Ví dụ 1. *Xét bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0$$

với các điều kiện ban đầu

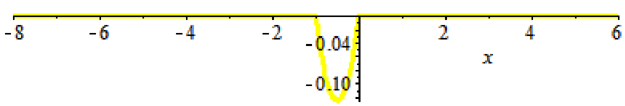
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \textit{khi } x < -1 \textit{ hay } x > 0, \\ x(x+1) & \textit{khi } -1 \le x \le 0, \end{cases} \quad \textit{và} \quad u_t(x,0) = 0.$$

(a) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài thời điểm.

(b) Tìm tất cả các điểm kỳ dị của nghiệm.

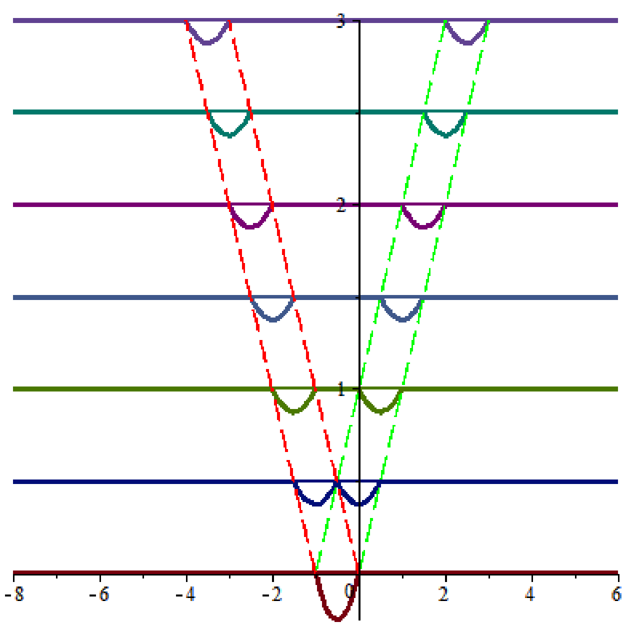
Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với sóng tiến $F(x)$ và sóng lùi $G(x)$ trùng nhau (vì vận tốc ban đầu $u_t(x,0) = 0$) và được xác định bởi

$$F(x) = G(x) = \frac{u(x,0)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -1 \text{ hay } x > 0, \\ x(x+1) & \text{khi } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$



Hình 1: Hình ảnh sóng tiến - sóng lùi.

Từ đây ta có hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm $k/2, k = \overline{0,6}$:



Sóng tiến $F(x)$ cũng như sóng lùi $G(x)$ không khả vi tại các điểm $x = -1, x = 0$ vì

(-) đạo hàm trái $F'(-1^-) = 0$ còn đạo hàm phải $F'(-1^+) = -1$;

(-) đạo hàm trái $F'(0^-) = 1$ còn đạo hàm phải $F'(0^+) = 0$.

Không khó để thấy sóng tiến cũng như sóng lùi khả vi vô hạn tại các điểm khác. Do đó nghiệm $u(x,t)$ có tập các điểm kỳ dị gồm bốn tia:

$$x \pm t = 0, x \pm t = -1, t \geq 0.$$

Ví dụ 2. *Xét bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0$$

với các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0, \qquad \text{và } u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -1 \text{ hay } x > 0, \\ 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

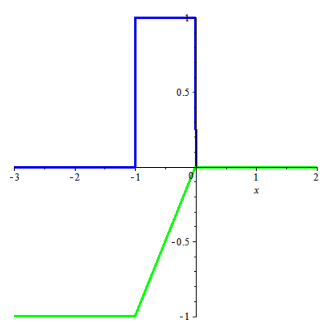
(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài thời điểm.

(c) Tìm tất cả các điểm kỳ dị của nghiệm.

Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với

- sóng tiến $F(x) = \dfrac{u(x,0)}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^x u_t(s,0)ds$,
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{u(x,0)}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^x u_t(s,0)ds$.

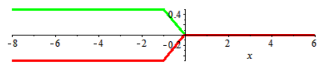


Hình 2: Hình ảnh việc lấy tích phân.

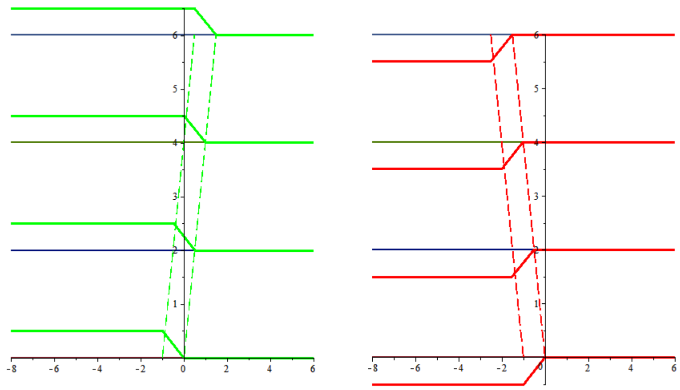
Do $u(x,0) = 0$ nên ta còn phải tính tích phân

$$\int_0^x u_t(s,0)ds = \begin{cases} 0 & \text{khi } x > 0, \\ x & \text{khi } -1 \leq x \leq 0, \\ -1 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$$

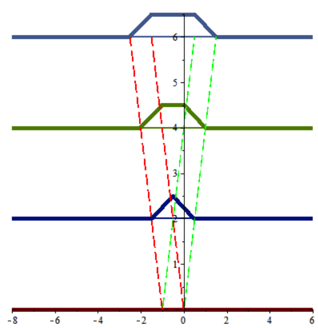
Khi đó ta có hình ảnh sóng tiến (màu xanh), sóng lùi (màu đỏ) như sau.



Dịch chuyển sóng tiến sang phải, sóng lùi sang trái ta được hình sau.



Cộng sóng tiến với sóng lùi ta được hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm:



Giống bài trước, từ tính không khả vi của sóng tiến và sóng lùi ta có nghiệm $u(x,t)$ có tập các điểm kỳ dị gồm bốn tia:

$$x \pm t = 0, x \pm t = -1, t \geq 0.$$

Hai ví dụ trên ta xét bài toán trên toàn trục. Tiếp theo ta quan tâm đến bài toán trên nửa trục. Với bài toán biên - ban đầu trên nửa trục ta cần chú ý đến điều kiện biên.

Ví dụ 3. *Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên $u(0,t) = 0$ *và các điều kiện ban đầu*

$$u(x,0) = 0, \qquad \text{và } u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 < x < 1 \text{ hay } x > 2, \\ 1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) *Xác định sóng tiến, sóng lùi.*

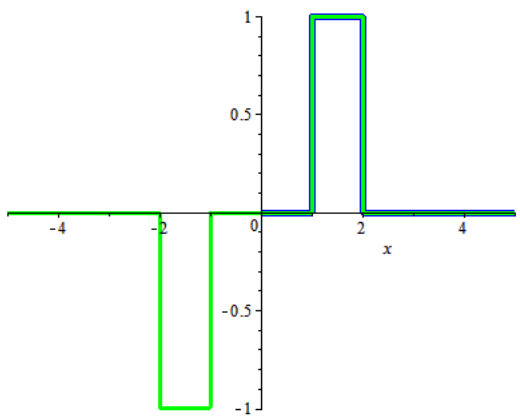
(b) *Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại vài thời điểm.*

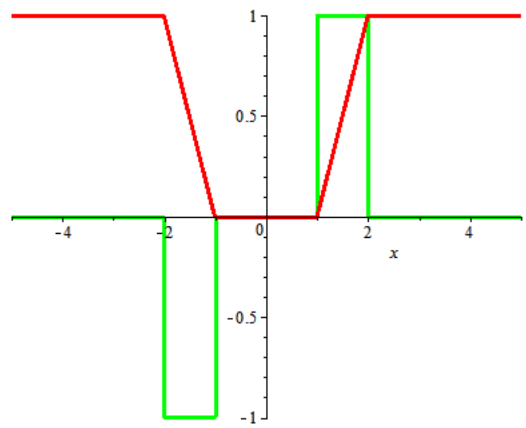
(c) *Tìm tất cả các điểm kỳ dị của nghiệm.*

Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với (chú ý tốc độ lan truyền $c = 2$)

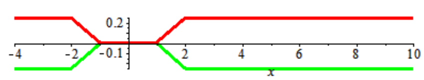
- sóng tiến $F(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} - \dfrac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds$,
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} + \dfrac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds$.

trong đó f^* là thác triển lẻ của $u(x,0) = 0, x > 0$, và g^* là thác triển lẻ của $u_t(x,0), x > 0$. Có ngay $f^*(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Hình ảnh quá trình thác triển lên g^* và việc lấy tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$ như sau.

