0 \text{ khi } t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{khi } 1 < |x| < 2, \\ 4 & \text{khi } |x| < 1, \\ 0 & \text{khi } |x| > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Vẽ các đường đặc trưng. Từ đó xác định miền chỉ có một đường đặc trưng đi qua và nghiệm trong miền này.

(ii) Xác định các vùng chận không, bổ sung các đường đặc trưng trong các vùng này rồi giải nghiệm trong các vùng này.

(iii) Xác định vùng sốc. Sử dụng điều kiện Rankine-Hugoniot xác định đường sốc. Giải nghiệm của bài toán trên.

(iv) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài các thời điểm.