

# HỒ CÔNG XUÂN VŨ Y



THIỆT THỰC · HIỆU QUẢ · HÀI HÒA

---

## Hàm Biến Phức

---

Tiền Giang - 2012



# Hàm Biến Phức

---

Hồ Công Xuân Vũ Ý  
Trường Đại Học Tiền Giang

---

To my parents

# Mục lục

<b>I</b>	<b>Số phức</b>	<b>6</b>
§ 1	Số phức và các phép toán . . . . .	6
§ 2	Modulus và bất đẳng thức tam giác . . . . .	15
§ 3	Argument và căn bậc $n$ của số phức . . . . .	22
§ 4	Mặt cầu Riemann . . . . .	30
§ 5	Các khái niệm Topo trong mặt phẳng phức . . . . .	32
<b>II</b>	<b>Hàm biến số phức</b>	<b>37</b>
§ 1	Dãy và chuỗi số phức . . . . .	37
§ 2	Hàm số biến số phức . . . . .	50
§ 3	Liên tục và liên tục đều . . . . .	56
§ 4	Dãy hàm và chuỗi hàm . . . . .	60
§ 5	Chuỗi lũy thừa . . . . .	70
§ 6	Các phép tính trên chuỗi lũy thừa . . . . .	74
<b>III</b>	<b>Hàm giải tích</b>	<b>78</b>
§ 1	Đạo hàm . . . . .	78
§ 2	Hàm giải tích . . . . .	88
§ 3	Hàm mũ . . . . .	91
§ 4	Hàm lượng giác . . . . .	95
§ 5	Hàm hyperbolic . . . . .	98
<b>IV</b>	<b>Một số hàm sơ cấp khác và phép biến hình</b>	<b>100</b>
§ 1	Hàm Logarithm . . . . .	100
§ 2	Hàm lũy thừa và lũy thừa phức . . . . .	102
§ 3	Hàm tuyến tính và hàm $f(z) = 1/z$ . . . . .	105
§ 4	Hàm phân tuyến tính . . . . .	112
§ 5	Các ví dụ về sự biến hình . . . . .	120

§ 6	Khái niệm về diện Riemann . . . . .	125
<b>V</b>	<b>Lý thuyết tích phân</b>	<b>128</b>
§ 1	Đường cong . . . . .	128
§ 2	Tích phân đường . . . . .	136
§ 3	Nguyên hàm . . . . .	144
§ 4	Định lý Cauchy-Goursat . . . . .	148
§ 5	Công thức tích phân Cauchy . . . . .	162
§ 6	Tích phân loại Cauchy . . . . .	172
§ 7	Định lý giá trị trung bình và nguyên lý module cực đại . . . . .	177
§ 8	Định lý Liouville và định lý đại số cơ bản . . . . .	181
§ 9	Nguyên lý Montel . . . . .	183
<b>VI</b>	<b>Hàm điều hòa và hàm điều hòa dưới</b>	<b>188</b>
§ 1	Hàm điều hòa . . . . .	188
§ 2	Công thức Schwarz và công thức Poisson . . . . .	193
§ 3	Bài toán Dirichlet . . . . .	195
§ 4	Nguyên lý Harnack . . . . .	202
§ 5	Hàm điều hòa dưới . . . . .	206
§ 6	Tiêu chuẩn điều hòa dưới . . . . .	209
§ 7	Định lý Hartogs . . . . .	213
<b>VII</b>	<b>Lý thuyết chuỗi và lý thuyết thặng dư</b>	<b>216</b>
§ 1	Chuỗi Taylor . . . . .	216
§ 2	Chuỗi Laurent . . . . .	225
§ 3	Các loại điểm . . . . .	234
§ 4	Thặng dư và cách tính thặng dư . . . . .	247
<b>VIII</b>	<b>Ứng dụng lý thuyết thặng dư</b>	<b>257</b>
§ 1	Tính tích phân suy rộng . . . . .	257
§ 2	Tính tích phân suy rộng có sin hoặc cos . . . . .	264
§ 3	Tính tích phân xác định chứa sin và cos . . . . .	270
§ 4	Đường bị khoét lỗm . . . . .	272
§ 5	Tích phân theo đường phân nhánh . . . . .	276
§ 6	Nguyên lý argument và định lý Rouché . . . . .	284
<b>IX</b>	<b>Ánh xạ bảo giác</b>	<b>293</b>
§ 1	Ý nghĩa hình học của đạo hàm . . . . .	293
§ 2	Ánh xạ bảo giác . . . . .	295

§ 3	Bổ đề Schwarz . . . . .	300
§ 4	Định lý ánh xạ Riemann . . . . .	302
§ 5	Bài toán biểu diễn bảo giác . . . . .	306
<b>X</b>	<b>Tích vô hạn</b>	<b>308</b>
§ 1	Tích số vô hạn . . . . .	308
§ 2	Tích vô hạn hàm phức . . . . .	312
§ 3	Dạng chính tắc Weierstrass . . . . .	320
§ 4	Genus của hàm giải tích . . . . .	323
§ 5	Hàm gamma . . . . .	327
	<b>Tra cứu</b>	<b>337</b>

# Chương I

## Số phức

Ta biết rằng trường số thực  $\mathbb{R}$  nhận được bằng cách làm “đầy” trường hữu tỷ  $\mathbb{Q}$  mà bản thân  $\mathbb{Q}$  lại được xây dựng từ vành số nguyên  $\mathbb{Z}$ . Việc làm đầy xuất phát từ sự nghiên cứu các phương trình đại số với hệ số hữu tỷ và giới hạn của dãy các số hữu tỷ. Tuy nhiên, trường  $\mathbb{R}$  vẫn không đầy đủ, bởi vì ngay cả phương trình đơn giản  $x^2 + 1 = 0$  cũng không có nghiệm trong  $\mathbb{R}$ . Một cách tổng quát hơn, trong số thực không phải mọi số đều có căn bậc chẵn và phương trình bậc lớn hơn một không phải bao giờ cũng có nghiệm. Bên cạnh đó, trong giải tích nếu chỉ giới hạn trong  $\mathbb{R}$  người ta không thể giải thích được vì sao hàm  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  không thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa trên toàn bộ đường thẳng thực.\*

Với lý do trên đưa đến sự cần thiết mở rộng trường số thực. Cụ thể là cần tìm kiếm một trường mới rộng hơn mà trong trường hợp riêng nó chính là trường số thực với các phép toán thông thường (hay trường số thực  $\mathbb{R}$  là một trường con của nó).

### § 1 Số phức và các phép toán

#### Định nghĩa số phức

Trong đại số người ta đã xây dựng trường số phức một cách chi tiết khắc phục những hạn chế của trường số thực. Chúng ta chỉ nêu một số ý đặc trưng ở đây. **Số phức** có thể được định nghĩa như là một cặp số thực có thứ tự  $(x, y)$ . Người ta thường viết số phức bởi các chữ  $z$  và  $w$ . Như vậy, với

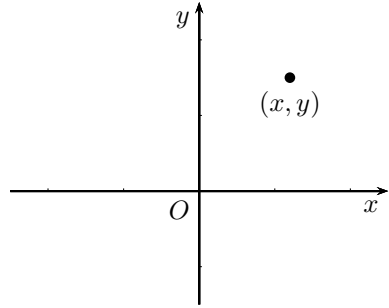
---

Tập bài giảng này được soạn theo [9, 6, 7] và tham khảo thêm [3, 2, 4]

\*Bạn đọc có thể tham khảo giải thích thú vị của [8, trang 212-217]



$z = (x, y)$  và  $w = (x', y')$ , ta có  $z = w$  khi và chỉ khi  $x = x'$  và  $y = y'$ . Mặt khác, cặp số  $(x, y)$  có thể được hiểu là một điểm trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Khi đó, nếu xem  $(x, y)$  là một số phức thì mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  sẽ được gọi là *mặt phẳng phức*  $Oxy$  và còn được ký hiệu là  $(z)$  hoặc  $\mathbb{C}$ . Ta có tập hợp số phức

Hình I.1: Mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$ 

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Xét số phức  $z = (x, y)$ . Ta gọi  $x$  được gọi là **phần thực** của số phức  $z$  và ký hiệu là  $\text{Re}z$  còn  $y$  được gọi là **phần ảo** của  $z$  và ký hiệu là  $\text{Im}z$ . Trong mặt phẳng phức, trục hoành còn được gọi là trục thực và trục tung còn được gọi là trục ảo. Nếu xem trục  $Ox$  là một đường thẳng thực, thì mỗi số thực  $x$  ứng với điểm  $(x, 0)$  trên trục thực  $Ox$ . Do đó, tập hợp số thực là một tập con của tập số phức, và số phức  $z = (x, 0)$  được gọi là số thực và được đồng nhất với  $x$ , nghĩa là  $x \equiv (x, 0)$  (Xem thêm bài tập 16). Số phức  $z = (0, y)$  được gọi là số **thuần ảo**; đặc biệt  $(0, 1)$  được gọi là **đơn vị ảo** và ký hiệu là  $i$ , nghĩa là  $i = (0, 1)$ . Như vậy  $0 = (0, 0)$  là số duy nhất vừa là số thực vừa là số thuần ảo.

Cho số phức  $z = (x, y)$  số phức  $(x, -y)$  được gọi là **số phức liên hợp** của số phức  $z$  và ký hiệu là  $\bar{z}$ . Dễ dàng kiểm tra được

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Hơn nữa, ta cũng thấy  $z$  là một số thực khi và chỉ khi nó bằng với liên hợp của nó.

## Các phép toán trên số phức

**Tổng** của hai số phức  $z_1 = (x_1, y_1)$  và  $z_2 = (x_2, y_2)$  là số phức

$$(1.1) \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

và **tích** của chúng là số phức

$$(1.2) \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$



Với  $z = (x, y) = x + iy$ , ta ký hiệu  $-z = (-x, -y) = -x - iy$ , và nếu  $z \neq 0$  ký hiệu  $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ . Từ đó ta định nghĩa **phép trừ** và **phép chia** như sau.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}, \quad (z_2 \neq 0).$$

Như vậy, để tìm thương của  $\frac{z_1}{z_2}$  với  $z_2 \neq 0$  ta nhân  $z_1$  với nghịch đảo  $z_2^{-1}$  của  $z_2$ . Giả sử  $z_1 = x_1 + iy_1$  và  $z_2 = x_2 + iy_2$ , ta có

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= (x_1 + iy_1) \left( \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Do đó, để tính được thương ta phải nhớ công thức nghịch đảo của số phức. Tuy nhiên, có một cách đơn giản để giúp ta thực hiện dễ dàng phép chia trên là nhân tử và mẫu với số liên hợp của mẫu:

$$(1.6) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

**1.7 Thí dụ.** Viết lại số phức  $\frac{1+i}{1+i\sqrt{2}}$  ở dạng đại số. Ta có

$$\frac{1+i}{1+i\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + i \frac{1-\sqrt{2}}{3}. \quad \square$$

Cũng như trong tập số thực chúng ta có một số quy tắc tính toán cho các phép cộng và nhân đối với các số phức trong định lý sau.

**1.8 Định lý.** Với các số phức  $z_1, z_2, z_3$  và  $z_4$ , ta có

(1) nếu  $z_1 z_2 = 0$  thì  $z_1 = 0$  hay  $z_2 = 0$ .

$$(2) \quad \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \quad (z_3 \neq 0).$$

$$(3) \quad \frac{1}{z_1 z_2} = (z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1} = \left(\frac{1}{z_1}\right) \left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0).$$

$$(4) \quad \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right) \left(\frac{z_2}{z_4}\right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0).$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

Nhờ có tính chất (6) ta có được định nghĩa sau. **Lũy thừa bậc  $n$  của số phức  $z$**  là tích  $n$  lần của số phức  $z$ , và ký hiệu  $z^n$ ,

$$(1.9) \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ lần}}.$$

Chúng ta chú ý rằng  $i^n$  chỉ có bốn giá trị:  $1, i, -1, -i$ . Chúng tương ứng với giá trị của  $n$  mà nó chia cho 4 lần lượt có dư là  $0, 1, 2, 3$ .

**1.10 Thí dụ.** Với  $z = x + iy$ , ta có

$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$z^3 = (x^2 - y^2 + i2xy)(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

$$\begin{aligned} z^4 &= (x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3))(x + iy) \\ &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i4xy(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

$\square$

Ta có thể chứng minh được các phép toán của số phức có các tính chất trong định lý sau.

**1.11 Định lý.** (1)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$(2) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$(3) \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$$

$$(4) \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

$$(5) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ với } z_2 \neq 0.$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

Bằng quy nạp chúng ta dễ dàng chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n \\ \overline{z_1 z_2 \cdots z_n} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n \end{aligned}$$

Một cách tổng quát, cho  $R(a, b, c, \dots)$  ký hiệu một biểu thức hữu tỉ các phép toán áp dụng cho các số phức  $a, b, c, \dots$ ; khi đó

$$\overline{R(a, b, c, \dots)} = R(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots).$$

Như là một ứng dụng, xét phương trình

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0.$$

Nếu  $\xi$  là một nghiệm của phương trình trên, thì  $\bar{\xi}$  là một nghiệm của phương trình

$$\bar{c}_0 z^n + \bar{c}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{c}_{n-1} z + \bar{c}_n = 0.$$

Đặc biệt, nếu các hệ số của phương trình là thực thì  $\xi$  và  $\bar{\xi}$  là các nghiệm của cùng một phương trình, và chúng ta có một định lý quen thuộc: *các nghiệm không thực của một phương trình với các hệ số thực lập thành từng cặp nghiệm liên hợp*.

## Căn bậc hai

Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng căn bậc hai của một số phức có thể được biểu diễn một cách tường minh. Với số phức  $\alpha + i\beta$  cho trước, ta tìm số phức  $x + iy$  sao cho

$$(x + iy)^2 = \alpha + i\beta.$$

Điều này tương đương với việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Từ hai phương trình trên ta có  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Do đó, ta có

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

ở đây là căn bậc hai thực cho một số không âm. Kết hợp với phương trình đầu ta được

$$(1.12) \quad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{cases}$$

Ta nhận thấy các đại lượng của vế phải là dương hoặc bằng 0 không phụ thuộc vào dấu của  $\alpha$ .

Nói chung, các phương trình trong (1.12) cho hai giá trị  $x$  đối nhau và hai giá trị  $y$  đối nhau. Do  $2xy = \beta$  ta không thể có 4 sự kết hợp của các

giá trị  $x$  và  $y$ . Do đó, các giá trị của  $x$  và  $y$  được lấy phụ thuộc vào dấu của  $\beta$ . Khi  $\beta \neq 0$  ta được

$$(1.13) \quad \sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right).$$

Khi  $\beta = 0$ , ta có

$$(1.14) \quad \sqrt{\alpha + i0} = \begin{cases} \pm \sqrt{\alpha} & \text{khi } \alpha \geq 0 \\ \pm i\sqrt{-\alpha} & \text{khi } \alpha < 0 \end{cases}$$

Các căn ở vế phải là căn bậc hai dương của số thực không âm.

Như vậy, chúng ta tìm được căn bậc hai của một số dương có hai giá trị đối nhau. Chúng trùng nhau khi  $\alpha + i\beta = 0$ . Chúng là thực khi  $\alpha \geq 0$  và  $\beta = 0$ . Chúng là thuần ảo khi  $\alpha \leq 0$  và  $\beta = 0$ .

**1.15 Thí dụ.** Ta tính các căn  $\sqrt{-i}$  và  $\sqrt[4]{-i}$ .

$$\sqrt{-i} = \pm \left( \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \mp i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nếu ta hiểu  $\sqrt[4]{-i} = \sqrt{\sqrt{-i}}$  thì nó có 4 giá trị; áp dụng kết quả vừa tìm được và công thức (1.13) bốn giá trị cần tìm là

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \pm \left( \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} \right) \\ &= \pm \left( \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right) \\ \sqrt{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \pm \left( \sqrt{\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2}} \right) \\ &= \pm \left( \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) \end{aligned} \quad \square$$

## Xây dựng trường số phức

Trong phần này chúng tôi trình bày sơ lược về việc xây dựng trường số phức. Ta đã biết phương trình  $x^2 + 1 = 0$  không có nghiệm trong  $\mathbb{R}$ , vì  $\alpha^2 + 1$  luôn dương. Giả sử rằng ta tìm được một trường  $\mathbb{F}$  chứa  $\mathbb{R}$  như là

một trường con mà trong  $\mathbb{F}$  phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có nghiệm. Ký hiệu một nghiệm là  $i$ . Khi đó,  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ , và phương trình  $x^2 + 1$  có đúng hai nghiệm trong  $\mathbb{F}$  là  $i$  và  $-i$ . Đặt  $\mathbb{C}$  là một tập con của  $\mathbb{F}$  bao gồm tất cả các phần tử mà nó biểu diễn ở dạng  $\alpha + i\beta$  với các số thực  $\alpha$  và  $\beta$ . Biểu diễn này là duy nhất bởi vì  $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$  suy ra  $\alpha - \beta' = i(\beta' - \beta)$ ; do đó  $(\alpha - \alpha')^2 = -(\beta' - \beta)^2$ , và nó chỉ xảy ra khi  $\alpha = \alpha'$  và  $\beta = \beta'$ .

Tập con  $\mathbb{C}$  là một trường con của  $\mathbb{F}$ . Thật sự chúng ta có thể kiểm chứng  $\mathbb{C}$  là một trường như trong Định lý 1.3. Hơn thế nữa, cấu trúc của  $\mathbb{C}$  là độc lập đối với  $\mathbb{F}$ . Bởi vì nếu  $\mathbb{F}'$  là một trường khác chứa  $\mathbb{R}$  và có  $i'$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 = 0$ , thì tập con tương ứng  $\mathbb{C}'$  được tạo thành bởi tất cả phần tử dạng  $\alpha + i'\beta$ . Có một song sánh giữa  $\mathbb{C}'$  và  $\mathbb{C}$  mà nó tương ứng  $\alpha + i'\beta$  và  $\alpha + i\beta$ , và sự tương ứng này rõ ràng là một đẳng cấu trường. Điều đó chứng tỏ  $\mathbb{C}'$  và  $\mathbb{C}$  đẳng cấu.

Bây giờ chúng ta định nghĩa trường số phức là trường con  $\mathbb{C}$  của một trường tùy ý  $\mathbb{F}$ . Chúng ta vừa thấy rằng sự lựa chọn cho  $\mathbb{F}$  không tạo ra sự khác biệt cho  $\mathbb{C}$ , nhưng chúng ta chưa chứng tỏ sự tồn tại một trường  $\mathbb{F}$ . Để chứng tỏ rằng định nghĩa của chúng ta có nghĩa chúng ta chỉ cần chỉ ra một trường  $\mathbb{F}$  mà nó chứa  $\mathbb{R}$  (hay có một trường con đẳng cấu với  $\mathbb{R}$ ) và phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có nghiệm trong  $\mathbb{F}$ .

Có nhiều cách xây dựng một trường  $\mathbb{F}$  như thế. Sau đây là phương pháp đơn giản nhất và cũng trực tiếp nhất: Xét tất cả các biểu thức dạng  $\alpha + i\beta$  ở đây  $\alpha$  và  $\beta$  là các số thực trong khi dấu  $+$  và ký hiệu  $i$  thực chất là những ký hiệu thuần túy ( $+$  không biểu thị phép cộng, và  $i$  không là phần tử của trường  $\mathbb{R}$ ). Các biểu diễn này thành lập một trường  $\mathbb{F}$  với phép cộng và nhân được xác định bởi

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

(các phép toán trong dấu ngoặc ở vế phải là trong  $\mathbb{R}$ , cho nên phải chú ý hai nghĩa khác nhau của dấu  $+$  trong các biểu thức trên). Các phần tử có dạng đặc biệt  $\alpha + i0$  thành lập một trường con đẳng cấu với  $\mathbb{R}$ , và phần tử  $0 + i1$  thỏa phương trình  $x^2 + 1 = 0$ , thực sự chúng ta thu được  $(0 + i1)^2 = -(1 + i0)$ . Trường  $\mathbb{F}$  thỏa các tính chất yêu cầu; hơn nữa nó trùng với trường con tương ứng  $\mathbb{C}$  bởi vì ta có thể viết

$$\alpha + i\beta = (\alpha + i0) + \beta(0 + i1).$$

Sự tồn tại của trường số phức được chứng minh, và chúng ta quay trở lại

ký hiệu đơn giản hơn  $\alpha + i\beta$  ở đây dấu  $+$  để chỉ phép cộng trong  $\mathbb{C}$  và  $i$  là một nghiệm của phương trình  $x^2 + 1 = 0$ .

Với việc nhìn lại, để đi đến quy tắc cộng và nhân của các số phức chúng ta chỉ dùng  $i^2 = -1$ . Do  $-i$  cũng có tính chất như thế, nên tất cả những quy tắc về các phép toán vẫn còn đúng nếu thay  $i$  bởi  $-i$  ở mọi nơi. Điều này đã được nêu trong Định lý 1.11. Phép biến đổi thay thế  $\alpha + i\beta$  bởi  $\alpha - i\beta$  được gọi là *phép lấy liên hợp phức*.

## Bài tập

1) Thực hiện các phép tính sau đây (viết kết quả ở dạng đại số)

$$(a) (1+i)(2-i\sqrt{2}) \quad (b) (3+i\sqrt{3})^2 \quad (c) \overline{(2+i)^2}$$

$$(d) \frac{1-i}{1+2i} \quad (e) \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{1}{1+i} \quad (f) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$$

2) Tính các biểu thức sau: (a)  $(1+2i)^3$  (b)  $(1+i)^n + (1-i)^n$ .

3) Nếu  $z = x + iy$ , tìm phần thực và phần ảo của: (a)  $\frac{z-1}{z+1}$  (b)  $\frac{1}{z^2}$

4) Chứng minh rằng

$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \quad \text{và} \quad \left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$$

với mọi tổ hợp của các dấu.

5) Tìm số thực  $a$  và  $b$  sao cho  $(a+ib)^2 = -8+6i$ .

6) Tìm các căn (a)  $\sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}$  (b)  $\sqrt{2-i}$  (c)  $\sqrt{i}$  (d)  $\sqrt[4]{i}$ .

7) Chứng minh các tính chất trong Định lý 1.3.

8) Chứng minh các tính chất trong Định lý 1.11.

9) Giải phương trình  $z^2 + z + 1 = 0$  theo  $z = x + iy$  bằng cách viết lại  $(x+iy)^2 + (x+iy) + 1 = 0$ .

10) Giải phương trình  $z^2 + 2(1+2i)z - 5 + 2i = 0$ .



11) Tính tổng  $1 + z + z^2 + \dots + z^n$ .

12) Cho  $P(z)$  là một đa thức bậc  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng  $P(z) = (z - z_0)Q(z) + P(z_0)$ , trong đó  $Q(z)$  là một đa thức bậc  $n - 1$ .

13) Chứng minh rằng số phức  $z$  là số thực hay thuần ảo khi và chỉ khi  $(\bar{z})^2 = z^2$ .

14) Hãy tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức thỏa  $(\bar{z} - i) = 2$ .

15) Tìm họ đường cong trong mặt phẳng phức được cho bởi phương trình

$$(a) \operatorname{Re} \frac{1}{z} = C \quad (b) \operatorname{Im} \frac{1}{z} = C \quad (c) \operatorname{Re} z^2 = C \quad (d) \operatorname{Im} z^2 = C$$

trong đó  $C$  là hằng số thực.

16) Chứng minh rằng ánh xạ  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  xác định bởi  $f(x) = (x, 0)$  là một đơn cấu đối với trường.

17) Cho  $P(z)$  là một đa thức có các hệ số là số thực. Chứng minh rằng nếu  $z_0$  là nghiệm của đa thức thì  $\bar{z}_0$  cũng là nghiệm của đa thức.

18) Tìm điều kiện để phương trình  $az + b\bar{z} + c = 0$  có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm ấy. Khi nào phương trình này được biểu diễn bởi đường thẳng.

19) Bằng việc tính toán trực tiếp kiểm chứng lại rằng giá trị của  $\frac{z}{z^2 + 1}$  tại hai số phức liên hợp  $z = x + iy$  và  $\bar{z} = x - iy$  là liên hợp nhau.

20) Chứng minh rằng tập tất cả ma trận có dạng đặc biệt  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  cùng với phép cộng và phép nhân ma trận đẳng cấu với trường số phức.

## § 2 Modulus và bất đẳng thức tam giác

Trong tập số thực  $\mathbb{R}$  ta có khái niệm giá trị tuyệt đối của mỗi số thực, nó đóng một vai trò đặc biệt quan trọng trong giải tích thực. Khái niệm này được mở rộng cho trường số phức  $\mathbb{C}$  mà các tính chất vẫn được giữ nguyên.

## Modulus

Với mỗi  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , đặt  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ , và gọi là **modulus** của  $z$ . Như vậy,  $|z|$  chính là khoảng cách của  $(x, y)$  đến gốc tọa độ  $O(0, 0)$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

Ta biết rằng phương trình của đường tròn có tâm là  $(0, 0)$  có bán kính  $r$  trong mặt phẳng  $Oxy$  là  $x^2 + y^2 = r^2$  hay  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Nếu xem  $Oxy$  là mặt phẳng phức và  $z = (x, y)$  thì phương trình đường tròn tâm  $O$  bán kính  $r$  được viết lại là  $|z| = r$ . Lập luận tương tự như trên, ta có *phương trình của đường tròn tâm  $z_0 = (x_0, y_0)$  bán kính  $r$  là  $|z - z_0| = r$* .

Các tính chất về modulus trong định lý sau có thể chứng minh một cách dễ dàng.

**2.1 Định lý.** Với  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , ta có

$$(1) \quad |z| \geq 0 \text{ và } |z| = 0 \text{ khi và chỉ khi } z = 0$$

$$(2) \quad |z| \geq |\operatorname{Re} z|$$

$$(3) \quad |z| \geq |\operatorname{Im} z|$$

$$(4) \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$(5) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$(6) \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(7) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ với } z_2 \neq 0.$$

*Chứng minh.* Chúng tôi sẽ trình bày chứng minh tính chất (6), các tính chất còn lại xin dành cho bạn đọc. Với  $z_1 = x_1 + iy_1$  và  $z_2 = x_2 + iy_2$ , ta có

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)|^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \\ &= x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

Ta có thể chứng minh đẳng thức ngắn gọn như sau  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$ .  $\square$

Bằng qui nạp chúng ta có thể mở rộng tính chất (6) thành tích hữu hạn

$$(2.2) \quad |z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|.$$

**2.3 Thí dụ.** Với  $z_1$  và  $z_2$  là hai số phức tùy ý, chứng minh rằng  $|z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ .

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} |z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 \bar{z}_2 + 1)(\overline{z_1 \bar{z}_2 + 1}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 \bar{z}_2 + 1)(\bar{z}_1 z_2 + 1) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + 1 \\ &\quad + z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &= (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) \quad \square \end{aligned}$$

## Bất đẳng thức tam giác

**2.4 Định lý. (Bất đẳng thức tam giác)** Với mọi số phức  $z_1$  và  $z_2$ , ta có bất đẳng thức

$$(2.5) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa của modulus ta có thể viết

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|.$$

Do đó,

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Hơn nữa, ta nhận thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$ , nghĩa là tích  $z_1 \bar{z}_2$  là một số thực không âm. Vậy khi một trong hai số bằng không đẳng thức xảy ra, và khi cả hai khác không đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 \bar{z}_2 > 0$  hay  $\frac{z_1}{z_2} > 0$ , nghĩa là tỷ số của hai số là dương. □

Chú ý trong chứng minh bất đẳng thức tam giác ta có được đẳng thức

$$(2.6) \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

Hơn nữa, bằng qui nạp toán học bất đẳng thức tam giác có thể được mở rộng cho tổng hữu hạn bất kỳ của các số phức

$$(2.7) \quad |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Bây giờ ta xét dấu đẳng thức trên xảy ra khi nào. Giả sử dấu đẳng thức (2.7) xảy ra, ta có thể loại bỏ các số bằng không và giả sử rằng các số khác không và có nhiều hơn hai số hạng. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| &= |z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \\ &\leq |z_1 + z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| \end{aligned}$$

Do đó, các dấu bằng ở trên phải xảy ra, và ta có  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ . Khi đó, tỷ số giữa  $z_1$  và  $z_2$  là một số dương. Như vậy, ta đi đến kết luận rằng nếu đẳng thức xảy ra ở (2.7) thì tỷ số hai số hạng bất kỳ khác không là một số dương. Ngược lại, giả sử có một số hạng khác không, gọi nó là  $z_1$ , và tỷ số giữa các số hạng còn lại với  $z_1$  là một số thực không âm. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| &= |z_1| \cdot \left| 1 + \frac{z_2}{z_1} + \cdots + \frac{z_n}{z_1} \right| \\ &= |z_1| \cdot \left| 1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} + \cdots + \frac{|z_n|}{|z_1|} \right| \\ &= |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|. \end{aligned}$$

Tóm lại ta có được: *Đẳng thức xảy ra ở (2.7) khi và chỉ khi tỷ số hai số khác không bất kỳ là dương.*

**2.8 Hệ quả.** Với mọi số phức  $z_1$  và  $z_2$ , ta có  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

*Chứng minh.* Theo bất đẳng thức tam giác ta có  $|z_1 - z_2| + |z_2| \geq |z_1|$  suy ra  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ . Từ đó suy ra  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$ . Vậy  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .  $\square$

**2.9 Thí dụ.** Với  $|z| = 3$ , ta có  $\frac{9}{17} \leq \left| \frac{2z^2 + 3z}{4z - 5} \right| \leq \frac{27}{7}$ . Thật vậy, ta có

$$9 = |2z|^2 - 3|z| \leq |2z^2 + 3z| \leq 2|z|^2 + 3|z| = 27$$

và

$$7 = |4|z| - 5| \leq |4z - 5| \leq 4|z| + 5 = 17.$$

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra được  $\frac{9}{17} \leq \left| \frac{2z^2 + 3z}{4z - 5} \right| \leq \frac{27}{7}$ .  $\square$

**2.10 Thí dụ. (OSV93)** Cho  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Chứng minh rằng với mọi  $a \in \mathbb{C}$  phương trình  $z^3 - az + a = 0$  có ít nhất một nghiệm thỏa mãn điều kiện  $|z - \alpha| \leq 2 - \alpha$ .

Trong đại số ta biết rằng một phương trình bậc ba luôn có 3 nghiệm. Gọi ba nghiệm của  $z^3 - az + a = 0$  là  $z_1, z_2, z_3$ . Khi đó, ta viết được  $z^3 - az + a = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ . Do đó, ta có hệ đẳng thức

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -a \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = -a \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$$

Do đó,  $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 1 - (z_1 + z_2 + z_3) + (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - z_1 z_2 z_3 = 1$ , cho nên  $|1 - z_1| \cdot |1 - z_2| \cdot |1 - z_3| = 1$ . Vậy phải có ít nhất một nghiệm  $z_i$  sao cho  $|1 - z_i| \leq 1$ . Từ đó ta có

$$|z_i - \alpha| \leq |z_i - 1| + |1 - \alpha| \leq 1 + 1 - \alpha = 2 - \alpha. \quad \square$$

Có nhiều bất đẳng thức khác cũng thường được dùng nhưng chứng minh nó không đơn giản. Một bất đẳng thức như thế được dùng khá phổ biến là *bất đẳng thức Cauchy* trong định lý sau.

**2.11 Định lý. (Bất đẳng thức Cauchy)** Với mọi số phức  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , ta có

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n|^2 \leq (|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)(|b_1|^2 + \dots + |b_n|^2).$$

*Chứng minh.* Dùng đẳng thức Lagrange ta có ngay bất đẳng thức Cauchy. Chúng ta sẽ chứng minh trực tiếp như sau. Với  $\lambda$  là một số phức bất kỳ, theo đẳng thức (2.6) ta được

$$\sum_{j=1}^n |a_j - \lambda \bar{b}_j|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + |\lambda|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \bar{\lambda} \sum_{j=1}^n a_j b_j \right).$$

Rõ ràng, giá trị của biểu thức này không âm với mọi  $\lambda$ . Khi  $\sum_{j=1}^n |b_j|^2 = 0$  thì các  $b_j$  đều bằng 0 nên bất đẳng thức Cauchy hiển nhiên đúng (cả hai

về đều bằng 0). Khi  $\sum_{j=1}^n |b_j|^2 > 0$  thay  $\lambda = \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2}$  vào biểu thức trên ta tính được

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \left| \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} \right|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} \sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} - 2 \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} \\ &= \sum_{j=1}^n |a_j|^2 - \frac{\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2}{\sum_{j=1}^n |b_j|^2} \end{aligned}$$

Từ đó ta có được bất đẳng thức Cauchy. Dấu đẳng thức xảy ra khi  $a_j = \lambda \bar{b}_j$  với mọi  $j$ .  $\square$

## Bài tập

1) Tìm modulus của các biểu thức

$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i) \quad \text{và} \quad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

2) Chứng minh rằng  $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ .

3) Chứng minh rằng  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$  nếu hoặc là  $|a| = 1$  hoặc là  $|b| = 1$ .

Phải loại trừ trường hợp nào nếu  $|a| = |b| = 1$ .

4) Chứng minh rằng nếu  $|a| < 1$  và  $|b| < 1$  thì  $\left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| < 1$ .

5) Chứng minh đẳng thức  $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ . Giải thích ý nghĩa hình học của nó.

6) Chứng minh các tính chất trong Định lý 2.1.

7) Chứng minh rằng  $|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$  khi  $|z| < 1$ .

8) Chứng minh rằng nếu số phức  $z$  nằm trên đường tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ, thì ta có bất đẳng thức  $1 \leq |z^3 - 2| \leq 3$ .

9) Với  $|z| = 2$ , chứng minh rằng  $\frac{2}{15} \leq \left| \frac{z^2 - 3z}{4z + 7} \right| \leq 10$ .

10) Chứng minh rằng nếu  $|z| = 2$ , thì  $\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$ .

11) Trong mỗi trường hợp, biểu diễn tập hợp các điểm xác định bởi điều kiện.

(a)  $|z - 1 + i| = 1$  (b)  $|z + i| \leq 3$  (c)  $\operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2$  (d)  $|2z - i| = 4$

12) Giải thích ý nghĩa hình học tập hợp tất cả các điểm  $z$  thỏa các hệ thức sau

(a)  $|z - 2| + |z + 2| = 5$ .

(e)  $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$ .

(b)  $|z + i| \leq 3$ .

(f)  $|z - 2| - |z + 2| > 3$ .

(c)  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) < 1$ .

(g)  $|z - z_1| = |z - z_2|$ .

(d)  $\operatorname{Re}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0$ .

(h)  $\frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda > 0$ .

13) Giải phương trình

(a)  $|z| - z = 1 + 2i$

(b)  $|z| + z = 2 + i$

14) Chứng minh rằng phương trình  $|z - z_0| = R$  của một đường tròn tâm  $z_0$  bán kính  $R$  có thể được viết lại  $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ .

15) Chứng minh rằng hyperbola  $x^2 - y^2 = 1$  có thể được viết  $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ .

16) Chứng minh đẳng thức Lagrange ở dạng phức

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^2.$$

17) Chứng minh rằng với mọi số phức  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$(a) \quad (n-2) \sum_{j=1}^n |a_j|^2 + \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|^2 = \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k + a_j|^2$$

$$(b) \quad n \sum_{j=1}^n |a_k|^2 - \left| \sum_{j=1}^n a_j \right|^2 = \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k - a_s|^2$$

18) Chứng minh rằng  $\left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|$ , với mọi  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  thỏa  $|a_k| \leq 1, |b_k| \leq 1, k = 1, \dots, n$ .

19) Chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng quy nạp.

20) Nếu  $|a_i| < 1, \lambda_i \geq 0$  với  $i = 1, 2, \dots, n$  và  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ , chứng minh rằng  $|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n| < 1$ .

21) Chứng minh rằng tồn tại các số phức  $z$  thỏa  $|z - a| + |z + a| = 2|c|$  nếu và chỉ nếu  $|a| \leq |c|$ . Nếu điều kiện này thỏa, hãy xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $|z|$  thỏa phương trình trên.