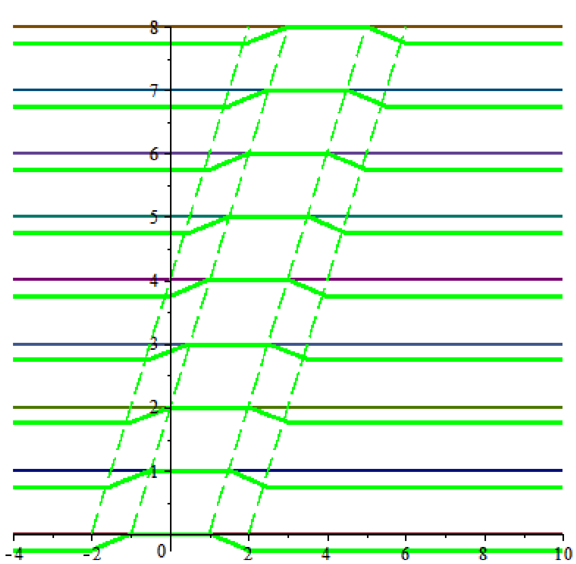


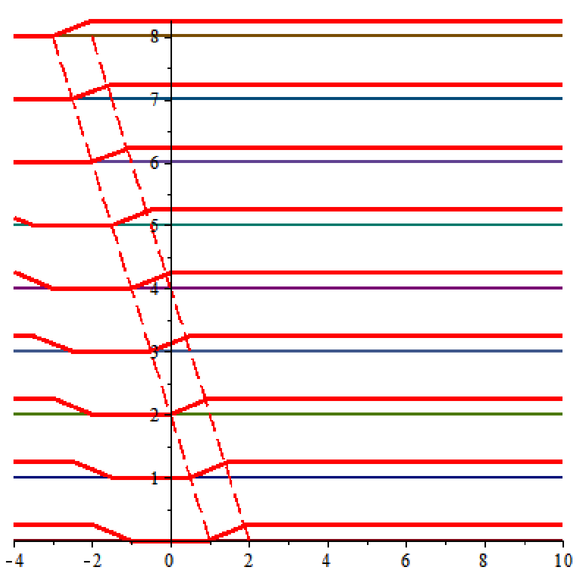


Khi đó ta có hình ảnh sóng tiến (màu xanh) và sóng lùi (màu đỏ):

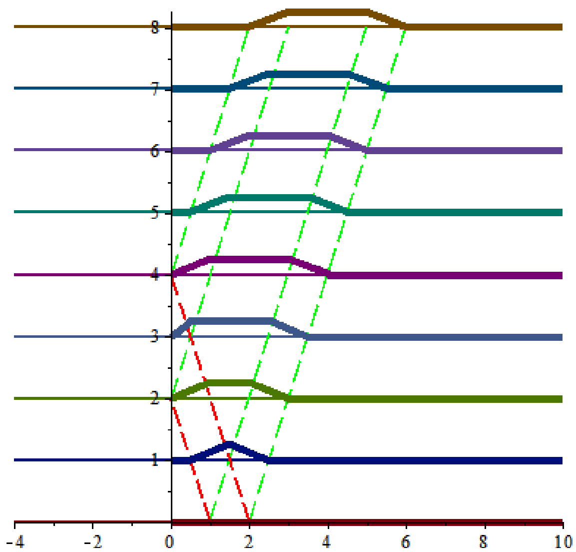


Quá trình sóng tiến dịch sang phải, sóng lùi dịch sang trái như sau.





Như vậy ta có hình ảnh của nghiệm tại vài thời điểm như sau.

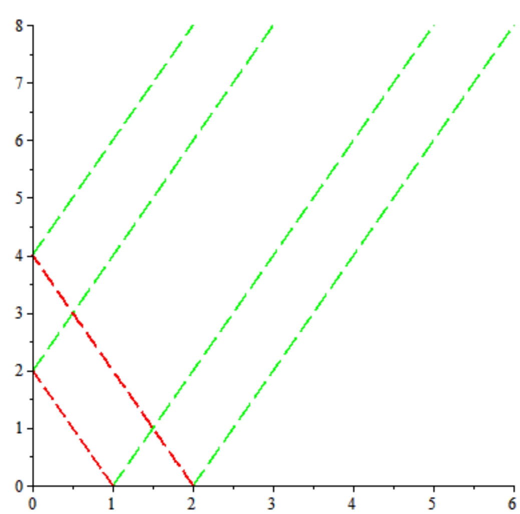


Về điểm kỳ dị, nếu ta chỉ nhìn từ điều kiện ban đầu ta thấy vận tốc ban đầu không khả vi tại $x = 1, x = 2$. Sau thác triển ta thấy thêm hai điểm không khả vi nữa $x = -1, x = -2$. Khi đó tập điểm kỳ dị của nghiệm gồm

(i) các tia $x - t = 1, x - t = 2$ với $t > 0$,

(ii) các đoạn $x + t = 1, x + t = 2$ với $x > 0, t > 0$,

(iii) các tia $x - t = -1, x - t = -2$ với $x > 0$.



Hình 3: Tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Ví dụ 3 có điều kiện biên Dirichlet mô tả dao động luôn cố định ở đầu $x = 0$. Ví dụ sau ta sẽ quan sát dao động có dao động tại biên $x = 0$ tự do.

Ví dụ 4. *Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng*

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên $u_x(0,t) = 0$ *và các điều kiện ban đầu*

$$u(x,0) = 0, \quad \text{và } u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 < x < 1 \text{ hay } x > 2, \\ 1 & \text{khi } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi.

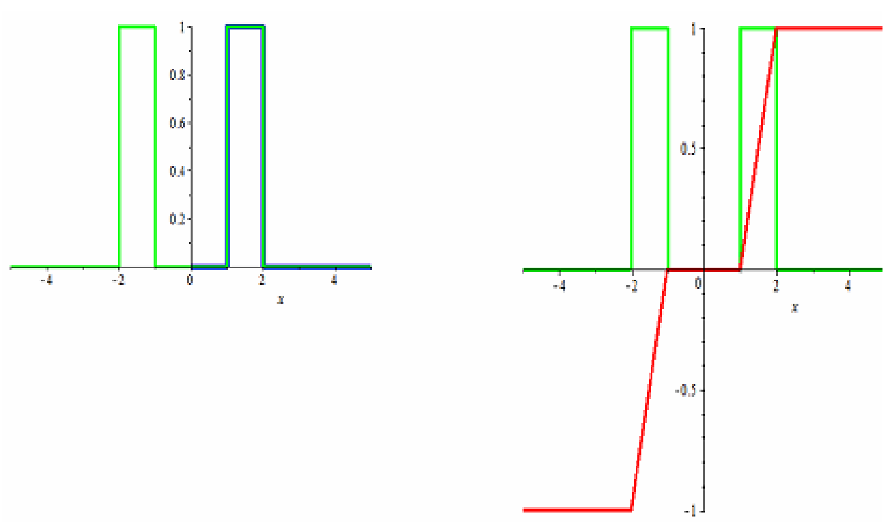
(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ *tại vài thời điểm.*

(c) Tìm tất cả các điểm kỳ dị của nghiệm.

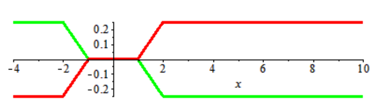
Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với (chú ý tốc độ lan truyền $c = 2$)

- sóng tiến $F(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} - \dfrac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds,$
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} + \dfrac{1}{4}\int_0^x g^*(s)ds.$

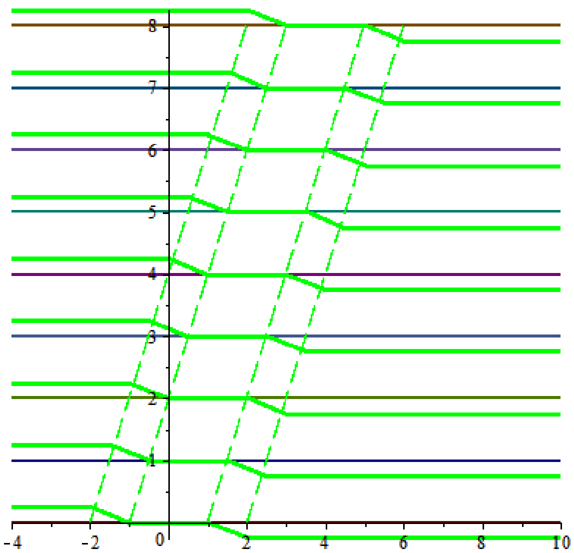
trong đó f^* là thác triển chẵn của $u(x,0) = 0, x > 0$, và g^* là thác triển chẵn của $u_t(x,0), x > 0$. Có ngay $f^*(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Hình ảnh quá trình thác triển lên g^* và việc lấy tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$ như sau.

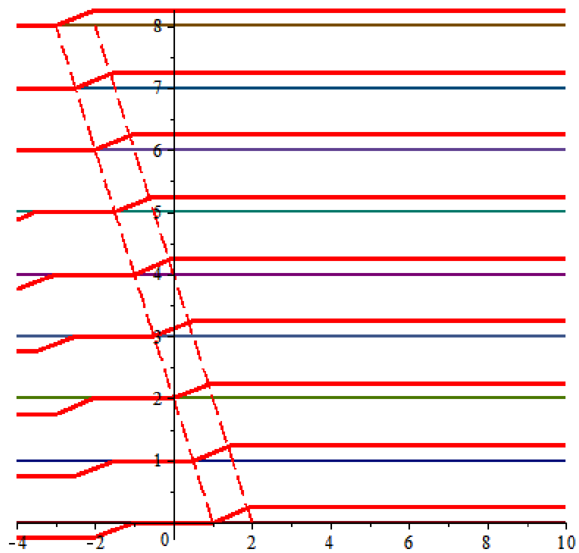


Khi đó ta có hình ảnh sóng tiến (màu xanh) và sóng lùi (màu đỏ):

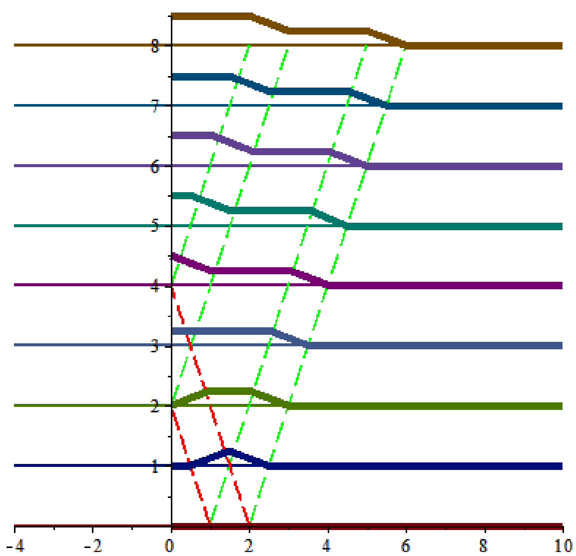


Quá trình sóng tiến dịch sang phải, sóng lùi dịch sang trái như sau.





Như vậy ta có hình ảnh của nghiệm tại vài thời điểm như sau.



