Toán rời rạc - problem set 2

1. Sử dụng công thức Stirling chứng minh rằng

$$\binom{n}{\alpha n} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi\alpha(1-\alpha)n}} 2^{nH(\alpha)},$$

trong đó

$$H(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha),\ 0 < \alpha < 1,\ \alpha n \in \mathbb{Z}.$$

2. Chứng minh rằng $\binom{n}{k} \le \binom{n}{k+1}, 1 \le k < \lceil n/2 \rceil,$ và $\binom{2k}{k} \le \binom{2k+2}{k+1},\ k \ge 1.$

3. Giả sử có 10 qủa bóng đỏ, 10 quả bóng xanh nước biển, và 10 quả xanh lá cây. Hỏi rằng có bao nhiêu cách sắp xếp 30 quả bóng này thành các dãy phân biệt theo màu sắc?

4. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000 sao cho không chia hết cho tất cả các số sau: $2, 3, 5, 7$?

5. Chứng minh rằng $e^x \ge x + 1$ với mọi $x \ge 0$.

6. Chứng minh rằng
   a. $n^\alpha = O(n^\beta)$ nếu $\alpha \le \beta$;
   b. $n^3 = O(3^n)$;
   c. $(\ln n)^c = O(n^\alpha)$ với mọi c và với mọi $\alpha > 0$.

7. Cho $X = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Có bao nhiêu phép thế σ trên X sao cho σ cố định duy nhất một điểm?

8. Tìm hệ số của đơn thức $x^{12}y^4z^7$ trong đa thức $(x + y + z)^{23}$.

9. Chứng minh rằng

$$\frac{2^n}{n+1} \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \le 2^n.$$

10. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000 sao cho không chia hết cho tất cả các số sau: $4, 6, 8$?