22) Viết phương trình của một ellipse, hyperbola, parabola dưới dạng biểu thức phức.

## § 3 Argument và căn bậc $n$ của số phức

### Argument

Cho số phức  $z = x + iy \neq 0$ . Gọi  $\varphi$  là góc có hướng của tia  $OM$ , ở đây  $O$  là gốc tọa độ và  $M = (x, y)$ , với tia  $Ox$  trong mặt phẳng phức  $Oxy$ . Góc  $\varphi$  được gọi là **argument** của số phức  $z$  và ký hiệu  $\text{Arg}z$ . Dễ dàng thấy rằng

$$x = |z| \cos \varphi \quad y = |z| \sin \varphi.$$

Khi đó, số phức  $z$  được viết lại

$$z = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

và ta nói số phức  $z$  được viết dưới **dạng lượng giác**.



Trường hợp riêng, với  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$  sao cho  $x = |z| \cos \varphi_0$ ,  $y = |z| \sin \varphi_0$ , ta nói  $\varphi_0$  là **argument chính** của  $z$  và ký hiệu  $\arg z$ .

Argument của số phức được định nghĩa khi nó khác không. Trường hợp số phức bằng 0 thì không xác định argument. Khi số phức khác không, ta có thể xác định argument của một số phức như sau. Xét số phức  $z = x + iy$ . Nếu  $x = 0$  thì

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{khi } y > 0, (k \in \mathbb{Z}) \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{khi } y < 0, (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Trường hợp  $x \neq 0$ , ta có

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi & \text{khi } (x, y) \text{ ở góc phần tư thứ I và IV } (k \in \mathbb{Z}) \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k+1)\pi & \text{khi } (x, y) \text{ ở góc phần tư thứ II và III } (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**3.1 Thí dụ.** Xét số phức  $-4 + 4i$ . Ta có  $|-4 + 4i| = 4\sqrt{2}$ . Vì  $-4 + 4i$  ở góc phần tư thứ hai nên  $\operatorname{Arg} z = \arctan(-1) + (2k+1)\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ .

Với số phức  $3 - 3\sqrt{3}i$ , ta có  $|3 - 3\sqrt{3}i| = 6$ . Vì  $3 - 3\sqrt{3}i$  ở góc phần tư thứ IV nên  $\operatorname{Arg} z = \arctan(-\sqrt{3}) + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .  $\square$

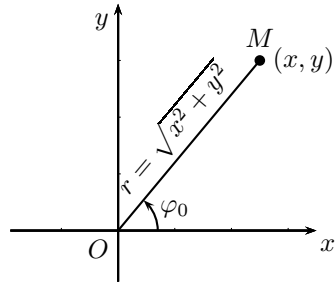
Cho hai số phức  $z_1$  và  $z_2$  khác không. Từ định nghĩa của modulus và argument ta có được khẳng định sau

$$(3.2) \quad z_1 = z_2 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dạng lượng giác của số có điểm tiện ích được thể hiện ở định lý sau.

**3.3 Định lý.** Cho hai số phức khác không  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  và  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  với  $r_1, r_2 > 0$ . Khi đó, ta có các đẳng thức sau

$$(3.4) \quad \begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{r_1} (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) \end{aligned}$$



Hình I.3: Argument của  $z$

*Chứng minh.* Ta có

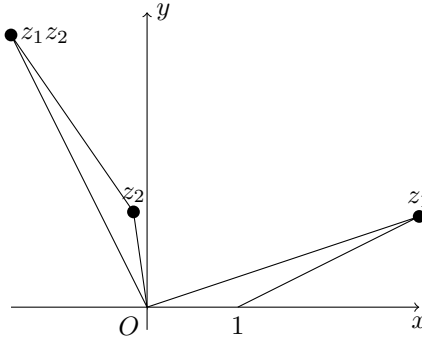
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{r_1 \cos \varphi_1}{r_1^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \varphi} - i \frac{r_1 \sin \varphi_1}{r_1^2 \cos^2 \varphi + r_1^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{r_1} (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1). \end{aligned}$$

□

Từ định lý trên ta có cách vẽ sau đây để tìm  $z = z_1 z_2$ . Ta dựng tam giác có đỉnh là 0, 1,  $z_1$ . Vẽ tam giác có hai đỉnh 0,  $z_2$  đồng dạng thuận với 0, 1,  $z_1$ . Khi ấy, đỉnh thứ ba chính là tích  $z_1 z_2$ .



Hình I.4: Phép nhân hai số phức

**3.5 Thí dụ.** Chứng minh rằng các số phức  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $a^2 = 2b \neq 0$  khi và chỉ khi các nghiệm của đa thức  $x^2 + ax + b$  tạo trên mặt phẳng phức hai đỉnh của một tam giác vuông cân có đỉnh góc vuông tại gốc tọa độ.

*Giải.* Khi  $a^2 = 2b \neq 0$  thì phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  có hai nghiệm phân biệt  $z_1 = a \frac{1+i}{2}$  và  $z_2 = a \frac{1-i}{2}$ . Do  $z_1 = z_2 i$  nên thỏa điều kiện bài toán.

Ngược lại nếu đa thức đã cho có hai nghiệm  $z_1$  và  $z_2$  tạo trên mặt phẳng phức hai đỉnh của một tam giác vuông cân có đỉnh góc vuông tại gốc tọa độ thì ta phải có một nghiệm bằng tích của nghiệm thứ hai với  $i$ ,

nói là  $z_2 = z_1 i$ . Khi đó theo định lý Viet ta có

$$\begin{cases} z_1(1+i) = z_1 + z_2 = -a \\ z_1^2 i = z_1 z_2 = b \end{cases} \quad \text{Suy ra} \quad b = \left(-\frac{a}{1+i}\right)^2 i = \frac{a^2}{2}.$$

Ta được điều phải chứng minh.  $\square$

Cũng từ định lý trên và bằng qui nạp ta có thể chứng minh được công thức sau: với  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ta có

$$(3.6) \quad z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . Đặc biệt, khi  $r = 1$ , ta có **công thức Moivre**

$$(3.7) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Hơn nữa, các công thức trên cũng đúng với  $n$  nguyên âm.

Để cho gọn người ta dùng kí hiệu  $e^{i\varphi}$  thay cho  $\cos \varphi + i \sin \varphi$ . Khi đó, ta có một vài giá trị thường dùng đối với ký hiệu này là

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Như vậy, nếu số phức  $z \neq 0$  ta có thể viết lại như sau

$$(3.8) \quad z = |z|e^{i\text{Arg}z}.$$

Dạng viết số phức  $z$  như trên được gọi là **dạng Euler** (hay *dạng mũ*) của  $z$ . Ta viết lại phép toán nhân và lũy thừa dưới dạng Euler như sau. Với  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  và  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , ta có

$$(3.9) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{i(-\varphi_1)}, \quad (z_1)^n = r_1^n e^{i(n\varphi_1)}.$$

**3.10 Thí dụ.** Để đưa biểu thức  $(\sqrt{3} + i)^7$  về dạng đại số, chúng ta tiến hành như sau

$$(\sqrt{3} + i)^7 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = 64(-\sqrt{3} - i) = -64\sqrt{3} - 64i. \quad \square$$

Dạng Euler của số phức rất tiện lợi vì nó phù hợp với các phép toán lũy thừa ở số thực khi xem  $i$  như là một hằng số. Hơn nữa, ta cũng dễ dàng suy ra được *công thức Euler* quen thuộc về sau

$$(3.11) \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

## Căn bậc $n$ của số phức

**3.12 Định nghĩa.** Số phức  $w$  được gọi là một **căn bậc  $n$**  của số phức  $z$  nếu  $w^n = z$ .

Nếu  $z = 0$ , thì có thể thấy  $w = 0$  là căn bậc  $n$  duy nhất của  $z$ . Trường hợp  $z \neq 0$ , ta cũng thấy 0 không là căn bậc  $n$  của  $z$ . Ta viết  $z$  và  $w$  ở dạng Euler như sau

$$z = r_0 e^{i\varphi_0} \qquad w = r e^{i\varphi}.$$

Từ đó suy ra  $r^n e^{in\varphi} = r_0 e^{i\varphi_0}$ . Vậy ta có

$$\begin{cases} r^n = r_0 \\ n\varphi = \varphi_0 + 2k\pi \end{cases}$$

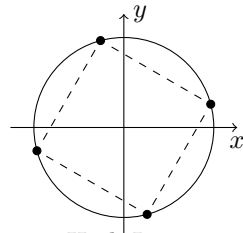
suy ra

$$(3.13) \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{r_0} \\ \varphi = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \text{Arg} w = \frac{\text{Arg} z + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

trong đó  $k \in \mathbb{Z}$ . Từ đó có thể thấy được có  $n$  căn bậc  $n$  của số phức  $z$  ứng với các giá trị của  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ; cụ thể là  $\sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg} z + 2k\pi}{n}}$  với  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Người ta dùng ký hiệu  $\sqrt[n]{z}$  để chỉ tất cả các căn bậc  $n$  của  $z$ ; như vậy cũng có thể hiểu nó là tập hợp tất cả căn bậc  $n$  của  $z$ .

**3.14 Chú ý.** Các căn bậc  $n$  của  $z$  là các đỉnh của đa giác đều  $n$  cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\sqrt[n]{|z|}$ . Đặc biệt, các căn bậc  $n$  của đơn vị,  $z = 1$ , là các đỉnh của đa giác đều nội tiếp trong đường tròn đơn vị  $|z| = 1$ . Đặt  $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = e^{i \frac{2\pi}{n}}$  thì các căn bậc  $n$  của đơn vị chính là  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ . Ta nói  $\omega$  là một *căn nguyên thủy* của đơn vị. Tổng quát hơn nếu  $k$  và  $n$  nguyên tố cùng nhau thì  $\omega^k$  cũng là một căn nguyên thủy của đơn vị, nghĩa là các căn bậc  $n$  của đơn vị đều là lũy thừa của  $\omega^k$ . Hơn nữa, ta có thể chứng minh được kết quả sau: *Nếu  $z_0$  là một căn bậc  $n$  của  $z$  thì  $\omega^k z_0$  với  $k = 0, 1, \dots, n-1$  là  $n$  căn bậc  $n$  của  $z$ .*

**3.15 Thí dụ.** Ta tìm căn bậc 4 của  $1 + i\sqrt{3}$ . Ta viết lại  $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Do đó,  $\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})}$  với  $k = 0, 1, 2, 3$ . Hình I.5 biểu diễn 4 giá trị căn vừa tìm được.  $\square$



Hình I.5:

**3.16 Thí dụ. (OSV00)** Cho số nguyên dương  $m > 1$  và số phức  $c$  có modulus bằng 1. Tìm các số thực  $x$  sao cho  $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^m = c$ .

*Giải.* Đặt  $c = e^{i\varphi}$ . Khi đó từ định nghĩa căn bậc  $m$  của một số phức ta có

$$\begin{aligned}\frac{1+ix}{1-ix} &= e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{m}}, & k &= 0, 1, \dots, m-1 \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} &= \cos \frac{\varphi+2k\pi}{m} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{m} & k &= 0, 1, \dots, m-1\end{aligned}$$

Theo tính chất của các hàm lượng giác từ

$$\begin{cases} \cos \frac{\varphi+2k\pi}{m} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin \frac{\varphi+2k\pi}{m} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

ta suy ra được

$$x = \tan \frac{\varphi+2k\pi}{2m} \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad \square$$

## Bài tập

1) Tìm modulus và argument của các số phức sau

$$(a) 1-i \quad (b) \sqrt{3}-i \quad (c) -3-i\sqrt{3} \quad (d) 2-5i$$

2) Thực hiện các phép tính sau (viết kết quả ở dạng đại số).

$$(a) (-3+i\sqrt{3})^3 \quad (b) (1-i)^{2006} \quad (c) (\sqrt{3}+i)^{2005} \quad (d) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{100}$$

3) Giải phương trình  $\bar{z} = z^{n-1}$ .

4) Giải phương trình  $z = z^{n-1}$  với  $n$  là số nguyên khác 2.

5) Tìm tất cả các giá trị của các căn sau

$$\begin{aligned}(a) \sqrt[4]{-1} \quad (b) \sqrt[8]{1} \quad (c) \sqrt[4]{-2+i2\sqrt{3}} \quad (d) \sqrt{3+4i} \\ (e) \sqrt[6]{-6} \quad (f) \sqrt[3]{i} \quad (g) \sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} \quad (h) \sqrt{1+i}\end{aligned}$$

6) Tìm bốn nghiệm của phương trình  $z^4 + 4 = 0$  và dùng chúng để phân tích  $z^4 + 4$  thành hai nhân tử bậc 2 với hệ số thực.

7) Chứng minh rằng cả hai giá trị  $\sqrt{z^2 - 1}$  nằm trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ song song với đường phân giác của tam giác với đỉnh tại các điểm  $-1, 1$  và  $z$  kể từ đỉnh  $z$ .

8) Tìm các điểm đối xứng với  $a$  qua các đường phân giác các góc phần tư trong mặt phẳng phức.

9) Chứng minh rằng các điểm  $a_1, a_2, a_3$  là các đỉnh của một tam giác đều nếu và chỉ nếu  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ .

10) Chứng minh rằng nếu  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  và  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  thì  $z_1, z_2, z_3$  là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị.

11) Tìm các đỉnh của đa giác đều  $n$  cạnh, biết tâm của đa giác đó tại 0 và một đỉnh  $z_1$  của nó.

12) Biết các đỉnh  $z_1$  và  $z_2$  là hai đỉnh kề nhau của đa giác đều  $n$  cạnh. Tìm đỉnh  $z_3$  kề với  $z_2$  (khác với  $z_1$ ).

13) Giả sử  $a$  và  $b$  là hai đỉnh của một hình vuông. Tìm hai đỉnh còn lại của nó.

14) Tìm tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác với các đỉnh  $a_1, a_2, a_3$ . Biểu diễn kết quả ở dạng đối xứng.

15) Xác định số phức  $z$  sao cho  $\arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \alpha$  với  $z_1$  và  $z_2$  là hai số phức phân biệt cho trước.

16) Chứng minh rằng nếu  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  thì  $\arg \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{1}{2} \arg \frac{z_2}{z_1}$ .

17) Với  $z \neq 0$ , chứng minh rằng

$$(a) \left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z| \quad (b) |z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| |\arg z|.$$

18) Với điều kiện nào ba điểm  $z_1, z_2, z_3$  đôi một không trùng nhau nằm trên một đường thẳng.

19) Tìm điều kiện về  $z_1$  và  $z_2$  để

(a)  $\frac{z_1}{z_2}$  là thực

(b)  $\frac{z_1}{z_2}$  là thuần ảo.

**20)** Với  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , dùng qui nạp chứng minh rằng  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$  với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

**21)** Dùng công thức Moivre để biểu diễn  $\cos nx$  và  $\sin nx$  qua các lũy thừa của  $\cos x$  và  $\sin x$ .

**22)** Tính  $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ .

**23)** Dùng đẳng thức  $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  với  $z \neq 1$  chứng minh công thức lượng giác Lagrange

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

với  $0 < \theta < 2\pi$ . Bên cạnh đó, cũng tính tổng  $\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$ .

**24) (OSV94)** Cho ma trận  $A_j = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi j}{n} & -\sin \frac{2\pi j}{n} \\ \sin \frac{2\pi j}{n} & \cos \frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}$  với  $j \in \mathbb{N}$ . Tính

$$S_p = A_0^p + A_1^p + \dots + A_{n-1}^p \quad p, n \in \mathbb{N}^*.$$

**25)** Chứng minh rằng nếu  $\omega$  là một căn nguyên thủy bậc  $n$  của 1 thì

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{(n-1)k} = 0$$

với bất kỳ  $k$  nguyên không là bội của  $n$ . Hãy tính giá trị của  $1 - \omega^k + \omega^{2k} - \dots + (-1)^{n-1} \omega^{(n-1)k}$ .

**26) (a)** Dùng công thức nhị thức Newton và công thức Moivre chứng tỏ

$$\cos n\theta + i \sin \theta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k} (i \sin \theta)^k \quad n = 1, 2, \dots$$

Từ đó dẫn đến công thức

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta \quad n = 1, 2, \dots$$

(b) Đặt  $x = \cos \theta$  và giả sử rằng  $0 \leq \theta \leq \pi$ ; khi đó,  $-1 \leq x \leq 1$ . Hãy chỉ ra rằng hàm  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$  là một đa thức có bậc  $n$  theo biến  $x$  ( $T_n$  được gọi là *đa thức Chebyshev*).





Mặt khác, vì  $z_1(\xi, \eta, \zeta)$  nằm trên mặt cầu  $S$  nên  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$ . Từ đó suy ra

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}.$$

Vậy ta được

$$(4.2) \quad \xi = \frac{x}{1 + |z|^2} \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2} \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Các hệ thức (4.1) và (4.2) nói lên sự tương ứng một-một giữa tập hợp các số phức và tập hợp các điểm trên mặt cầu  $S$  trừ điểm  $N$ . Tương ứng này thật sự là một phép đồng phôi.

Khi  $z$  dần ra vô cùng, từ hệ thức (4.2) ta suy ra điểm  $z_1(\xi, \eta, \zeta)$  dần về điểm  $N(0, 0, 1)$ . Ngược lại, khi điểm  $z_1$  dần về điểm  $N(0, 0, 1)$ , từ hệ thức (4.1) chuyển qua giới hạn khi  $\zeta$  dần về 1 ta có  $z$  dần ra  $\infty$ . Vậy có sự tương ứng một-một giữa tập hợp tất cả các điểm trên mặt cầu  $S$  và tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mở rộng  $\bar{\mathbb{C}}$ , và mặt cầu  $S$  được gọi là *mặt cầu Riemann*. Tương ứng này là một phép đồng phôi giữa  $S$  và  $\bar{\mathbb{C}}$ , và do  $S$  là tập compact trong  $\mathbb{R}^3$  nên  $\bar{\mathbb{C}}$  là compact.

## Bài tập

- 1) Làm sáng rõ các đẳng thức suy ra (4.1).
- 2) Tìm ảnh của  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$  trong phép chiếu cầu.
- 3) Tìm trên mặt cầu của các miền được xác định bởi các bất đẳng thức
 

(a)  $\text{Im}(z) > 0$ 
(b)  $|z| < 1$ .
- 4) Chứng minh rằng bất kỳ đường tròn nằm trên mặt cầu Riemann tương ứng với một đường tròn hay đường thẳng trong mặt phẳng phức ( $z$ ).
- 5) Gọi  $z_1$  và  $z'_1$  là hai phép chiếu cầu của hai điểm  $z, z' \in \bar{\mathbb{C}}$ . Tìm khoảng cách giữa  $z_1$  và  $z'_1$ .
- 6) Tìm điều kiện để hai điểm  $z$  và  $z'$  có hai điểm phép chiếu cầu đối xứng qua tâm.

7) Một hình lập phương có các đỉnh nằm trên mặt cầu và các cạnh tương ứng song song với các trục tọa độ. Hãy tìm các điểm trong mặt phẳng phức ứng với các đỉnh của hình lập phương.

## § 5 Các khái niệm Topo trong mặt phẳng phức

Cho hai số phức  $z_1 = x_1 + iy_1$  và  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Ta nói khoảng cách giữa  $z_1$  và  $z_2$  là modulus của  $z_1 - z_2$  và ký hiệu  $d(z_1, z_2)$ . Vậy

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh được định lý sau

**5.1 Định lý.** Với mọi  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , ta có

$$(1) \quad d(z_1, z_2) \geq 0 \text{ và } d(z_1, z_2) = 0 \text{ khi và chỉ khi } z_1 = z_2$$

$$(2) \quad d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$$

$$(3) \quad d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$$

Như vậy,  $(\mathbb{C}, d)$  là một không gian metric; đây chính là metric Euclid trong mặt phẳng. Từ đó ta có một topo cảm sinh bởi metric này. Vì vậy,  $\mathbb{C}$  cũng được xem là một không gian topo ứng với topo này.

Tập hợp tất cả các điểm  $z$  sao cho  $|z - z_0| < \varepsilon$  được gọi là  **$\varepsilon$ -lân cận của điểm**  $z_0$ . Như vậy, nó chính là tập hợp các điểm nằm trong đường tròn tâm  $z_0$  có bán kính là  $\varepsilon$  trong mặt phẳng phức  $(\mathbb{C})$ , nó là tập  $\{z : d(z, z_0) < \varepsilon\}$  và được ký hiệu  $B(z_0, \varepsilon)$ . Khi ta không quan tâm đến giá trị  $\varepsilon$ , để cho gọn ta nói tập trên là lân cận của  $z_0$ . Ta gọi  **$\varepsilon$ -lân cận thủng của**  $z_0$  là  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  bỏ đi điểm  $z_0$ , nghĩa là nó là tập  $\{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ .

Điểm  $z_0$  được gọi là **điểm trong** của tập  $E$  nếu tồn tại một lân cận của  $z_0$  nằm hoàn toàn trong  $E$ . Điểm  $z_0$  được gọi là **điểm ngoài** của  $E$  nếu tồn tại một lân cận của  $z_0$  không chứa điểm nào của  $E$ . Điểm  $z_0$  không phải là điểm trong cũng không phải điểm ngoài của  $E$  được gọi là **điểm biên** của  $E$ ; nghĩa là với mọi  $\varepsilon$ -lân cận của điểm  $z_0$  luôn có một điểm thuộc  $E$  và một điểm không thuộc  $E$ . Tập hợp tất cả các điểm biên của  $E$  được gọi là **biên của**  $E$ , ký hiệu  $\partial E$ .

Một tập là **mở** nếu nó không chứa điểm biên, hay mỗi điểm của nó là điểm trong. **Tập đóng** là tập chứa tất cả các điểm biên. **Bao đóng** của tập  $E$  là tập  $E \cup \partial E$  và ký hiệu là  $\overline{E}$ .

**5.2 Thí dụ.** Ta thường gặp các tập mở và tập đóng sau

- (a) Hình tròn mở  $B(a, r)$  là một tập mở.
- (b) Hình tròn đóng  $\bar{B}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\}$  là một tập đóng.
- (c) Đường tròn  $S(a, r) = \{z : |z - a| = r\}$  là một tập đóng.
- (d) Nửa mặt phẳng xác định bởi  $\operatorname{Re} z > \alpha$ ,  $\operatorname{Re} z < \alpha$ ,  $\operatorname{Im} z > \alpha$ , hay  $\operatorname{Im} z < \alpha$  là các tập mở.
- (e) Nửa mặt phẳng đóng xác định bởi  $\operatorname{Re} z \geq \alpha$ ,  $\operatorname{Re} z \leq \alpha$ ,  $\operatorname{Im} z \geq \alpha$ , hay  $\operatorname{Im} z \leq \alpha$  là các tập đóng.
- (f) Hình vành khăn mở  $\{z : r_1 < |z - a| < r_2\}$  là tập mở.
- (g) Hình vành khăn đóng  $\{z : r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}$  là tập đóng.  $\square$

Chú ý rằng, hình tròn đóng  $\bar{B}(a, r)$  chính là bao đóng của hình tròn mở  $B(a, r)$ ; do đó, ký hiệu được dùng là nhất quán.

**5.3 Định lý.** (i)  $\bar{E}$  là tập đóng.

(ii)  $E$  là tập đóng khi và chỉ khi  $E = \bar{E}$ .

(iii)  $\bar{E}$  là tập đóng nhỏ nhất chứa  $E$ .

(iv)  $E$  là tập đóng khi và chỉ khi  $\mathbb{C} \setminus E$  là tập mở.

**Phần trong** của một tập hợp  $E$  là tập tất cả các điểm trong của  $E$ . Ký hiệu,  $\operatorname{Int}(E)$  hay  $E^\circ$ .

**5.4 Định lý.** (i)  $E^\circ \subseteq E$ .

(ii)  $E^\circ$  là tập mở.

(iii)  $E$  là tập mở khi và chỉ khi  $E = E^\circ$ .

(iv)  $E^\circ$  là tập mở lớn nhất nằm trong  $E$ .

Một tập  $E$  là **liên thông** nếu không tồn tại hai tập mở  $A$  và  $B$  thỏa các điều kiện sau

(i)  $E \cap A \neq \emptyset$ ,  $E \cap B \neq \emptyset$

(ii)  $E \cap A \cap B = \emptyset$

(iii)  $E \subseteq A \cup B$ .

Một tập mở liên thông được gọi là **miền**. Một tập đóng liên thông được gọi là **miền đóng**.

**5.5 Thí dụ.** Tập  $\mathbb{C}$  là tập liên thông. Tập  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  là tập liên thông. Tập  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  là miền. Tập mở xác định bởi  $\operatorname{Re} z \neq 0$  không phải là tập liên thông vì tập con xác định bởi  $\operatorname{Re} z > 0$  là tập con thực sự khác rỗng vừa đóng vừa mở trong tập đang xét. Cụ thể hơn, ta có thể chọn  $A = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$  và  $B = \{a : \operatorname{Re} z < 0\}$ .  $\square$

Trong tập  $A$ , tập con  $E \subseteq A$  liên thông và lớn nhất được gọi là một **thành phần liên thông** của  $A$ .

Tập  $E$  được gọi là **bị chặn** nếu nó nằm hoàn toàn trong một đường tròn  $|z| = R$  nào đó, ngược lại được gọi là **không bị chặn**. Một tập đóng và bị chặn được gọi là **tập compact**.

Điểm  $z_0$  được gọi là **điểm giới hạn** hay **điểm tụ** của  $E$  nếu mỗi lân cận thủng của  $z_0$  chứa ít nhất một điểm của  $E$ . Điểm  $z_0$  được gọi là **điểm dính** nếu mỗi lân cận của điểm  $z_0$  chứa ít nhất một phần tử của  $E$ . Ta có thể thấy điểm giới hạn của tập  $E$  cũng là điểm dính của  $E$ . Trường hợp điểm dính của  $E$  không là điểm giới hạn thì ta gọi nó là **điểm cô lập**. Từ đó ta dễ dàng chứng minh định lý sau.

**5.6 Định lý.** *Tập  $E$  là đóng nếu và chỉ nếu mọi điểm dính của  $E$  đều thuộc  $E$ .*

*Chứng minh.* Giả sử  $E$  là tập đóng. Theo định nghĩa của tập đóng thì mỗi điểm của  $E$  hoặc là điểm trong hoặc là điểm biên. Từ đó suy ra nó là điểm dính của  $E$ .

Ngược lại, giả sử  $E$  là tập sao cho mọi điểm dính của  $E$  đều thuộc  $E$ . Giả sử  $z$  là một điểm biên bất kỳ của  $E$ . Theo định nghĩa thì  $z$  cũng là điểm dính của  $E$ , cho nên  $z \in E$ . Vậy  $E$  là tập đóng.  $\square$

Cho  $A$  và  $B$  là hai tập hợp trong  $\mathbb{C}$ . **Khoảng cách** giữa  $A$  và  $B$ , kí hiệu  $d(A, B)$ , được định nghĩa bởi biểu thức

$$(5.7) \quad d(A, B) = \inf\{|z - z'| : z \in A, z' \in B\}.$$

Từ định nghĩa ta dễ dàng nhận thấy

- $d(A, B) = d(B, A)$

- Nếu  $A \cap B \neq \emptyset$  thì  $d(A, B) = 0$ .

Tương tự ta có định nghĩa khoảng cách từ điểm  $z_0$  đến tập  $A$ , kí hiệu  $d(z_0, A)$  chính là khoảng cách giữa hai tập hợp  $\{z_0\}$  và  $A$ ; nghĩa là

$$(5.8) \quad d(z_0, A) = \inf\{|z_0 - z| : z \in A\}.$$

## Bài tập

1) Chứng minh Định lý 5.1

2) Chứng minh rằng tập  $B(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$  là một tập mở.

3) Chứng minh rằng tập  $\bar{B}(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leq r\}$  là một tập đóng.

4) Chứng minh rằng đường tròn có phương trình  $|z - z_0| = r$  là biên của  $B(z_0, r)$  và  $\bar{B}(z_0, r)$ .

5) Chứng minh rằng nếu hai điểm bất kỳ  $z_1 \neq z_2$  thì tồn tại hai  $\varepsilon$ -lân cận  $B(z_1, \varepsilon)$  và  $B(z_2, \varepsilon)$  sao cho  $B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \emptyset$ .

6) Chứng minh rằng nếu  $z_1$  là một điểm bất kỳ thuộc  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  thì tồn tại  $\varepsilon_1$ -lân cận của  $z_1$  sao cho  $B(z_1, \varepsilon_1) \subseteq B(z_0, \varepsilon)$ .

7) Khoảng cách cầu  $d^*$  trên  $\bar{\mathbb{C}}$  được xác định bởi

$$d^*(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{khi } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{khi } z_1 \in \mathbb{C} \text{ và } z_2 = \infty \end{cases}$$

và  $d^*(\infty, z) = d^*(z, \infty)$ ,  $d^*(\infty, \infty) = 0$ . Chứng minh rằng  $(\bar{\mathbb{C}}, d^*)$  là một không gian metric.

8) Chứng minh rằng tập hợp  $A$  là liên thông khi và chỉ khi trong  $A$  không tồn tại tập hợp con thực sự khác rỗng vừa đóng vừa mở trong  $A$ .

9) Chứng minh rằng giao của một họ bất kỳ và hợp của hữu hạn các tập compact là compact.

10) Cho  $A = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^*\}$  và  $B = \{\frac{i}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N}\}$ . Tìm  $d(A, B)$ .

**11)** Cho  $A = \{z : |z - 3i| < 1\}$ . Tính  $d(i, A)$  và tìm một dãy  $\{z_n\} \subset A$  sao cho  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(i, z_n) = d(i, A)$ .

**12)** Chứng minh rằng nếu  $D$  là một miền và  $E$  là một tập con không có điểm tụ trong  $D$  thì  $D \setminus E$  là một miền.

**13)** Chứng minh rằng nếu  $A$  và  $B$  là hai tập liên thông thỏa  $A \cap B \neq \emptyset$  thì  $A \cup B$  liên thông.

## Chương II

# Hàm biến số phức

### § 1 Dãy và chuỗi số phức

#### Dãy số phức

**Dãy số phức** là một ánh xạ từ tập hợp các số tự nhiên dương  $\mathbb{N}^+$  vào tập số phức  $\mathbb{C}$ , nghĩa là ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\ n &\mapsto f(n). \end{aligned}$$

Đặt  $z_n = f(n)$ , và ký hiệu dãy số phức là  $\{z_n\}_{n=1}^\infty$  hay  $\{z_n\}$ .

Trong số thực ta dựa vào trị tuyệt đối để đưa ra định nghĩa sự hội tụ của một dãy số thực, tương tự như thế ta dùng khái niệm modulus để định nghĩa sự hội tụ của dãy số phức.

**1.1 Định nghĩa.** Cho dãy số  $\{z_n\}$ . Ta nói dãy này **hội tụ** nếu tồn tại  $z_0$  sao cho với mọi  $\varepsilon > 0$  đều tồn tại  $n_0 > 0$  để với mọi  $n > n_0$  thì  $|z_n - z_0| < \varepsilon$ . Nói cách khác, với mỗi  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  đều tồn tại số  $n_0 > 0$  sao cho với mọi  $n > n_0$  thì  $z_n$  thuộc lân cận đó.

Ta có thể dễ dàng chứng minh được số phức  $z_0$  trong định nghĩa là duy nhất. Vì thế ta đặt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ , và nói dãy  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0$  hay có giới hạn là  $z_0$ .

Trong trường hợp dãy  $\{z_n\}$  *không hội tụ* thì ta nói dãy ấy **phân kỳ**.

**1.2 Định lý.** Cho dãy số phức  $\{z_n\}$ . Giả sử  $z_n = x_n + iy_n$  và  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Khi đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ . Khi đó, với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho  $|z_n - z_0| < \varepsilon$  với mọi  $n > N$ . Do  $|x_n - x_0| = |\operatorname{Re}(z_n - z_0)| \leq |z_n - z_0|$  và  $|y_n - y_0| = |\operatorname{Im}(z_n - z_0)| \leq |z_n - z_0|$  suy ra  $|x_n - x_0| < \varepsilon$  và  $|y_n - y_0| < \varepsilon$  khi  $n > N$ . Do đó, ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ .

Ngược lại, giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ . Khi đó, với mọi  $\varepsilon > 0$  ta có thể tìm được  $N > 0$  chung sao cho với mọi  $n > N$  ta có  $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  và  $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Vậy với mọi  $n > 0$  ta suy ra được

$$|z_n - z_0| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z_0)| + |\operatorname{Im}(z_n - z_0)| = |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon.$$

Điều đó có nghĩa là  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ . □

**1.3 Thí dụ.** Dãy  $\{z_n\}$  với  $z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{2^n}$  hội tụ về 0 vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ . Trong khi đó, dãy  $\{z_n\}$  với  $z_n = n + \frac{i}{n}$  phân kỳ vì dãy  $\{n\}$  phân kỳ. □

Như vậy, từ định lý trên mà những tính chất về sự hội tụ của dãy số\* trong  $\mathbb{R}$  ta có thể chuyển tương ứng sang dãy số trong  $\mathbb{C}$ . Chẳng hạn, ta có

**1.4 Định lý.** Cho hai dãy số phức  $\{z_n\}$  và  $\{w_n\}$ . Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ , thì

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} cz_n = cz, \text{ với } c \text{ là một hằng số phức.}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w.$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw.$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}, \text{ điều kiện biểu thức có nghĩa.}$$

*Chứng minh.* Ta sẽ chứng minh tính chất (3). Giả sử  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $w_n = u_n + iv_n$ ,  $z = x + iy$  và  $w = u + iv$ . Theo giả thiết ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ . Mặt khác,  $z_n w_n = (x_n +$

---

\*Xem [5, trang 57-73].



$iy_n)(u_n + iv_n) = x_n u_n - y_n v_n + i(x_n v_n + y_n u_n)$ . Khi đó,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n u_n - y_n v_n) = xu - yv$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n v_n + y_n u_n) = xv + yu$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = (xu - yv) + i(xv + yu) = zw$ .  $\square$

Ngoài ra, ta cũng có tính chất tương tự như ở Định lý 1.2 nhưng dãy số phức ở dạng lượng giác.

**1.5 Định lý.** Cho dãy số phức khác không  $\{z_n\}$  với  $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ . Nếu dãy  $\{r_n\}$  hội tụ về  $r_0$  và dãy  $\{\varphi_n\}$  hội tụ về  $\varphi_0$ , thì dãy  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**1.6 Thí dụ.** Xét dãy số phức  $\{z_n\}$  với  $z_n = \left(1 + i \frac{y_0}{n}\right)^n$  trong đó  $y_0$  là hằng số thực. Khi đó, ta viết  $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ . Ta có

$$r_n = \left| \left(1 + i \frac{y_0}{n}\right)^n \right| = \left( \sqrt{1 + \frac{y_0^2}{n^2}} \right)^n = \left(1 + \frac{y_0^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ . Bên cạnh đó, ta chọn

$$\varphi_n = \operatorname{Arg} \left(1 + i \frac{y_0}{n}\right)^n = n \arctan \frac{y_0}{n}$$

suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = y_0$ . Do đó, theo định lý trên ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{y_0}{n}\right)^n = \cos y_0 + i \sin y_0 = e^{iy_0}$ .  $\square$

**1.7 Định nghĩa.** Dãy  $\{z_n\}$  được gọi là **dãy cơ bản** hay **dãy Cauchy** nếu với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n, m > N$  ta luôn có  $|z_n - z_m| < \varepsilon$ .

**1.8 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy)** Dãy  $\{z_n\}$  hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

*Chứng minh.* Giả sử dãy  $\{z_n\}$  hội tụ. Khi đó, tồn tại  $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho khi  $n > N$  ta có  $|z_n - z_0| < \varepsilon/2$ . Vậy khi  $n, m > N$  ta có  $|z_n - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_m - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Do đó,  $\{z_n\}$  là dãy Cauchy.