Giống Ví dụ 3 tập điểm kỳ dị của nghiệm gồm

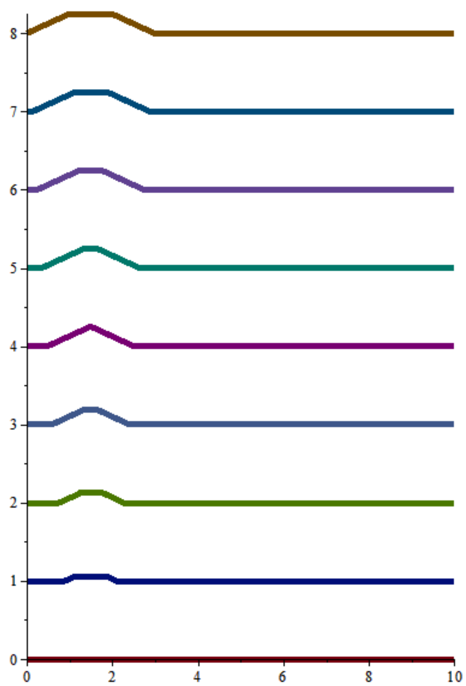
(i) các tia $x - t = 1, x - t = 2$ với $t > 0$,

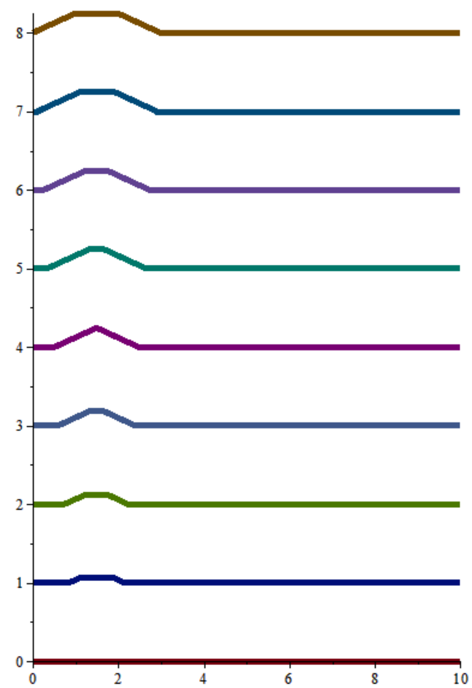
(ii) các đoạn $x + t = 1, x + t = 2$ với $x > 0, t > 0$,

(iii) các tia $x - t = -1, x - t = -2$ với $x > 0$.

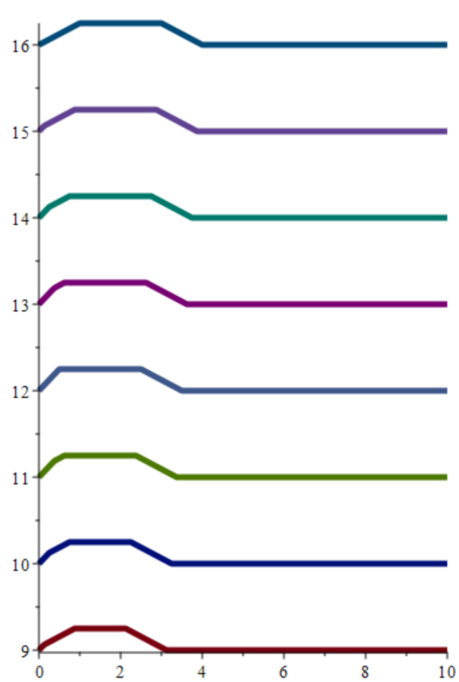
Ta thử so sánh Ví dụ 3 (đầu $x = 0$ cố định) và Ví dụ 4 (đầu $x = 0$ tự do) trong một vài khoảng thời gian.

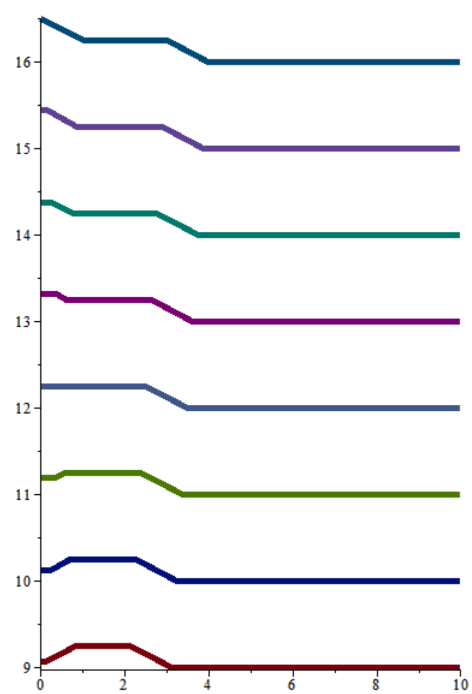
- Khoảng thời gian đầu từ $t = 0$ đến $t = 1/2$: ta thấy chúng giống hệt nhau. Cả hai đều có xu hướng tiến về biên $x = 0$.



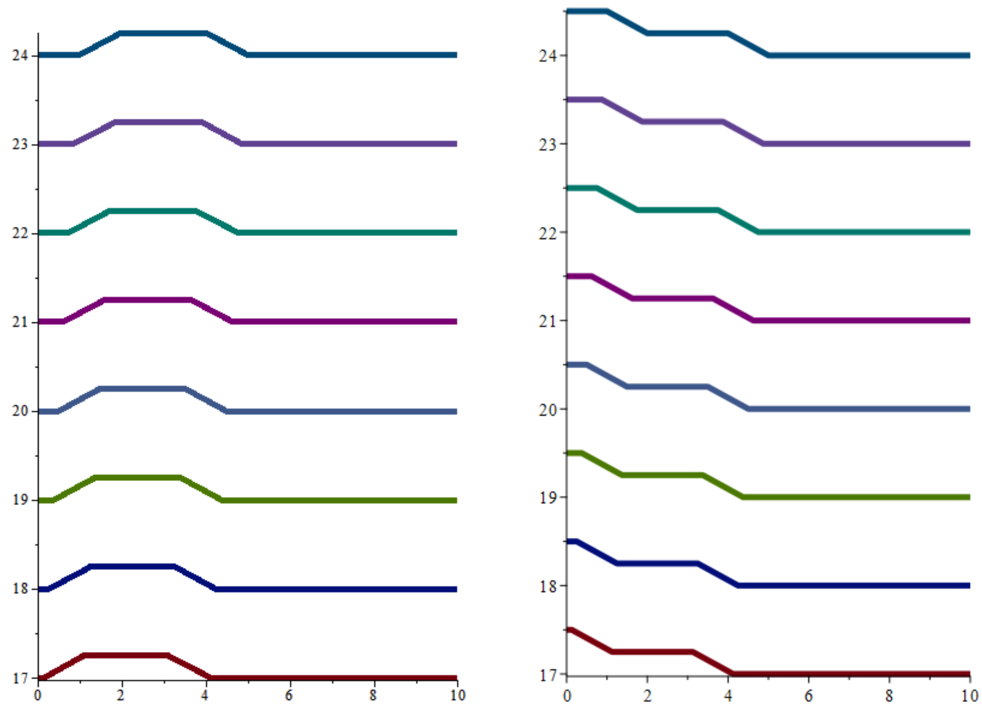


- Khoảng thời gian đầu từ $t = 1/2$ đến $t = 1$: ta thấy chúng khác nhau. Các dao động này bắt đầu "chạm" vào biên $x = 0$ và ảnh hưởng từ điều kiện biên dẫn đến cách các dao động này phản ứng khác nhau.





- Khoảng thời gian đầu từ $t = 1$ đến $t = 3/2$: ta thấy chúng tiếp tục khác nhau. Các dao động có xu hướng đi ra xa biên $x = 0$. Ở gần biên $x = 0$ hình thành trạng thái cân bằng ở hai dao động khác nhau.



Các ví dụ trên quan tâm đến dao động sợi dây dài vô hạn. Giờ ta sẽ quan tâm đến dao động của đoạn dây hữu hạn.

Ví dụ 5. *Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = \chi_{[1/4,1/3]}(x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 4\chi_{[2/3,3/4]}(x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) *Thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ* 2 *các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.*

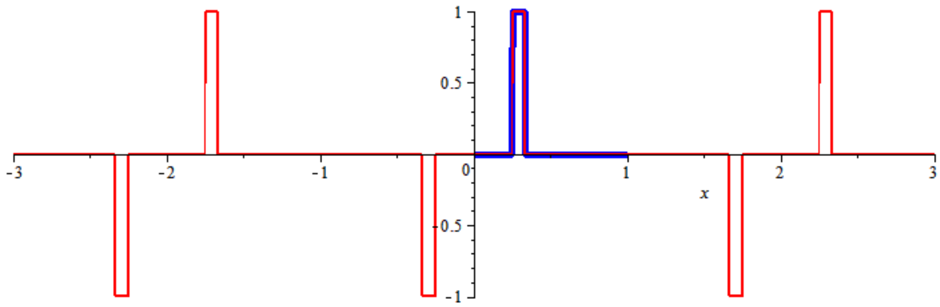
(b) *Vẽ đồ thị* $u(x,t)$ *tại một vài thời điểm.*

(c) *Chứng minh rằng nghiệm tuần hoàn theo thời gian chu kỳ* 2.