Giả sử  $\{z_n\}$  là dãy Cauchy và  $z_n = x_n + iy_n$ . Với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $N > 0$  sao cho khi  $n, m > N$  ta có  $|z_n - z_m| < \varepsilon$ . Mặt khác, ta có

$|x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$ . Do đó, ta suy ra được các dãy số thực  $\{x_n\}$  và  $\{y_n\}$  là dãy Cauchy, cho nên chúng hội tụ\*. Vậy theo Định lý 1.2 ta suy ra được dãy  $\{z_n\}$  hội tụ.  $\square$

**1.9 Định lý. (Bolzano-Weierstrass)** Mọi dãy số phức bị chặn đều có một dãy con hội tụ.

*Chứng minh.* Giả sử  $\{z_n\}$  bị chặn và  $z_n = x_n + iy_n$ . Nghĩa là tồn tại  $M > 0$  sao cho  $|z_n| < M$  với mọi  $n$ , suy ra  $|x_n|, |y_n| < M$  với mọi  $n$ . Vậy dãy số thực  $\{x_n\}$  và  $\{y_n\}$  bị chặn, suy ra tồn tại dãy con\*  $\{x_{n_k}\}$  của dãy  $\{x_n\}$  hội tụ. Ta lại có  $\{y_{n_k}\}$  là dãy con của dãy bị chặn  $\{y_n\}$  nên nó bị chặn. Do đó, tồn tại dãy con  $\{y_{n_{k_l}}\}$  hội tụ. Vì  $\{x_{n_{k_l}}\}$  là dãy con của dãy hội tụ  $\{x_{n_k}\}$ , nên nó hội tụ. Vậy theo Định lý 1.2 ta có dãy con  $\{z_{n_{k_l}}\}$  của dãy  $\{z_n\}$  hội tụ.  $\square$

**1.10 Định lý.**  $K$  là tập compact trong  $\mathbb{C}$  khi và chỉ khi với mọi dãy thuộc  $K$  đều tồn tại dãy con hội tụ về một điểm thuộc  $K$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $K$  là tập compact và  $\{z_n\}$  là một dãy bất kỳ trong  $K$ . Do  $K$  bị chặn nên  $\{z_n\}$  là dãy bị chặn; do đó, tồn tại dãy con  $\{z_{n_k}\}$  hội tụ. Đặt  $z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ . Ta có thể thấy  $z_0$  là một điểm dính của  $K$  cho nên  $z_0 \in K$ .

Ngược lại, giả sử  $K$  là tập không bị chặn. Khi đó, với mỗi  $n \in \mathbb{N}^+$  tồn tại  $z_n$  sao cho  $|z_n| > n$ . Ta có  $\{z_n\}$  là một dãy trong  $K$  nên tồn tại dãy con  $\{z_{n_k}\}$  hội tụ. Nhưng  $|z_{n_k}| > n_k$  với mọi  $k$  nên  $\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{n_k}| = \infty$  mâu thuẫn với sự hội tụ của dãy  $\{z_{n_k}\}$ . Vậy  $K$  là tập bị chặn. Lấy  $z_0$  là một điểm dính bất kỳ thuộc  $K$ . Khi đó, với mỗi  $n \in \mathbb{N}^+$  tồn tại  $z_n \in K$  sao cho  $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ . Vậy  $\{z_n\}$  là một dãy trong  $K$ , nên tồn tại dãy con  $\{z_{n_k}\}$  hội tụ về một điểm thuộc  $K$ . Đặt  $z^* = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ . Vì  $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$  với mọi  $n$  nên dãy  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0$ . Do đó, dãy con  $\{z_{n_k}\}$  cũng hội tụ về  $z_0$ , nghĩa là  $z_0 = z^* \in K$ . Vậy mọi điểm dính của  $K$  đều thuộc  $K$ , cho nên  $K$  là tập đóng. Ta đã biết  $K$  bị chặn, nên  $K$  là tập compact.  $\square$

**1.11 Định nghĩa.** Họ tập  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  được gọi là một phủ mở của tập  $A$  nếu các tập  $G_\alpha$  là tập mở với mọi  $\alpha \in I$  và  $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$

\*Chẳng hạn, xem [5, trang 70].

\*Xem [5, trang 70].

**1.12 Định lý.** Giả sử  $K$  là tập compact trong  $\mathbb{C}$ . Khi đó, với mỗi  $r > 0$  tồn tại một số hữu hạn các hình tròn tâm thuộc  $K$  bán kính  $r$  phủ  $K$ . Nghĩa là  $K$  hoàn toàn bị chặn.

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại  $r > 0$  sao cho hợp mọi họ hữu hạn các hình tròn tâm thuộc  $K$  bán kính  $r$  không phủ  $K$ . Lấy  $z_1 \in K$  và đặt  $B_1 = B(z_1, r)$ . Vì  $B_1$  không phủ  $K$  nên tồn tại  $z_2 \in K \setminus B_1$ . Đặt  $B_2 = B(z_2, r)$ . Cũng do  $B_1, B_2$  không phủ  $K$  tồn tại  $z_3 \in K \setminus (B_1 \cup B_2)$ . Tiếp tục quá trình này ta lập được dãy các hình tròn  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  và dãy số  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  trong  $K$  sao cho  $z_{n+1} \notin B_1 \cup \dots \cup B_n$  với mọi  $n \geq 1$ .

Vì  $K$  compact, theo Định lý 1.10 tồn tại  $w$  là điểm tụ của dãy  $\{z_n\}$ . Khi đó, theo định nghĩa điểm giới hạn tồn tại các số tự nhiên  $m > k$  sao cho

$$|z_k - w| < \frac{r}{2} \quad \text{và} \quad |z_m - w| < \frac{r}{2}$$

Từ đó suy ra

$$|z_k - z_m| < r$$

ta gặp mâu thuẫn vì  $z_m \notin B_k$ . □

**1.13 Định lý.** Tập  $K \subset \mathbb{C}$  là tập compact khi và chỉ khi mọi phủ mở của  $K$  tồn tại phủ con hữu hạn.

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại phủ mở  $\{G_i\}_{i \in I}$  của  $K$  sao cho mọi hệ hữu hạn các tập  $G_i$  không đủ phủ  $K$ . Vậy theo định lý trên với mọi  $n \geq 1$  tồn tại hình tròn  $B_n$  bán kính  $1/n$  sao cho  $B_n \cap K$  không thể phủ bởi một số hữu hạn các tập  $G_i$ . Lấy tùy ý  $z_n \in B_n \cap K$ . Vì  $K$  compact nên theo Định lý 1.10 tồn tại  $w \in K$  là điểm tụ của dãy  $\{z_n\}$ . Chọn  $i_0 \in I$  để  $w \in G_{i_0}$ . Do  $G_{i_0}$  là mở nên tồn tại  $r > 0$  để  $B = B(w, r) \subset G_{i_0}$ . Lấy  $N$  và  $n_0$  đủ lớn để  $2/N < r$ ,  $\frac{1}{n_0} < \frac{r}{4}$  và  $|z_{n_0} - w| < \frac{1}{N}$ . Với mỗi  $z$  bất kỳ thuộc  $B_{n_0}$  ta có

$$|z - w| \leq |z - z_{n_0}| + |z_{n_0} - w| < \frac{2}{n_0} + \frac{1}{N} < r.$$

Do đó,  $B_{n_0} \subset B \subset G_{i_0}$ . Điều này mâu thuẫn với điều kiện  $K \cap B_{n_0}$  không thể phủ bởi một số hữu hạn các tập  $G_i$ .

Ngược lại, lấy  $a \in K$  tùy ý. Khi đó,  $\{B(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  là một phủ mở của  $K$ . Do đó, tồn tại phủ con hữu hạn  $\{B(a, n_k)\}_{k=1}^N$ . Đặt  $M = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ ,

ta có

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^N B(a, n_k) = B(a, M).$$

Vậy  $K$  là tập bị chặn. Mặt khác, lấy  $w \notin K$  tùy ý, với mỗi  $z \in K$  ta có  $r_z = |z - w|/2 > 0$  và  $B(z, r_z) \cap B(w, r_z) = \emptyset$ . Ta lại có  $\{B(z, r_z)\}_{z \in K}$  là một phủ mở của  $K$ , cho nên tồn tại phủ con hữu hạn  $\{B(z_k, r_{z_k})\}_{k=1}^n$ , nghĩa là

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(z_k, r_{z_k}).$$

Đặt  $r = \min\{r_{z_1}, \dots, r_{z_n}\}$ ; khi đó  $B(w, r) \cap B(z_k, r_{z_k}) = \emptyset$  với mọi  $k = 1, \dots, n$ . Do đó, ta có

$$B(w, r) \cap \left( \bigcup_{k=1}^n B(z_k, r_{z_k}) \right) = \emptyset \quad \text{suy ra} \quad B(w, r) \cap K = \emptyset.$$

Vậy  $K$  là tập đóng. Do đó, ta được  $K$  là tập compact.  $\square$

**1.14 Định lý.** Cho  $\{K_n\}$  là dãy các tập compact trong  $\mathbb{C}$ . Nếu  $K_{n+1} \subset K_n$  với mọi  $n$  thì  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ . Đặc biệt, nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|z - z'| : z, z' \in K_n\} = 0$  thì  $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{z_0\}$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**1.15 Định lý.** Giả sử  $A$  và  $B$  là các tập đóng trong  $\mathbb{C}$  và một trong chúng là tập compact. Khi đó, tồn tại  $a \in A$  và  $b \in B$  để  $d(A, B) = |a - b|$ . Hơn nữa, nếu  $A \cap B = \emptyset$  thì  $d(A, B) > 0$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $A$  là tập compact. Theo định nghĩa  $d(A, B)$  với mỗi số tự nhiên  $n \neq 0$ , tồn tại  $a_n \in A$  và  $b_n \in B$  sao cho  $|a_n - b_n| < d(A, B) + \frac{1}{n}$ . Do đó, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = d(A, B).$$

Do  $A$  là tập compact nên từ dãy  $\{a_n\}$  tồn tại dãy con  $\{a_{n_k}\}$  hội tụ về  $a \in A$ . Hơn nữa, ta cũng có  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - b_{n_k}| = d(A, B)$ . Suy ra  $\{|a_{n_k} - b_{n_k}|\}$  bị chặn. Từ đó ta suy ra được dãy  $\{b_{n_k}\}$  bị chặn. Do đó, tồn tại dãy con  $\{b_{n_{k_l}}\}$  hội tụ về  $b \in B$  (vì  $B$  là tập đóng). Do  $\{a_{n_{k_l}}\}$  là một dãy con của  $\{a_{n_k}\}$  nên cũng hội tụ về  $a$ . Vậy

$$d(A, B) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = \lim_{l \rightarrow \infty} |a_{n_{k_l}} - b_{n_{k_l}}| = |a - b|.$$

Khi  $A \cap B = \emptyset$  ta suy ra  $a \neq b$  nên  $d(A, B) = |a - b| > 0$ .  $\square$

## Chuỗi số phức

Cho dãy số phức  $\{z_n\}$ . Tổng vô hạn hình thức

$$(1.16) \quad z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

được gọi là **chuỗi số phức** với số hạng tổng quát là  $z_n$ . Đặt  $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ , và  $S_n$  được gọi là **tổng riêng thứ  $n$**  của chuỗi (1.16). Nếu dãy  $\{S_n\}$  hội tụ thì ta nói chuỗi (1.16) **hội tụ** và có tổng là  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Khi đó, ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Một chuỗi không hội tụ được gọi là **chuỗi phân kỳ**.

**1.17 Thí dụ.** Với  $z_0$  là một hằng số phức, ta xét chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n$ . Tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi là

$$S_n = 1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^n = \begin{cases} n+1 & \text{khi } z_0 = 1 \\ \frac{1 - z_0^{n+1}}{1 - z_0} & \text{khi } z_0 \neq 1 \end{cases}$$

Từ đó ta thấy chuỗi đang xét phân kỳ khi  $|z_0| \geq 1$  và hội tụ về  $\frac{1}{1 - z_0}$  khi  $|z_0| < 1$ .  $\square$

Như vậy, chuỗi số phức được định nghĩa tương tự như chuỗi số thực. Hơn nữa, do dãy số phức có các tính chất như dãy số thực, cho nên chuỗi số phức cũng có tính chất như chuỗi số thực. Trước tiên ta có tính chất tương tự như ở Định lý 1.2.

**1.18 Định lý.** Cho chuỗi số phức  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  với  $z_n = a_n + ib_n$ . Khi đó, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ về  $W = U + iV$  khi và chỉ khi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ về  $U$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  hội tụ về  $V$ .

*Chứng minh.* Dựa vào định nghĩa chuỗi hội tụ và Định lý 1.2. Chúng tôi xin dành cho bạn đọc trình bày chứng minh.  $\square$

**1.19 Định lý.** Điều kiện cần để chuỗi số phức  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ là  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

*Chứng minh.* Giả sử chuỗi đã cho hội tụ và có tổng là  $S$ ; nghĩa là dãy tổng riêng  $\{S_n\}$  hội tụ về  $S$ . Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{suy ra} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0. \quad \square$$

**1.20 Thí dụ.** Xét chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n$ . Ta đã biết chuỗi này hội tụ khi  $|z_0| < 1$ . Khi  $|z_0| \geq 1$  thì  $z_0^n$  không thể dần về 0 khi  $n$  dần ra  $\infty$ . Theo định lý trên ta suy ra chuỗi đã cho phân kỳ khi  $|z_0| \geq 1$ .  $\square$

Cũng giống như dãy số, sự hội tụ của chuỗi số cũng có tính chất tuyến tính như trong định lý sau.

**1.21 Định lý.** Cho hai chuỗi hội tụ  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ . Khi đó, với mọi số phức  $\alpha$  và  $\beta$ , ta có chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n)$  hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**1.22 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy)** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ khi và chỉ khi với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$  và mọi  $p \geq 1$  ta có

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa ta có chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng  $\{S_n\}$  hội tụ. Theo tiêu chuẩn Cauchy cho dãy hội tụ, ta có điều kiện tương đương là với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n, m > N$  ta luôn có  $|S_n - S_m| < \varepsilon$ , hay với mọi  $n > N$  và mọi số nguyên dương  $p$  ta luôn có  $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ ; nghĩa là

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon. \quad \square$$

**1.23 Định nghĩa.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  hội tụ.

Tương tự như chuỗi số thực, ta có kết quả sau nói lên mối liên hệ giữa khái niệm hội tụ và hội tụ tuyệt đối của một chuỗi.

**1.24 Định lý.** *Nếu chuỗi số phức hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.*

*Chứng minh.* Giả sử chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ tuyệt đối. Theo định nghĩa hội tụ tuyệt đối và tiêu chuẩn Cauchy (đối với chuỗi số thực) ta có: với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$  và mọi  $p \geq 1$  ta có

$$|z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức tam giác ta có thể thấy rằng

$$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}|.$$

Từ hai bất đẳng thức trên và tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi số phức ta suy ra được chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ.  $\square$

Thí dụ sau cho chúng ta thấy mệnh đề đảo của định lý trên là không đúng. Nghĩa là từ tính hội tụ của chuỗi số phức ta không suy ra được tính hội tụ tuyệt đối của nó.

**1.25 Thí dụ.** Xét chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos n}{n} + i \frac{\sin n}{n} \right)$ . Vì  $|\frac{e^{in}}{n}| = \frac{1}{n}$  nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{e^{in}}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  phân kỳ, suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$  không hội tụ tuyệt đối. Trong khi đó các chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  hội tụ, cho nên chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$  hội tụ.  $\square$

**1.26 Định lý.** *Giả sử chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ tuyệt đối và  $\delta : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  là một song ánh. Khi đó, chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\delta(n)}$  hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\delta(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ .*

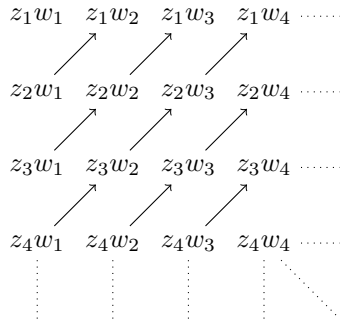
*Chứng minh.* Với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, lấy số tự nhiên  $n_\varepsilon$  sao cho  $\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |z_n| < \varepsilon$ . Đặt  $m = \max\{\delta^{-1}(1), \dots, \delta^{-1}(n_\varepsilon)\} \geq n_\varepsilon$ . Khi đó, với  $n > m$  ta có

$$\left| \sum_{k=1}^n z_{\delta(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} z_k \right| \leq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |z_k| < \varepsilon.$$

Do đó, ta được  $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\delta(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ .  $\square$

**1.27 Định nghĩa.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  được gọi là **tích Cauchy** của hai chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  nếu  $c_n = \sum_{k=1}^n z_k w_{n+1-k}$ .

Tích Cauchy được minh họa bởi sơ đồ sau (mỗi  $c_n$  là tổng của các số hạng trên đường chéo theo hướng mũi tên)



Ta có thể thấy rằng chuỗi tích Cauchy  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  chứa tất cả các tích có dạng  $z_i w_j$  với  $i, j = 1, 2, \dots$  và mỗi tích chỉ xuất hiện một lần (tích  $z_i w_j$  chỉ xuất hiện một lần trong số hạng  $c_{i+j-1}$ ).

**1.28 Định lý. (Merten)** Nếu trong hai chuỗi hội tụ  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  có một chuỗi hội tụ tuyệt đối thì tích Cauchy của hai chuỗi ấy  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ tuyệt đối, nghĩa là chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  hội tụ. Đặt  $s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ,  $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ,  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ ,  $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$ ,  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n w_k$ ,  $\delta_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k z_l w_{k+1-l}$ , và  $\rho_n = \sigma - \sigma_n$ . Ta



biến đổi được

$$\begin{aligned}
 \delta_n &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k z_l w_{k+1-l} \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=l}^n z_l w_{k+1-l} \\
 &= \sum_{l=1}^n z_l \sum_{k=1}^{n+1-l} w_k \\
 &= \sum_{l=1}^n z_l \sigma_{n+1-l} \\
 &= \sum_{l=1}^n z_l (\sigma - \rho_{n+1-l}) \\
 &= \sigma \sum_{l=1}^n z_l - \sum_{l=1}^n z_l \rho_{n+1-l} \\
 &= \sigma s_n - \sum_{l=1}^n z_{n+1-l} \rho_l.
 \end{aligned}$$

Rõ ràng ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ , cho nên với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N_1 > 0$  sao cho với mọi  $n > N_1$  ta có  $|\rho_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ . Vậy với  $n > N_1$  ta có

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{l=1}^n z_{n+1-l} \rho_l \right| &\leq \sum_{l=1}^{N_1} |z_{n+1-l}| |\rho_l| + \sum_{l=N_1+1}^n |z_{n+1-l}| |\rho_l| \\
 &\leq \sum_{l=1}^{N_1} |z_{n+1-l}| |\rho_l| + \sum_{l=N_1+1}^n |z_{n+1-l}| \frac{\varepsilon}{2\alpha} \\
 &\leq \sum_{l=1}^{N_1} |z_{n+1-l}| |\rho_l| + \frac{\varepsilon}{2\alpha} \alpha
 \end{aligned}$$

(vì  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \alpha$  nên  $\sum_{l=N_1+1}^n |z_{n+1-l}| \leq \alpha$ ). Mặt khác, do  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  (Định lý 1.19), suy ra tồn tại  $N_2$  sao cho  $|z_n| < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{l=1}^{N_1} |\rho_l|}$  với mọi  $n > N_2$ . Đặt  $N = N_1 + N_2$ . Khi đó, với  $n > N$  ta suy ra được  $\sum_{l=1}^{N_1} |z_{n+1-l}| |\rho_l| \leq \sum_{l=1}^{N_1} \frac{\varepsilon}{2 \sum_{l=1}^{N_1} |\rho_l|} |\rho_l| = \frac{\varepsilon}{2}$ . Vậy với mọi  $n > N$  ta có  $\left| \sum_{l=1}^n z_{n+1-l} \rho_l \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , cho nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n z_{n+1-l} \rho_l = 0$ .

Do đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n z_{n+1-l} \rho_l = \sigma s,$$

nghĩa là chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  hội tụ và có tổng là  $\sigma s$ .  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh các tính chất còn lại của Định lý 1.4.

2) Cho dãy số  $\{z_n\}$  với  $z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ . Chứng minh rằng nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  với  $z_0 = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$ .

3) Chứng minh rằng nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$ .

4) Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_0^n$  với  $z_0$  là hằng số phức.

5) Cho  $z_0 = x_0 + iy_0$  là một hằng số phức. Tính

(a)  $|1 + \frac{z_0}{n}|$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} |1 + \frac{z_0}{n}|^n$

(b)  $\text{Arg}(1 + \frac{z_0}{n})$  (khi  $n$  đủ lớn) và  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg}(1 + \frac{z_0}{n})^n$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z_0}{n})^n$ .

6) Chứng minh rằng điểm  $z_0$  là điểm giới hạn của tập  $E$  khi và chỉ khi tồn tại dãy điểm  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq E$  sao cho  $z_n \neq z_m$  với  $n \neq m$  và dãy  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

7) Chứng minh rằng tập  $A \subset \mathbb{C}$  là đóng nếu và chỉ nếu đối với mọi dãy  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  trong  $A$  mà  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  đều có  $a \in A$ .

8) Chứng minh rằng nếu dãy  $\{z_n\}_n$  hội tụ về  $a$  thì tập  $\{a, z_1, z_2, \dots\}$  là tập compact.

9) Cho  $D$  là một miền và  $K$  là một tập compact trong  $D$ . Chứng minh rằng  $d(K, \partial D) > 0$ .

**10)** Cho  $A$  là tập compact và  $d \geq 0$  tùy ý. Chứng minh rằng tập  $B = \{z : d(z, A) \leq d\}$  là compact.

**11)** Chứng minh Định lý 1.14.

**12)** Chứng minh Định lý 1.18.

**13)** Chứng minh rằng nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$  thì  $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$ .

**14)** Chứng minh Định lý 1.21.

**15)** Với  $0 \leq r < 1$ , chứng minh rằng  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ .

**16)** Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i \cos n}{2^n}$

**17)** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + i4^n}{(3 - 2i)^n}$ . Tính tổng nếu nó hội tụ.

**18)** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  và tính tích  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$ .

**19)** Chứng minh  $\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

**20)** Chứng minh rằng nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  hội tụ và  $|\arg z_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  thì chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

**21)** Cho các chuỗi hội tụ  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ . Chứng minh nếu  $\operatorname{Re} z_n \geq 0$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$  hội tụ.

**22)** Chứng minh rằng nếu các chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  hội tụ tuyệt đối thì chuỗi tích Cauchy của chúng  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  cũng hội tụ tuyệt đối và  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ .

**23)** Chứng minh rằng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  hội tụ nếu thỏa các điều kiện sau

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} b_n = 0$
- (ii) chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} |b_n - b_{n+1}|$  hội tụ,
- (iii) dãy  $\left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\}$  bị chặn, ở đây  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ .

*Hướng dẫn: Dùng tiêu chuẩn hội tụ Cauchy và phép biến đổi Abel.*

## § 2 Hàm số biến số phức

### Định nghĩa hàm số biến số phức

**2.1 Định nghĩa.** Giả sử  $D \subseteq \mathbb{C}$  là một tập tùy ý cho trước. Một ánh xạ  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  được gọi là **hàm số biến số phức** (gọi ngắn gọn *hàm số phức*). Thường người ta ký hiệu hàm biến phức đó là  $w = f(z)$ . Tập  $D$  được gọi là **tập xác định** của hàm  $f$ . Tập  $\{f(z) : z \in D\}$  được gọi **tập giá trị** của hàm  $f$ .

Khi  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  là một đơn ánh, thì hàm  $f$  được gọi là **đơn điệu**. Có thể xảy ra trường hợp  $f$  không đơn điệu trên  $D$  nhưng có thể chia  $D$  thành các tập con  $D_i$  lớn nhất mà trên đó  $f$  là đơn điệu. Khi đó, mỗi  $D_i$  được gọi là *miền đơn điệu*.

**2.2 Thí dụ.** Xét hàm số  $f(z) = z^2$ . Rõ ràng hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{C}$ . Hàm này không là hàm đơn điệu vì  $f(1) = f(-1) = 1$ . Ta có thể kiểm chứng được hai tập  $\{z : \operatorname{Re} z > 0 \text{ hay } z = (0, y) \text{ với } y \leq 0\}$  và  $\{z : \operatorname{Re} z < 0 \text{ hay } z = (0, y) \text{ với } y \geq 0\}$  là miền đơn điệu của hàm  $f$ .  $\square$

Xét hàm số biến số phức  $w = f(z)$  xác định trên  $D$ . Với  $z \in D$ , đặt  $z = x + iy$  và  $w = u + iv$ . Rõ ràng  $w$  phụ thuộc vào  $z$ , nên nó phụ thuộc vào  $(x, y)$ . Do đó,  $u$  và  $v$  phụ thuộc vào  $(x, y)$ . Khi đó, ta được hai hàm số thực hai biến số xác định trên  $D$  là  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$ . Vậy ta viết lại hàm  $f$  như sau

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

trong đó  $u(x, y)$  được gọi là *hàm phần thực* và  $v(x, y)$  được gọi là *hàm phần ảo* của  $f$ . Ngược lại, rõ ràng với hai hàm thực hai biến  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  cùng xác định trên  $D$  ta xác định được một hàm biến phức  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  với  $z = x + iy$  xác định trên  $D$ .

**2.3 Thí dụ.** Xét hàm số  $f(z) = z^2$ . Rõ ràng hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{C}$ . Với  $z = x + iy$ , ta có  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ . Vậy

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy, \quad \begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy. \end{cases} \quad \square$$

**2.4 Thí dụ.** Có hai hàm  $u(x, y) = x + y^2$  và  $v(x, y) = 2x^2 - 3y$  xác định trên  $\mathbb{R}^2$ . Ta có được hàm phức tương ứng xác định trên  $\mathbb{C}$  là

$$\begin{aligned} f(z) &= x + y^2 + i(2x^2 - 3y) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + i\left(2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - 3\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{3}{2}(z - \bar{z}) - \frac{(z - \bar{z})^2}{4} + i\frac{(z + \bar{z})^2}{2} \\ &= 2\bar{z} - z - \frac{(z - \bar{z})^2}{4} + i\frac{(z - \bar{z})^2}{2}, \end{aligned}$$

lưu ý  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  và  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .  $\square$

Giả sử  $z \in D$  và  $z \neq 0$ , nên nó viết được ở dạng lượng giác hay dạng Euler  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$ . Khi đó,  $u$  và  $v$  trong  $f(z) = u + iv$  là hàm số thực theo các biến  $r$  và  $\varphi$ , nên ta viết lại

$$f(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

**2.5 Định nghĩa.** Cho hàm  $f$  là đơn diệp trên  $D$ . Khi đó,  $f : D \rightarrow f(D)$  là một song ánh, cho nên tồn tại ánh xạ ngược ký hiệu  $f^{-1}$  xác định trên  $f(D)$  và có  $f^{-1}(w) = z$  khi và chỉ khi  $f(z) = w$ , và  $f^{-1}$  được gọi là **hàm ngược** của  $f$  và nó là đơn diệp.

**2.6 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = \frac{1}{az+b}$  với  $a \neq 0$  xác định trên  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ .

Hàm  $f$  là một hàm đơn diệp nên nó có hàm ngược là  $f^{-1}(z) = \frac{1}{az} - \frac{b}{a}$  xác định trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**2.7 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = z^2$  xác định trên tập  $\{z : \operatorname{Re} z > 0 \text{ hay } z = (0, y) \text{ với } y \leq 0\}$ . Khi đó,  $f$  là một song ánh cho nên tồn tại hàm ngược. Hàm ngược của nó xác định bởi  $f^{-1}(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$  với  $z = re^{i\varphi}$  và  $-\pi \leq \varphi < \pi$ .  $\square$

Bởi vì  $\mathbb{C}$  có thể được xem là  $\mathbb{R}^2$ , không gian thực hai chiều, nên ta không thể biểu diễn đồ thị của một hàm phức (tập hợp trong không gian  $\mathbb{R}^4$ ). Chúng ta chỉ biểu diễn ảnh của một tập nào đó qua  $f$ . Thông thường, người ta biểu diễn ảnh của các đường thẳng song song với hai trục tọa độ, các tia xuất phát từ 0, các đường tròn tâm 0; để từ đó xác định ảnh của một miền đặc biệt nào đó qua  $f$  hay có thể giúp ta nghiệm lại  $f$  có là đơn ánh trên một miền nào đó hay không, và có thể giúp ta xác định miền đơn diệp của hàm  $f$ .

## Giới hạn của hàm số

**2.8 Định nghĩa.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $D$  và  $z_0$  là điểm tụ của  $D$ . Ta nói số phức  $w_0$  là **giới hạn** của hàm  $f$  khi  $z$  dần đến  $z_0$  và viết

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $0 < |z - z_0| < \delta$  ta luôn có  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

**2.9 Thí dụ.** Từ định nghĩa ta có thể thấy ngay  $\lim_{z \rightarrow z_0} c = c$  (hằng số) và  $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$ .  $\square$

Ta nhận thấy định nghĩa giới hạn của hàm số biến số phức tương tự như định nghĩa giới hạn của hàm số thực. Ta có định lý sau (phép chứng minh tương tự như định lý tương ứng trong hàm số thực).

**2.10 Định lý.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $D$ . Ta có  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  khi và chỉ khi với mọi dãy  $\{z_n\}$  trong  $D \setminus \{z_0\}$  hội tụ về  $z_0$  ta luôn có  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ . Với  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  nếu  $0 < |z - z_0| < \delta$  thì  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ . Với  $\{z_n\}$  là một dãy tùy ý trong  $D$  hội tụ về  $z_0$ . Với  $\delta > 0$  ở trên, tồn tại  $N > 0$  sao cho  $|z_n - z_0| < \delta$  với mọi  $n > N$ . Với mọi  $n > N$ , ta có  $0 < |z_n - z_0| < \delta$  suy ra  $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon$ . Điều đó có nghĩa là  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0$ .

Ngược lại, giả sử  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq w_0$ . Khi đó, tồn tại  $\varepsilon_0 > 0$ , với mọi  $\delta > 0$  luôn tìm được  $z \in D$  thỏa  $0 < |z - z_0| < \delta$  nhưng  $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0$ . Do đó, mỗi số tự nhiên  $n \neq 0$ , tồn tại  $z_n \in D \setminus \{z_0\}$  sao cho  $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$  nhưng  $|f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon_0$ . Rõ ràng dãy  $\{z_n\} \subset D \setminus \{z_0\}$  hội tụ về  $z_0$  nhưng  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) \neq w_0$ .  $\square$

Ta có mối liên hệ giữa giới hạn hàm số biến số phức và giới hạn hàm biến số thực như sau.

**2.11 Định lý.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $D$  và  $z_0 = x_0 + iy_0$  là điểm tụ của  $D$ . Với  $w_0 = u_0 + iv_0$  và  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , ta có

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0. \end{cases}$$

*Chứng minh.* Giả sử ta có  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ . Khi đó, với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước tùy ý, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho khi  $z \in D$  thỏa  $0 < |z - z_0| < \delta$  ta có  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ . Mặt khác,  $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Do đó, khi  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  ta có  $|u(x, y) - u_0| = |\operatorname{Re}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon$  và  $|v(x, y) - v_0| = |\operatorname{Im}(f(z) - w_0)| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon$ . Vậy ta suy ra được  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$  và  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$ .

Giả sử  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$  và  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$ . Khi đó, với  $\varepsilon > 0$  cho trước tùy ý, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho khi  $(x, y) \in D$  thỏa  $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  ta có  $|u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  và  $|v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ . Suy ra khi  $0 < |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  ta có

$$|f(z) - w_0| = \sqrt{(u(x, y) - u_0)^2 + (v(x, y) - v_0)^2} < \varepsilon.$$

Vậy  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ .  $\square$

**2.12 Thí dụ.** Xét hàm số  $f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ . Với  $z = x + iy \neq 0$ , ta có

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left( \frac{x^2 - y^2 + i2xy}{x^2 + y^2} - \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Trong giải tích thực ta biết rằng  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  không tồn tại. Vậy  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  không tồn tại.  $\square$

Từ định lý trên, tương tự như hàm số nhiều biến số thực, ta có các tính chất sau về giới hạn của hàm số biến số phức.

**2.13 Định lý.** Nếu các hàm  $f$  và  $g$  có giới hạn khi  $z$  dần về  $z_0$  thì các hàm  $cf$ ,  $f + g$ ,  $fg$  và  $f/g$  cũng có giới hạn khi  $z$  dần về  $z_0$ , và

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = c \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ với } c \text{ là một hằng số phức.}$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

$$(4) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \text{ với điều kiện biểu thức có nghĩa.}$$

**2.14 Thí dụ.** Dùng qui nạp và các tính chất trong định lý trên ta có

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n \qquad \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$$

với  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$  là một đa thức trên  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Từ định nghĩa giới hạn của hàm số biến số phức ta thấy nó tương tự như định nghĩa giới hạn của hàm số biến số thực. Ta cũng có thể định nghĩa giới hạn liên quan đến điểm vô cùng.

**2.15 Định nghĩa.** Cho hàm số biến số phức  $f$  có tập xác định không bị chặn. Hàm  $f(z)$  có giới hạn  $\infty$  khi  $z$  dần ra  $\infty$  nếu với mọi  $M > 0$  lớn tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $z \in D_f$  thỏa  $|z| > N$  ta có  $|f(z)| > M$ . Khi đó, ta kí hiệu  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

Tương tự ta có định nghĩa cho  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$  và  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Từ các định nghĩa giới hạn của hàm số biến số phức ta có các tính chất được nêu trong định lý sau.

**2.16 Định lý.** (1)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  khi và chỉ khi  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ .



$$(2) \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \text{ khi và chỉ khi } \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0.$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \text{ khi và chỉ khi } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

**2.17 Thí dụ.** Tính giới hạn  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 - 1}{z^2 + 1}$ . Ta có

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z^2} + 1}{\frac{2}{z^3} - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z^3}{2 - z^3} = 0.$$

Vậy  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 - 1}{z^2 + 1} = \infty.$

□

## Bài tập

1) Tìm miền đơn diện của hàm Joukowski  $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ .

2) Chứng minh Định lý 2.13.

3) Phát biểu định nghĩa giới hạn  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ .

4) Phát biểu định nghĩa giới hạn  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

5) Chứng minh Định lý 2.16.

6) Tính các giới hạn sau nếu có

(a)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$

(b)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$

(c)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$

(d)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$

(e)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$

(f)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + z - 2\bar{z}}{z + 3\operatorname{Im}(z)}$

7) Chứng minh rằng  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 0$  nếu và chỉ nếu  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{|z|} = 0$ . Điều đó có nghĩa là  $f(z) = o(z)$  khi và chỉ khi  $f(z) = o(|z|)$ .

### § 3 Liên tục và liên tục đều

#### Các khái niệm

**3.1 Định nghĩa.** Cho hàm  $f$  xác định trên  $D \subseteq \mathbb{C}$  và  $z_0 \in D$ . Ta nói hàm  $f$  **liên tục tại**  $z_0$  nếu  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ . Nếu hàm  $f$  liên tục tại mọi điểm  $z \in D$ , thì ta nói hàm  $f$  **liên tục trên**  $D$ .

**3.2 Thí dụ.** Từ định nghĩa ta có thể nhận thấy các hàm  $f(z) = c$  (hằng số) và  $g(z) = z$  liên tục trên  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Từ các tính chất giới hạn của hàm số biến số phức ta có thể chứng minh được các tính chất sau.

**3.3 Định lý.** Hàm  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  liên tục tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  khi và chỉ khi  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  liên tục tại  $(x_0, y_0)$ .

*Chứng minh.* Định lý suy ra được từ định nghĩa liên tục và Định lý 2.11.  $\square$

**3.4 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = z^2$ . Với  $z = x+iy$  ta có  $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ . Ta có  $u(x, y) = x^2 - y^2$  và  $v(x, y) = 2xy$  là các hàm liên tục trên  $\mathbb{R}^2$ . Vậy hàm  $f(z)$  liên tục trên  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**3.5 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Với  $z = x+iy \neq 0$  ta có  $f(x+iy) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ . Vì các hàm  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$  và  $v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$  liên tục trên  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  cho nên hàm  $f(z)$  liên tục trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**3.6 Định lý.** Tổng, tích, thương (mẫu khác không) của các hàm liên tục là một hàm liên tục. Tích của một hằng số phức với một hàm liên tục là một hàm liên tục.

*Chứng minh.* Định lý được suy ra từ định nghĩa liên tục và Định lý 2.13.  $\square$

**3.7 Thí dụ.** Ta đã biết các hàm  $f(z) = z$  và  $g(z) = z^2$  liên tục trên  $\mathbb{C}$ . Dùng qui nạp và định lý trên ta có thể chứng minh được hàm  $h(z) = z^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$  và hàm đa thức liên tục trên  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**3.8 Định lý.** Nếu hàm  $f(z)$  liên tục tại  $z_0$  thì hàm  $|f(z)|$  cũng liên tục tại  $z_0$ .

*Chứng minh.* Với mọi  $\varepsilon > 0$ , do hàm  $f$  liên tục tại  $z_0$  nên tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D_f$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Mặt khác, ta luôn có bất đẳng thức  $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|$ . Do đó, từ định nghĩa giới hạn của hàm nhiều biến thực ta suy ra được  $|f(z)|$  liên tục tại  $z_0$ .  $\square$

**3.9 Định nghĩa.** Một song ánh  $f : D \rightarrow D'$  được gọi là một **phép đồng phôi** nếu nó và ánh xạ ngược của nó là các hàm liên tục. Khi đó, ta nói  $D$  và  $D'$  **đồng phôi** nhau.

**3.10 Định nghĩa.** Hàm  $f(z)$  được gọi là **liên tục đều** trên  $D$  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z, z' \in D$  mà  $|z - z'| < \delta$  ta có  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ .

**3.11 Định lý.** Nếu hàm  $f$  liên tục đều trên  $D$  thì nó là hàm liên tục trên  $D$ .

*Chứng minh.* Với  $\varepsilon > 0$  cho trước, do  $f$  liên tục đều trên  $D$  nên tồn tại  $\delta > 0$  sao cho khi  $z, z' \in D$  thỏa  $|z - z'| < \delta$  ta có  $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ . Với  $z_0 \in D$  tùy ý, với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta phải có  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Điều này có nghĩa là hàm  $f$  liên tục tại  $z_0$ . Do ta lấy  $z_0 \in D$  tùy ý, nên  $f$  liên tục trên  $D$ .  $\square$

Điều ngược lại của định lý trên là không đúng. Ta sẽ thấy điều đó trong thí dụ sau.

**3.12 Thí dụ.** Ta xét hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  trên tập  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ . Rõ ràng hàm  $f(z)$  liên tục trên  $D$  (xem Thí dụ 3.5). Ta sẽ chứng minh nó không liên tục đều trên  $D$ . Lấy  $\varepsilon = 1$ , khi đó với mọi  $\delta > 0$  chọn  $n$  sao cho  $n > \frac{1}{\delta}$ . Chọn  $z = \frac{1}{n}$  và  $z' = \frac{1}{2n}$  thuộc  $D$ . Ta có

$$|z - z'| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

nhưng

$$|f(z) - f(z')| = \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \right| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

Vậy  $f(z)$  không liên tục đều trên  $D$ .  $\square$

## Tính chất của hàm liên tục

**3.13 Định lý.** Nếu  $f$  là hàm liên tục và  $E$  là tập liên thông trong tập xác định của  $f$  thì  $f(E)$  là tập liên thông.

*Chứng minh.* Giả sử  $f(E)$  không là tập liên thông. Khi đó, tồn tại hai tập mở  $A$  và  $B$  thỏa  $f(E) \cap A \neq \emptyset$ ,  $f(E) \cap B \neq \emptyset$ ,  $f(E) \cap A \cap B = \emptyset$ ,  $f(E) \subseteq A \cup B$ . Do  $f$  liên tục nên  $f^{-1}(A)$  và  $f^{-1}(B)$  mở. Ta nhận thấy  $E \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$ ,  $E \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ ,  $E \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  và  $E \cap f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ . Do đó,  $E$  không là tập liên thông. Đó là điều vô lý. Vậy  $f(E)$  là tập liên thông.  $\square$

**3.14 Định lý.** Nếu hàm  $f$  liên tục trên tập compact  $K$  thì  $f$  liên tục đều trên  $K$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $f$  không liên tục đều trên  $K$ . Khi đó, tồn tại  $\varepsilon > 0$  sao cho với mọi  $\delta > 0$  tồn tại  $z, z' \in D$  thỏa  $|z - z'| < \delta$  nhưng  $|f(z) - f(z')| \geq \varepsilon$ . Do đó, với mỗi  $n \in \mathbb{N}^+$ , tồn tại  $z_n$  và  $z'_n$  thỏa  $|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$  nhưng  $|f(z_n) - f(z'_n)| \geq \varepsilon$ . Vì  $K$  là tập compact nên dãy  $\{z_n\}$  trong  $K$  bị chặn; do đó, theo định lý Bolzano-Weierstrass tồn tại dãy con  $\{z_{n_k}\}$  hội tụ. Đặt  $z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ , ta có  $z_0 \in K$  (do  $K$  compact). Do  $|z_{n_k} - z'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$  nên  $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_{n_k} - z'_{n_k}) = 0$ , suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} z'_{n_k} = z_0$ . Do hàm  $f$  liên tục trên  $K$  nên ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)$  và  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z'_{n_k}) = f(z_0)$ , suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})) = 0$ . Điều này mâu thuẫn với  $|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| \geq \varepsilon$  với mọi  $k$ . Do đó,  $f$  phải liên tục đều trên  $K$ .  $\square$

**3.15 Định lý.** Nếu hàm  $f$  liên tục trên tập compact  $K$  thì  $|f(z)|$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên  $K$ .

*Chứng minh.* Ta có  $f(z)$  liên tục trên  $K$ , nên theo Định lý 3.8 hàm nhiều biến thực  $|f(z)|$  liên tục trên  $K$ . Vì  $K$  là tập compact trong  $\mathbb{R}^2$  nên  $|f(z)|$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên  $K$ .  $\square$

**3.16 Định lý.** Nếu hàm  $f$  liên tục trên tập compact  $K$  thì  $f(K)$  là compact.

*Chứng minh.* Lấy một dãy  $\{w_n\}$  bất kỳ thuộc  $f(K)$ . Khi đó, với mỗi  $n$ , tồn tại  $z_n \in K$  sao cho  $f(z_n) = w_n$ . Vậy ta được dãy  $\{z_n\}$  thuộc  $K$  compact. Suy ra tồn tại dãy con  $\{z_{n_k}\}$  của  $\{z_n\}$  hội tụ về một điểm thuộc

$K$ . Đặt  $z_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ . Ta có  $z_0 \in K$ , suy ra  $f(z_0) \in f(K)$ . Hơn nữa, hàm  $f$  liên tục trên  $K$  nên  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(z_0)$ . Nghĩa là dãy con  $\{w_{n_k}\}$  của dãy  $\{w_n\}$  hội tụ về  $f(z_0) \in f(K)$ . Vậy  $f(K)$  là tập compact (theo Định lý 1.10).  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  liên tục tại  $z_0$  và  $f(z_0) \neq 0$  thì  $f(z) \neq 0$  trong lân cận của  $z_0$ .

2) Chứng minh rằng  $f$  là hàm liên tục khi và chỉ khi với mỗi tập mở  $E$  ta có  $f^{-1}(E)$  là tập mở.

3) Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  liên tục tại  $z_0$  và hàm  $g$  liên tục tại  $f(z_0)$ , thì hàm  $g \circ f$  liên tục tại  $z_0$ .

4) Chứng minh rằng tồn tại một song ánh  $f$  từ  $B(0, 1)$  lên  $\mathbb{C}$  sao cho cả  $f$  và  $f^{-1}$  là liên tục. Ta nói rằng  $f$  là một *đồng phôi* từ  $B(0, 1)$  lên  $\mathbb{C}$ .

5) Xét sự liên tục đều của hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  trên  $D = \{z : 1 \leq |z| < 2\}$ .

6) Xét sự liên tục đều của hàm  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  trong hình tròn đơn vị  $\{z : |z| < 1\}$ .

7) Xét sự liên tục đều của hàm  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  trong hình tròn đơn vị  $\{z : |z| < 1\}$ .

8) Cho hàm số  $f(z)$  liên tục đều trong hình tròn  $\{z : |z| < 1\}$ . Chứng minh rằng với một điểm  $z_0$  bất kỳ trên đường tròn đơn vị  $|z| = 1$  và với dãy  $\{z_n\}$  với  $|z_n| < 1$  với mọi  $n$  hội tụ về  $z_0$ , tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  và giới hạn này chỉ phụ thuộc vào  $z_0$ .

9) Chứng minh rằng hàm  $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$  liên tục đều trong hình tròn  $|z| \leq r$  bỏ đi điểm  $z = 0$ .

## § 4 Dãy hàm và chuỗi hàm

### Dãy hàm

**4.1 Định nghĩa.** Giả sử có một họ  $\mathcal{F}$  các hàm số biến số phức cùng xác định trên  $D$ . **Dãy hàm** là một ánh xạ từ  $\mathbb{N}^+$  đến  $\mathcal{F}$  và  $n \mapsto f_n$ . Người ta thường ký hiệu dãy hàm bởi  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  hay  $\{f_n\}$ , và liệt kê nó

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Ta nói dãy hàm  $\{f_n\}$  **hội tụ tại**  $z_0 \in D$  nếu dãy số  $\{f_n(z_0)\}$  hội tụ. Dãy hàm  $\{f_n\}$  được gọi là **hội tụ trên**  $D$  nếu nó hội tụ tại mọi điểm  $z \in D$ . Khi đó, ta được một hàm  $f$  xác định trên  $D$  được cho bởi  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  với mỗi  $z \in D$ . Hàm  $f$  này được gọi là **giới hạn của dãy hàm**  $\{f_n\}$  và viết  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

**4.2 Thí dụ.** Dãy hàm  $\{z^n\}$  hội tụ về 0 khi  $|z| < 1$ , hội tụ về 1 khi  $z = 1$ , và phân kỳ trong các trường hợp khác.  $\square$

**4.3 Định nghĩa.** Ta nói dãy hàm  $\{f_n\}$  **hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$**  nếu với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  đúng với mọi  $n > N$  và mọi  $z \in D$ .

**4.4 Thí dụ.** Dãy hàm  $\{z^n\}$  hội tụ đều trên hình tròn  $\{z : |z| \leq r, 0 < r < 1\}$ . Hàm giới hạn là hàm hằng có giá trị 0 trên tập ấy. Thật vậy, vì  $0 < r < 1$  nên với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $N > 0$  sao cho  $r^n < \varepsilon$  với mọi  $n > N$ . Do đó,  $|z^n - 0| = |z|^n \leq r^n < \varepsilon$  với mọi  $z \in \{z : |z| \leq r, 0 < r < 1\}$  và mọi  $n > N$ .  $\square$

**4.5 Định lý.** Nếu dãy  $\{f_n\}$  hội tụ đều về hàm  $f$  thì nó hội tụ về hàm  $f$ .

*Chứng minh.* Ta thấy ngay từ định nghĩa của hội tụ đều và hội của dãy hàm và sự hội tụ theo điểm của dãy hàm.  $\square$

Mệnh đề đảo của định lý trên là sai. Ta thấy điều đó qua thí dụ sau.

**4.6 Thí dụ.** Xét dãy hàm  $\{f_n\}$  với  $f_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$  xác định trên  $D = \{z : |z| < 1\}$ . Với  $|z| < 1$ , ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

Nghĩa là dãy hàm đã cho hội tụ về  $\frac{1}{1-z}$  trên  $D$ . Tuy nhiên, dãy hàm đã cho không hội tụ đều trên  $D$ . Thật vậy, với  $\varepsilon = 1$ , với mọi  $N > 0$  lấy  $n > N$  và đủ lớn, lấy  $z_n = 1 - \frac{1}{n} \in D$  ta có

$$\left| \frac{1 - z_n^{n+1}}{1 - z_n} - \frac{1}{1 - z_n} \right| = n \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n+1} > 1 = \varepsilon. \quad \square$$

**4.7 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy)** Điều kiện cần và đủ để dãy hàm  $\{f_n(z)\}$  hội tụ đều trên tập  $D$  là với mỗi số  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số tự nhiên  $N$  sao cho với mọi  $n > N$  và với mọi  $p$  nguyên dương ta có

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in D.$$

*Chứng minh.* Giả sử dãy hàm  $\{f_n(z)\}$  hội tụ đều về  $f(z)$  trên  $D$ . Thế thì, với  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số tự nhiên  $N$  sao cho

$$(\forall n > N)(\forall z \in D)(|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

suy ra

$$(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in D)(|f_{n+p}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Từ đó ta có  $(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in D)$

$$|f_{n+p}(z) - f_n(z)| \leq |f_{n+p}(z) - f(z)| + |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bây giờ giả sử rằng với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại số tự nhiên  $N$  sao cho

$$(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall z \in D)(|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon)$$

Cố định  $z \in D$  thì  $\{f_n(z)\}$  là dãy số. Theo giả thiết trên thì dãy số  $\{f_n(z)\}$  là dãy Cauchy. Khi đó, theo tiêu chuẩn Cauchy cho dãy số thì dãy  $\{f_n(z)\}$  hội tụ về một số đặt là  $f(z)$  nghĩa là  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ . Từ đó suy ra  $\lim_{p \rightarrow \infty} |f_{n+p}(z) - f_n(z)| = |f(z) - f_n(z)|$ . Nhưng do  $|f_{n+p}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$  với mọi  $n > N$  và mọi  $p \in \mathbb{N}$  nên ta suy ra được  $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ . Vậy

$$(\forall n > N)(\forall x \in D)(|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon),$$

cho nên dãy hàm  $\{f_n(z)\}$  hội tụ về  $f(z)$ .  $\square$

**4.8 Định lý.** Cho  $\{f_n\}$  là dãy các hàm liên tục hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$ . Khi đó, hàm  $f$  liên tục trên  $D$ .

*Chứng minh.* Hoàn toàn tương tự như chứng minh ở đây hàm thực, xin dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

Bây giờ ta xét mối liên hệ giữa dãy hàm với các dãy hàm thực tương ứng của nó. Xét dãy hàm  $\{f_n\}$  với  $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$  với  $z = x + iy$ . Tương tự như giới hạn của hàm số và giới hạn của dãy số ta có các kết quả sau:

**4.9 Định lý.** Dãy hàm  $\{f_n\}$  với  $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$  với  $z = x + iy$  hội tụ tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  khi và chỉ khi cả hai dãy hàm thực  $\{u_n(x, y)\}$  và  $\{v_n(x, y)\}$  hội tụ tại  $(x_0, y_0)$  và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0, y_0) + i \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x_0, y_0).$$

**4.10 Định lý.** Dãy hàm  $\{f_n\}$  với  $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$  với  $z = x + iy$  hội tụ đều trên  $D$  khi và chỉ khi các dãy hàm thực  $\{u_n(x, y)\}$  và  $\{v_n(x, y)\}$  hội tụ đều trên  $D$ .

**4.11 Định nghĩa.** Ta nói dãy  $\{f_n\}$  **hội tụ đều trên mọi tập compact** trong  $D$  tới hàm  $f$  nếu mọi tập compact  $K \subset D$  với mọi  $\varepsilon > 0$  tìm được  $N$  sao cho  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  với mọi  $z \in K$  và mọi  $n > N$ ; nghĩa là  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên  $K$ .

**4.12 Định lý.** Cho  $D$  là một tập mở. Khi đó, dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  tới hàm  $f$  khi và chỉ nó hội tụ đều trên mọi hình tròn đóng trong  $D$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  tới hàm  $f$ . Ta biết rằng mỗi hình tròn đóng là tập compact, cho nên  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi hình tròn đóng trong  $D$ .

Ngược lại, lấy  $K$  là một tập compact bất kỳ trong  $D$ . Với mỗi  $x \in K \subset D$ , do  $D$  là tập mở nên tồn tại  $r_x > 0$  sao cho  $\bar{B}(x, r_x) \subset D$ . Rõ ràng  $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ , cho nên tồn tại  $x_1, \dots, x_n$  sao cho  $K \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, r_{x_j}) \subset \bigcup_{j=1}^n \bar{B}(x_j, r_{x_j})$ . Do  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên  $\bar{B}(x_j, r_{x_j})$  với  $j = 1, \dots, n$  cho nên cũng hội tụ đều trên  $K$ .  $\square$

**4.13 Định lý.** Giả sử mỗi hàm  $f_n$  liên tục trên tập mở  $D$  và dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  về hàm  $f$ . Khi đó,  $f$  liên tục trên  $D$ .



*Chứng minh.* Do  $D$  là tập mở nên với  $x \in D$  bất kỳ tồn tại  $r > 0$  sao cho  $\bar{B}(x, r) \subset D$ . Theo giả thiết  $\{f_n\}$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $\bar{B}(x, r)$ , dĩ nhiên cũng trên  $B(x, r)$ . Hơn nữa, các hàm  $f_n$  liên tục trên  $B(x, r)$ , suy ra (Định lý 4.8)  $f$  liên tục trên  $B(x, r)$ ; đặc biệt liên tục tại  $x$ . Vậy  $f$  liên tục trên  $D$ .  $\square$

## Chuỗi hàm

**4.14 Định nghĩa.** Cho dãy hàm  $\{f_n\}$  xác định trên  $D$ . Khi đó, tổng hình thức

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

được gọi là **chuỗi hàm trên  $D$** . Với mỗi  $n \geq 1$  và mỗi  $z \in D$ , đặt

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z),$$

ta nhận thấy  $S_n$  là một hàm số xác định trên  $D$ , và gọi là **tổng riêng thứ  $n$**  của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Khi đó, ta nhận được dãy hàm  $\{S_n\}$  xác định trên  $D$ . Chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  được gọi là **hội tụ tại điểm  $z_0 \in D$**  nếu dãy hàm  $\{S_n\}$  hội tụ tại  $z_0$ . Khi đó, ta cũng nói chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  **khả tổng tại  $z_0$**  và tổng của nó là  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z_0)$ ; ta ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z_0).$$

Nếu dãy hàm  $\{S_n\}$  hội tụ về  $f$  trên  $D$  thì ta nói chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  **hội tụ về  $f$**  và viết

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{hay} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D.$$

Nếu dãy hàm  $\{S_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $D$  thì ta nói chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  **hội tụ đều về  $f$**  trên  $D$ .

Như vậy, sự hội tụ và hội tụ đều của chuỗi hàm được định nghĩa theo dãy hàm (dãy tổng riêng) nên ta cũng có định lý sau.

**4.15 Định lý.** Mọi chuỗi hàm hội tụ đều trên  $D$ , thì hội tụ trên  $D$ .

Cũng như trường hợp dãy hàm, mệnh đề đảo của định lý trên không đúng.

**4.16 Thí dụ.** Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Ta nhận thấy  $S_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ , nên theo Thí dụ 4.6 chuỗi hàm đang xét hội tụ trên  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  nhưng không hội tụ đều trên tập ấy.  $\square$

**4.17 Định lý. (Tiêu chuẩn Cauchy)** Để chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  điều kiện cần và đủ là với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$ , với mọi  $p \geq 1$  và với mọi  $z \in D$  ta có

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

*Chứng minh.* Theo định nghĩa  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  khi và chỉ khi dãy tổng riêng xác định bởi  $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$  hội tụ đều trên  $D$ . Theo Định lý 4.7 điều đó tương đương: với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$ , mọi  $p \geq 1$  và mọi  $z \in D$  ta có  $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$  hay

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon. \quad \square$$

**4.18 Định lý.** Nếu chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  và  $\varphi(z)$  là một hàm bị chặn trên  $D$  thì chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z)f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$ .

*Chứng minh.* Do  $\varphi(z)$  bị chặn trên  $D$  nên tồn tại  $M > 0$  sao cho  $|\varphi(z)| \leq M$  với mọi  $z \in D$ . Với  $\varepsilon > 0$  tùy ý, do  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  nên tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$ , mọi  $p \geq 1$  và mọi  $z \in D$  ta có

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |\varphi(z)f_{n+1}(z) + \cdots + \varphi(z)f_{n+p}(z)| &= |\varphi(z)| |f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

với mọi  $n > N$  mọi  $p \geq 1$  và mọi  $z \in D$ . Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z)f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$ .  $\square$

**4.19 Định lý.** Nếu chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$  và  $f_n$  liên tục trên  $D$  với mọi  $n$ , thì hàm  $f$  là hàm liên tục trên  $D$ .

*Chứng minh.* Lấy  $z_0 \in D$  tùy ý và  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý. Do chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ đều về  $f$  trên  $D$ , nên tồn tại  $n_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $|S_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$  với mọi  $z \in D$ , trong đó  $S_{n_0}(z) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k(z)$ . Do các hàm  $f_n$  liên tục trên  $D$  với mọi  $n$  nên  $S_{n_0}(z)$  liên tục trên  $D$ , cụ thể là liên tục tại  $z_0$ . Khi đó, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có  $|S_{n_0}(z) - S_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Vậy với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - S_{n_0}(z)| + |S_{n_0}(z) - S_{n_0}(z_0)| \\ &\quad + |S_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy  $f$  liên tục tại  $z_0$ . Suy ra hàm  $f$  liên tục trên  $D$ .  $\square$

Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  của dãy  $\{f_n\}$ , đặt

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z), \quad z \in D.$$

$R_n$  được gọi là phần dư thứ  $n$  của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Người ta chứng minh được định lý sau.

**4.20 Định lý.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ tại  $z_0 \in D$  khi và chỉ khi dãy  $\{R_n(z_0)\}$  hội tụ về 0. Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ đều trên  $D$  khi và chỉ khi dãy  $\{R_n\}$  hội tụ đều về 0 trên  $D$ .

**4.21 Định nghĩa.** Chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  được gọi là **hội tụ tuyệt đối** tại  $z_0$  nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z_0)|$  là hội tụ.

**4.22 Thí dụ.** Ta biết rằng chuỗi hàm  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  hội tụ trên  $D = \{z : |z| < 1\}$ .

Hơn nữa, ta cũng thấy được chuỗi đang xét cũng hội tụ tuyệt đối trên  $D$ .  $\square$

**4.23 Định lý.** Nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

*Chứng minh.* Được suy ra từ các định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi hàm và Định lý 1.24.  $\square$

**4.24 Nhận xét.** Từ kết quả của định lý này và các tiêu chuẩn hội tụ D'Alembert và Cauchy của chuỗi số dương ta có thể tìm được phần nào tập các điểm hội tụ và phân kỳ của chuỗi hàm phức. Thật vậy xét chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ , xác định các giới hạn

$$\varphi(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} \quad \psi(z) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|}.$$

Khi đó, nếu  $\varphi(z) < 1$  hoặc  $\psi(z) < 1$  thì chuỗi đang xét hội tụ tuyệt đối (hội tụ) tại  $z$  còn nếu  $\varphi(z) > 1$  hoặc  $\psi(z) > 1$  thì chuỗi đang xét phân kỳ tại  $z$ .

**4.25 Thí dụ. (a)** Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!}$ . Ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{(n+1)^2} n!}{(n+1)! z^{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{2n+1}}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{khí } |z| \leq 1 \\ \infty & \text{khí } |z| > 1. \end{cases}$$

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ trên hình tròn xác định bởi  $|z| < 1$  và phân kỳ ngoài đường tròn có phương trình  $|z| = 1$

**(b)** Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z+n}{2nz} \right)^n$ . Ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{z+n}{2nz} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2|z|} \left| 1 + \frac{z}{n} \right| = \frac{1}{2|z|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right| = \frac{1}{2|z|}$$

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ khi  $\frac{1}{2|z|} < 1$  hay  $|z| > \frac{1}{2}$  và phân kỳ khi  $|z| < \frac{1}{2}$ .  $\square$

**4.26 Định lý. (Tiêu chuẩn Weierstrass)** Cho chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Nếu với mọi  $z \in D$  ta có  $|f_n(z)| < a_n$  với mọi  $n > n_0$  và chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ, thì chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên  $D$ .

*Chứng minh.* Với mỗi  $z_0 \in D$ , ta có  $|f_n(z_0)| \leq a_n$  với mọi  $n$ . Do  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ, nên  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z_0)|$  hội tụ. Vậy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ tuyệt đối trên  $D$ . Đặt  $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$  và  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ . Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N > 0$  sao cho  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$  với mọi  $n > N$ . Suy ra với mọi  $n > N$  và mọi  $z \in D$ , ta có

$$|S_n(z) - f(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

Vậy  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$ . □

**4.27 Định lý.** Giả sử chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều về hàm  $f(z)$  trên  $D$  và  $z_0 \in \partial D$ . Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f_n(z) = c_n \quad \text{với } n = 1, 2, \dots$$

Khi đó, chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  hội tụ và

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f_n(z).$$

*Chứng minh.* Với  $\varepsilon > 0$  cho trước do chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$ , với mọi  $p \geq 1$  và với mọi  $z \in D$  ta có

$$|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Do đó, ta có

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| \leq \varepsilon$$

hay

$$|c_{n+1} + \dots + c_{n+p}| \leq \varepsilon$$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  hội tụ.

Đặt  $c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ,  $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ . Khi đó, với mọi  $z \in D$  ta có

$$|f(z) - c| \leq |f(z) - S_n(z)| + \left| S_n(z) - \sum_{k=1}^n c_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n c_k - c \right|$$

Vì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều về hàm  $f(z)$  hay dãy  $\{S_n(z)\}$  hội tụ đều về hàm  $f(z)$  trên  $D$  và vì  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  hội tụ về  $c$  nên với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $n$  đủ lớn sao cho

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k - c \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{và} \quad |f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{với mọi } z \in D$$

Theo giả thiết ta thấy rằng  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} S_n(z) = \sum_{k=1}^n c_k$ . Do đó, với  $\varepsilon > 0$  đang xét tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có

$$\left| S_n(z) - \sum_{k=1}^n c_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vậy từ các kết quả trên với  $|z - z_0| < \delta$  và  $z \in D$  ta có

$$|f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Do đó, ta được  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in D}} f(z) = c = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ . □

**4.28 Nhận xét.** Từ định lý trên ta suy ra rằng nếu chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  và các hàm  $f_n(z)$  liên tục trên  $\bar{D}$  thì chuỗi cũng hội tụ đều trên  $\bar{D}$  và hàm tổng của nó cũng là hàm liên tục trên  $\bar{D}$ .

Với nhận xét này ta có một cách lý giải khác để chứng tỏ rằng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  không hội tụ đều trên hình tròn đơn vị  $B(0, 1)$ . Thật vậy, ta biết rằng chuỗi hàm ấy hội tụ đều trên  $B(0, 1)$ . Giả sử nó hội tụ đều trên  $B(0, 1)$ . Vì mọi hàm  $z^n$  liên tục trên  $\mathbb{C}$  nên theo nhận xét trên chuỗi đã cho phải hội tụ đều trên  $\bar{B}(0, 1)$ . Ta gặp phải mâu thuẫn vì  $1 \in \bar{B}(0, 1)$  nhưng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$  phân kỳ. Vậy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  không hội tụ đều trên  $B(0, 1)$ .

Để kết thúc phần này chúng tôi cũng nêu một số kết quả về mối liên hệ giữa chuỗi hàm và các chuỗi hàm phần thực và phần ảo tương ứng của nó.

**4.29 Định lý.** Chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  với  $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$  trong đó  $z = x + iy$  hội tụ tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  khi và chỉ khi các chuỗi hàm thực  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)$  hội tụ tại  $(x_0, y_0)$ .

**4.30 Định lý.** Chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  với  $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$  trong đó  $z = x + iy$  hội tụ đều (tuyệt đối) trên  $D$  khi và chỉ khi các chuỗi hàm thực  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)$  hội tụ đều (tuyệt đối) trên  $D$ .

## Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$  và dãy số  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0$  thì dãy hàm  $\{f_n - z_n\}$  hội tụ đều về hàm  $f - z_0$  trên  $D$ .

2) Cho dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ về  $f$  trên  $D$ . Giả sử với mỗi  $z \in D$  tồn tại  $r > 0$  sao cho dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $\overline{B}(z, r)$ . Chứng minh rằng  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên mọi tập compact  $K \subset D$ .

3) Cho dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $D$  và  $|f(z)| \geq m > 0$  với mọi  $z \in D$ . Chứng minh rằng dãy hàm  $\{1/f_n\}$  hội tụ đều về hàm  $1/f$  trên  $D$ .

4) Cho hai dãy hàm  $\{f_n\}$  và  $\{g_n\}$  lần lượt hội tụ đều về các hàm  $f$  và  $g$  trên  $D$ . Chứng minh rằng dãy hàm  $\{f_n g_n\}$  hội tụ đều về hàm  $fg$  trên  $D$ .

5) Chứng minh rằng nếu dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên  $D_1$  và  $D_2$  thì nó cũng hội tụ đều trên  $D_1 \cup D_2$ .

6) Tìm miền hội tụ tuyệt đối của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n-1}}{n^2 + n}$ .

7) Chứng minh Định lý 4.8.

8) Chứng minh Định lý 4.9.

9) Chứng minh Định lý 4.10.

10) Chứng minh Định lý 4.20.

11) Xét chuỗi hàm theo biến thực  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$ .

(a) Chứng minh rằng chuỗi hàm trên và các chuỗi có được bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp từng số hạng của nó hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ . Suy ra hàm tổng  $f(x)$  của chuỗi hàm đã cho khả vi vô hạn lần trên  $\mathbb{R}$ .

(b) Chứng minh rằng chuỗi Taylor của hàm  $f$  tại 0:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

không hội tụ với giá trị  $x \neq 0$  nào.

**12)** Chứng minh rằng chuỗi  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2nm+1}}{(2n+1)!(2nm+1)}$  hội tụ trên  $\mathbb{C}$ . Tìm giới hạn  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(te^{i\frac{k\pi}{m}})$ .

**13)** Chứng minh Định lý 4.29.

**14)** Chứng minh Định lý 4.30.

## § 5 Chuỗi lũy thừa

Một chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{hay} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

được gọi là **chuỗi lũy thừa**. Ta chỉ nghiên cứu chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  bởi vì ta chỉ việc đặt  $Z = z - z_0$  khi gặp chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  ta đưa được về dạng chuỗi trên. Rõ ràng chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z = 0$ .

**5.1 Thí dụ.** Xét chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Với mọi  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ta có  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_0|^n}{n!}$  hội tụ.

Suy ra  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  hội tụ tuyệt đối tại  $z_0$ . Vậy  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  hội tụ trên  $\mathbb{C}$ .

Xét chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ . Với mọi  $z_0 \neq 0$ , ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n |z_0|^n = \infty$ , suy ra  $n^n z_0^n$  không thể có giới hạn là 0 khi  $n$  dần ra  $\infty$ . Vậy  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$  phân kỳ tại  $z_0$ . Do đó,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$  chỉ hội tụ tại  $z = 0$ .  $\square$

**5.2 Định lý. (Abel)** Giả sử chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_0 \neq 0$ . Khi đó, chuỗi hội tụ tuyệt đối tại  $z$  mà  $|z| < |z_0|$  và hội tụ đều trên hình tròn đóng  $\{z : |z| \leq r\}$  với  $0 < r < |z_0|$ .

Nếu chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ tại  $z_1$  thì nó phân kỳ tại mọi  $z$  mà  $|z| > |z_1|$ .

*Chứng minh.* Theo giả thiết ta có chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$  hội tụ, cho nên  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . Do đó, tồn tại  $M > 0$  sao cho  $|c_n z_0^n| < M$  với mọi



$n = 0, 1, 2, \dots$  Với mỗi  $z$  sao cho  $|z| < |z_0|$ , đặt  $q = \left|\frac{z}{z_0}\right|$ , suy ra  $q < 1$ . Ta có

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < M q^n.$$

Ta thấy chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$  hội tụ, suy ra  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tuyệt đối. Với  $0 < r < |z_0|$ , đặt  $q = \frac{r}{|z_0|} < 1$ . Ta có

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \frac{r^n}{|z_0|^n} = M q^n \quad \text{với mọi } |z| \leq r.$$

Theo tiêu chuẩn Weierstrass ta có thể thấy được chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ đều trên  $\{z : |z| < r\}$  với  $r < |z_0|$ .

Dùng phản chứng và kết quả vừa được chứng minh ta sẽ có được khẳng định thứ hai trong định lý. Thật vậy, giả sử tồn tại  $z_2$  là điểm hội tụ của chuỗi đã cho thỏa  $|z_2| > |z_1|$ . Khi đó, theo phần trên ta có chuỗi đã cho hội tụ tại mọi  $z$  thỏa  $|z| < |z_2|$ , cho nên nó hội tụ tại điểm  $z_1$  (trái với giả thiết).  $\square$

Theo định lý Abel nếu chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_1$  thì nó hội tụ bên trong đường tròn tâm tại 0 bán kính  $|z_1|$ , và nếu chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ tại  $z_2$  thì nó phân kỳ tại mọi điểm ngoài hình tròn tâm 0 bán kính  $|z_2|$ . Vấn đề đặt ra là liệu tồn tại số  $R \geq 0$  sao cho chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ khi  $|z| < R$  và phân kỳ khi  $|z| > R$  hay không? Định lý sau đây sẽ trả lời câu hỏi này.

**5.3 Định lý.** *Tồn tại  $0 \leq R \leq \infty$ , sao cho chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ khi  $|z| < R$  và phân kỳ khi  $|z| > R$ . Số  $R$  gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi.*

*Chứng minh.* Nếu chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ trên  $\mathbb{C}$  thì  $R = \infty$ . Nếu chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ tại mỗi điểm  $z \neq 0$  thì  $R = 0$ .

Giả sử chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_0 \neq 0$  và phân kỳ tại  $z_1$ . Khi đó, theo định lý Abel ta có ngay  $|z_0| \leq |z_1|$ . Đặt

$$A = \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ hội tụ tại } z \right\}.$$

Rõ ràng  $A \neq \emptyset$  vì  $z_0 \in A$  và bị chặn trên bởi  $|z_1|$  (theo định lý Abel). Đặt  $R = \sup A$ . Lấy  $z_2$  tùy ý thỏa  $|z_2| < R$ . Theo định nghĩa của  $R$  và tập  $A$ , tồn tại  $z^*$  là điểm hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  thỏa  $|z_2| < |z^*| \leq R$ . Theo định lý Abel, ta có chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_2$ .

Giả sử tồn tại  $z'$  mà tại đó chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z'^n$  hội tụ và  $|z'| > R$ . Rõ ràng  $|z'| \in A$ , cho nên  $|z'| \leq \sup A = R$ , mâu thuẫn với  $|z'| > R$ . Suy ra chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ khi  $|z| > R$ .  $\square$

**5.4 Định lý. (Cauchy-Hadamard)** Bán kính hội tụ  $R$  của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  cho bởi công thức

$$(5.5) \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

với  $R = 0$  khi  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$  và  $R = \infty$  khi  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ .

*Chứng minh.* Đặt  $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ . Giả sử  $l = \infty$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_0 \neq 0$ . Khi đó,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . Suy ra tồn tại  $N > 0$  sao cho  $|c_n z_0^n| < 1$  suy ra  $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{|z_0|}$  với mọi  $n > N$ . Điều này mâu thuẫn với  $l = \infty$ . Do đó, chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ tại mọi điểm  $z \neq 0$ , suy ra  $R = 0$ .

Giả sử  $l = 0$  và  $z_0 \neq 0$  tùy ý. Khi đó, tồn tại  $N > 0$  sao cho  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{2|z_0|}$  với mọi  $n > N$ . Suy ra  $|c_n z_0^n| \leq \frac{1}{2^n}$  với mọi  $n > N$ . Do đó, chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$  hội tụ, suy ra  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_0$ . Vậy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ trên  $\mathbb{C}$ , suy ra  $R = \infty$ .