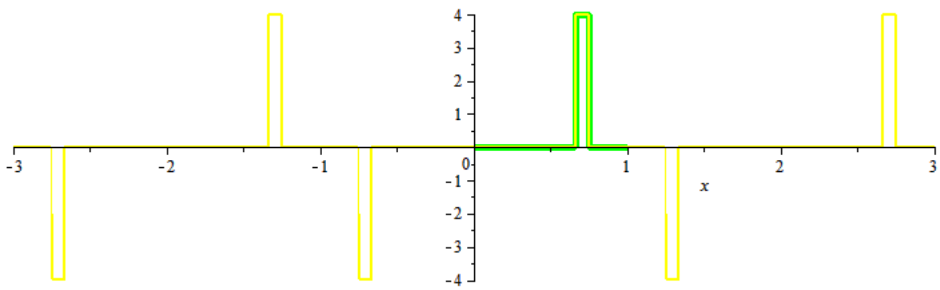
Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với (chú ý tốc độ lan truyền $c = 1$)

- sóng tiến $F(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^x g^*(s)ds$,
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^x g^*(s)ds$.

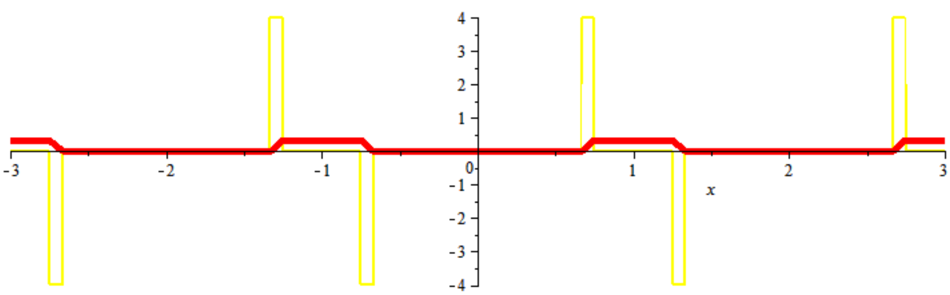
trong đó f^* là thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2 của $u(x,0), x > 0$,



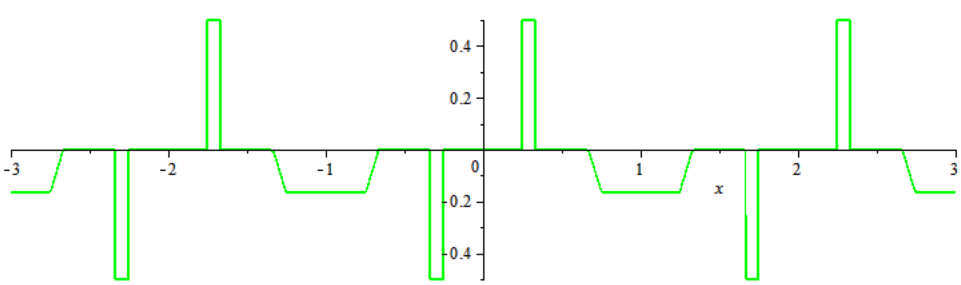
và g^* là thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2 của $u_t(x,0), x > 0$.

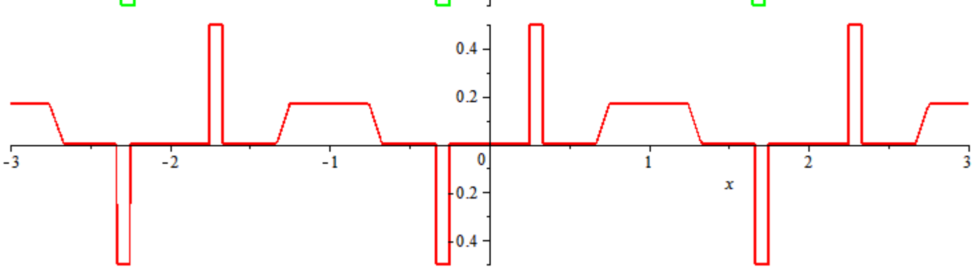


Tiếp theo ta lấy tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$ như sau.

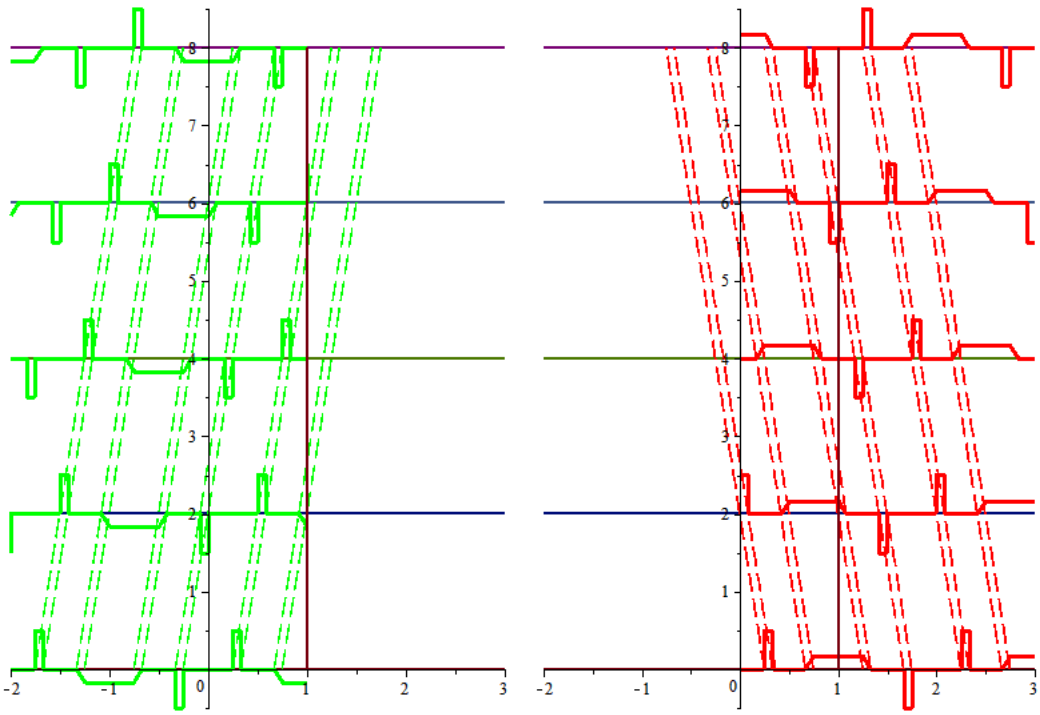


Ta có hình ảnh sóng tiến (màu xanh) và sóng lùi (màu đỏ) như sau.

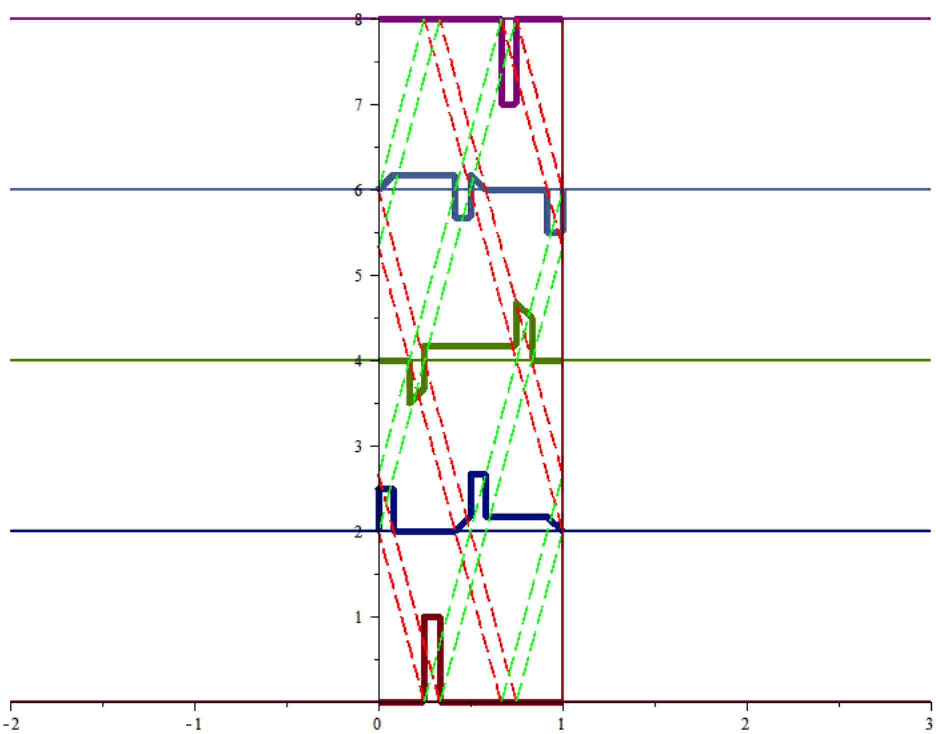




Quá trình dịch chuyển sóng tiến sang phải, sóng lùi sang trái như sau.

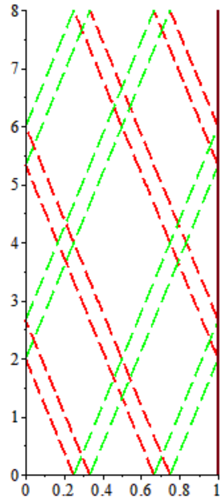


Tổng hợp (cộng) sóng tiến và sóng lùi (chỉ trong đoạn $[0, 1]$) ta thu được hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm như sau.



Quay lại sóng tiến và sóng lùi ta thấy chúng gián đoạn tại các điểm $\pm 1/3 + 2n, \pm 1/4 + 2n$ với $n \in \mathbb{Z}$, và không khả vi tại các điểm $\pm 2/3 + 2n, \pm 3/4 + 2n$ với $n \in \mathbb{Z}$. Do đó tập các điểm kỳ dị của nghiệm là các đoạn

$x \pm 2t = \pm 1/3 + 2n, x \pm 2t = \pm 1/4 + 2n, x \pm 2t = \pm 2/3 + 2n, x \pm 2t = \pm 3/4 + 2n$ với $0 < x < 1, t > 0, n \in \mathbb{Z}$.



Ví dụ 5 có điều kiện biên hai đầu cố định. Tiếp theo ta quan sát dao động với điều kiện biên khác như sau.

Ví dụ 6. *Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & \textit{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 & \textit{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = \chi_{[1/4,1/3]}(x) & \textit{khi } 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 4\chi_{[2/3,3/4]}(x) & \textit{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại một vài thời điểm.