Giả sử  $0 < l < \infty$ . Lấy  $z_1 \neq 0$  tùy ý thỏa  $|z_1| < \frac{1}{l}$  hay  $l < \frac{1}{|z_1|}$ . Lấy  $l'$  thỏa  $l < l' < \frac{1}{|z_1|}$ . Khi đó, tồn tại  $N > 0$  sao cho  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq l'$  với mọi  $n > N$ . Suy ra  $|c_n z_1^n| \leq (l'|z_1|)^n$  với mọi  $n > N$ . Do  $l'|z_1| < 1$  nên  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_1^n|$  hội tụ. Suy ra  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_1$ . Vậy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ khi  $|z| < \frac{1}{l}$ . Giả sử  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  hội tụ tại  $z_2$  với  $|z_2| > \frac{1}{l}$ . Khi đó, ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_2^n = 0$ , suy ra tồn tại  $N > 0$  sao cho  $|c_n z_2^n| \leq 1$  với mọi  $n > N$ , hay  $\sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{|z_2|}$  với mọi  $n > N$ . Điều này suy ra  $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{|z_2|} < l$  (vô lý). Vậy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  phân kỳ khi  $|z| > \frac{1}{l}$ . Suy ra  $R = \frac{1}{l}$ .  $\square$

**5.6 Thí dụ. (a)** Xét chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ . Ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Vậy theo Định lý 5.4 bán kính hội tụ của chuỗi đã cho là  $R = \frac{1}{e}$ .

- (b) Xét chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n)z^n$ . Nếu  $|a| \leq 1$  thì  $n - 1 \leq |n + a^n| \leq n + 1$ . Suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n + a^n|} = 1$ , cho nên  $R = 1$ . Khi  $|a| > 1$ , ta có  $|a|^n - n \leq |n + a^n| \leq |a|^n + n$ . Từ bất đẳng thức kép này ta thấy được  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n + a^n|} = |a|$ . Suy ra  $R = 1/|a|$ .  $\square$

**5.7 Nhận xét.** Cũng tương tự như định lý trên, ta cũng có công thức xác định bán kính hội tụ

$$(5.8) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

khi ta tính được giới hạn trên.

**5.9 Thí dụ.** Tìm miền hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} z^n$  với  $a > 1$ . Trước hết ta tính giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ trên toàn mặt phẳng phức.  $\square$

## Bài tập

1) Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n z^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^p} z^n \quad (e) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$$

2) Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi lũy thừa

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2i)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2-1} z^n.$$

3) Chứng minh rằng bán kính hội tụ của hai chuỗi hàm lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  là bằng nhau.

4) Giả sử  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R$ . Hãy tính bán kính hội tụ của các chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 z^n$ .

5) Cho chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  có bán kính hội tụ  $R < \infty$ . Chứng minh rằng với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| > R$  ta có  $\sup\{c_n(z - z_0)^n : n = 0, 1, 2, \dots\} = \infty$ .

6) Chứng minh rằng nếu dãy số thực  $\{a_n\}$  đơn điệu giảm về 0 sao cho  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  phân kỳ thì chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  có bán kính hội tụ bằng 1. Hơn nữa, chuỗi hội tụ tại mọi điểm của vòng tròn đơn vị  $|z| = 1$  trừ điểm  $z = 1$ .

7) Chứng minh rằng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} z^n}{n}$  hội tụ tại mọi điểm của đường tròn  $|z| = 1$  nhưng không hội tụ tuyệt đối tại điểm nào của đường tròn này cả.

## § 6 Các phép tính trên chuỗi lũy thừa

Cho hai chuỗi lũy thừa  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  và  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  với bán kính hội tụ lần lượt là  $R_1$  và  $R_2$ . Ta lập chuỗi tổng và chuỗi tích Cauchy

$$(6.1) \quad (f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$(6.2) \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

nhắc lại  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**6.3 Định lý.** Các chuỗi (6.1) và (6.2) có bán kính hội tụ lớn hơn hoặc bằng  $\min\{R_1, R_2\}$  và hơn nữa

$$\begin{aligned} (f + g)(z) &= f(z) + g(z) \\ (fg)(z) &= f(z)g(z) \end{aligned} \quad \text{với } |z| < \min\{R_1, R_2\}.$$

*Chứng minh.* Chú ý rằng khi  $|z| < \min\{R_1, R_2\}$  thì hai chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  và  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  hội tụ tuyệt đối. Từ đó, áp dụng tính chất chuỗi số, định lý Abel, và định lý Merten ta suy ra được điều phải chứng minh. Trình bày chứng minh chi tiết xin dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**6.4 Chú ý.** Nếu  $R_1 \neq R_2$  thì chuỗi tổng có bán kính hội tụ đúng bằng  $\min\{R_1, R_2\}$  do định lý Abel. Tuy nhiên, nếu  $R_1 = R_2$  thì bán kính hội tụ của chuỗi tổng có thể lớn hơn  $R_1$ . Chẳng hạn chuỗi  $f - f = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0z^n$  có bán kính hội tụ  $\infty$  bất kể bán kính hội tụ của  $f$  là bao nhiêu.

Cũng thế, bán kính hội tụ của  $fg$  có thể lớn hơn  $\min\{R_1, R_2\}$ . Ví dụ chuỗi  $f(z) = 1 - z$  có bán kính hội tụ  $\infty$  và chuỗi  $g(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  có bán kính hội tụ 1 nhưng  $(fg)(z) = 1 + 0z + 0z^2 + \dots$  có bán kính hội tụ  $\infty$ .

**6.5 Hệ quả.** Giả sử  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R > 0$ . Đặt

$$(6.6) \quad f^p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{với } b_n = \sum_{k_1 + \dots + k_p = n} a_{k_1} \dots a_{k_p}.$$

Khi ấy, chuỗi trên có bán kính hội tụ lớn hơn hoặc bằng  $R$  và ta có  $f^p(z) = (f(z))^p$  nếu  $|z| < R$ .

*Chứng minh.* Chuỗi (6.6) chính là chuỗi tích của  $f$  với chính nó lặp lại  $p$  lần. Từ đó, áp dụng Định lý 6.3 ta có được điều phải chứng minh.  $\square$

Phép tính quan trọng mà ta xét đến là phép thế một chuỗi lũy thừa vào một chuỗi lũy thừa khác. Nghĩa là cho trước hai chuỗi lũy thừa  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  và  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  có bán kính hội tụ lần lượt là  $R_1$  và  $R_2 > 0$ , ta muốn tìm một chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  sao cho

$$(6.7) \quad f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{với } |z| \text{ bé.}$$

Vì dưới đây ta chỉ quan tâm đến các hàm  $f(z)$  và  $g(z)$  trong hình tròn hội tụ của chuỗi tương ứng nên (6.7) có nghĩa là tìm  $0 < r < R_2$  sao cho  $|g(z)| < R_1$  với  $|z| < r$ . Hơn nữa, với  $z$  như vậy, ta thế  $g$  vào  $f$  và được

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Đặc biệt, ta có  $|g(0)| < R_1$ . Ta có định lý sau:

**6.8 Định lý.** Giả sử  $|b_0| = |g(0)| < R_1$ . Khi đó, tồn tại  $0 < r < R_2$  sao cho  $|g(z)| < R_1$  nếu  $|z| < r$ . Hơn nữa, với  $|z| < r$  ta có

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_p z^p$$

trong đó  $c_p$  cho bởi chuỗi hội tụ tuyệt đối  $c_p = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=p} a_n b_{k_1} \cdots b_{k_n}$ .

**6.9 Nhận xét.** Nếu  $g(0) = 0$  (nghĩa là  $b_0 = 0$ ) thì điều kiện của định lý trên luôn luôn được thỏa nếu  $R_1, R_2 > 0$ . Trong trường hợp này tổng xác định  $c_p$  là tổng hữu hạn vì nếu  $n > p$  thì ít nhất một  $k_j = 0$  và khi đó hệ số  $b_{k_j} = 0$ . Do đó,

$$c_p = \sum_{n=0}^p \sum_{k_1+\dots+k_n=p} a_n b_{k_1} \cdots b_{k_n}.$$

Nếu  $g(z) = z_0 + z$  thì điều kiện  $|g(0)| < R_1$  trở thành  $|z_0| < R_1$ . Ta có  $|z_0 + z| \leq |z_0| + |z|$ , cho nên với  $r = R_1 - |z_0|$  ta có  $|g(z)| = |z_0 + z| < R_1$  khi  $|z| < r$ . Để ý rằng  $b_0 = z_0$ ,  $b_1 = 1$  và  $b_k = 0$  khi  $k > 1$ . Do đó, khi  $n < p$  ta phải có ít nhất một chỉ số  $k_j > 1$  trong  $k_1 + \dots + k_n = p$ , cho nên  $b_{k_j} = 0$ . Khi  $n \geq p$ , tổng bên trong công thức xác định  $c_p$  các số hạng khác không đều có  $p$  thừa số bằng 1 và  $n - p$  thừa số bằng  $z_0$ , và các số hạng này chính là hệ số nhị thức

$$(6.10) \quad c_p = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \binom{n}{p} z_0^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} \binom{n+p}{p} z_0^n.$$

Bây giờ chúng ta hãy áp dụng Định lý 6.8 để biểu diễn nghịch đảo của một chuỗi lũy thừa  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R > 0$  thành một chuỗi lũy thừa; nghĩa là tìm một chuỗi lũy thừa  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  có bán kính hội tụ dương sao cho  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  với  $|z|$  bé.

Ta viết

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1 - (1 - f(z))} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - f(z))^n.$$

Như vậy, theo Định lý 6.8 điều kiện để thay thế chuỗi  $1 - f(z) = 1 - a_0 - a_1z - a_2z^2 - \dots$  vào chuỗi hình học  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  là  $|1 - a_0| < 1$ . Từ đó, ta nhận thấy điều kiện cần để tồn tại chuỗi hàm  $g(z)$  như đề cập ở trên là  $f(0) = a_0 \neq 0$ .

Ngược lại, giả sử  $f(0) = a_0 \neq 0$ . Đặt

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{f(0)} = 1 + \frac{a_1}{a_0}z + \frac{a_2}{a_0}z^2 + \dots$$

Ta nhận thấy chuỗi lũy thừa  $1 - \tilde{f}(z) = -\frac{a_1}{a_0}z - \frac{a_2}{a_0}z^2 - \dots$  có bán kính hội tụ vẫn là  $R$ . Vì  $|1 - \tilde{f}(0)| = 0 < 1$ , nên theo Định lý 6.8 và cách xây dựng ở trên tồn tại  $0 < r < R$  sao cho hàm  $\frac{1}{\tilde{f}(z)}$  biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy

thừa là  $\tilde{g}(z) = \frac{1}{\tilde{f}(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n z^n$  khi  $|z| < r$ . Đặt

$$g(z) = \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{f}(z)} = \frac{\tilde{b}_0}{a_0} + \frac{\tilde{b}_1}{a_0}z + \dots + \frac{\tilde{b}_n}{a_0}z^n + \dots \quad \text{khi } |z| < r$$

Ta có  $g(z) = \frac{1}{f(0)\tilde{f}(z)} = \frac{1}{f(z)}$  với mọi  $|z| < r$ . Như vậy, ta đã chứng minh được định lý sau.

**6.11 Định lý.** Giả sử chuỗi  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R > 0$  và  $f(0) = a_0 \neq 0$ . Khi đó, tồn tại chuỗi  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R' > 0$  và tồn tại  $r > 0$  sao cho  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  nếu  $|z| < r$ .

## Bài tập

1) Chứng minh Định lý 6.3.

2) Chứng minh rằng chuỗi (6.6) chính là chuỗi tích của  $f$  với chính nó lặp lại  $p$  lần.

3) Phát biểu định lý 6.8 cho hai chuỗi hàm  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  và  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ .

## Chương III

# Hàm giải tích

### § 1 Đạo hàm

#### Khái niệm và tính chất cơ bản

**1.1 Định nghĩa.** Cho hàm số  $f$  xác định trên miền  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Hàm  $f$  được gọi là **khả vi** tại  $z_0 \in D$  (hay hàm  $f$  có *đạo hàm* tại  $z_0$ ) nếu giới hạn

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tồn tại, và ta nói giới hạn đó là **đạo hàm** của hàm  $f$  tại điểm  $z_0$ . Ký hiệu

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

**1.2 Thí dụ.** Hàm  $f(z) = z^2$  khả vi tại mọi điểm  $z$ . Thật vậy

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

Hơn nữa,  $f'(z) = (z^2)' = 2z$ . □

Cũng như đối với hàm biến thực, ta định nghĩa đạo hàm cấp cao của hàm  $f$  bằng quy nạp

$$f^{(k)}(z_0) = (f^{(k-1)})'(z_0)$$



nếu về phải tồn tại; khi đó,  $f^{(k)}(z_0)$  gọi là **đạo hàm cấp  $k$**  của  $f$  tại  $z_0$ .

Do định nghĩa đạo hàm của hàm biến phức hoàn toàn tương tự với định nghĩa đạo hàm của hàm biến thực, bên cạnh đó các tính chất giới hạn của hàm phức cũng tương tự như tính chất giới hạn của hàm thực, cho nên một cách tương tự ta dễ dàng chứng minh được các tính chất sau.

**1.3 Định lý.** *Nếu hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$  thì nó liên tục tại  $z_0$ .*

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

**1.4 Định lý.** *Nếu  $f(z)$  và  $g(z)$  khả vi tại  $z_0$  thì  $\alpha f(z)$ ,  $f(z)+g(z)$ ,  $f(z)g(z)$  và  $f(z)/g(z)$ , điều kiện  $g(z) \neq 0$ , cũng khả vi tại  $z_0$  với mọi  $\alpha \in \mathbb{C}$  và*

$$(1) (\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0).$$

$$(2) (f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

$$(3) (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

$$(4) \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

**1.5 Thí dụ.** Tính đạo hàm các hàm sau  $f(z) = 3z^2 - 2z - 4$  và  $g(z) = \frac{z-1}{2z+1}$ . Ta được

$$f'(z) = 6z - 2 \quad \text{và} \quad g'(z) = \frac{2z+1-2(z-1)}{(2z+1)^2} = \frac{3}{(2z+1)^2}. \quad \square$$

**1.6 Định lý.** *Nếu hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$  và hàm  $g$  khả vi tại  $f(z_0)$ , thì hàm  $g \circ f$  khả vi tại  $z_0$  và*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

*Chứng minh.* Cho dãy bất kỳ  $\{z_n\} \subset D_{g \circ f} \setminus \{z_0\}$  và hội tụ về  $z_0$ . Ta viết

$$(1.7) \quad \begin{aligned} & \frac{g \circ f(z_n) - g \circ f(z_0)}{z_n - z_0} = \\ & = \begin{cases} \frac{g(f(z_n)) - g(f(z_0))}{f(z_n) - f(z_0)} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} & \text{if } f(z_n) \neq f(z_0) \\ 0 & \text{if } f(z_n) = f(z_0) \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu tồn tại  $n_0$  sao cho  $f(z_n) \neq f(z_0)$  với mọi  $n \geq n_0$ , thì biểu thức trên trong đẳng thức (1.7) thỏa với  $n > n_0$ , giới hạn của vế trái tồn tại do sự liên tục và tính khả vi của  $f$  tại  $z_0$  và sự khả vi của  $g$  tại  $f(z_0)$ ; và giới hạn đó là  $g'(f(z_0))f'(z_0)$ . Nếu tồn tại một dãy con  $\{z_{n_k}\}$  của  $\{z_n\}$  mà nó thỏa  $f(z_{n_k}) = f(z_0)$ , thì  $f'(z_0) = 0$ ; Đẳng thức (1.7) chỉ ra rằng giới hạn của vế trái cũng là không 0. Do đó,  $(g \circ f)'(z_0)$  tồn tại và bằng  $g'(f(z_0))f'(z_0)$  trong các trường hợp.  $\square$

**1.8 Thí dụ.** Dùng định lý trên ta tính đạo hàm của hàm  $(2z^2 + 3i)^5$  như sau  $[(2z^2 + 3i)^5]' = 5(2z^2 + 3i)^4(4z) = 20z(2z^2 + 3i)^4$ .  $\square$

## Dấu hiệu Cauchy-Riemann

**1.9 Định lý. (Cauchy-Riemann)** Cho hàm số phức  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  xác định trong miền  $D$  và  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ . Khi đó, điều kiện cần và đủ để  $f$  khả vi tại  $z_0$  là hai hàm thực  $u$  và  $v$  khả vi tại điểm  $(x_0, y_0)$  và

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Hơn nữa, ta có  $f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$ . Hệ (1.10) được gọi là **hệ phương trình Cauchy-Riemann** hay **điều kiện Cauchy-Riemann**.

*Chứng minh.* Giả sử hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$ . Theo định nghĩa ta có

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

trong đó  $\Delta z = z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$ . Cho  $\Delta y = 0$ , ta có  $\Delta z = \Delta x$ . Ta được

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Cho  $\Delta x = 0$ , ta có  $\Delta z = i\Delta y$ , suy ra  $\Delta z \rightarrow 0$  khi và chỉ khi  $\Delta y \rightarrow 0$ . Ta được

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right] \\ &= -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Tóm lại ta được

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Từ đó ta có được hệ (1.10). Ta còn phải chứng minh  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$ . Từ định nghĩa của  $f'(z_0)$  ta viết lại

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \\ &= (u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0))(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) \\ &= u'_x(x_0, y_0)\Delta x - v'_x(x_0, y_0)\Delta y \\ &\quad + i(v'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_x(x_0, y_0)\Delta y) + o(\Delta z) \\ &= u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + o_x(\Delta z) \\ &\quad + i[v'_x(x_0, y_0)\Delta x + v'_y(x_0, y_0)\Delta y + o_y(\Delta z)] \end{aligned}$$

trong đó  $o(\Delta z) = o_x(\Delta z) + io_y(\Delta z)$  thỏa

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o_x(\Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o_y(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

Từ đó ta suy ra được

$$o_x(\Delta z) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \quad \text{và} \quad o_y(\Delta z) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ &\quad - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)) \\ &= \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Từ các kết quả trên ta được

$$\Delta u(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)\Delta x + v'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Vậy các hàm  $u$  và  $v$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$ .

Ngược lại, giả sử hai hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$  và thỏa điều kiện (1.10). Do  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$  nên ta có

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(|\Delta z|) \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= v'_x(x_0, y_0)\Delta x + v'_y(x_0, y_0)\Delta y + \beta(|\Delta z|) \end{aligned}$$

trong đó  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  và  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\beta(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0$ . Mặt khác, áp dụng điều kiện (1.10) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta z} \\ &= \frac{u'_x(x_0, y_0)\Delta x + u'_y(x_0, y_0)\Delta y + iv'_x(x_0, y_0)\Delta x + iv'_y(x_0, y_0)\Delta y}{\Delta z} \\ & \quad + \frac{\alpha(|\Delta z|) + i\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= \frac{u'_x(x_0, y_0)\Delta x - v'_x(x_0, y_0)\Delta y + iv'_x(x_0, y_0)\Delta x + iu'_x(x_0, y_0)\Delta y}{\Delta z} \\ & \quad + \frac{\alpha(|\Delta z|) + i\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= \frac{(u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0))(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta z} + \frac{\alpha(|\Delta z|) + i\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) + \frac{\alpha(|\Delta z|) + i\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ \text{Vì } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(|\Delta z|)}{|\Delta z|} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\beta(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0 \text{ cho nên } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(|\Delta z|)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0. \text{ Do đó, ta có } \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\alpha(|\Delta z|) + i\beta(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0. \text{ Vậy} \\ & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Nghĩa là hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$ . □

**1.11 Thí dụ.** Ta xét sự khả vi của hàm  $f(z) = z\bar{z}$ . Ta viết lại  $f(x + iy) = x^2 + y^2$ . Vậy  $u(x, y) = x^2 + y^2$  và  $v(x, y) = 0$ . Rõ ràng  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại mọi điểm  $(x, y)$  và

$$u'_x(x, y) = 2x, \quad u'_y(x, y) = 2y, \quad v'_x(x, y) = 0, \quad v'_y(x, y) = 0.$$

Theo điều kiện Cauchy-Riemann hàm  $f$  khả vi tại mọi điểm thỏa  $2x = 0$  và  $2y = 0$  hay  $x = 0$  và  $y = 0$ . Do đó, hàm  $f(z)$  chỉ khả vi tại  $z = 0$  và  $f'(0) = 0$ . □

**1.12 Nhận xét.** Trong chứng minh định lý Cauchy-Riemann, ta nhận thấy nếu hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  khả vi tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  thì các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng tại  $(x_0, y_0)$ . Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng cho dù chúng thỏa điều kiện (1.10). Nghĩa là ta không thể bỏ giả thiết hai hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại  $(x_0, y_0)$  hay các đạo hàm riêng của chúng liên tục tại  $(x_0, y_0)$ . Ta thấy điều này qua thí dụ sau.

**1.13 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  với  $z = x + iy$  tại điểm  $z_0 = 0$ . Ta có

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2}(x - iy).$$

Ta thấy  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} x$  không tồn tại. Suy ra  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$  không tồn tại; nghĩa là  $f$  không khả vi tại  $z_0 = 0$ .

Trong khi đó, ta có  $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$  và  $v(x, y) = 0$ . Ta thấy

$$u'_x(0, 0) = u'_y(0, 0) = v'_x(0, 0) = v'_y(0, 0) = 0.$$

Do đó, hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  thỏa điều kiện Cauchy-Riemann tại  $(0, 0)$ . Tuy nhiên, ta không có được kết luận của định lý Cauchy-Riemann là do hàm  $u(x, y)$  không khả vi tại  $(0, 0)$  vì giới hạn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{u(x, y) - u(0, 0) - u'_x(0, 0)x - u'_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

không tồn tại. □

Sau đây ta phát biểu định lý Cauchy-Riemann trong trường hợp hàm phần thực và phần ảo theo cặp biến  $(r, \varphi)$ .

**1.14 Định lý.** Cho hàm  $f(re^{i\varphi}) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$  xác định trên miền  $D$  và  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \in D$ . Các hàm  $u(r, \varphi)$  và  $v(r, \varphi)$  khả vi tại  $(r_0, \varphi_0)$ . Khi đó,  $f$  khả vi tại  $z_0$  khi và chỉ khi

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0) = -r \frac{\partial v}{\partial r}(r_0, \varphi_0). \end{cases}$$

Hơn nữa, ta có  $f'(z_0) = e^{-i\varphi}(u'_r(r_0, \varphi_0) + iv'_r(r_0, \varphi_0))$ .

Chứng minh. Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**1.16 Thí dụ.** Xét tính khả vi của hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Ta viết lại  $f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{r}e^{i(-\varphi)} = \frac{1}{r}\cos\varphi - i\frac{1}{r}\sin\varphi$ . Các hàm  $u(r, \varphi) = \frac{1}{r}\cos\varphi$  và  $v(r, \varphi) = -\frac{1}{r}\sin\varphi$  khả vi tại mọi điểm  $(r, \varphi)$  với  $r \neq 0$ . Ta có

$$\begin{aligned} u'_r(r, \varphi) &= -\frac{1}{r^2}\cos\varphi & u'_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ v'_r(r, \varphi) &= \frac{1}{r^2}\sin\varphi & v'_\varphi(r, \varphi) &= -\frac{1}{r}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy điều kiện Cauchy-Riemann (1.15) thỏa với mọi  $(r, \varphi)$  với  $r > 0$ . Vậy  $f'(z) = e^{-i\varphi}(-\frac{1}{r^2}\cos\varphi + i\frac{1}{r^2}\sin\varphi) = -\frac{1}{r^2}e^{i(-2\varphi)} = -\frac{1}{z^2}$ .  $\square$

## Vi phân hàm phức

Xét hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  với  $z = x + iy$  xác định trên  $D$  và các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  khả vi tại  $(x, y) \in D$ . Khi đó, tương tự như trong giải tích thực ta ký hiệu vi phân của hàm  $f$  tại  $z$  như sau:

$$\begin{aligned} df(z) &= du(x, y) + idv(x, y) \\ &= u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy + i[v'_x(x, y)dx + v'_y(x, y)dy] \\ &= [u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)]dx + [u'_y(x, y) + iv'_y(x, y)]dy \\ &= \frac{\partial f(z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(z)}{\partial y}dy \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có  $z = x + iy$  và  $\bar{z} = x - iy$  nên  $dz = dx + idy$  và  $d\bar{z} = dx - idy$ , suy ra

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad \text{và} \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}).$$

Từ đó, ta viết lại vi phân của hàm  $f$  tại  $z$

$$\begin{aligned} df(z) &= \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) d\bar{z} \end{aligned}$$

Khi ta đặt

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) \quad \text{và} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right)$$

ta có được công thức cho vi phân của hàm  $f$  tại  $z$

$$(1.17) \quad df(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Ta biểu diễn chi tiết  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  như sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} + i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)) + i(u'_y(x, y) + iv'_y(x, y))] \\ &= \frac{1}{2} (u'_x(x, y) - v'_y(x, y)) + \frac{i}{2} (v'_x(x, y) + u'_y(x, y)) \end{aligned}$$

Vậy, theo định lý Cauchy-Riemann nếu hàm  $f$  khả vi hay các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  thỏa điều kiện (1.10) ta có  $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ . Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial x} - i \frac{\partial f(z)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)) - i(u'_y(x, y) + iv'_y(x, y))] \\ &= \frac{1}{2} (u'_x(x, y) + v'_y(x, y)) + \frac{i}{2} (v'_x(x, y) - u'_y(x, y)) \\ &= u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) \\ &= f'(z) \end{aligned}$$

Do đó, ta có biểu diễn vi phân của hàm  $f$  tại  $z$  là  $df(z) = f'(z)dz$ , tương tự như hàm thực.

## Bài tập

1) Cho  $f = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ . Hãy tính  $f'(0)$  và  $f'(\alpha)$ .

2) Cho  $f$  là hàm khả vi không nhận giá trị 0. Chứng minh rằng

$$z^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{f(z)} \right)' = f'(z) \left( \frac{z}{f(z)} \right)^2 - 1.$$

3) Cho  $f_\delta(z) = \frac{z}{(1-z)^\delta}$ . Hãy đánh giá (tìm cận trên) các biểu thức

$$\left| z^4 \left( \frac{1}{f_\delta(z)} - \frac{1}{z} \right)''' \right| \quad \text{và} \quad \left| \left( \frac{z}{f_\delta(z)} \right)'''' \right|$$

với  $0 < |z| < 1$  khi  $\delta = 3, 4, 5$ .

4) Giả sử  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  và rằng  $f'(z_0)$  và  $g'(z_0)$  tồn tại trong đó  $g'(z_0) \neq 0$ . Dùng định nghĩa đạo hàm chứng minh rằng

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5) Chứng minh Định lý 1.3.

6) Chứng minh Định lý 1.4.

7) Tìm tất cả các giá trị  $z$  sao cho  $f(z) = \bar{z}$  khả vi tại đó, và tìm đạo hàm tại những điểm ấy.

8) Tìm tất cả các giá trị  $z$  sao cho  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  khả vi tại đó, và tìm đạo hàm tại những điểm ấy.

9) Tìm tất cả các giá trị  $z = x + iy$  sao cho hàm  $f(z) = x^2 + 2xy + i(x^2 - y^2)$  khả vi, và tính đạo hàm của hàm  $f$  tại các điểm đó.

10) Tìm tất cả các giá trị  $z = x + iy$  sao cho hàm  $f(z) = x^2 - 2xy + i(-x^2 + y^2)$  khả vi, và tính đạo hàm của hàm  $f$  tại các điểm đó.

11) Tìm tất cả các điểm  $z = x + iy$  để hàm  $f(z) = x^2 + y + i(-x + y^2)$  khả vi và tính đạo hàm tại các điểm đó.



**12)** Chứng minh rằng hàm số  $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{khi } z \neq 0 \\ 0 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$  với  $z = x + iy$  liên tục tại  $z = 0$ ; và chứng minh  $f(z)$  thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại  $z = 0$ , nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

**13)** Chứng minh rằng hàm  $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{khi } z \neq 0 \\ 0 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$  thỏa điều kiện Cauchy-Riemann tại  $z = 0$  nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

**14)** Cho hàm phức  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Ký hiệu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  khả vi tại  $x_0 + iy_0$  thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0).$$

Đẳng thức trên gọi là điều kiện Cauchy-Riemann dưới dạng phức.

**15)** Giả sử hàm  $f(z) = u + iv = \rho e^{i\theta}$  khả vi trên  $\mathbb{C}$ . Chứng minh rằng nếu một trong các hàm (theo  $(x, y)$  với  $z = x + iy$ )  $u, v, \rho$  hay  $\theta$  là hằng số thì  $f$  là hằng số.

**16)** Chứng minh Định lý 1.14.

**17)** Cho hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$  và nó có hàm ngược  $\varphi$  trong lân cận của  $z_0$ . Chứng minh rằng nếu  $\varphi$  khả vi tại  $f(z_0)$  thì  $\varphi'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .

**18)** Dùng Định lý 1.14 xét tính khả vi và tìm đạo hàm của các hàm  $f(z) = z^n$  và  $g(z) = \frac{1}{z^n}$ .

**19)** Chứng minh

(a) Nếu hàm  $w = f(z) = u + iv$  tại  $z = x + iy$  tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

thì tồn tại  $u'_x(x, y), v'_y(x, y)$  và  $u'_x(x, y) = v'_y(x, y)$ .

- (b) Nếu tồn tại  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z}$  thì tồn tại  $(x, y)$  và  $u'_y(x, y)$ ,  $v'_x(x, y)$  và  $u'_y(x, y) = -v'_x(x, y)$ .
- (c) Nếu giả thiết  $u, v$  khả vi tại  $z = x + iy$  và tồn tại giới hạn ở (a) thì kéo theo tồn tại giới hạn ở (b) và do đó  $f(x)$  khả vi tại  $z$ .

## § 2 Hàm giải tích

**2.1 Định nghĩa.** Hàm  $f$  xác định trên  $D \subseteq \mathbb{C}$  được gọi là **giải tích** hay **chỉnh hình** tại  $z_0 \in D$  nếu tồn tại  $r > 0$  để hàm  $f$  khả vi tại mọi  $z \in \{z : |z - z_0| < r\} \subset D$ . Nếu hàm  $f$  giải tích tại mọi điểm  $z \in D_0$ , ta nói  $f$  giải tích trên  $D_0$ . Nếu hàm  $f$  giải tích trên  $\mathbb{C}$  thì ta nói  $f$  là **hàm nguyên**.

**2.2 Thí dụ.** Hàm đa thức giải tích trên  $\mathbb{C}$ . Hàm hữu tỷ cũng giải tích trên  $\mathbb{C}$  trừ đi các điểm mà nó không xác định.

Hàm  $f(z) = z\bar{z}$  không giải tích tại bất kỳ điểm nào. Ta đã biết nó chỉ khả vi tại một điểm duy nhất là  $z = 0$ .  $\square$

**2.3 Định lý.** Nếu hàm  $f$  khả vi trên tập mở  $D$  thì nó giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Với  $z_0 \in D$  tùy ý và do  $D$  là tập mở nên tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận  $B(z_0, \varepsilon)$  của điểm  $z_0$  thỏa  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq D$ . Từ giả thiết ta có  $f$  khả vi trên  $B(z_0, \varepsilon)$ , cho nên  $f$  giải tích tại  $z_0$ . Suy ra  $f$  giải tích trên  $D$ .  $\square$

**2.4 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích trên  $D$  và  $f(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$  thì  $1/f$  giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Xin dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**2.5 Định lý.** Gọi  $\mathcal{H}(D)$  là tập tất cả các hàm giải tích trên  $D$ . Khi đó,  $\mathcal{H}(D)$  là một không gian vector trên  $\mathbb{C}$  và  $\mathcal{H}(D)$  cũng là một vành.

*Chứng minh.* Xin dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**2.6 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  và  $f$  chỉ nhận giá trị thực thì  $f$  là hàm hằng.

*Chứng minh.* Vì hàm  $f$  chỉ nhận giá trị thực nên có dạng  $f(x + iy) = u(x, y)$ . Vì hàm  $f$  giải tích tại mỗi điểm  $(x, y) \in D$ , nên ta có hệ phương trình Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = 0 \\ u'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad u(x, y) = C \quad (\text{hằng số}). \quad \square$$

**2.7 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  và  $f'(z) = 0$  với mọi  $z \in D$  thì  $f$  là hàm hằng.

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**2.8 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  và hàm  $g$  giải tích trên  $f(D)$ , thì hàm hợp  $g \circ f$  giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Lấy  $z_0 \in D$  tùy ý. Do  $f$  giải tích trên  $D$  nên tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận  $B(z_0, \varepsilon)$  của  $z_0$  thỏa  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq D$  và  $f$  khả vi trên  $B(z_0, \varepsilon)$ . Ta có  $f(B(z_0, \varepsilon)) \subseteq f(D)$  nên  $g$  khả vi trên  $f(B(z_0, \varepsilon))$ . Do đó,  $g \circ f$  khả vi trên  $B(z_0, \varepsilon)$ . Suy ra  $g \circ f$  giải tích tại  $z_0$ . Vậy  $g \circ f$  giải tích trên  $D$ .  $\square$

**2.9 Định lý.** Giả sử chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R > 0$ . Khi đó, tổng  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  giải tích tại mọi điểm  $z$  với  $|z| < R$  và đạo hàm của nó  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ .

*Chứng minh.* Ta biết rằng chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  cũng có bán kính hội tụ là  $R$ . Lấy  $z_0$  tùy ý thỏa  $|z_0| < R$ . Khi đó, tồn tại  $|z_0| < r < R$ . Từ đó ta có  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$  hội tụ đều trên  $\{z : |z| < r\}$  và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$  hội tụ. Ta có

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_n z^k z_0^{n-1-k}.$$

Với  $|z| < r$ , ta có

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} c_n z^k z_0^{n-1-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_n| |z^k z_0^{n-1-k}| < n |c_n| r^{n-1}.$$

Do chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1}$  hội tụ nên theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi

hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$  hội tụ đều trên  $\{z : |z| < r\}$ . Vì vậy ta tính được

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{n-1} c_n z^k z_0^{n-1-k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Nghĩa là hàm  $f$  khả vi tại  $z_0$ . Suy ra hàm  $f$  khả vi trên  $\{z : |z| < R\}$ ; do đó, hàm  $f$  giải tích tại mọi điểm  $z$  với  $|z| < R$  và  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ .  $\square$

## Bài tập

- 1) Tìm miền giải tích của hàm Joukowski  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ .
- 2) Xác định các hằng số  $a, b, c$  sao cho hàm số  $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$  là hàm giải tích trong toàn mặt phẳng phức.
- 3) Tìm miền  $D$  trong đó hàm số  $f(z) = |x^2 - y^2| + 2|xy|i$  là hàm giải tích.
- 4) Chứng minh rằng hàm số  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  khả vi tại điểm  $z = 0$ , nhưng không giải tích tại điểm đó. Tính đạo hàm tại điểm  $z = 0$ .
- 5) Chứng minh Định lý 2.4.
- 6) Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  và  $f'(z) = 0$  với mọi  $z \in D$  thì  $f$  là hàm hằng.
- 7) Cho hàm  $f(z)$  giải tích trên miền  $D$ . Chứng minh rằng nếu hàm  $\overline{f(z)}$  cũng giải tích trên  $D$  thì  $f$  là hàm hằng.
- 8) Chứng minh rằng nếu  $f$  là hàm nguyên và  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$  thì  $f$  là hàm bị chặn trong  $\mathbb{C}$ .

9) Cho hàm  $f$  xác định bởi  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Chứng minh rằng  $f$  là hàm giải tích và tìm  $f'(z)$ .

10) Giả sử  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  có bán kính hội tụ  $R > 0$ . Hãy biểu diễn  $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 c_n z^n$  theo  $f(z)$ .