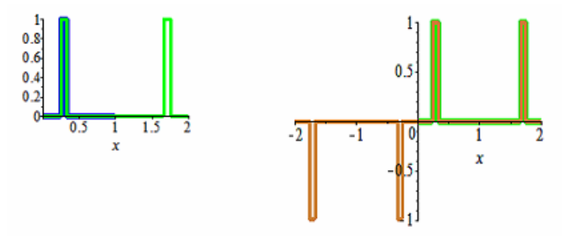
(c) Chứng minh rằng nghiệm tuần hoàn theo thời gian chu kỳ 2.

Lời giải. Ta có nghiệm của bài toán có dạng $u(x,t) = F(x-t) + G(x+t)$ với (chú ý tốc độ lan truyền $c = 1$)

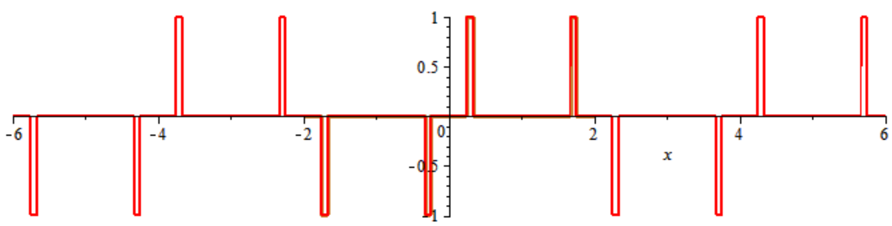
- sóng tiến $F(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^x g^*(s)ds$,
- sóng lùi $G(x) = \dfrac{f^*(x)}{2} + \dfrac{1}{2}\int_0^x g^*(s)ds$.

trong đó f^*, g^* là thác triển chẵn tại $x = 1$ và lẻ tại $x = 0$, tuần hoàn chu kỳ 4 của $u(x,0), u_t(x,0), 0 < x < 1$. Quá trình thác triển này diễn ra như sau.

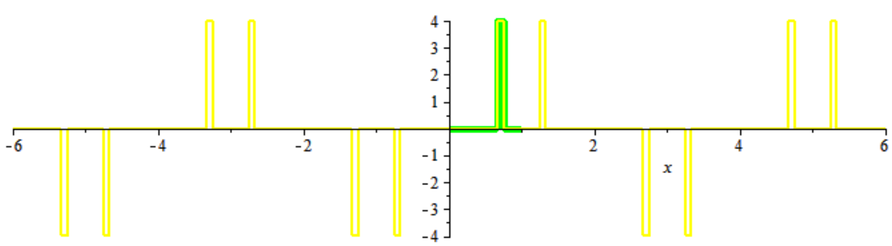
(-) thác triển $u(x,0), 0 < x < 1$, chẵn tại $x = 1$, rồi lẻ tại $x = 0$:



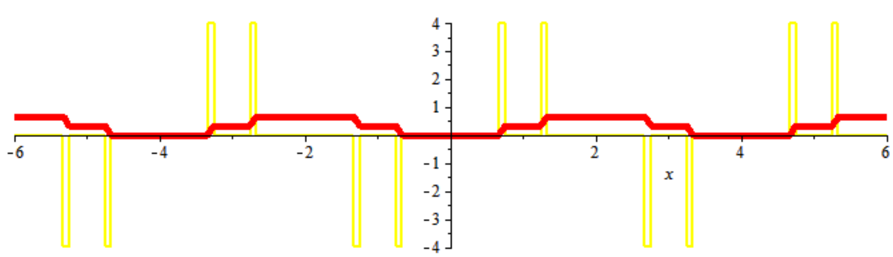
(-) thác triển tiếp tuần hoàn chu kỳ 4 ta được f^*:



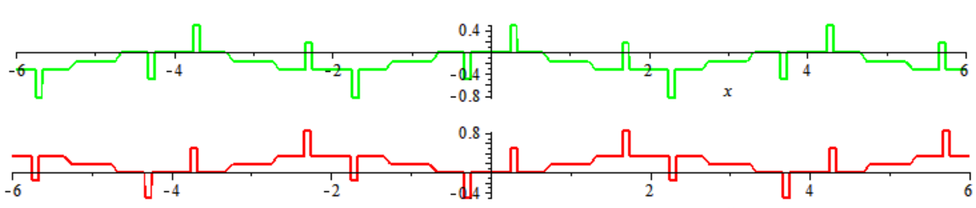
(-) thác triển $u_t(x,0), 0 < x < 1$, thành g^*:



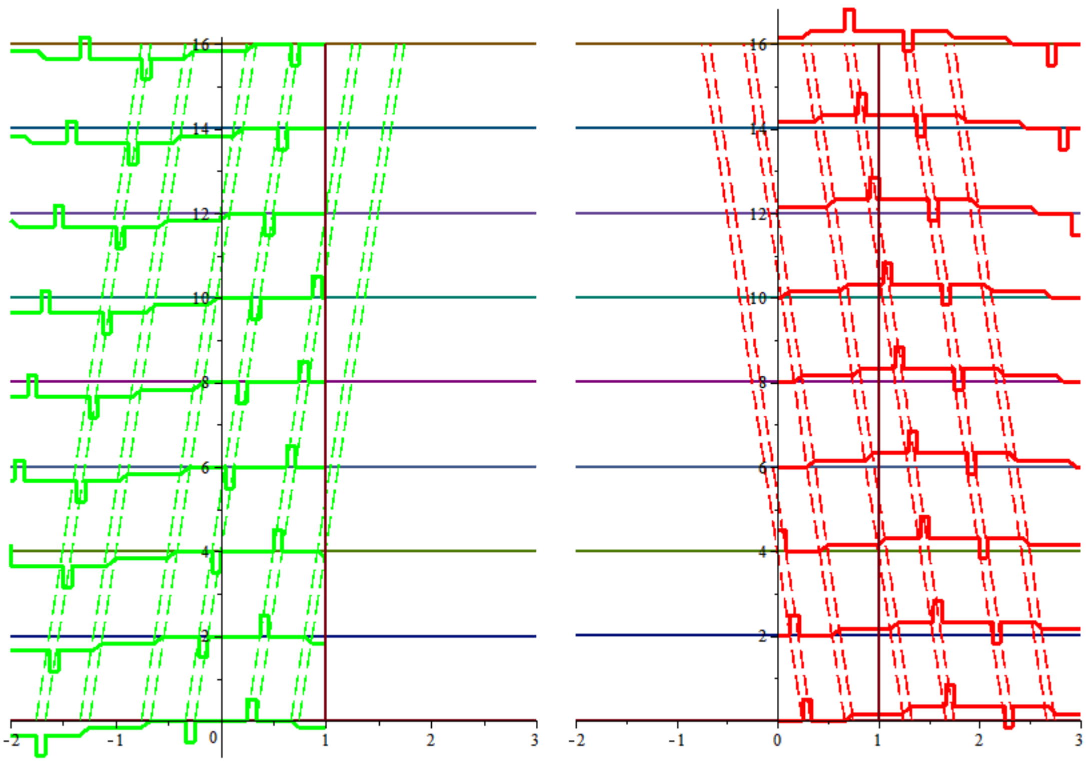
Tiếp đến ta lấy tích phân $\int_0^x g^*(s)ds$:



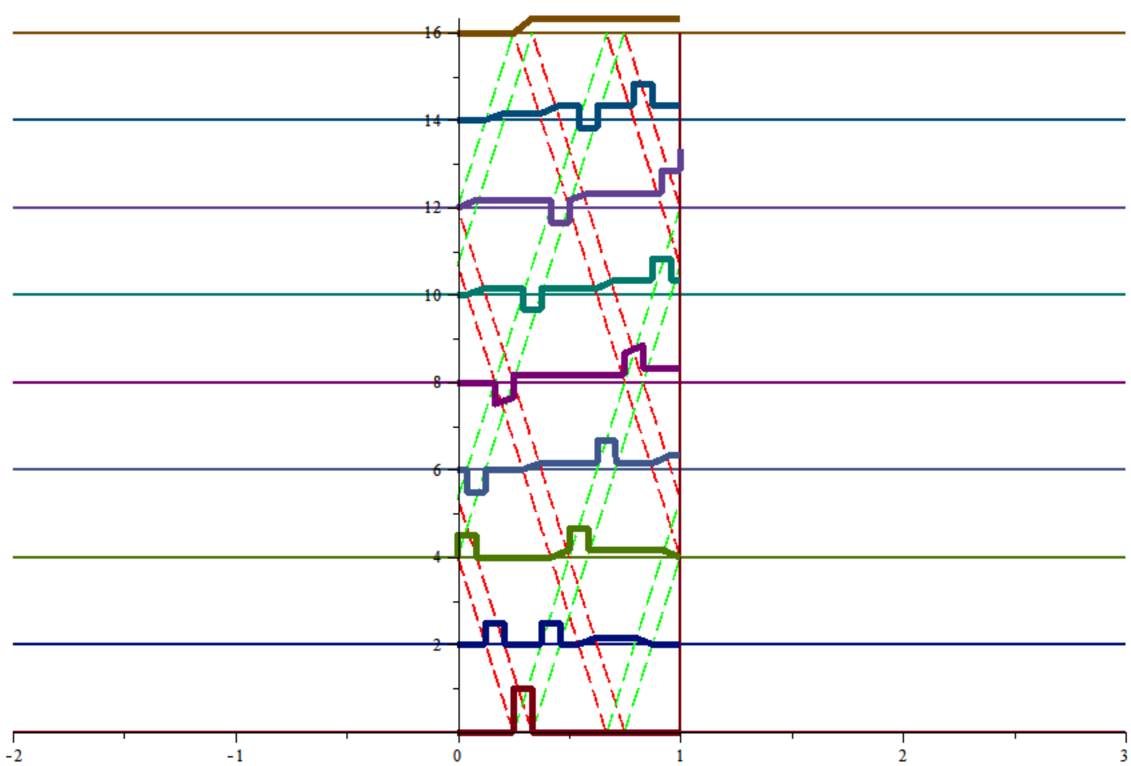
Khi đó ta có hình ảnh sóng tiến (màu xanh) và sóng lùi (màu đỏ) như sau.



Quá trình dịch chuyển sóng tiến sang phải, sóng lùi sang trái như sau.



Tổng hợp (cộng) sóng tiến và sóng lùi (chỉ trong đoạn $[0, 1]$) ta thu được hình ảnh nghiệm tại vài thời điểm như sau.



Tập điểm kỳ của Ví dụ 6 cũng giống Ví dụ 5.

Các bạn thử làm như các Ví dụ 5 và Ví dụ 6 khi điều kiện biên thay đổi: hai đầu tự do, hay đầu $x = 0$ tự do còn đầu $x = 1$ cố định. Dưới đây ta so sánh nghiệm của các bài toán biên - ban đầu với cùng điều kiện ban đầu như trên và với từng điều kiện biên theo thứ tự:

(i) hai đầu cố định;

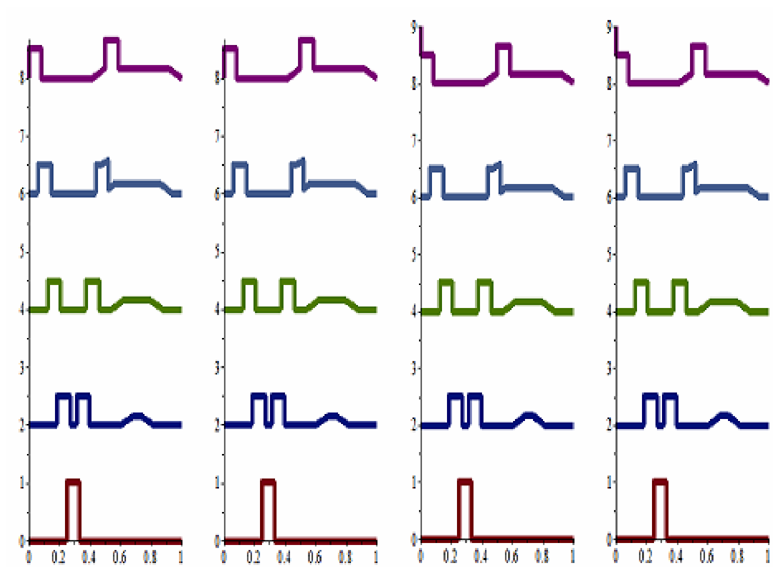
(ii) đầu $x = 0$ cố định, đầu $x = 1$ tự do;

(iii) đầu $x = 0$ tự do, đâu $x = 1$ cố định;

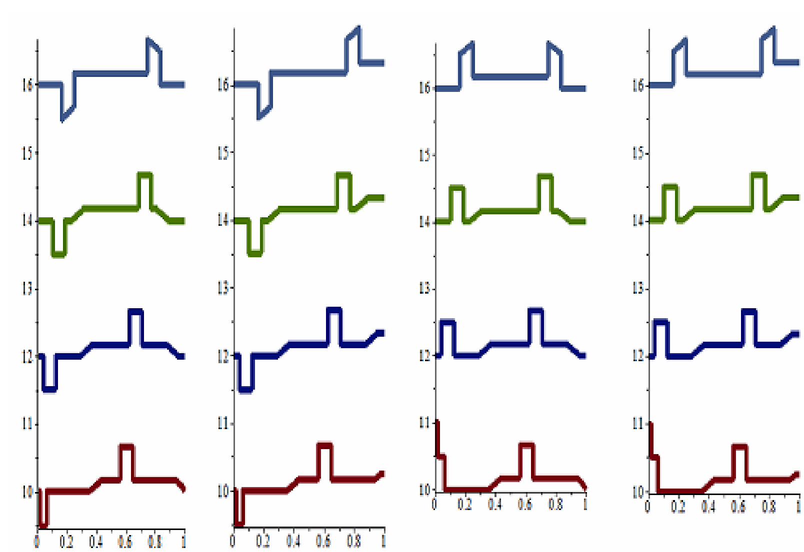
(iv) hai đầu tự do;

theo từng khoảng thời gian như sau.

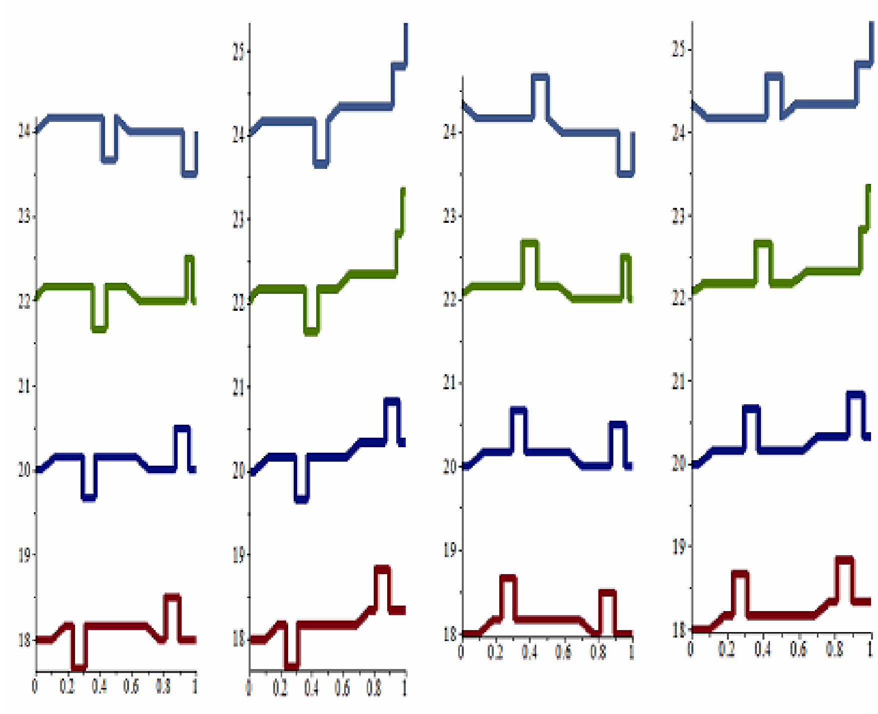
(-) Từ $t = 0$ đến $t = 1/4$:



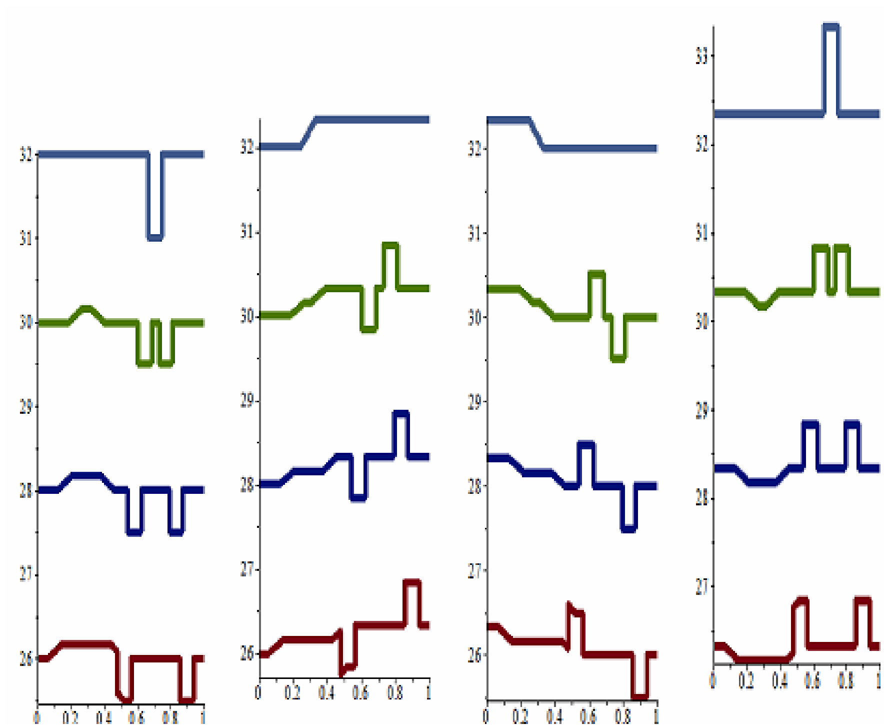
(-) Từ $t = 1/4$ đến $t = 1/2$:



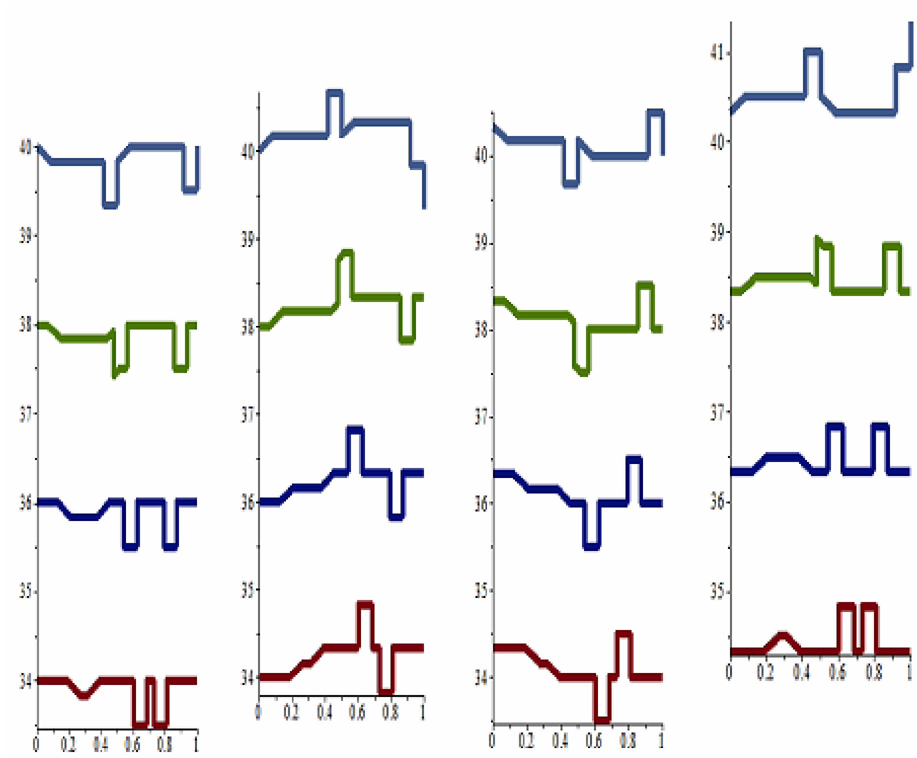
(-) Từ $t = 1/2$ đến $t = 3/4$:



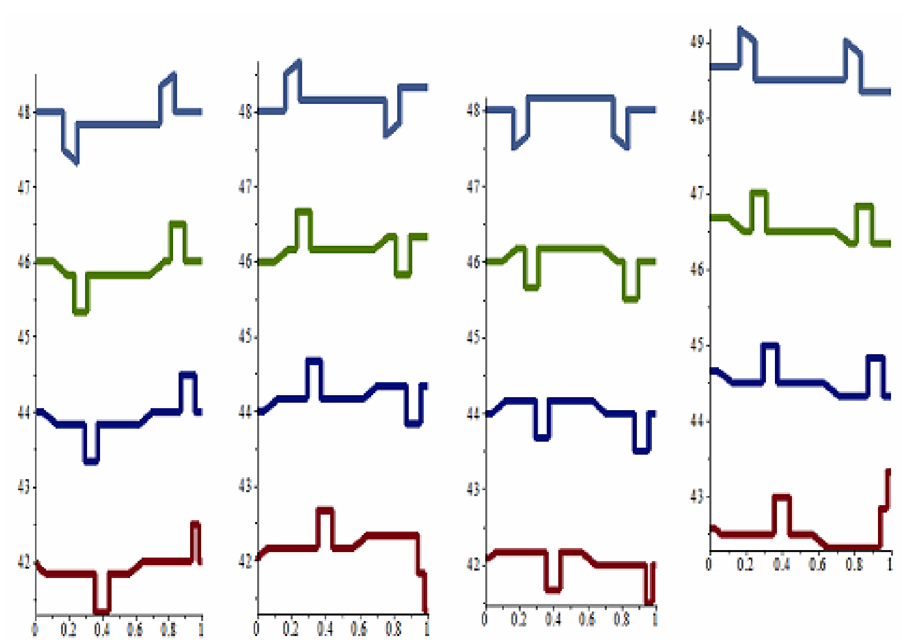
(-) Từ $t = 3/4$ đến $t = 1$:



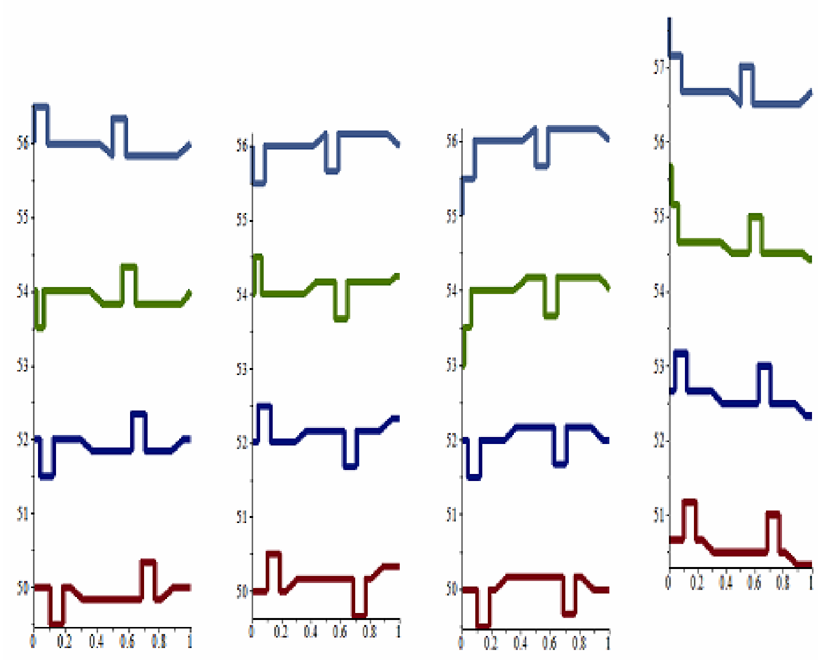
(-) Từ $t = 1$ đến $t = 5/4$:



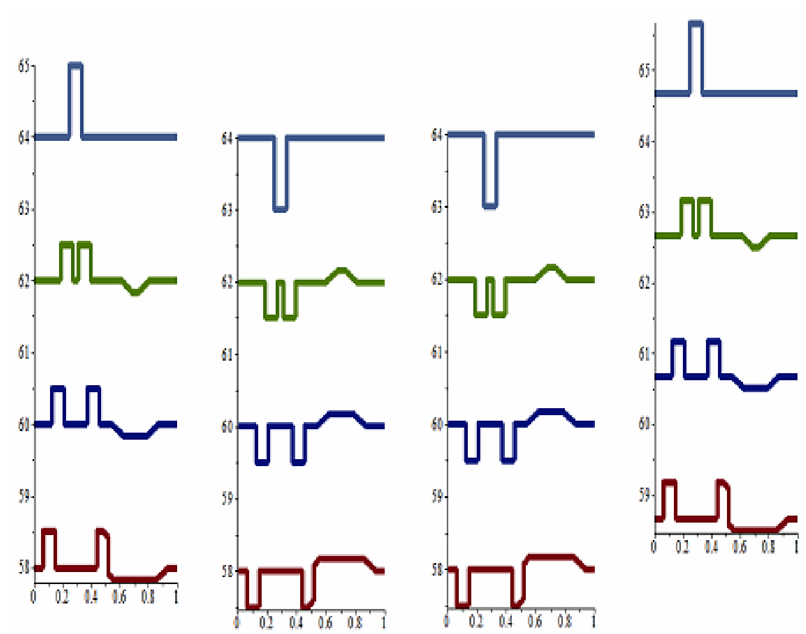
(-) Từ $t = 5/4$ đến $t = 6/4$:



(-) Từ $t = 6/4$ đến $t = 7/4$:



(-) Từ $t = 7/4$ đến $t = 8$:



Với trường hợp hai đầu cố định hay hai đầu tự do, quá trình trên khép kín một chu kỳ của các dao động này. Với hai trường hợp còn lại một đầu tự do, một đầu cố định, quá trình trên mới đi được một nửa chu kỳ của dao động. Các bạn thử hoàn thành nốt nửa chu kỳ còn lại.

Bài tập về công thức D'Alembert cho phương trình truyền sóng 1−d:

Bài 1. Xét bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0$$

với các điều kiện ban đầu

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < -1 \text{ hay } x > 0, \\ x & \text{khi } -1 \le x \le 0, \end{cases} \quad \text{và} \quad u(x,0) = 0.$$

(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$.

(c) Tìm tất cả các điểm mà hàm $u(x,1)$ không khả vi.

Bài 2. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & \text{khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = \chi_{[1,2]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \le x \le b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

(c) Tìm các điểm mà nghiệm $u(x,t)$ không liên tục. Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm $u(x,t)$.

Bài 3. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t) & \text{khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = x\chi_{[1,2]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

(a) Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/6, 1/3, 2/3$.

(c) Tìm các điểm mà nghiệm $u(x,t)$ không liên tục. Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm $u(x,t)$.

Bài 4. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện ban đầu $u(x,0) = \chi_{[-2,-1]}(x), u_t(x,0) = x\chi_{[0,1]}(x), -\infty < x < \infty$.

(a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

(c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Bài 5. (Bài 4.11 sách Pinchover-Rubinstein.) Áp suất $P(x,t)$ sinh ra từ một vụ nổ thỏa mãn phương trình truyền sóng

$$P_{tt}(x,t) = 16P_{xx}(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Tại thời điểm ban đầu $P(x,0) = 10\chi_{[-1,1]}(x), P_t(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x)$.

(i) Xác định sóng tiến, sóng lùi. Vẽ đồ thị $P(x,t)$ tại vài thời điểm.

(ii) Một tòa nhà ở vị trí $x_0 = 10$. Hãy xác định áp suất $P(10,t)$ tác động lên tòa nhà theo thời gian. Tìm thời điểm t_0 áp suất tác động lên tòa nhà đạt cực đại.

(iii) Giả sử tòa nhà trên chỉ chịu được áp suất tối đa $P = 6$. Hỏi tòa nhà có bị sập không?

Bài 6. Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = 0, t \geq 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \begin{cases} x(x-1) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{nếu } x > 1, \end{cases} \quad \text{và} \quad u_t(x,0) = 6.$$

(a) Dùng sóng tiến, sóng lùi vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/6, 1/3, 2/3$.

(b) Tìm tất cả các điểm mà hàm $u(x,1/3)$ khả vi.

Bài 7. Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng trên nửa đường thẳng

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên

$$u_x(0,t) = 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = f(x) = 0, u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

(a) Viết các thác triển chẵn $\bar{f}(x), \bar{g}(x)$ của các điều kiện ban đầu $f(x), g(x)$. Tính $\int\limits_0^x \bar{g}(y)dy$. Từ đó tính sóng tiến, sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$. Tìm tất cả các điểm mà $u(x,1)$ không có đạo hàm riêng theo x.

(c) Tính $\lim\limits_{t\to\infty} u(1,t)$.