### § 3 Hàm mũ

Trong giải tích thực ta biết rằng hàm  $f(x) = e^x$  là hàm duy nhất có đạo hàm bằng chính nó trên  $\mathbb{R}$ , nghĩa là  $f'(x) = f(x)$ , và  $f(0) = 1$ . Từ đó ta muốn xét xem có tồn tại và duy nhất hay không một hàm  $f(z)$  sao cho nó khả vi trên  $\mathbb{C}$  (hay nói cách khác nó là một hàm giải tích), đạo hàm của nó bằng chính nó (nghĩa là  $f'(z) = f(z)$ ), và khi thu hẹp nó trên  $\mathbb{R}$  ta được hàm mũ, nghĩa là  $f(x + i0) = e^x$ .

Xét hàm  $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y)$ . Ta có  $u(x, y) = e^x \cos y$  và  $v(x, y) = e^x \sin y$  khả vi liên tục trên  $\mathbb{R}^2$  và

$$\begin{aligned} u'_x(x, y) &= e^x \cos y & u'_y(x, y) &= -e^x \sin y \\ v'_x(x, y) &= e^x \sin y & v'_y(x, y) &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Rõ ràng các đạo hàm riêng này thỏa hệ phương trình Cauchy-Riemann (1.10). Vậy hàm  $f(z)$  khả vi trên  $\mathbb{C}$  và đạo hàm của nó  $f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z)$ . Như vậy, hàm  $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$  là hàm khả vi trên  $\mathbb{C}$  và có đạo hàm bằng chính nó, và nếu ta hạn chế biến  $z$  trên  $\mathbb{R}$  thì ta lại có hàm  $f(x) = e^x$ . Hơn nữa, người ta chứng minh được hàm  $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$  là hàm duy nhất có các tính chất trên. Do đó, một cách tự nhiên ta định nghĩa đó là **hàm mũ phức** và ký hiệu  $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$ . Với ký hiệu này ta viết lại

$$(3.1) \quad e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y),$$

và nó phù hợp với ký hiệu Euler mà ta đã được giới thiệu ở trang 25. Với công thức (3.1) và  $z = x + iy$  ta có

$$(3.2) \quad |e^z| = e^x \quad \text{và} \quad \text{Arg}(e^z) = y + 2k\pi.$$

Tương tự hàm mũ thực, hàm mũ phức có các tính chất sau

**3.3 Định lý.** Với  $z_1$  và  $z_2$  là hai số phức tùy ý, ta có

$$(a) e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(b) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

Một đặc điểm nổi bật của hàm mũ phức mà hàm mũ thực không có là tính tuần hoàn của nó.

**3.4 Định lý.** Hàm mũ  $f(z) = e^z$  là một hàm tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi i$ .

*Chứng minh.* Ta có  $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z$ . Vậy  $f$  là hàm tuần hoàn. Giả sử  $e^{z+c} = e^z$  với mọi  $z = x + iy$ . Ta viết  $c$  ở dạng  $c = \alpha + i\beta$ . Ta được  $e^{x+\alpha+i(y+\beta)} = e^{x+iy}$ . Từ đó ta có

$$\begin{cases} e^{x+\alpha} = e^x \\ y + \beta = y + 2n\pi \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2n\pi. \end{cases}$$

Vậy  $c = 2n\pi i$ , với  $n \in \mathbb{Z}$ . Từ đó ta kết luận được chu kỳ của hàm  $f$  là  $2\pi i$ .

□

Từ định lý trên và công thức (3.2) ta thấy rằng nếu  $e^{z_1} = e^{z_2}$  thì  $z_1 = z_2 + 2n\pi i$  hay

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{và} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 + 2n\pi.$$

Hàm mũ  $f(z) = e^z$  không là một đơn ánh và một miền đơn điệu của nó là  $\{z = x + iy : 0 < y < 2\pi\}$ .

**3.5 Thí dụ.** Ta tìm các giá trị  $z$  sao cho  $e^z = -1$ . Trước hết ta viết lại như sau  $e^{x+iy} = e^{i\pi}$ . Cho nên ta phải có

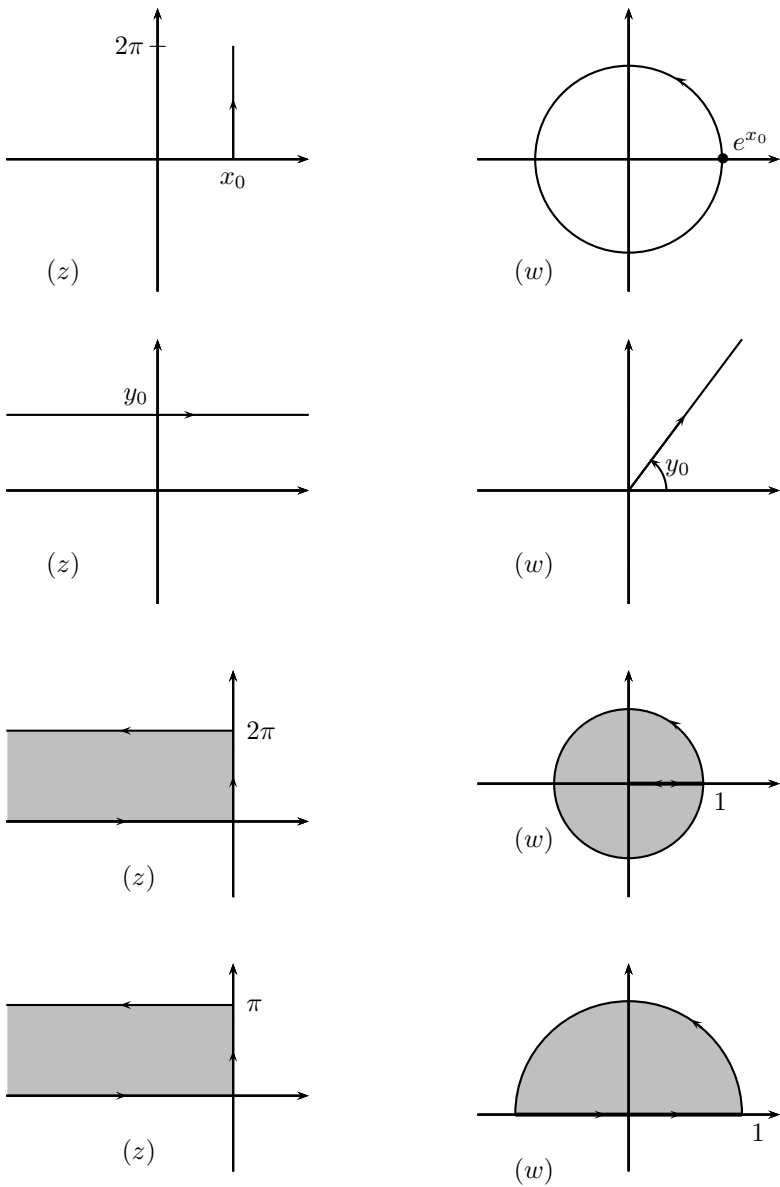
$$e^x = 1 \quad \text{và} \quad y = \pi + 2n\pi.$$

Vậy  $z = (\pi + 2n\pi)i$  với  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

□

**3.6** Xét sự biến hình qua ánh xạ  $f(z) = e^z$ . Với  $x = x_0$  cố định và  $0 \leq y \leq 2\pi$ , ta có  $f(z) = e^{x_0} e^{iy}$ . Đây là phương trình đường tròn tâm  $O$  bán kính  $e^{x_0}$ . Như vậy, qua ánh xạ  $f(z) = e^z$  đoạn thẳng  $\{(x, y) : x = x_0, 0 \leq y \leq 2\pi\}$  đi từ điểm  $(x_0, 0)$  đến  $(x_0, 2\pi)$  biến thành đường tròn tâm  $O$  bán kính  $e^{x_0}$  xuất phát và kết thúc tại  $(e^{x_0}, 0)$  theo chiều dương.

Ta tìm ảnh của đường thẳng  $y = y_0$ . Khi đó, với  $z = x + iy_0$  ta có  $f(z) = e^x e^{iy_0}$ , cho nên ảnh cần tìm là một tia xuất phát từ gốc tọa độ hợp với trục thực một góc  $y_0$ .



Hình III.1: Một số phép biến hình qua hàm mũ  $f(z) = e^z$

Từ các kết quả trên ta thấy rằng hàm  $f(z) = e^z$  biến nửa dải  $\{(x, y) : -\infty < x < 0, 0 < y < 2\pi\}$  thành hình tròn đơn vị với nhất cắt đoạn  $[0, 1]$  trên trục thực; biến nửa dải  $\{(x, y) : -\infty < x < 0, 0 < y < \pi\}$  thành nửa trên hình tròn đơn vị. Xem Hình III.1.

## Bài tập

- 1) Tìm modulus và giá trị chính của argument của các số phức  $e^{2+i}$ ,  $e^{2-3i}$ ,  $e^{3+4i}$ .
- 2) Chứng minh rằng với mọi số phức  $z$  ta luôn có  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ .
- 3) Tìm tất cả các số phức  $z$  sao cho  $e^{z+1} = 2i$ .
- 4) Tìm tất cả các số phức  $z$  sao cho  $e^{z+1} = -2i$ .
- 5) Tìm tất cả các giá trị của  $z$  sao cho  $e^{3z} = 1 + i$ .
- 6) Tìm tập hợp những giá trị của  $z$  sao cho  $e^z$  nhận (a) những giá trị thuần ảo; (b) những giá trị thực.
- 7) Cho hàm số  $w = e^{-\frac{1}{z}}$  xác định với  $z \neq 0$ . Chứng minh rằng
  - (a) Trong miền  $0 < |z| \leq 1$ ,  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$  hàm bị chặn nhưng không liên tục.
  - (b) Trong miền  $0 < |z| \leq 1$ ,  $|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  hàm liên tục và liên tục đều.
- 8) Chứng minh Định lý 3.3.
- 9) Chứng minh rằng nếu hàm  $f(z)$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ ,  $f'(z) = f(z)$ , và  $f(x + i0) = e^x$ , thì  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  với  $z = x + iy$ .
- 10) Tìm ảnh của đường thẳng  $y = x$  qua ánh xạ  $w = e^z$ .
- 11) Tìm ảnh của tập  $D = \{z = x + iy : 0 < x < \ln 2, 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$  qua ánh xạ  $w = e^z$ .



## § 4 Hàm lượng giác

Từ dạng Euler của số phức (3.8) trang 25 ta có công thức Euler cho các hàm sin và cos

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

Từ đó một cách tự nhiên ta định nghĩa **hàm lượng giác phức** bởi công thức như sau

$$(4.1) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{và} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ta biết rằng hàm mũ là hàm giải tích. Theo tính chất khả vi của một hàm hợp, ta có thể suy ra các hàm lượng giác theo định nghĩa trên là hàm giải tích. Ta tính các đạo hàm của chúng

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \frac{e^{iz}i - e^{-iz}i}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z; \\ (\sin z)' &= \frac{e^{iz}i + e^{-iz}i}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \end{aligned}$$

giống như kết quả của hàm lượng giác thực.

Ngoài ra hàm lượng giác phức cũng có các đẳng thức và tính chất như hàm lượng giác thực như sau.

**4.2 Định lý.** (1)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$(2) \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \quad \text{và} \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

$$(3) \quad \cos(-z) = \cos z \quad \text{và} \quad \sin(-z) = -\sin z$$

$$(4) \quad 2 \sin z_1 \cos z_2 = \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2)$$

$$(5) \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$(6) \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$(7) \quad \text{Hàm } \cos z \text{ và } \sin z \text{ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ } 2\pi.$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh đẳng thức  $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ . Thật vậy, ta có

$$2 \sin z \cos z = 2 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \sin 2z. \quad \square$$

Tuy nhiên, giữa hàm lượng giác phức và hàm lượng giác thực có những tính chất khác biệt. Ta có thể thấy được một điểm khác biệt trong thí dụ sau.

**4.3 Thí dụ.** Tìm tất cả các giá trị  $z$  sao cho  $\cos z = 2$ . Theo định nghĩa hàm  $\cos$  ta viết lại

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \quad \text{suy ra} \quad (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

Từ đó ta có  $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$ . Do đó,  $z = 2k\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$ .  $\square$

Trong giải tích thực chúng ta có hàm hyperbolic được định nghĩa sau

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Từ đó chúng ta suy ra được các đẳng thức sau.

$$(4.4) \quad \sin(ix) = i \sinh x, \quad \cos(ix) = \cosh x,$$

$$(4.5) \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$(4.6) \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

Từ đó ta tính được modulus của các hàm  $\sin$  và  $\cos$ .

$$(4.7) \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

$$(4.8) \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra được kết quả giống như trong hàm lượng giác thực.

$$(4.9) \quad \sin z = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(4.10) \quad \cos z = 0 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hai đẳng thức (4.7) và (4.8) cũng cho ta thấy được hai hàm  $\sin$  và  $\cos$  không bị chặn vì hàm  $\sinh x$  không bị chặn.

Các hàm lượng giác khác được định nghĩa tương tự như trong lượng giác thực thông qua các hàm sin và cos

$$(4.11) \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi.$$

Ta cũng có  $\tan z$  và  $\cot z$  là hàm giải tích và

$$(4.12) \quad \tan' z = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \cot' z = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

## Bài tập

1) Chứng minh rằng  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  với mỗi số phức  $z$ .

2) Chứng minh rằng với mọi số phức  $z$  ta có

$$(a) \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \quad (b) \overline{\cos z} = \cos \bar{z} \quad (c) \overline{\cos(iz)} = \cos(i\bar{z})$$

3) Tính các giá trị sau

$$(a) \cos(i \ln 2), \quad (c) \operatorname{Re}[\cos(2 - i)], \\ (b) \cos(i \ln 3), \quad (d) \operatorname{Im}[\cos(2 + i)].$$

4) Giải các phương trình sau

$$(a) \sin z = 2i, \quad (b) \cos z = 3,$$

5) Tìm phần thực và phần ảo của

$$(a) \cos(2 + i), \quad (b) \sin 2i, \quad (c) \tan(2 - i).$$

6) Chứng minh các đẳng thức lượng giác.

7) Với  $z = x + iy$ , chứng minh rằng

$$(a) |\sin z| \geq |\sin x| \quad (b) |\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

$$(c) \quad |\cos z| \geq |\cos x| \qquad (d) \quad |\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y.$$

8) Chứng minh rằng hai hàm  $\sin \bar{z}$  và  $\cos \bar{z}$  không giải tích tại điểm  $z$  nào.

9) Kiểm tra xem nửa dải  $\Omega = \{z = x + iy : 0 < x < 2\pi, 0 < y < \infty\}$  có phải là miền đơn điệu của hàm  $\cos z$ .

10) Tính  $\tan(1 + 2i)$ , viết kết quả ở dạng đại số  $a + ib$ .

## § 5 Hàm hyperbolic

Trong giải tích thực các hàm hyperbolic được định nghĩa như sau

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Một cách tự nhiên, ta cũng định nghĩa các **hàm hyperbolic** ở đây một cách tương tự

$$(5.1) \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Vì hàm mũ giải tích nên ta cũng có thể nhận thấy các hàm hyperbolic ở trên cũng giải tích và

$$(\cosh z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z; \qquad (\sinh z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Giữa hàm hyperbolic và hàm lượng giác có mối quan hệ gần nhau thể hiện qua các đẳng thức sau.

$$(5.2) \qquad -i \sinh(iz) = \sin z \qquad \cosh(iz) = \cos z$$

$$(5.3) \qquad -i \sin(iz) = \sinh z \qquad \cos(iz) = \cosh z.$$

$$\text{Chẳng hạn, } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}}{2} = -i \sin(iz).$$

Từ các đẳng thức trên ta suy ra hàm hyperbolic có chu kỳ là  $2\pi i$ . Ngoài ra ta cũng có các đẳng thức cho hàm hyperbolic tương tự như hàm lượng

giác.

$$(5.4) \quad \sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z,$$

$$(5.5) \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$(5.6) \quad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2,$$

$$(5.7) \quad \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2,$$

$$(5.8) \quad \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y,$$

$$(5.9) \quad \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$(5.10) \quad |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y,$$

$$(5.11) \quad |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y,$$

trong đó  $z = x + iy$ .

Chẳng hạn ta chứng minh đẳng thức (5.5)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2(iz) - (i \sin(iz))^2 = 1.$$

## Bài tập

- 1) Chứng minh các đẳng thức của hàm hyperbolic.
- 2) Chứng minh rằng  $\sinh z = 0$  khi và chỉ khi  $z = n\pi i$  với  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Chứng minh rằng  $\cosh z = 0$  khi và chỉ khi  $z = \frac{\pi i}{2} + n\pi i$  với  $n \in \mathbb{Z}$ .
- 4) Chứng minh rằng  $|\sinh x| \leq |\cosh z| \leq \cosh x$  với mọi  $z = x + iy$ .
- 5) Giải các phương trình

(a)  $\cosh z = 1$

(b)  $\sinh z = 4i$

(c)  $\cosh z = -2$

- 6) Tại sao  $\sinh(e^z)$  là một hàm nguyên? Tìm phần thực của hàm ấy theo  $x$  và  $y$  với  $z = x + iy$ .

## Chương IV

# Một số hàm sơ cấp khác và phép biến hình

### § 1 Hàm Logarithm

**1.1 Định nghĩa.** Số phức  $w$  được gọi là **logarithm** của số phức  $z$  nếu  $e^w = z$ . Ký hiệu  $w = \text{Ln } z$ .

Theo định nghĩa ta thấy không có logarithm của 0. Nếu  $z \neq 0$ , ta viết  $z$  ở dạng Euler  $z = re^{i\varphi}$ . Nếu  $w = u + iv$  là logarithm của  $z$ , thì ta có  $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ , suy ra

$$\begin{cases} e^u = r \\ v = \varphi + 2k\pi \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad w = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Như vậy, có vô hạn đếm được logarithm của một số phức khác không.

$$(1.2) \quad \text{Ln } z = \ln |z| + i\text{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**1.3 Thí dụ.**  $\text{Ln}(-1 + i\sqrt{3}) = \ln |-1 + i\sqrt{3}| + i\text{Arg}(-1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ . □

**1.4 Định lý.** Với mọi số phức  $z_1$  và  $z_2$  khác không, ta có

$$(1.5) \quad \text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$$

$$(1.6) \quad \text{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$$

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) \\ &= \ln |z_1| + \ln |z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) \\ &= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được đẳng thức thứ hai.  $\square$

**1.7 Định nghĩa. Hàm logarithm**, ký hiệu  $\ln$ , là hàm ngược của hàm mũ  $e^z$  với miền xác định là tập  $\{(x, y) : x \text{ tùy ý}, 0 \leq y < 2\pi\}$  được định nghĩa bởi công thức  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ . Giá trị  $\ln z$  được gọi là **giá trị chính** của logarithm của  $z$ .

**1.8 Thí dụ.** Ta có  $\ln(\sqrt{3} + i) = \ln |\sqrt{3} + i| + i \arg(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{6}$ .

**1.9 Định lý.** Hàm  $\ln z$  khả vi tại mọi điểm  $z = re^{i\varphi}$  với  $r > 0$  và  $0 < \varphi < 2\pi$  và  $(\ln z)' = 1/z$ .

*Chứng minh.* Với  $z = re^{i\varphi}$  trong đó  $0 < \varphi < 2\pi$ , ta có  $\ln z = u(r, \varphi) + v(r, \varphi) = \ln r + i\varphi$ , suy ra  $u(r, \varphi) = \ln r$  và  $v(r, \varphi) = \varphi$ . Hơn nữa, ta tính được

$$u'_r(r, \varphi) = \frac{1}{r} \quad u'_\varphi(r, \varphi) = 0 \quad v'_r(r, \varphi) = 0 \quad v'_\varphi = 1.$$

Theo định lý 1.14 ta kết luận được hàm  $\ln z$  khả vi tại  $z$ , và

$$(\ln z)' = e^{-i\varphi} \left( \frac{1}{r} + i0 \right) = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}. \quad \square$$

**1.10** Một hàm logarithm khác cũng được sử dụng thường xuyên, ký hiệu  $\log$ , là hàm ngược của hàm  $e^z$  với miền xác định  $\{(x, y) : x \text{ tùy ý}, -\pi < y \leq \pi\}$  được xác định bởi công thức  $\log(z) = \ln |z| + i\varphi$  với  $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$  và  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Ta cũng dễ dàng chứng minh rằng được hàm  $\log(z)$  giải tích tại mọi điểm  $z = re^{i\varphi}$  với  $r > 0$  và  $-\pi < \varphi < \pi$ , đồng thời đạo hàm của nó vẫn là

$$(\log(z))' = \frac{1}{z}.$$

## Bài tập

1) Tính các giá trị sau

$$(a) \operatorname{Ln}(3 - 3i) \quad (b) \operatorname{Ln}(-3 + 3i) \quad (c) \ln(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$$

2) Chứng minh rằng

$$(a) \ln(1 + i)^2 = 2\ln(1 + i) \quad (b) \ln(-1 - i)^2 \neq 2\ln(-1 - i).$$

3) Với  $z = x + iy$ , tìm  $\operatorname{Re}[\operatorname{Ln}(z - 1)]$ .

4) Tìm tập hợp tất cả các điểm  $z$  mà hàm  $\ln(z - i)$  giải tích.

5) Tìm tập hợp tất cả các điểm  $z$  mà hàm  $\ln(iz - 2)$  giải tích.

6) Tìm miền giải tích của hàm  $\log(z)$ . Khi đó, ta có  $[\log(z)]' = \frac{1}{z}$ .

## § 2 Hàm lũy thừa và lũy thừa phức

**2.1 Hàm lũy thừa** là một hàm có dạng  $w = f(z) = z^n$  với  $n$  là số nguyên dương. Hàm lũy thừa xác định và khả vi trên  $\mathbb{C}$  với đạo hàm tại điểm  $z$  là  $f'(z) = nz^{n-1}$ .

Với  $n > 1$ , đặt  $w_1 = z_1^n$  và  $w_2 = z_2^n$ . Dễ dàng thấy rằng  $w_1 = w_2$  khi và chỉ khi

$$|z_1| = |z_2| \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n}$$

với  $k$  là số nguyên. Do đó, miền đơn diện của hàm  $f(z) = z^n$  là miền không có cặp điểm nào thỏa các điều kiện trên. Chẳng hạn, một miền đơn diện của hàm  $f$  là

$$D = \{z : 0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{n}\}.$$

Trong trường hợp này hàm  $f$  có hàm ngược  $f^{-1}$  là một giá trị của căn bậc  $n$  nằm trong  $D$  và ta cũng ký hiệu  $f^{-1}(z) = \sqrt[n]{z}$  và gọi là một nhánh giá trị của căn bậc  $n$  của  $z$ . Ta cũng có thể chứng minh được hàm  $f^{-1}(z)$  giải tích và

$$(2.2) \quad (f^{-1})'(z) = (\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}.$$

Trong đại số thực ta có biến đổi sau

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a} \quad \text{với } a > 0.$$



Từ đẳng thức trên giúp chúng ta hình thành khái niệm **lũy thừa phức** của một số phức như sau

$$(2.3) \quad z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}.$$

Như vậy, lũy thừa phức của một số phức có vô hạn đếm được giá trị khác nhau, trong đó giá trị  $e^{c \operatorname{Ln} z}$  được gọi là giá trị chính của  $z^c$ .

**2.4 Thí dụ.** Theo định nghĩa lũy thừa phức ta có  $(1+i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i \ln \sqrt{2}}$ .  $\square$

Cũng như trong số thực ta có các đẳng thức sau

$$(2.5) \quad \frac{1}{z^c} = z^{-c}$$

$$(2.6) \quad z^c z^d = z^{c+d}.$$

Nếu ta chỉ lấy giá trị chính  $e^{c \operatorname{Ln} z}$  thì  $z^c$  có thể được xem là một hàm với biến  $z$ . Hơn nữa, hàm này khả vi tại  $z = re^{i\varphi}$  với  $r > 0$  và  $0 < \varphi < 2\pi$  và

$$(z^c)' = (e^{c \operatorname{Ln} z})' = e^{c \operatorname{Ln} z} (c \operatorname{Ln} z)' = z^c \frac{c}{z} = cz^{c-1}.$$

**2.7** Đặc biệt khi  $c$  là một hằng số thực, ta có hàm lũy thừa  $z^c = |z|^c e^{i \operatorname{Arg} z}$ . Như vậy,  $|z^c| = |z|^c$  và  $\operatorname{Arg} z^c = c \operatorname{Arg} z$ . Đặc biệt, ta có kết quả: hàm  $z^c$  biến hình quạt xác định bởi góc  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  thành hình quạt  $c\varphi_1 < \phi < c\varphi_2$  khi  $c > 0$ .

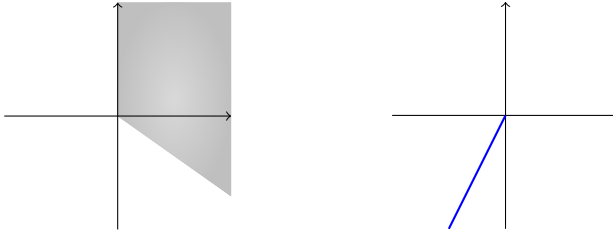
**2.8 Thí dụ.** Tìm hàm lũy thừa biến hình quạt xác định bởi góc  $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$  thành mặt phẳng phức bỏ đi một tia có gốc tại  $O$ .

Ta có góc của hình quạt là  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8}2\pi$ . Vậy hàm lũy thừa phải là  $f(z) = z^{\frac{3}{8}}$ . Khi đó, qua  $f$  tia có góc  $\frac{\pi}{2}$  biến thành tia có góc  $\frac{4\pi}{3}$ . Vậy qua  $f$  hình quạt đã cho biến thành mặt phẳng phức bỏ đi tia có góc  $\frac{4\pi}{3}$ .  $\square$

Ta có thể định nghĩa **hàm mũ cơ số phức**  $c$  bởi biểu thức sau.

$$(2.9) \quad c^z = e^{z \operatorname{Ln} c}.$$

Khi đó, hàm này giải tích trên  $\mathbb{C}$  và  $(c^z)' = e^{z \operatorname{Ln} c} \operatorname{Ln} c = c^z \operatorname{Ln} c$ .



Hình IV.1:

## Bài tập

- 1) Chứng minh rằng nếu hàm  $f(z) = \sqrt[n]{z}$  là một nhánh của căn bậc  $n$  của  $z$  thì  $f$  giải tích và  $f'(z) = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$ .
- 2) Đối với ánh xạ cho bởi  $w = z^2$  hãy tìm
  - (a) ảnh của các đường  $x = c$ ,  $y = c$ ,  $x = y$ ,  $|z| = r$ ,  $\arg z = \alpha$  và giải thích xem đường nào được ánh xạ 1-1 lên ảnh của nó.
  - (b) tạo ảnh của các đường  $u = c$ ,  $v = c$ .
- 3) Tìm ảnh của đường thẳng  $y = x + 1$  qua ánh xạ  $w = z^2$ .
- 4) Tìm hàm lũy thừa biến góc  $\{z : 0 < \arg z < \pi\alpha\}$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) lên nửa mặt phẳng trên.
- 5) Tính các giá trị sau
  - (a)  $(3 - 3i)^{2i}$ ,
  - (b)  $(\sqrt{3} + i)^{(1+2i)}$
  - (c)  $(-3 + 3i)^{4i}$ .
- 6) Với  $z \neq 0$  và  $a$  là một số thực, hãy tìm  $|z^a|$ .
- 7) Chứng minh các đẳng thức của lũy thừa phức.
- 8) Xét xem đẳng thức  $(z^c)^d = z^{cd}$  có còn đúng cho các số phức.

## § 3 Hàm tuyến tính và hàm $f(z) = 1/z$

### Hàm tuyến tính

**3.1 Định nghĩa.** Hàm tuyến tính là hàm có dạng

$$(3.2) \quad w = f(z) = Az + B,$$

trong đó  $A \neq 0$ .

Hàm tuyến tính là một song ánh trên  $\mathbb{C}$ , cho nên nó có hàm ngược, và hàm ngược của nó xác định bởi  $f^{-1}(z) = \frac{z}{A} - \frac{B}{A}$ . Hàm tuyến tính là hàm giải tích trên  $\mathbb{C}$  và  $f'(z) = A$ .

Ta nghiên cứu phép biến hình của hàm tuyến tính. Ta thấy ảnh của  $z = 0$  là  $B$ . Với  $z \neq 0$ , ta viết lại  $A = ae^{i\alpha}$  và  $z = re^{i\varphi}$ ; khi đó

$$w = are^{i(\alpha+\varphi)} + B.$$

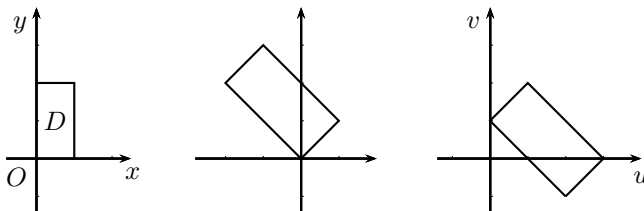
Từ biểu thức trên ta có thể thấy phép biến hình qua ánh xạ tuyến tính  $f(z)$  được thực ba bước như sau.

- Thực hiện phép vị tự với hệ số  $a$ .
- Thực hiện phép quay với góc quay  $\alpha$ .
- Thực hiện phép tịnh tiến với vector xác định bởi  $B$ .

Do đó, ta có tính chất trong định lý sau.

**3.3 Định lý.** *Hàm tuyến tính  $w = Az + B$  biến đường thẳng thành đường thẳng và biến đường tròn thành đường tròn. Nói chung, biến một hình thành một hình đồng dạng với nó.*

**3.4 Thí dụ.** Tìm ảnh của hình  $D$  qua ánh xạ tuyến tính  $w = (1+i)z + 2-i$ . Với  $z \neq 0$ , ta viết lại  $z = re^{i\varphi}$ . Suy ra  $w = \sqrt{2}re^{i(\frac{\pi}{4}+\varphi)} + 2-i$ . Do đó, ta có phép biến hình sau.



Ta tìm ảnh của đường tròn có phương trình  $|z - 3 + i| = 4$  qua ánh xạ  $w$ .  
Ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned} w &= (1 + i)z + 2 - i \\ &= (1 + i)(z - 3 + i) + (1 + i)(3 - i) + 2 - i \\ &= (1 + i)(z - 3 + i) + 6 + i. \end{aligned}$$

Với  $|z - 3 + i| = 4$ , ta có  $|w - 6 - i| = |(1 + i)(z - 3 + i)| = 4\sqrt{2}$ . Vậy ảnh của đường tròn đã cho qua ánh xạ tuyến tính  $w$  là đường tròn tâm  $6 + i$  bán kính  $4\sqrt{2}$ .  $\square$

**3.5 Thí dụ.** Tìm hàm tuyến tính biến đường tròn  $|z - 1| = 2$  thành đường tròn  $|w - 3| = 3$ . Ta có

$$w - 3 = \frac{3}{2}e^{i\alpha}(z - 1) \quad \text{suy ra} \quad w = \frac{3}{2}e^{i\alpha}(z - 1) + 3$$

với  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ta có thể kiểm tra hàm tuyến tính  $w = \frac{3}{2}e^{i\alpha}(z - 1) + 3$  thỏa điều kiện.  $\square$

Để khảo sát sự biến hình qua ánh xạ  $f(z) = 1/z$  ta cần một số kết quả về sự đối xứng của hai điểm qua đường tròn.

## Đối xứng qua đường tròn

**3.6 Định nghĩa.** Hai điểm  $z$  và  $z'$  được gọi là **đối xứng nhau qua đường tròn** ( $C$ ) nếu chúng thỏa mãn hai điều kiện: (i)  $z$  và  $z'$  cùng nằm trên một tia xuất phát từ tâm đường tròn, (ii) Tích khoảng cách từ hai điểm này đến tâm đường tròn bằng bình phương bán kính của đường tròn đó.

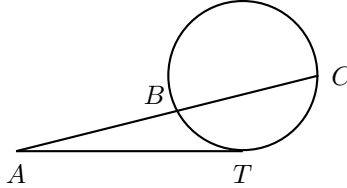
**3.7 Thí dụ.** Hai điểm  $z$  và  $z'$  khác không đối xứng nhau qua đường tròn đơn vị  $|z| = 1$  khi và chỉ khi  $|zz'| = 1$  và  $\arg z = \arg z'$ . Hơn nữa, ta có thể chứng minh tính chất tổng quát trong mệnh đề sau.  $\square$

**3.8 Mệnh đề.** Hai điểm  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua đường tròn có phương trình  $|z - z_0| = R$  khi và chỉ khi  $z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

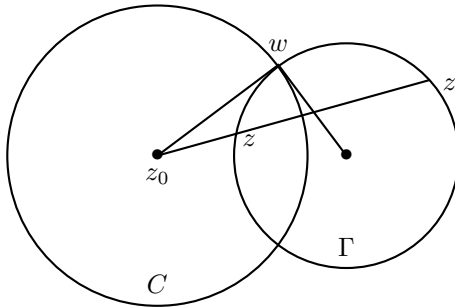
**3.9 Định lý.** *Cặp điểm  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua đường tròn  $C$  nếu và chỉ nếu mọi đường tròn  $\Gamma$  qua  $z$  và  $z'$  đều trực giao với đường tròn  $C$ .*

*Chứng minh.* Để chứng minh định lý này ta cần một tính chất trong hình học sơ cấp: “Cho  $AT$  là tiếp tuyến với đường tròn và cát tuyến  $BC$  đi qua  $A$ ; khi đó  $AT^2 = AB \cdot AC$ ”



Hình IV.2:

Giả sử  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua  $C$  (có tâm tại  $z_0$  và bán kính  $R$ ) và  $\Gamma$  là đường tròn bất kỳ qua  $z$  và  $z'$ . Từ  $z_0$  vẽ tiếp tuyến với đường tròn  $\Gamma$  tại  $w$ . Theo tính chất trên ta có  $|w - z_0|^2 = |z_0 - z| \cdot |z_0 - z'|$ . Mặt khác, do  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua  $C$  nên  $|z_0 - z| \cdot |z_0 - z'| = R^2$ , cho nên  $|w - z_0| = R$ . Vậy  $w$  phải là giao điểm của hai đường tròn đã cho. Từ đó các bán kính của hai đường tròn xuất phát từ  $w$  vuông góc nhau và tiếp xúc với đường tròn kia; nghĩa là hai đường tròn  $C$  và  $\Gamma$  trực giao nhau. Trong trường hợp  $\Gamma$  là đường thẳng qua  $z$  và  $z'$ , rõ ràng  $\Gamma$  trực giao với  $C$ .



Hình IV.3:

Ngược lại, giả sử đường tròn  $\Gamma$  bất kỳ qua  $z$  và  $z'$  đều trực giao với đường tròn  $C$ . Bằng phép chứng minh khá đơn giản trong hình học sơ cấp ta phải có  $z$  và  $z'$  phải nằm trên một tia xuất phát từ  $z_0$ , tâm của đường tròn  $C$ . Gọi  $w$  là giao điểm của hai đường tròn. Khi đó, tiếp tuyến của hai đường tròn này tại  $w$  phải vuông góc nhau. Theo một tính chất của tiếp

tuyến với đường tròn ta suy ra được tiếp tuyến của đường tròn sẽ đi qua tâm của đường tròn kia; điều đó có nghĩa là  $z_0 w$  là tiếp tuyến của đường tròn  $\Gamma$  tại  $w$ . Do đó, theo tính chất tiếp tuyến và cát tuyến của đường tròn nói ở phần đầu ta có  $|z_0 - z| \cdot |z_0 - z'| = |z_0 - w|^2 = R^2$ . Vậy  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua đường tròn  $C$ .

Trường hợp  $C$  là đường thẳng, dễ dàng chứng minh được  $z$  và  $z'$  đối xứng nhau qua  $C$  khi và chỉ khi mọi đường tròn (và đường thẳng) qua  $z$  và  $z'$  đều trực giao với  $C$ .  $\square$

## Hàm $f(z) = 1/z$

Ta thấy hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  xác định trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  và là hàm giải tích với  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ . Hơn nữa,  $f(z)$  là một đơn ánh nên nó có hàm ngược, và dễ dàng thấy rằng hàm ngược của nó là  $f^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ .

Bên cạnh đó, ta có các giới hạn

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0.$$

Từ đó ta có thể mở rộng hàm  $f$  ra trường số phức mở rộng như sau:

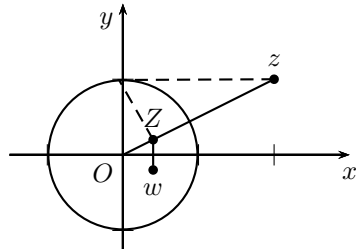
$$T(z) = \begin{cases} \infty & \text{khi } z = 0 \\ 0 & \text{khi } z = \infty \\ \frac{1}{z} & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

Khi đó, hàm  $T$  là một hàm liên tục trên  $\bar{\mathbb{C}}$  và là một song ánh.

Ta viết lại hàm  $w = f(z)$  như sau

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Vậy  $|wz| = 1$  và  $\arg w = \arg \bar{z}$ . Do đó, để xác định ảnh của  $z$  qua ánh xạ  $f(z)$  ta tiến hành hai bước sau: thứ nhất, lấy điểm  $Z$  đối xứng với  $z$  qua đường tròn đơn vị  $|z| = 1$ ; thứ hai, điểm đối xứng với  $Z$  qua trục thực  $Ox$  là ảnh  $w$  cần tìm.



Hình IV.4:

Khi  $w = u + iv$  là ảnh của  $z = x + iy$  (khác không) qua ánh xạ  $w = f(z)$  với cách viết  $w = \bar{z}/|z|^2$  cho ta

$$(3.10) \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Hơn nữa, chúng ta cũng có mối liên hệ ngược lại

$$(3.11) \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Ta biết rằng một đường tròn hay đường thẳng trong mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$  có phương trình dạng

$$(3.12) \quad A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$$

với  $A, B, C, D$  là các hằng số thực thỏa  $B^2 + C^2 > AD$ . Với  $z = x + iy$  thuộc đường thẳng hay đường tròn trong mặt phẳng phức ( $z$ ), ta có được phương trình (3.12). Thay (3.11) vào (3.12) sau khi biến đổi thu được (xem như bài tập)

$$(3.13) \quad D(u^2 + v^2) + 2Bu - 2Cv + A = 0.$$

Do đó,  $w = u + iv$  là ảnh của  $z = x + iy$  thuộc đường tròn hay đường thẳng trong mặt phẳng phức ( $w$ ). Từ đó ta có thể chứng minh được định lý sau.

**3.14 Định lý.** *Hàm  $f(z) = 1/z$  biến đường tròn hoặc đường thẳng thành đường tròn hoặc đường thẳng. Cụ thể như sau: (xem phương trình (3.12) và (3.13)) qua ánh xạ  $w = f(z) = 1/z$*

- (a) *một đường tròn không qua gốc tọa độ trong ( $z$ ) biến thành một đường tròn không qua gốc tọa độ trong ( $w$ ).*
- (b) *một đường tròn qua gốc tọa độ trong ( $z$ ) biến thành một đường thẳng không đi qua gốc tọa độ trong ( $w$ ).*
- (c) *một đường thẳng không qua gốc tọa độ trong ( $z$ ) biến thành một đường tròn đi qua gốc tọa độ trong ( $w$ ).*
- (d) *một đường thẳng qua gốc tọa độ trong ( $z$ ) biến thành một đường thẳng qua gốc tọa độ trong ( $w$ ).*

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

**3.15 Thí dụ.** Theo các phương trình (3.12) và (3.13), qua ánh xạ  $w = 1/z$  đường thẳng  $x = c_1$  với  $c_1 \neq 0$  biến thành đường tròn  $-c_1(u^2 + v^2) + u = 0$  hay

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2,$$

nó tiếp xúc với trục  $Ov$  tại gốc tọa độ. Đường  $x = 0$  biến thành  $u = 0$ .

Tương tự, đường thẳng  $y = c_2$  với  $c_2 \neq 0$  biến thành đường tròn

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2$$

nó tiếp xúc với trục  $Ou$  tại gốc tọa độ. Đường thẳng  $y = 0$  biến thành đường  $v = 0$ .  $\square$

## Bài tập

1) Tìm ảnh của nửa mặt phẳng  $y > 1$  qua ánh xạ tuyến tính  $w = (1-i)z$ .

2) Tìm ảnh của nửa dải vô hạn  $x > 0, 0 < y < 2$  qua ánh xạ tuyến tính  $w = iz + 1$ .

3) Tìm hàm tuyến tính mà nó ánh xạ tam giác có đỉnh tại các điểm  $0, 1, i$  thành tam giác đồng dạng có đỉnh tại các điểm  $0, 2, 1+i$ .

4) Tìm hàm tuyến tính có điểm bất động là  $1+2i$  và biến điểm  $i$  thành điểm  $-i$ .

5) Tìm ánh xạ tuyến tính biến

(a) dải xác định bởi  $a < x < a+h$  thành dải  $0 < u < 1$  và  $w(a) = 0$ .

(b) dải xác định bởi  $a < x < a+h$  thành dải  $0 < u < 1$  thỏa  $w(a + \frac{h}{2}) = \frac{1}{2} + i$  và  $\text{Im}[w(a + \frac{h}{2} + i)] < 1$ .

(c) dải giới hạn bởi hai đường  $y = kx + b_1$  và  $y = kx + b_2$  thành dải  $0 < u < 1$  và  $w(b_1) = 0$ .

6) Tìm dạng tổng quát của ánh xạ tuyến tính biến

(a) nửa mặt phẳng trên thành chính nó.

(b) nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng dưới.





- (a) Họ đường tròn  $x^2 + y^2 = ax$
- (b) Họ đường tròn  $x^2 + y^2 = by$
- (c) Chùm đường thẳng song song  $y = x + b$
- (d) Chùm đường thẳng đi qua điểm  $z_0$ .
- 16) Tìm ảnh của dải vô hạn  $0 < y < 1/(2c)$  qua ánh xạ  $w = 1/z$ .
- 17) Tìm ảnh của phần tư  $x > 1, y > 0$  qua ánh xạ  $w = 1/z$ .
- 18) Tìm ảnh của tập  $D = \{z : |z - 2 - i| < 2, \operatorname{Im}(z) > 1\}$  qua ánh xạ  $w = 1/z$ .
- 19) Chứng minh Định lý 3.14.

## § 4 Hàm phân tuyến tính

**4.1 Định nghĩa.** Hàm phân tuyến tính là hàm có dạng

$$(4.2) \quad w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{điều kiện } ad - bc \neq 0.$$

Điều kiện  $ad - bc \neq 0$  bảo đảm rằng hàm này không là hằng số. Khi  $c = 0$  thì hàm  $f$  trở thành hàm tuyến tính.

Ta nhận thấy hàm phân tuyến tính  $f$  giải tích trên  $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$  với

$$w' = f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2}.$$

Ta thấy  $w = f(z)$  là một đơn ánh nên nó có hàm ngược

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

cũng là một hàm phân tuyến tính. Hơn nữa, ta cũng có

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}, \quad \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty.$$

Từ các nhận xét trên ta mở rộng hàm  $f$  trên tập số phức mở rộng  $\bar{\mathbb{C}}$  và nó là một song ánh:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{khi } z = \infty \\ \infty & \text{khi } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{trường hợp khác} \end{cases}$$

Hàm  $T$  này được gọi là hàm phân tuyến tính trong trường số phức mở rộng  $\bar{\mathbb{C}}$  tương ứng với hàm  $f$ . Để cho gọn khi xét hàm phân tuyến tính trong tập mở rộng  $\bar{\mathbb{C}}$  ta chỉ ghi công thức  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  còn tại hai điểm  $z = \infty$  và  $z = -\frac{d}{c}$  chúng ta tự nhớ và tự hiểu.

Trở lại hàm phân tuyến tính  $f$ , ta biến đổi và viết lại như sau.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d) - ad + bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{-ad+bc}{c} \frac{1}{cz+d}.$$

Như vậy,  $f$  là hợp thành của các hàm

$$f_1(z) = cz + d, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = \frac{-ad+bc}{c}z + \frac{a}{c},$$

$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ . Do đó, theo tính chất của hàm tuyến tính và hàm  $1/z$  ta có kết quả sau.

**4.3 Định lý.** *Hàm phân tuyến tính biến đường tròn hoặc đường thẳng thành đường tròn hoặc đường thẳng.*

Trong tập số phức mở rộng, đường thẳng cũng được xem là đường tròn có tâm  $\infty$  và bán kính  $\infty$ . Từ đây về sau ta xét hàm phân tuyến tính trong tập số phức mở rộng  $\bar{\mathbb{C}}$ .

Từ định lý trên và theo nguyên lý bảo toàn miền (Định lý 6.11 trang 290) ta có thể dễ dàng chứng minh được tính chất: *ánh xạ phân tuyến tính bảo toàn hình tròn; nghĩa là ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn thành hình tròn.* Từ tính chất này ta có thể dễ dàng tìm ảnh của một miền xác định qua ánh xạ phân tuyến tính như thí dụ minh họa sau.

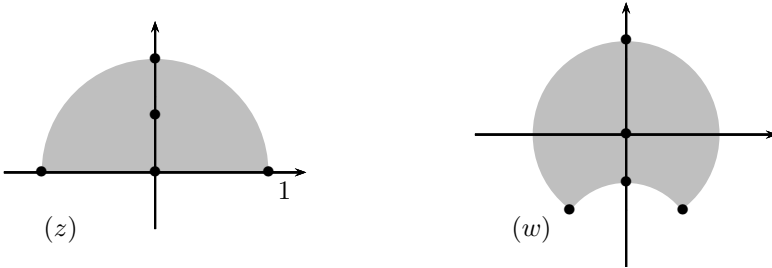
**4.4 Thí dụ.** Tìm ảnh của nửa hình tròn  $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  qua ánh xạ  $f(z) = \frac{2z-i}{iz+2}$ .

Ta xét ảnh của của một số điểm đặc biệt trên biên và bên trong nửa hình tròn; cụ thể ta được

$$f(0) = -\frac{i}{2}, \quad f(1) = \frac{3-4i}{5}, \quad f(-1) = \frac{-3-4i}{5}, \quad f(i) = i, \quad f\left(\frac{i}{2}\right) = 0.$$

Như vậy, ảnh của đường tròn  $|z| = 1$  qua ánh xạ  $f$  là đường tròn  $|w| = 1$  và ảnh của đường thẳng  $y = 0$  là đường tròn qua các điểm  $-\frac{i}{2}$ ,  $\frac{3-4i}{5}$ ,  $\frac{-3-4i}{5}$ , nó có phương trình  $|w + \frac{5}{4}i| = \frac{3}{4}$ . Vậy ảnh của nửa hình tròn đã cho là hình giới hạn bởi hai đường tròn vừa chỉ ra chứa điểm 0. Xem Hình IV.5.

□



Hình IV.5:

Trong định nghĩa, hàm phân tuyến tính phụ thuộc bốn tham số phức  $a, b, c, d$ . Ta luôn có thể giả thiết một tham số khác 0 và cho nó bằng 1. Như vậy, hàm phân tuyến tính chỉ còn phụ thuộc vào ba tham số, cho nên ta cần biết ba điều kiện nào đó dẫn đến ba phương trình thì xác định được hàm phân tuyến tính. Đặc biệt ta có kết quả sau:

**4.5 Định lý.** *Tồn tại một và chỉ một ánh xạ phân tuyến tính  $f$  biến ba điểm phân biệt  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  thành ba điểm phân biệt  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$  sao cho  $f(z_k) = w_k$  với  $k = 1, 2, 3$ . Hàm phân tuyến tính  $w = f(z)$  xác định bởi*

$$(4.6) \quad \frac{w - w_1}{w - w_3} \div \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \div \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

*Chứng minh.* Ta biến đổi đẳng thức (4.6) thành

$$\begin{aligned} (w - w_1)(w_2 - w_3)(z - z_3)(z_2 - z_1) \\ = (z - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$w = \frac{w_1(w_2 - w_3)(z - z_3)(z_2 - z_1) - w_3(z - z_1)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1)}{(w_2 - w_3)(z - z_3)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1)}.$$

Như vậy, công thức (4.6) xác định  $w$  có dạng một hàm phân tuyến tính ta cần chứng minh nó không là hằng số.

Với  $z = z_1$ , thay vào công thức trên có ngay  $w = w_1$ ; với  $z = z_3$ , ta có  $w = w_3$ ; và với  $z = z_2$ , ta có

$$\begin{aligned} w &= \frac{w_1(w_2 - w_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) - w_3(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1)}{(w_2 - w_3)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) - (z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1)} \\ &= \frac{w_1(w_2 - w_3) - w_3(w_2 - w_1)}{(w_2 - w_3) - (w_2 - w_1)} \\ &= w_2. \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ  $w$  biến ba điểm theo tương ứng  $(z_1, z_2, z_3)$  thành ba điểm  $w_1, w_2, w_3$ . Hơn nữa,  $w$  không là hàm hằng vì ba điểm  $w_1, w_2, w_3$  phân biệt. Do đó, công thức (4.6) xác định một hàm phân tuyến tính  $w = f(z)$ .

Giả sử  $w = g(z)$  là một hàm phân tuyến tính biến ba điểm  $z_1, z_2, z_3$  lần lượt thành ba điểm  $w_1, w_2, w_3$ . Ta đã biết hàm ngược  $g^{-1}$  của  $g$  cũng là hàm phân tuyến tính nhưng biến ba điểm  $w_1, w_2, w_3$  thành ba điểm  $z_1, z_2, z_3$ . Ta cũng có thể thấy hợp thành của hai hàm phân tuyến tính là hàm phân tuyến tính (bài tập), cho nên  $g^{-1} \circ f$  là một hàm phân tuyến tính với  $g^{-1} \circ f(z_k) = g^{-1}(f(z_k)) = g^{-1}(w_k) = z_k$  với  $k = 1, 2, 3$ . Ta có thể thấy hàm phân tuyến tính có nhiều hơn hai *điểm bất động* là hàm đồng nhất (bài tập). Do  $z_1, z_2, z_3$  phân biệt nên  $g^{-1} \circ f$  là hàm đồng nhất; nghĩa là  $g^{-1} \circ f(z) = z$  với mọi  $z$ , suy ra  $f(z) = g(z)$  với mọi  $z$ . Vậy hàm phân tuyến tính  $w = f(z)$  xác định ở trên là duy nhất.  $\square$

**4.7 Thí dụ.** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến ba điểm  $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = -1$  thành ba điểm tương ứng  $w_1 = i, w_2 = \infty, w_3 = 1$ .

Thay vào công thức (4.6) ta được

$$\frac{w - i}{w - 1} \div \frac{\infty - i}{\infty - 1} = \frac{z - 1}{z + 1} \div \frac{0 - 1}{0 + 1} \quad \text{suy ra} \quad \frac{w - i}{w - 1} = \frac{1 - z}{z + 1}$$

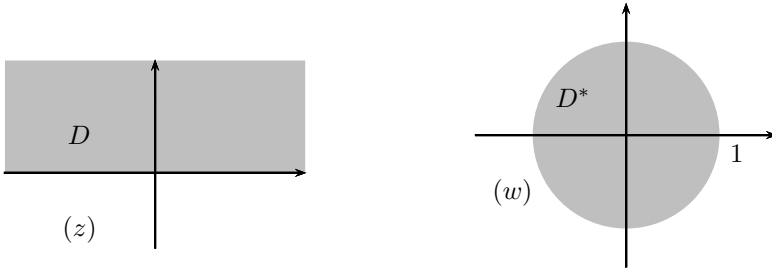
Sau khi biến đổi và đơn giản ta được  $w = \frac{(i + 1)z + i - 1}{2z}$ .  $\square$

Để việc giải các bài toán biến đổi ảnh được dễ dàng ta đưa ra một tính chất của hàm phân tuyến tính mà phép chứng minh cần đến kết quả ở chương sau.

**4.8 Định lý.** Cho  $f$  là một ánh xạ phân tuyến tính trong trường số phức mở rộng. Nếu  $z$  và  $z'$  đối xứng qua đường tròn  $C$  thì  $f(z)$  và  $f(z')$  đối xứng qua đường tròn  $f(C)$ .

*Chứng minh.* Xét  $\Gamma$  là một đường tròn bất kỳ qua  $f(z)$  và  $f(z')$ . Vì  $f$  là ánh xạ phân tuyến tính nên  $f^{-1}$  cũng là ánh xạ phân tuyến tính. Do đó, theo Định lý 4.3 ta có  $f^{-1}(\Gamma)$  là đường tròn qua  $z$  và  $z'$ . Mặt khác, do  $z$  và  $z'$  đối xứng qua đường tròn  $C$  nên theo Định lý 3.9 ta có  $C$  và  $f^{-1}(\Gamma)$  trực giao nhau. Vì ánh xạ phân tuyến tính bảo giác (Định lý 2.8 trang 297) nên ta suy ra được  $f(C)$  và  $\Gamma$  trực giao nhau. Một lần nữa, áp dụng Định lý 3.9 ta có  $f(z)$  và  $f(z')$  đối xứng nhau qua  $f(C)$ .  $\square$

**4.9 Thí dụ.** Tìm ánh xạ phân tuyến tính  $f$  biến miền  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  thành miền  $D^* = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ .



Hình IV.6:

Theo tính chất của hàm phân tuyến tính thì đường thẳng  $y = 0$  qua ánh xạ  $w = f(z)$  biến thành đường tròn  $|w| = 1$ . Gọi  $z_0 \in D$  sao cho  $f(z_0) = 0$ . Ta có  $\bar{z}_0$  đối xứng với  $z_0$  qua đường thẳng  $y = 0$ , cho nên  $f(\bar{z}_0)$  đối xứng với 0 qua đường tròn  $|w| = 1$ , suy ra  $f(\bar{z}_0) = \infty$ . Vậy  $f$  phải có dạng

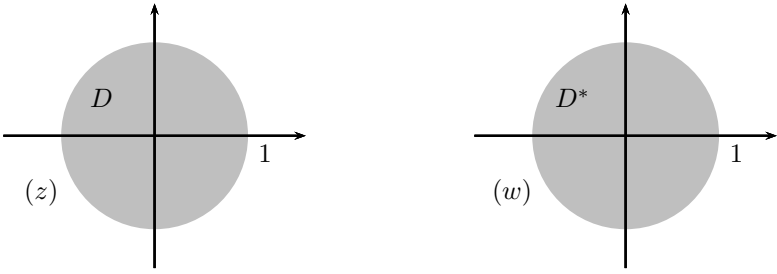
$$w = f(z) = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Lấy  $z = x$  là số thực (thuộc đường thẳng  $y = 0$ ). Khi đó,  $f(x)$  thuộc đường tròn  $|w| = 1$ ; nghĩa là  $|f(x)| = 1$ . Do đó,

$$1 = \left| A \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |A| \left| \frac{x - x_0 - iy_0}{x - x_0 + iy_0} \right| = |A| \quad \text{với } z_0 = x_0 + iy_0$$

Vậy  $A$  có thể được viết  $A = e^{i\varphi}$ . Do đó, ánh xạ cần tìm có phương trình  $f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ .  $\square$

**4.10 Thí dụ.** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền  $D = \{z : |z| < 1\}$  thành miền  $D^* = \{w : |w| < 1\}$ .



Hình IV.7:

Do qua ánh xạ phân tuyến tính đường tròn biến thành đường tròn nên đường tròn  $|z| = 1$  biến thành đường tròn  $|w| = 1$ . Do  $0 \in D^*$  nên tồn tại  $z_0 \in D$  sao cho  $f(z_0) = 0$ . Vì  $1/\bar{z}_0$  đối xứng với  $z_0$  qua đường tròn  $|z| = 1$  nên  $f(1/\bar{z}_0)$  đối xứng với 0 qua  $|w| = 1$ . Do đó,  $f(1/\bar{z}_0) = \infty$ . Vậy hàm  $f$  có dạng

$$f(z) = A \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = A_1 \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}.$$

Trong đó  $A_1$  là hằng số phức. Lấy  $z = e^{i\varphi}$ ; khi đó ảnh  $f(e^{i\varphi})$  sẽ nằm trên đường tròn  $|w| = 1$  nghĩa là

$$1 = |f(e^{i\varphi})| = \left| A_1 \frac{e^{i\varphi} - z_0}{\bar{z}_0 e^{i\varphi} - 1} \right| = |A_1| \cdot \left| \frac{e^{i\varphi} - z_0}{\bar{z}_0 - e^{-i\varphi}} \right| = |A_1|.$$

Suy ra  $A_1 = e^{i\theta}$  với  $\theta$  là một hằng số thực. Vậy ánh xạ phân tuyến tính cần tìm là  $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$ . □

## Bài tập

1) Chứng minh rằng hợp thành của hai hàm phân tuyến tính là hàm phân tuyến tính.

2) Cho hàm phân tuyến tính  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Khi đó, ta ký hiệu  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  và  $f(z) = f_M(z)$ . Chứng minh rằng nếu  $M_1$  và  $M_2$  là hai ma trận vuông cấp hai trong  $\mathbb{C}$  thì  $f_{M_1 M_2} = f_{M_1} \circ f_{M_2}$ .

3) Chứng minh rằng nếu hàm phân tuyến tính  $w = f(z)$  không là hàm đồng nhất thì nó có nhiều nhất hai điểm bất động ( $z_0 = f(z_0)$ ).

4) Không dùng nguyên lý bảo toàn miền chứng minh rằng ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn thành hình tròn.

5) Giả sử  $a, b, c, d$  là những số thực. Chứng minh rằng ánh xạ  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  là một đồng phôi từ nửa mặt phẳng  $\text{Im } z > 0$  lên chính nó hay lên nửa mặt phẳng  $\text{Im } z < 0$  tùy theo  $ad - bc > 0$  hay  $ad - bc < 0$ .

6) Tìm ảnh của góc phần tư thứ hai qua ánh xạ  $w = \frac{z-i}{z+i}$ .

7) Tìm ảnh của vành  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$  và của góc  $\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$  qua ánh xạ  $w = \frac{z}{z-1}$ .

8) Tìm ánh xạ phân tuyến tính thỏa điều kiện: điểm 1 và  $i$  là bất động, điểm 0 biến thành điểm  $-1$ .

9) Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến các điểm  $-1, 0, 1$  lần lượt thành các điểm  $1, i, -1$ .

10) Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến các điểm  $-1, i, 1+i$  lần lượt thành các điểm  $i, \infty, 1$ .

11) Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến đường tròn đơn vị thành chính nó, điểm  $z = 2$  là điểm bất động và điểm  $z = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i$  thành điểm vô cùng.

12) Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính biến

(a) nửa mặt phẳng trên thành chính nó.

(b) nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng trái.

(c) nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng dưới.

13) Tìm hàm phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó sao cho  $w(a) = b, \arg w'(a) = \alpha$  ( $\text{Im } a > 0, \text{Im } b > 0$ ).

14) Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến đường tròn  $|z| = 2$  thành đường tròn  $|w+1| = 1$ , và các điểm  $-2, 0$  biến thành  $0, i$  tương ứng.

15) Tìm ánh xạ phân tuyến tính  $w = f(z)$  biến nửa mặt phẳng trên  $\{z : \text{Im } z > 0\}$  thành hình tròn đơn vị  $\{w : |w| < 1\}$  sao cho



(a)  $f(i) = 0, \operatorname{Arg}(f'(i)) = -\frac{\pi}{2}.$

(b)  $f(2i) = 0, \operatorname{Arg}(f'(2i)) = 0.$

(c)  $f(a + ib) = 0, \operatorname{Arg}(f'(a + ib)) = 0,$  trong đó  $b > 0.$

**16)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính  $w = f(z)$  biến hình tròn đơn vị thành chính nó sao cho

(a)  $f(\frac{1}{2}) = 0, \operatorname{Arg}(f'(\frac{1}{2})) = 0.$

(b)  $f(\frac{i}{2}) = 0, \operatorname{Arg}(f'(\frac{i}{2})) = \frac{\pi}{2}.$

(c)  $f(0) = 0, \operatorname{Arg}(f'(0)) = -\frac{\pi}{2}.$

(d)  $f(a) = a, \operatorname{Arg}(f'(a)) = \alpha,$  trong đó  $\alpha$  là một số thực.

**17)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền  $D = \{z : |z - 3| > 9, |z - 8| < 16\}$  thành miền  $D^* = \{w : \rho < |w| < 1\}.$  Hãy xác định  $\rho.$

**18)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  lên hình tròn  $\{w : |w - w_0| < R\}$  sao cho điểm  $i$  biến thành tâm hình tròn còn đạo hàm tại đó dương.

**19)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn  $\{z : |z| < 2\}$  thành nửa mặt phẳng  $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$  sao cho  $w(0) = 1$  và  $\operatorname{Arg}(w'(0)) = \frac{\pi}{2}.$

**20)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn  $\{z : |z| < R_1\}$  thành hình tròn  $\{w : |w| < R_2\}$  sao cho  $w(a) = b, \operatorname{Arg}(w'(a)) = \alpha$  ( $|a| < R_1, |b| < R_2$ ).

**21)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn  $\{z : |z| < 1\}$  thành hình tròn  $\{w : |w - 1| < 1\}$  với  $w(0) = \frac{1}{2}, w(1) = 0.$

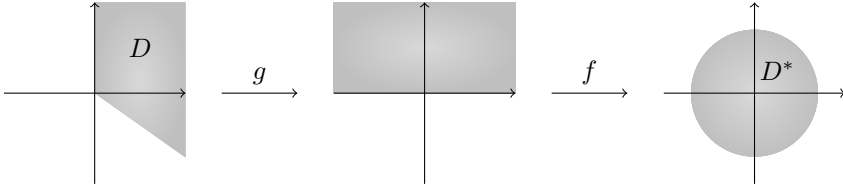
**22)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn  $\{z : |z - 2| < 1\}$  thành hình tròn  $\{w : |w - 2i| < 2\}$  với  $w(2) = i$  và  $\operatorname{Arg}(w'(2)) = 0.$

**23)** Tìm ánh xạ phân tuyến tính  $w$  biến  $D = \{z = x + iy : x + y > 1\}$  thành  $D^* = \{w : |w| < 1\}$  sao cho  $w(1 + i) = 0$  và  $w(2 - i) = 1.$

## § 5 Các ví dụ về sự biến hình

**5.1 Thí dụ.** Tìm một ánh xạ chỉnh hình biến miền  $D = \{z : -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}\}$  lên hình tròn đơn vị  $D^* = \{w : |w| < 1\}$  với  $w(e^{i\frac{\pi}{8}}) = 0$  và  $w(i) = -1$ .

Trong Thí dụ 4.9 ta đã tìm được dạng của ánh xạ chỉnh hình biến nửa trên mặt phẳng phức thành hình tròn đơn vị, đó là  $f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$  trong đó  $f(z_0) = 0$ . Như vậy, ta cần tìm một ánh xạ chỉnh hình biến miền  $D$  thành nửa trên mặt phẳng phức. Do  $D$  là hình quạt với góc  $\frac{3\pi}{4}$  và tia đầu có góc  $-\frac{\pi}{4}$  nên ánh xạ  $g(z) = (e^{i\frac{\pi}{4}}z)^{\frac{4}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}}$  thực hiện được nhiệm vụ ấy. Vậy ánh xạ cần tìm có dạng  $w(z) = f \circ g(z) = f(e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}}) = e^{i\varphi} \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}} - z_0}{e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}} - \bar{z}_0}$



Hình IV.8:

Ta cần tìm  $e^{i\varphi}$  và  $z_0$  để  $w(e^{i\frac{\pi}{8}}) = 0$  và  $w(i) = -1$ . Do  $g(e^{i\frac{\pi}{8}}) = e^{i\frac{4}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  cho nên  $z_0 = i$ . Mặt khác, ta có  $g(i) = e^{i\frac{4}{3}}i^{\frac{4}{3}} = e^{i\frac{4}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}\frac{4}{3}} = e^{i\pi} = -1$ , suy ra

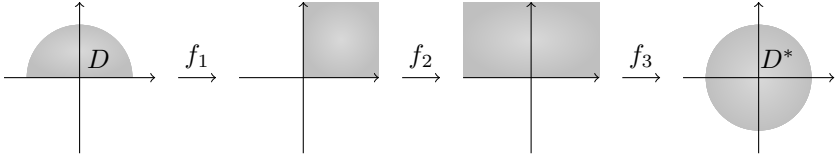
$$-1 = w(i) = e^{i\varphi} \frac{-1 - i}{-1 + i} = e^{i\varphi} i \quad \text{hay} \quad e^{i\varphi} = i$$

Vậy ánh xạ cần tìm là  $w = i \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}} - i}{e^{i\frac{\pi}{3}}z^{\frac{4}{3}} + i}$ . □

**5.2 Thí dụ.** Tìm ánh xạ chỉnh hình biến nửa hình tròn đơn vị  $D = \{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$  lên hình tròn đơn vị  $D^* = \{w : |w| < 1\}$  với  $w(\pm 1) = \pm 1$  và  $w(0) = -i$ .

Ta nhận thấy biên của  $D$  được xem gồm hai phần của đường tròn, cho nên chúng ta nghĩ đến phép biến hình sau

Ta dễ dàng nhận thấy  $f_2$  có thể được lấy là  $f_2(z) = z^2$ , cũng như ở thí dụ trên  $f_3$  có dạng  $f_3(z) = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ . Để xác định hàm phân tuyến tính



Hình IV.9:

$f_1$  ta nhận thấy hai đường tạo nên biên của  $D^*$  cắt nhau tại  $-1$  và  $1$  nên qua  $f_1$  hai điểm này sẽ biến thành giao điểm của biên. Do đó, ta có thể cho  $f_1(-1) = 0$  và  $f_1(1) = \infty$ , cho nên  $f_1$  có dạng  $f_1(z) = c \frac{z+1}{z-1}$ . Để xác định  $c$  ta cần biết thêm ảnh của một điểm. Vì  $0$  nằm trên biên của  $D$  nên ta có thể giả sử  $f(0) = 1$  suy ra  $-c = 1$  hay  $c = -1$ . Vậy  $f_1(z) = \frac{z+1}{1-z}$ . Ta có  $w = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  và

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{f_1} \infty \xrightarrow{f_2} \infty \xrightarrow{f_3} A = 1 \\ -1 &\xrightarrow{f_1} 0 \xrightarrow{f_2} 0 \xrightarrow{f_3} A \frac{z_0}{\bar{z}_0} = -1 \\ 0 &\xrightarrow{f_1} -1 \xrightarrow{f_2} 1 \xrightarrow{f_3} A \frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0} = -i \end{aligned}$$

Vậy  $A = 1$  và  $z_0 = -\bar{z}_0$ , suy ra  $z_0$  là số thuần ảo hay  $z_0 = ib$ . Do đó

$$\frac{1-ib}{1+ib} = -i \quad \text{hay} \quad 1-ib = -i+b \quad \text{hay} \quad b = 1$$

Vậy ánh xạ cần tìm là

$$\begin{aligned} w &= f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = f_3 \circ f_2\left(\frac{z+1}{1-z}\right) = f_3\left(\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2\right) = \frac{\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2 - i}{\left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2 + i} \\ &= \frac{(1-i)z^2 + 2(1+i)z + 1-i}{(1+i)z^2 + 2(1-i)z + 1+i} = \frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 + 2z + i}. \end{aligned} \quad \square$$

**5.3 Thí dụ.** Trong ví dụ này ta nghiên cứu phép biến hình của hàm Joukowski  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ . Ta viết biến  $z$  ở dạng Euler  $z = re^{i\varphi}$ . Khi đó, ta có

$$w = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Khi  $r = 1$  ta có  $w = \cos\varphi$ . Vậy hàm Joukowski biến hình tròn đơn vị  $|z| = 1$  thành đoạn nối  $-1$  với  $1$ , ký hiệu  $[-1, 1]$ . Khi  $r \neq 1$ , ta viết

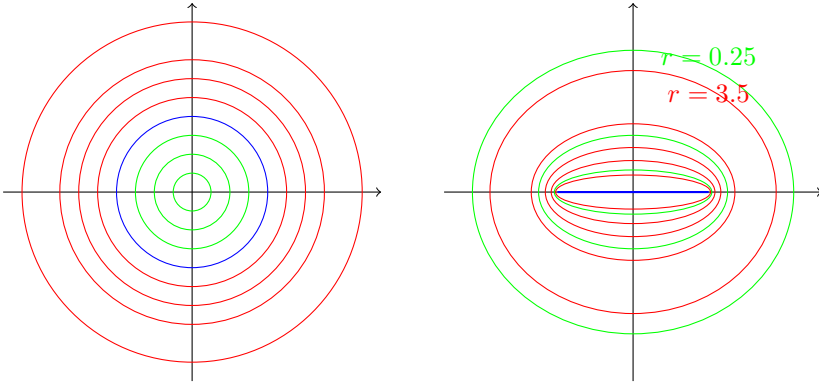
$w = u + iv$ , nghĩa là

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi.$$

Suy ra

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left( r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1.$$

Ta nhận thấy phương trình cuối ở trên là phương trình của ellipse tâm 0 với các nửa trục tương ứng là  $a = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right)$  và  $b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$ . Chú ý rằng khi  $r$  biến thiên từ 0 đến 1 thì  $a$  biến thiên từ  $\infty$  đến 1 còn  $b$  biến thiên từ  $\infty$  đến 0. Do đó, hàm Joukowski biến miền  $\{z : 0 < |z| < 1\}$  thành cả mặt phẳng phức bỏ đi đoạn  $[-1, 1]$ . Khi  $r$  biến thiên từ 1 đến  $\infty$  thì  $a$  biến thiên từ 1 đến  $\infty$  và  $b$  biến thiên từ 0 đến  $\infty$ . Vậy miền ngoài đường tròn đơn vị tâm 0 qua ánh xạ Joukowski thành mặt phẳng phức trừ đi đoạn  $[-1, 1]$ .



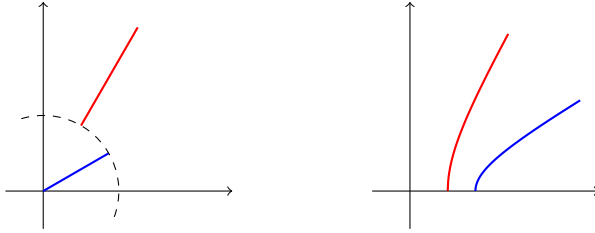
Hình IV.10:

Bây giờ xét trường hợp cố định  $\varphi$ . Khi đó, ta có ảnh của đoạn từ 0 đến đường tròn đơn vị hợp với trục thực một góc  $\varphi$  là đường cong từ  $\infty$  vào  $z = \cos \varphi$  với phương trình tham số theo  $r$  là  $u$  và  $v$  xác định ở trên hay

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1 \quad \text{với } \varphi \neq \frac{k\pi}{2}.$$

Phần còn lại của tia từ 0 hợp với  $Ox$  góc  $\varphi$  sau khi bỏ đoạn từ bên trong hình tròn đơn vị cũng là đường cong như trên nhưng có hướng từ  $\cos \varphi$  ra  $\infty$ . Khi  $\varphi = 0$  thì đoạn  $(0, 1]$  biến thành  $[1, \infty)$  và đoạn  $[1, \infty)$  biến thành

$[1, \infty)$ . Tương tự cho các trường hợp  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  có ảnh là các đường nằm trên trục tung và trục hoành (chỉ tiết xin dành cho bạn đọc xem như bài tập).