Bài 8. Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên

$$u_x(0,t) = 0, t \geq 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \begin{cases} x(2-x) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{nếu } x > 2, \end{cases} \qquad \text{và} \qquad u_t(x,0) = 6.$$

(a) Dùng sóng tiến, sóng lùi vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/6, 1/3, 2/3$.

(b) Tìm tất cả các điểm mà hàm $u(x,1/3)$ khả vi.

(c) Tính $\lim\limits_{t\to\infty} u(1,t)$.

Bài 9. Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng trên nửa đường thẳng

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = f(x) = 0, u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{khi } x > 2. \end{cases}$$

(a) Viết các thác triển lẻ $\bar{f}(x), \bar{g}(x)$ của các điều kiện ban đầu $f(x), g(x)$. Tính $\int\limits_0^x \bar{g}(y)dy$. Từ đó tính sóng tiến, sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$. Tìm tất cả các điểm mà $u(x,1)$ không có đạo hàm riêng theo x.

(c) Tính $\lim\limits_{t\to\infty} u(1,t)$.

Bài 10. Xét bài toán biên hỗn hợp cho phương trình truyền sóng

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), 0 < x < +\infty, t > 0,$$

với điều kiện biên

$$u_x(0,t) = 0, t \geq 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0 \qquad \text{và} \qquad u_t(x,0) = \begin{cases} 2-x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

(a) Dùng sóng tiến, sóng lùi vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1, 2, 3$.

(b) Tìm tất cả các điểm mà hàm $u(x,1)$ khả vi.

(c) Tính $\lim_{t\to\infty} u(1/2, t)$.

Bài 11. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{khi } 0 < x < \infty, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{khi } 0 \leq x < \infty, \\ u_t(x,0) = \chi_{[1,2]}(x) & \text{khi } 0 \leq x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[1,2]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

(a) Thác triển chẵn các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/2, 1, 2$.

Bài 12. Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t), x > 0, t > 0,$$

với điều kiện biên Neumann $u_x(0,t) = 0$ và điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$$

(a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

(c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Bài 13. Xét bài toán Cauchy cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & \text{khi } 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(0,t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{khi } 0 < x < \infty, \\ u_t(x,0) = x\chi_{[1,2]}(x) & \text{khi } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

trong đó $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{còn lại.} \end{cases}$

(a) Thác triển lẻ các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/8, 1/4, 1/2$.

Bài 14. Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền sóng:

$$u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t), x > 0, t > 0,$$

với điều kiện biên Neumann $u_x(0,t) = 0$ và điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x\chi_{[2,3]}(x), x \geq 0.$$

(a) Xác định sóng tiến - sóng lùi.

(b) Vẽ đồ thị nghiệm $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

(c) Xác định tập điểm kỳ dị của nghiệm.

Bài 15. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{khi } 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x,0) = 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2 các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

(c) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đã cho.

Bài 16. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 4u_{xx}(x,t) & \text{khi } 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = x & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x,0) = 0 & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Thác triển chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2π các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên.

(b) Vẽ đồ thị $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = \pi/8, \pi/4, \pi/2$.

(c) Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đã cho.

Bài 17. Một đoạn dây chiều dài đơn vị dao động xung quanh vị trí cân bằng với tốc độ lan truyền 2. Nếu đặt hệ trục tọa độ sao cho một đầu đoạn dây ở gốc còn đầu kia có tọa độ $x = 1$ thì đầu tại gốc tự do còn đầu kia cố định. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái nghỉ và trạng thái ban đầu $f(x) = 1 - x$.

(a) Thiết lập bài toán biên hỗn hợp cho hàm dao động $u(x,t)$ của đoạn dây quanh vị trí cân bằng.

(b) Xác định sóng tiến - sóng lùi. Vẽ đồ thị của hàm dao động $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1$.

Bài 18. Xét bài toán biên hỗn hợp

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 \text{ trong } (0,1) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(1,t) &= 1 \text{ khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) &= 1 \text{ khi } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

(a) Tìm hàm $v(x,t) = h(x-2t)$ để $v(0,t) = v(1,t) = 1$. Đặt $w = u - v$ thì w thỏa mãn bài toán mới nào?

(b) Tính sóng tiến, sóng lùi cho bài toán cho w. Từ đó hãy vẽ đồ thị cho u tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 3/4$.

Bài 19. Xét bài toán biên hỗn hợp

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 \text{ trong } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 1 \text{ khi } t \geq 0, \\ u(x,0) = x, u_t(x,0) &= x \text{ khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

(a) Tìm một hàm $v(x,t) = ax + bt$ để $v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 1$. Đặt $w = u - v$ thì w thỏa mãn bài toán mới nào?

(b) Tính sóng tiến, sóng lùi cho bài toán cho w. Từ đó hãy vẽ đồ thị cho u tại các thời điểm $t = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

Bài 20. Một sợi dây chiều dài π có dao động tuân theo phương trình truyền sóng với tốc độ lan truyền 2. Hai đầu sợi dây cố định. Nếu đặt hệ tọa độ sao cho một đầu tại gốc còn đầu kia tại $x = \pi$ thì sợi dây bắt đầu từ trạng thái cân bằng và vận tốc ban đầu $g(x)$.

(a) Thiết lập bài toán cho hàm biên độ dao động $u(x,t)$ của sợi dây.

(b) Chứng minh rằng khi $T \geq \pi/2$ ta có

$$\int_0^\pi |g(x)|^2 dx \leq 8 \int_0^T |u_x(0,t)|^2 dt.$$

(c) Với $g(x) = \min\{x, \pi - x\}$, dùng sóng tiến - lùi vẽ $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$.

Bài 21. Một sợi dây chiều dài đơn vị có dao động tuân theo phương trình truyền sóng với tốc độ lan truyền 1. Nếu đặt hệ tọa độ sao cho một đầu tại gốc còn đầu kia tại $x = 1$ thì đầu tại gốc cố định còn đầu kia tự do. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái cân bằng và vận tốc ban đầu $g(x)$.

(a) Thiết lập bài toán cho hàm biên độ dao động $u(x,t)$ của sợi dây.

(b) Chứng minh rằng khi $T \geq 1$ ta có

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx \leq \int_0^T |u_x(0,t)|^2 dt.$$

(c) Với $g(x) = 1$, dùng sóng tiến - lùi vẽ $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = \frac{1}{2}, 1, 2$.

Bài 22. (Bài 15 trong mục Exercises 3.4, sách Asmar.) Một sợi dây chiều dài đơn vị có dao động tuân theo phương trình truyền sóng với tốc độ lan truyền 1. Nếu đặt hệ tọa độ sao cho một đầu tại gốc còn đầu kia tại $x = 1$ thì hai đầu sợi dây ở vị trí cố định. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái nghỉ và trạng thái ban đầu

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1/4, \\ -4(x - 1/2) & \text{khi } 1/4 < x \leq 1/2, \\ 0 & \text{khi } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Thiết lập bài toán cho hàm biên độ dao động $u(x,t)$ của sợi dây.

(b) Xác định sóng tiến - lùi vẽ $u(x,t)$ tại các thời điểm $t = 0, 1/4.1/2, 1$.

(c) Vị trí nào trên sợi dây vẫn còn ở vị trí cân bằng từ đầu cho đến thời điểm $t = 1/4$.

(d) Lấy điểm $x \in (1/2, 1)$. Xác định thời điểm đầu tiên mà sợi dây tại vị trí x rời khỏi vị trí cân bằng.

(e) Câu (c) và (d) sẽ thay đổi như nào nếu ta xét tốc độ lan truyền là $c > 0$ bất kỳ.

Một số bài tập lý thuyết.

Bài 1T. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả tích Riemann trên từng đoạn hữu hạn. Xét tích phân $F(x) = \int_0^x f(s)ds$. Chứng minh các khẳng định sau.

(i) Hàm F liên tục (tuyệt đối) trên $\mathbb{R}$ (từng đoạn hữu hạn).

(ii) Nếu f là hàm lẻ thì F là hàm chẵn.

(iii) Nếu f là hàm chẵn thì F là hàm lẻ.

(iv) Nếu f là hàm tuần hoàn chu kỳ L thì ta có F là hàm tuần hoàn chu kỳ L khi và chỉ khi $\int_0^L f(x)dx = 0$. Đặc biệt khi f là hàm lẻ, tuần hoàn thì F là hàm tuần hoàn.

Bài 2T. (Bài 13 trong mục Exercises 3.4, sách Asmar.) Một sợi dây chiều dài L có dao động tuân theo phương trình truyền sóng với tốc độ lan truyền c. Nếu đặt hệ tọa độ sao cho một đầu tại gốc còn đầu kia tại $x = L$ thì hai đầu sợi dây ở vị trí cố định. Sợi dây bắt đầu từ trạng thái $f(x)$ và vận tốc ban đầu $g(x)$. Chứng minh rằng nếu f, g đều đối xứng qua $x = L/2$, nghĩa là

$$f(L - x) = f(x), g(L - x) = g(x),$$

thì hàm dao động $u(x,t)$ của sợi dây thỏa mãn

$$u(x, t + L/c) = -u(x,t), \forall 0 < x < L, t > 0.$$

Bài 3T. Cho $f, g : [c,d] \to \mathbb{R}$. Chứng minh các khẳng định sau:

(i) Nếu đồ thị của f, g là các đoạn thẳng thì đồ thị của $af + bg$, với a, b là các hằng số thực, cũng là đoạn thẳng.

(ii) Nếu đồ thị của f là đoạn thẳng thì đồ thị của các hàm $f(ax), f(x-h,)$ với a, h là hằng số thực, cũng là đoạn thằng.

(iii) Nếu f là đa thức bậc 2 (trên toàn đường thẳng thực) thì đồ thị hàm $f(ax+h_1)-f(ax+h_2)$, với a, h_1, h_2 là các hằng số thực, là đường thẳng.