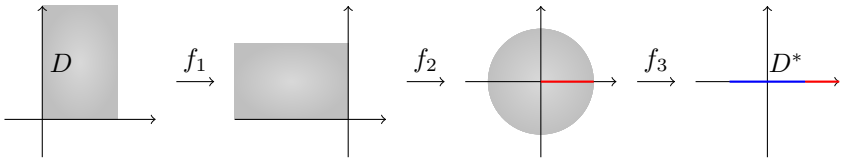
Hình IV.11:

**5.4 Thí dụ.** Tìm ảnh của nửa dải  $D = \{z = x + iy : 0 < x < 2\pi, y > 0\}$  qua ánh xạ  $\cos z$ .

Do hàm  $\cos z$  có công thức

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2} \left( e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} \right)$$

Vậy  $\cos z$  là hợp thành của 3 hàm  $\cos z = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  trong đó  $f_1(z) = iz$ ,  $f_2(z) = e^z$  và  $f_3(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . Qua  $f_1$  nửa dải  $D$  biến thành nửa dải  $\{z = x + iy : x < 0, 0 < y < 2\pi\}$  từ đây qua ánh xạ  $f_2$  biến thành hình tròn đơn vị tâm 0 bỏ đi đoạn  $[0, 1]$ , cuối cùng qua ánh xạ Joukowski  $f_3$  biến thành toàn mặt phẳng phức bỏ đi nửa đường thẳng  $[-1, \infty)$ .  $\square$



Hình IV.12:

## Bài tập

- 1) Tìm ảnh của các đường thẳng  $x = 1$  và  $y = 1$  qua ánh xạ Joukowski.
- 2) Tìm ảnh của các đường thẳng  $x = 1$  và  $y = 1$  qua ánh xạ  $\cos z$ .
- 3) Tìm ảnh của các đường thẳng  $x = 1$  và  $y = 1$  qua ánh xạ  $\sin z$ .

- 4) Tìm ảnh của đường tròn  $|z| = r$  qua ánh xạ  $w = z - \frac{1}{z}$ .
- 5) Tìm ảnh của đường tròn  $|z| = 1$  qua ánh xạ  $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ .
- 6) Tìm hàm chỉnh hình biến góc  $\{z : 0 < \text{Arg } z < \alpha\pi\}$  với  $0 < \alpha \leq 2$  lên nửa mặt phẳng trên.
- 7) Tìm hàm giải tích biến góc  $\{z : -\frac{\pi}{4} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}\}$  lên nửa mặt phẳng trên với  $w(1-i) = 2$ ,  $w(i) = -1$ ,  $w(0) = 0$ .
- 8) Tìm hàm giải tích biến các miền sau lên nửa mặt phẳng trên  $\text{Im } w > 0$
- (a)  $\{z : |z| > 1, \text{Im } z > 0\}$ .
- (b)  $\{z : |z| < R, 0 < \text{Arg } z < \pi\alpha\}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ .
- (c)  $\{z : |z| > R, 0 < \text{Arg } z < \pi\alpha\}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ .
- (d)  $\{z : |z| < 1, |z-i| < 1\}$ .
- (e)  $\{z : |z| > 1, |z-i| < 1\}$ .
- 9) Tìm hàm giải tích biến nửa hình tròn đơn vị  $\{z : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$  lên nửa mặt phẳng trên thỏa mãn
- (a)  $w(-1) = 0$ ,  $w(0) = 1$ ,  $w(1) = \infty$ .
- (b)  $w(\pm 1) = \pm 1$ ,  $w(0) = \infty$ .
- (c)  $w(\frac{i}{2}) = i$ ,  $\text{Arg}(\frac{i}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ .
- 10) Tìm hàm giải tích  $w$  biến miền  $D = \{z : 0 < \arg(z-1) < \frac{\pi}{2}\}$  thành miền  $D^* = \{w : |w| < 1\}$  thỏa  $w(4+i) = 0$  và  $w(3) = 1$ .
- 11) Tìm hàm giải tích biến nửa mặt phẳng trên thành các miền sau
- (a) mặt phẳng với khía theo  $[-1, 1]$ .
- (b) mặt phẳng với khía theo  $[-i, i]$ .
- (c) mặt phẳng với khía theo  $[z_1, z_2]$ .
- (d) mặt phẳng với khía theo  $(-\infty, -R]$ ,  $[R, \infty)$ .

- (e) mặt phẳng với rạch theo tia nằm trong góc phần tư thứ nhất xuất phát từ  $i$  và song song với đường  $y = x$ .
- (f) nửa mặt phẳng  $\operatorname{Im} z > 0$  với khía theo  $[0, ih]$ ,  $h > 0$ .
- (g) hình tròn  $|z| < 1$  với khía theo bán kính  $[0, 1]$ .

12) Dùng hàm Joukowski tìm hàm giải tích biến

- (a) miền ngoài của  $[-c, c]$  với  $c > 0$  lên miền ngoài của hình tròn đơn vị với  $w(\infty) = \infty$ ,  $\operatorname{Arg}(w'(\infty)) = \alpha$ .
- (b) miền ngoài ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  lên miền ngoài của hình tròn đơn vị với  $w(\infty) = \infty$ ,  $\operatorname{Arg}(w'(\infty)) = 0$ .

## § 6 Khái niệm về diện Riemann

### Hàm đa trị

Xét hàm  $f$  từ miền  $D$  lên miền  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Với mỗi  $w \in G \subseteq \mathbb{C}$ , xét tập

$$\varphi(w) = f^{-1}(w) = \{z \in D : f(z) = w\}.$$

Nếu  $f$  đơn diệp thì  $\varphi(w)$  có duy nhất một điểm với mọi  $w \in G$ , vì thế ta có hàm  $\varphi$  từ  $G$  lên  $D$ . Nếu  $f$  không đơn diệp trên  $D$  thì  $\varphi$  không phải là một hàm theo nghĩa thông thường. Trong trường hợp tổng quát  $\varphi(w)$  là một tập con khác rỗng của  $D$  không hẳn là tập đơn tử. Khi đó, ta nói quy tắc  $w \rightarrow \varphi(w)$  xác định một *hàm đa trị*  $\varphi$  trên  $G$ .

Một cách tổng quát hàm đa trị  $F$  trên miền  $D \subseteq \mathbb{C}$  là một quy tắc đặt tương ứng mỗi  $z \in D$  với tập con khác rỗng  $F(z)$  của  $\mathbb{C}$ . Như vậy, hàm ta thường dùng (còn gọi là hàm đơn trị) là một trường hợp riêng của hàm đa trị (khi  $F(z)$  là tập đơn tử).

Để nghiên cứu hàm đa trị ta sẽ đưa về hàm đơn trị (hàm thông thường) bằng cách thay đổi tập xác định. Điều này dẫn đến một loại không gian mới sau này gọi là *diện Riemann*. Sau đây ta sẽ xây dựng diện Riemann của một số hàm quan trọng.

### Hàm $w = \sqrt[n]{z}$

Ta đã biết rằng với mọi  $z \in \mathbb{C}$  và  $z \neq 0$ ,  $w$  có  $n$  giá trị khác nhau

$$w_0(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}}, \quad w_1(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}}, \dots, \quad w_{n-1}(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}}$$

trong đó  $r = |z|$  và  $\varphi = \arg(z)$ . Rõ ràng hàm đa trị  $w = \sqrt[n]{z}$  hoàn toàn được xác định bởi  $n$  hàm đơn trị  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ . Mỗi hàm  $w_j$  với  $j = 0, 1, \dots, n-1$  được gọi là *nhánh đơn trị* của  $w$ .

Bây giờ ta muốn kết hợp các hàm  $w_j$  thành một hàm đơn trị và đồng nhất nó với  $w$ . Hàm đó tất nhiên không thể xác định trên một miền nào đó của  $\mathbb{C}$  mà phải xác định trên một tập mới mà ta sẽ xây dựng như sau.

Ta ký hiệu  $\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_{n-1}$  là các tờ nhận được từ  $\mathbb{C}$  rạch theo tia số thực dương  $\{re^{i\varphi} : r \geq 0, \varphi = 0\}$ . Ta gọi bờ dưới của đường rạch là bờ ứng với tập số phức với phần ảo âm còn bờ bên kia gọi là bờ trên của đường rạch. Ta dán bờ dưới của  $\mathbb{C}_0$  với bờ trên của  $\mathbb{C}_1$ , dán bờ dưới của  $\mathbb{C}_1$  với bờ trên của  $\mathbb{C}_2$ , ... dán bờ dưới của  $\mathbb{C}_{n-2}$  với bờ trên của  $\mathbb{C}_{n-1}$  và cuối cùng dán bờ dưới của  $\mathbb{C}_{n-1}$  với bờ trên của  $\mathbb{C}_0$ . Khi đó, ta nhận được một tập mới  $\Omega$ , ta xác định được hàm đơn trị  $\omega(z)$  từ các nhánh đơn trị  $w_j$  bằng cách đặt  $\omega(z) = w_j(z)$  nếu  $z \in \mathbb{C}_j$  với  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Một điều quan trọng là diện Riemann không phải là mặt phẳng phức nhưng tại mỗi điểm của  $\Omega$  đều có một mặt phẳng phức đi qua và vì vậy các hàm xác định trên  $\Omega$  đều có thể nói về tính liên tục hay giải tích của chúng.

**6.1 Định lý.** *Hàm  $\omega(z)$  xác định như trên là hàm giải tích trên diện Riemann của hàm đa trị  $\sqrt[n]{z}$ .*

*Chứng minh.* Trước hết chứng minh các hàm  $w_j$  giải tích trên  $\mathbb{C}_j$ . Bởi vì  $w_j$  là bội của  $w_0$ , cụ thể là  $w_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}} w_0$  nên chỉ cần chứng minh  $w_0$  giải tích trên  $\mathbb{C}_0$ . Lấy tùy ý  $z \in \mathbb{C}_0$  và giả sử  $z' \in \mathbb{C}_0$ . Ta có

$$\frac{w_0(z) - w_0(z')}{z - z'} = \frac{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}} - \sqrt[n]{r'}e^{i\frac{\varphi'}{n}}}{re^{i\varphi} - r'e^{i\varphi'}}$$

ở đây  $z = re^{i\varphi}$ ,  $z' = r'e^{i\varphi'}$ ,  $r > 0$ ,  $r' > 0$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ,  $0 < \varphi' < 2\pi$ . Do  $re^{i\varphi} - r'e^{i\varphi'} = (\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}})^n - (\sqrt[n]{r'}e^{i\frac{\varphi'}{n}})^n$  nên vế phải của đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}})^{n-1} + (\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}})^{n-2}\sqrt[n]{r'}e^{i\frac{\varphi'}{n}} + \dots + (\sqrt[n]{r'}e^{i\frac{\varphi'}{n}})^{n-1}}.$$

Khi  $z' \rightarrow z$  ta có  $r' \rightarrow r$  và  $\varphi' \rightarrow \varphi$ , do đó ta được

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{w_0(z) - w_0(z')}{z - z'} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}})^{n-1}}$$

Vậy  $w_0$  giải tích trên  $\mathbb{C}_0$ . Cần kiểm tra lại  $w(z)$  giải tích tại những điểm dán. Ta xét chẳng hạn những điểm dán trên đường dán  $\mathbb{C}_0$  với  $\mathbb{C}_1$ . Ký



hiệu  $\mathbb{C}_{01}$  là phần của diện Riemann tạo bởi nửa dưới của  $\mathbb{C}_0$  và nửa trên của  $\mathbb{C}_1$ . Trong  $\mathbb{C}_{01}$  ta có  $w(z) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\psi}{n}}$  ở đây  $r = |z|$  và  $\psi = \text{Arg } z$  với  $\pi < \psi < 3\pi$ . Theo phép chứng minh trên ta cũng được  $w$  giải tích trên  $\mathbb{C}_{01}$ , cụ thể  $w$  giải tích trên đường dán  $\mathbb{C}_0$  với  $\mathbb{C}_1$ , ứng với  $\psi = 0$ .  $\square$

## Hàm $w = \text{Ln } z$

Hàm đa trị  $w = \text{Ln } z$  là hàm ngược của hàm mũ  $w = e^z$ . Ta đã biết công thức xác định  $\text{Ln } z$  như sau

$$w(z) = \text{Ln } z = \{\ln r + i(\varphi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{với } r = |z| \text{ và } \varphi = \arg z$$

Với mỗi số nguyên  $j$  đặt  $L_j(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2j\pi)$ . Ta nhận được các hàm đơn trị  $L_j$  xác định trên  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $L_0(z)$  chính là hàm giá trị logarithm chính  $\ln z$  đã xét trước đây, trong trường hợp này nó được gọi là nhánh chính của hàm đa trị  $\text{Ln } z$ .

Với mỗi  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , ký hiệu  $\mathbb{C}_j$  là mặt phẳng  $\mathbb{C}$  rạch theo tia số thực dương. Cũng như đối với hàm đa trị  $w = \sqrt[n]{z}$  nếu dán bờ dưới của  $\mathbb{C}_j$  với bờ trên của  $\mathbb{C}_{j+1}$  với tất cả  $j$  ta nhận được diện Riemann của hàm đa trị  $\text{Ln } z$ . Diện Riemann này có vô số tờ, khác với diện Riemann của hàm  $\sqrt[n]{z}$  chỉ có  $n$  tờ.

Trên diện Riemann được xây dựng trên ta có thể xác định hàm đơn trị (cũng dùng cùng ký hiệu)  $\text{Ln}(z)$  từ các hàm đơn trị  $L_j(z)$  bởi  $\text{Ln}(z) = L_j(z)$  nếu  $z \in \mathbb{C}_j$ . Tính giải tích của hàm  $\text{Ln}(z)$  nhận được từ định lý sau.

**6.2 Định lý.** Với mỗi  $z$  thuộc diện Riemann của hàm đa trị  $\text{Ln}(z)$  ta có  $(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$ .

*Chứng minh.* Ta có  $L_j(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2j\pi) = L_0(z) + i2j\pi = \ln z + i2j\pi$ . Theo Định lý 1.9 ta có hàm  $\ln z$  giải tích trên  $\mathbb{C}_0$  và  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$  cho nên hàm  $L_j$  giải tích trên  $\mathbb{C}_j$  và  $L'_j(z) = \frac{1}{z}$ . Ta chỉ còn xét tính giải tích của hàm  $\text{Ln } z$  trên các đường dán. Lập luận tương tự như chứng minh Định lý 6.1 và Định lý 1.9 ta được điều phải chứng minh.  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh phần còn lại trong chứng minh Định lý 6.2.

## Chương V

# Lý thuyết tích phân

### § 1 Đường cong

#### Hàm giá trị phức biến thực

Để trình bày tích phân của hàm  $f(z)$  theo cách đơn giản, trước tiên chúng ta xét đạo hàm và tích phân của hàm giá trị phức biến thực. Một ánh xạ  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  được gọi là một hàm giá trị phức biến thực. Nếu ta viết  $w(t) = u(t) + iv(t)$ , thì  $u(t)$  và  $v(t)$  là hai hàm thực xác định trên  $[a, b]$ .

Nếu hai hàm  $u(t)$  và  $v(t)$  khả vi tại  $t$  ta nói hàm  $w(t)$  cũng khả vi tại  $t$  và đạo hàm của nó  $w'(t)$  hay  $\frac{d}{dt}w(t)$  xác định bởi

$$(1.1) \quad w'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Giả sử  $w(t)$  khả vi tại  $t$  và  $z_0 = x_0 + iy_0$  là một hằng số. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[z_0 w(t)] &= \frac{d}{dt}[(x_0 + iy_0)(u(t) + iv(t))] \\ &= \frac{d}{dt}[(x_0 u(t) - y_0 v(t)) + i(x_0 v(t) + y_0 u(t))] \\ &= x_0 u'(t) - y_0 v'(t) + i(x_0 v'(t) + y_0 u'(t)) \\ &= (x_0 + iy_0)(u'(t) + iv'(t)). \end{aligned}$$

Nghĩa là

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt}[z_0 w(t)] = z_0 w'(t).$$

Tính chất này tương tự như tính chất đạo hàm của hàm thực. Ta cũng có thể chứng minh các tính chất tương tự như ở hàm thực đối với đạo hàm như là đạo hàm của tổng, của tích, ... Tương tự cách chứng minh trên ta có thể chứng minh được

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}.$$

Lưu ý rằng không phải mọi tính chất của đạo hàm hàm thực đều đúng khi chuyển qua hàm phức biến thực. Thí dụ sau cho ta thấy định lý Lagrange không còn đúng trong hàm phức biến thực.

**1.4 Thí dụ.** Xét hàm  $w(t) = e^{it}$  trên đoạn  $[0, 2\pi]$ . Hàm  $w$  khả vi trên đoạn  $[0, 2\pi]$  và  $w'(t) = ie^{it}$  với mọi  $t \in [0, 2\pi]$ . Vì  $|w'(t)| = |ie^{it}| = 1$  nên  $w'(t) \neq 0$  với mọi  $t \in [0, 2\pi]$ . Trong khi đó  $w(0) = w(2\pi) = 1$ . Vậy không tìm được  $c \in (0, 2\pi)$  sao cho  $w'(c) = \frac{w(2\pi) - w(0)}{2\pi - 0}$ .  $\square$

Nếu  $u(t)$  và  $v(t)$  khả tích trên  $[a, b]$ , thì ta nói  $w(t) = u(t) + iv(t)$  cũng khả tích trên  $[a, b]$  và tích phân của nó xác định bởi

$$(1.5) \quad \int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Như vậy, tích phân của  $w(t)$  trên  $[a, b]$  là một số phức xác định bởi

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \int_a^b w(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Re}[w(t)] dt \\ \operatorname{Im} \int_a^b w(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Im}[w(t)] dt. \end{aligned}$$

**1.7 Thí dụ.** Ta có

$$\int_0^1 (1 + it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2) dt + i \int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i. \quad \square$$

Từ định nghĩa tích phân ta dễ dàng chứng minh được định lý sau.

**1.8 Định lý.** Hàm  $w(t)$  khả tích trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi  $\bar{w}(t)$  khả tích trên  $[a, b]$  và

$$\int_a^b \bar{w}(t) dt = \overline{\int_a^b w(t) dt}.$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

Do tích phân của hàm phức biến thực được xác định thông qua tích phân của hai hàm thực, nên ta có thể thấy các tính chất tuyến tính của tích phân thực cũng đúng cho tích phân của hàm phức biến thực. Sau đây chúng ta nêu ra hai tính chất mà sau này chúng ta dùng nhiều.

**1.9 Định lý.** 
$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt.$$

**1.10 Định lý.** Nếu  $W'(t) = w(t)$  với mọi  $t \in [a, b]$ , thì  $\int_a^b w(t)dt = W(t)|_a^b = W(b) - W(a).$

**1.11 Thí dụ.** Bởi vì  $(e^{it})' = ie^{it}$  nên  $(-ie^{it})' = e^{it}$ , suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it} dt = -ie^{it} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -ie^{i\frac{\pi}{4}} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \quad \square$$

Để kết thúc phần này chúng ta xét một tính chất quan trọng sau.

**1.12 Định lý.** Với  $a \leq b$ , ta có  $\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt.$

*Chứng minh.* Nếu  $\int_a^b w(t)dt = 0$ , thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Giả sử  $\int_a^b w(t)dt \neq 0$ . Khi đó, tồn tại  $r_0$  và  $\varphi_0$  sao cho  $\int_a^b w(t)dt = r_0 e^{i\varphi_0}$ . Từ đó ta viết lại

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\varphi_0} w(t)dt.$$

Vì  $r_0$  là một số thực, nên ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-i\varphi_0} w(t)dt &= \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\varphi_0} w(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi_0} w(t))dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi_0} w(t)|dt = \int_a^b |w(t)|dt. \end{aligned}$$

Vậy  $\left| \int_a^b w(t)dt \right| = r_0 \leq \int_a^b |w(t)|dt.$   $\square$

## Đường cong

Ảnh của ánh xạ  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $w(t) = u(t) + iv(t)$ , trong mặt phẳng phức ( $\mathbb{C}$ ) là một **đường cong** (chính xác hơn: **cung**)  $\mathcal{C}$  nếu  $u(t)$  và  $v(t)$  là các hàm liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó, điểm  $w(a)$  gọi là điểm *gốc* (điểm đầu) và điểm  $w(b)$  gọi là điểm *mút* (điểm cuối) của  $\mathcal{C}$ ; đồng thời  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  được gọi là *biểu diễn tham số* của đường cong  $\mathcal{C}$ . Chúng ta thường dùng các ký hiệu khác cho đường cong là  $C$ ,  $\Gamma$ , ...

Với một đường cong  $\mathcal{C}$  có điểm gốc và mút,  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  và  $\gamma(t)$  với  $c \leq t \leq d$  đều là biểu diễn tham số của  $\mathcal{C}$  nếu và chỉ nếu tồn tại một song ánh đơn điệu tăng  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  sao cho  $\varphi$  và  $\varphi^{-1}$  liên tục (sau này ta yêu cầu thêm cả hai là khả vi từng khúc) và  $\gamma(t) = w(\varphi(t))$  với  $c \leq t \leq d$ .

**1.13 Thí dụ.** Đường tròn tâm  $z_0 = x_0 + iy_0$  bán kính  $r$  có phương trình  $|z - z_0| = r$ . Biểu diễn tham số của nó  $w(t) = z_0 + re^{it} = (x_0 + r \cos t) + i(y_0 + r \sin t)$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Đường cong này có điểm gốc và điểm cuối là  $z_0 + r$  và đi trên đường tròn theo hướng dương (ngược chiều kim đồng hồ).  $\square$

Cho đường cong  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Khi đó, đường cong  $\mathcal{C}$  được định hướng ngược chiều lại với gốc là  $w(b)$  và mút là  $w(a)$  được ký hiệu  $\mathcal{C}^-$  và có biểu diễn tham số là  $w(-t)$  với  $-b \leq t \leq -a$ .

Cho hai đường cong  $\mathcal{C}_1$  và  $\mathcal{C}_2$  có biểu diễn tham số lần lượt là  $w_1(t)$  với  $a \leq t \leq b$  và  $w_2(t)$  với  $c \leq t \leq d$  sao cho gốc  $w_2(c)$  của  $\mathcal{C}_2$  trùng với mút  $w_1(b)$  của  $\mathcal{C}_1$ . Khi đó, đường cong  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  có điểm gốc  $w_1(a)$  và mút là  $w_2(d)$  với biểu diễn tham số

$$w(t) = \begin{cases} w_1(t) & \text{khi } a \leq t \leq b \\ w_2(t - b + c) & \text{khi } b \leq t \leq b + d - c \end{cases}$$

Ngược lại, cho trước đường cong  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  và  $a < c < b$ . Khi đó, thu hẹp của  $w$  trên  $[a, c]$  và  $[c, b]$  là biểu diễn tham số lần lượt hai đường cong  $\mathcal{C}_1$  và  $\mathcal{C}_2$  sao cho  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .

Giả sử  $\mathcal{C}$  là đường cong có biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  sao cho có các điểm  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$  thỏa  $w(t) = \alpha_j + \beta_j t$  với mọi  $t \in [a_j, a_{j+1}]$  và  $j = 0, 1, \dots, n-1$  trong đó  $\alpha_j$  và  $\beta_j$  là các số phức cho trước. Khi đó, ta nói  $w$  *tuyến tính từng mảnh* và  $\mathcal{C}$  là một **đường gấp khúc**.

**1.14 Định lý.** Cho  $\mathcal{C}$  là đường cong có biểu diễn tham số  $w(t) = u(t) + iv(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Với mọi  $r > 0$  tồn tại các điểm  $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{C}$  sao cho  $\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=0}^n B(z_j, r)$  với  $z_{j+1} \in B(z_j, r)$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ).

*Chứng minh.* Vì các hàm  $u(t)$  và  $v(t)$  liên tục trên  $[a, b]$  nên cũng liên tục đều. Do đó, tồn tại  $n$  đủ lớn sao cho  $|u(t) - u(s)| < \frac{r}{\sqrt{2}}$  và  $|v(t) - v(s)| < \frac{r}{\sqrt{2}}$  với mọi  $t, s \in [a, b]$  thỏa  $|t - s| \leq \frac{b-a}{n}$ . Đặt  $t_j = a + \frac{j(b-a)}{n}$  và  $z_j = w(t_j)$  với  $j = 0, 1, \dots, n$ . Ta chứng minh các  $z_j$  này thỏa điều kiện của định lý.

Với  $j = 0, 1, \dots, n-1$  ta có  $|t_{j+1} - t_j| = \frac{b-a}{n}$  nên

$$|z_{j+1} - z_j| = \sqrt{(u(t_{j+1}) - u(t_j))^2 + (v(t_{j+1}) - v(t_j))^2} < r$$

suy ra  $z_{j+1} \in B(z_j, r)$ . Lấy  $z \in \mathcal{C}$  tùy ý tồn tại  $s \in [a, b]$  sao cho  $w(s) = z$  và tồn tại  $t_{j_0} \in [a, b]$  sao cho  $|t_{j_0} - s| \leq \frac{b-a}{n}$ . Ta có

$$|z - z_{j_0}| = |w(s) - w(t_{j_0})| < r.$$

Vậy  $z \in B(z_{j_0}, r)$ . Do đó,  $\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=0}^n B(z_j, r)$ . □

**1.15 Định lý.** Giả sử  $\mathcal{C}$  là đường cong như đã nói ở trên và nằm trong miền  $D$ . Khi đó, tồn tại  $r > 0$  và  $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{C}$  sao cho  $z_{j+1} \in B(z_j, r)$  với  $j = 0, 1, \dots, n-1$  và

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=0}^n B(z_j, r) \subset \bigcup_{j=0}^n \bar{B}(z_j, r) \subset D.$$

*Chứng minh.* Ta nhận thấy  $\mathcal{C}$  là tập compact và  $\partial D$  là tập đóng nên theo Định lý 1.15 trang 42 ta có  $d(\mathcal{C}, \partial D) > 0$ . Lấy  $0 < r < d(\mathcal{C}, \partial D)$ . Khi đó, với  $z \in \mathcal{C}$  tùy ý ta có  $\bar{B}(z, r) \subset D$ . Với  $r > 0$  đã chọn theo Định lý 1.14 tồn tại các điểm  $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathcal{C}$  sao cho  $z_{j+1} \in B(z_j, r)$  và  $\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=0}^n B(z_j, r)$ .

Từ đó ta được điều phải chứng minh

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{j=0}^n B(z_j, r) \subset \bigcup_{j=0}^n \bar{B}(z_j, r) \subset D. \quad \square$$

**1.16 Định lý.** Tập mở  $D$  là liên thông nếu và chỉ nếu với hai điểm bất kỳ  $z_1, z_2 \in D$  tồn tại đường cong  $\mathcal{C}$  nối  $z_1$  và  $z_2$  nằm hoàn toàn trong  $D$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $D$  là tập mở liên thông. Trên  $D$  xét quan hệ  $\sim$  như sau:  $x \sim w$  khi và chỉ khi tồn tại một số hữu hạn hình cầu mở  $B_1, B_2, \dots, B_n$  chứa trong  $D$  thỏa  $x \in B_1, w \in B_n$  và  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  với  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Ta dễ dàng kiểm tra được  $\sim$  là một quan hệ tương đương. Với  $z \in D$ , đặt  $C_z = \{w \in D : z \sim w\}$  là lớp tương đương của  $z$ . Khi đó, theo tính chất của quan hệ tương đương ta có  $z \in C_z$  với mọi  $z \in D$ , với  $z, w \in D$  thì  $C_z = C_w$  hoặc  $C_z \cap C_w = \emptyset$  và  $D = \bigcup_{z \in D} C_z$ . Với

mọi  $z \in D$ , ta có  $C_z$  là tập mở. Thật vậy, với  $w \in C_z$  thì  $z \sim w$  nên tồn tại một số hữu hạn hình cầu mở  $B_1, B_2, \dots, B_k$  chứa trong  $D$  sao cho  $z \in B_1, w \in B_k$  và  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  với  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Với mọi  $z' \in B_k$  thì  $z' \sim w$  nên  $z \sim z'$  hay  $z' \in C_z$ . Suy ra  $w \in B_k \subseteq C_z$ . Vậy  $C_z$  là tập mở. Tiếp theo, ta chứng tỏ  $C_z = D$  với  $z \in D$  tùy ý. Cố định  $z$ . Giả sử  $D \setminus C_z \neq \emptyset$ . Đặt  $U = C_z$  và  $V = \bigcup_{w \in D \setminus C_z} C_w$ . Như đã chứng minh ở trên

$C_w$  là tập mở và  $C_z \cap C_w \neq \emptyset$  với mọi  $w \in D \setminus C_z$  nên  $V$  là tập mở và  $U \cap V = \emptyset$ . Rõ ràng ta có  $D = U \cup V$ . Vậy  $D$  là không liên thông, đây là điều mâu thuẫn. Như vậy,  $C_z = D$ .

Do đó, với mọi  $z, w \in D$  tồn tại các hình cầu mở  $B_1, B_2, \dots, B_k$  chứa trong  $D$  sao cho  $z \in B_1, w \in B_k$  và  $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$  với  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Lấy  $z_i \in B_i \cap B_{i+1}$  với mỗi  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Khi đó, đoạn thẳng nối  $z_i$  và  $z_{i+1}$  nằm trong  $B_{i+1}$  nên cũng nằm trong  $D$ . Vậy  $\mathcal{C}$  là đường gấp khúc lần lượt nối các điểm  $z, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, w$  sẽ nằm trong  $D$ . Vậy  $\mathcal{C}$  là đường cong cần chỉ ra.

Ngược lại, lấy  $z \in D$  và gọi  $\mathcal{C}_w$  là đường cong trong  $D$  nối  $z$  với  $w$ . Khi đó, ta có  $D = \bigcup_{w \in D} \mathcal{C}_w$ . Giả sử tồn tại tập con thực sự khác rỗng vừa đóng

vừa mở của  $D$ . Khi đó,  $D \setminus U$  cũng là tập con thực sự khác rỗng vừa đóng vừa mở của  $D$ . Vì thế ta có thể giả sử  $z \in U$  (bởi vì ta có thể thay thế  $U$  bởi  $D \setminus U$ ). Vì  $D \setminus U \neq \emptyset$  nên tồn tại  $w_0 \in D$  sao cho  $(D \setminus U) \cap C_{w_0} \neq \emptyset$ . Mặt khác,  $z \in U \cap C_{w_0}$ , và  $U, D \setminus U$  là các tập vừa đóng vừa mở trong  $D$ . Do đó,  $U \cap C_{w_0}$  là tập con thực sự khác rỗng vừa đóng vừa mở của  $C_{w_0}$ . Điều này mâu thuẫn với tính liên thông của  $C_{w_0}$  trong  $D$ . Vậy  $D$  là tập liên thông.  $\square$

**1.17 Định nghĩa.** Một miền  $D$  được gọi là miền **đơn liên** nếu biên của nó là một tập liên thông. Một miền không là đơn liên được gọi là **miền đa liên**. Đặc biệt, nếu biên của miền đa liên là hợp của  $n$  thành phần liên thông được gọi là miền  $n$ -liên.

**1.18 Thí dụ.** Tập  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  là một miền nhị liên. Tập  $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1, |z - 2| < 2\}$  là một miền đơn liên.  $\square$

Cho đường cong  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t) = u(t) + iv(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Ta nói  $\mathcal{C}$  là **đường cong kín** nếu  $w(a) = w(b)$ . Đường cong  $\mathcal{C}$  được gọi là **đường cong Jordan** (hay đường cong đơn) nếu nó không tự cắt nhau hay  $w(t)$  là đơn ánh trên  $(a, b)$ , nghĩa là  $w(t_1) \neq w(t_2)$  khi  $a < t_1 \neq t_2 < b$ .

**1.19 Thí dụ.**  $w_\alpha = z_0 + re^{i\alpha t}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$  là đường cong nằm trên đường tròn tâm  $z_0$  bán kính  $r$ . Nếu  $\alpha = n$  là một số nguyên khác không thì đường cong đang xét là đường cong kín có điểm gốc và mút là  $z_0 + r$ , theo hướng dương hay âm tùy thuộc và dấu của  $n$  với số vòng quay  $|n|$ . Đường cong ấy là đường cong Jordan khi và chỉ khi  $n = \pm 1$ .  $\square$

Ta nói đường cong  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t) = u(t) + iv(t)$  với  $a \leq t \leq b$  là **đường cong khả vi** nếu  $w'(t) = u'(t) + iv'(t)$  tồn tại và liên tục trên  $[a, b]$ . Khi đó, độ dài của đường cong  $\mathcal{C}$  được xác định bởi công thức

$$(1.20) \quad L = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2} dt = \int_a^b |w'(t)| dt.$$

Ta nói đường cong  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t) = u(t) + iv(t)$  với  $a \leq t \leq b$  là **trơn** nếu  $u(t)$  và  $v(t)$  là các hàm có đạo hàm liên tục và  $w'(t) \neq 0$  với mọi  $t \in [a, b]$ . Như vậy, mỗi điểm trên đường cong trơn  $\mathcal{C}$  đều tồn tại tiếp tuyến mà phương của nó xác định bởi  $w'(t)$ . Một đường cong được gọi là **trơn từng khúc** nếu ta có thể chia đường cong đó thành hữu hạn phần đường cong mà mỗi phần đường cong là một đường cong trơn.

**1.21 Định lý. (Jordan)** *Một đường cong Jordan kín trơn từng khúc  $\mathcal{C}$  là biên của hai miền rời nhau trong  $\mathbb{C}$ . Một miền được gọi là bên trong  $\mathcal{C}$  thì bị chặn (thường được ký hiệu bởi  $D_{\mathcal{C}}$ ), và một miền khác ngoài  $\mathcal{C}$  không bị chặn.*

**1.22 Nhận xét.** Miền  $D$  là miền đơn liên nếu mọi đường cong Jordan kín  $\mathcal{C}$  nằm trong  $D$  ta đều có  $D_{\mathcal{C}}$ .  $D$  là miền đa liên nếu tồn tại các đường cong Jordan kín  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  sao cho các miền  $D_{\Gamma_1}, D_{\Gamma_2}, \dots$  không bao hàm trong  $D$ .

Để cho đơn giản và ngắn gọn ta quy ước từ đây về sau khi nói đến đường cong ta hiểu đó là đường cong trơn từng khúc (trong nhiều trường



hợp ta chỉ đòi hỏi đường cong đang xét là khả vi từng khúc), và khi nào ta nói rõ các loại đường cong là để nhấn mạnh chúng.

## Bài tập

1) Dùng đẳng thức  $e^{z_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t$  trong đó  $z_0 = x_0 + i y_0$  là hằng số phức. Chứng minh rằng  $\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}$ .

2) Giả sử hàm  $z = z(t)$  khả vi tại  $t_0$  và hàm  $f(z)$  giải tích tại  $z_0 = z(t_0)$ . Chứng minh rằng nếu  $w(t) = f(z(t))$  thì  $w(t)$  khả vi tại  $t_0$  và  $w'(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0)$ .

3) Chứng minh Định lý 1.8.

4) Xác định đường cong có biểu diễn tham số  $w(t) = t + i \frac{1}{t}$  với  $-\infty < t < 0$ .

5) Tìm điều kiện để  $w(t) = a + bt$  và  $\gamma(t) = a' + b't$  với  $-\infty < t < \infty$  cùng biểu diễn một đường thẳng có hướng.

6) Khi nào phương trình  $az + b\bar{z} + c = 0$  biểu diễn một đường thẳng?

7) Cho  $w(t)$  là một hàm phức biến thực khả vi. Chứng minh rằng nếu  $w(t_1) = w(t_2) = 0$  với  $t_1 \neq t_2$  thì tồn tại  $t_0$  giữa  $t_1$  và  $t_2$  sao cho  $w'(t_0) = 0$ .

8) Với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ , chứng minh rằng

$$(i) \quad |e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|.$$

$$(ii) \quad |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \frac{\alpha^2}{2}.$$

$$(iii) \quad |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \min \left\{ 2|\alpha|, \frac{\alpha^2}{2} \right\}.$$

$$(iv) \quad \left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right| \leq \frac{|\alpha|^3}{6}.$$

$$(v) \quad \left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right| \leq \min \left\{ \alpha^2, \frac{|\alpha|^3}{6} \right\}.$$

9) Chứng minh rằng

$$\int_0^x e^{is}(x-s)^n ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds.$$

10) Với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , chứng minh rằng

$$\left| e^{ix} - \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

11) Chứng minh rằng  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{(N+it)^2}{2}} dt = 0$  với mọi  $\lambda > 0$ .

12) Chứng minh rằng đường cong (cung) là một tập liên thông trong  $\mathbb{C}$ .

## § 2 Tích phân đường

### Khái niệm tích phân hàm phức

Cho đường cong trơn  $\mathcal{C}$  và hàm  $f(z)$  xác định trên  $\mathcal{C}$ . Giả sử  $\mathcal{C}$  có hai biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  và  $\gamma(t)$  với  $c \leq t \leq d$ . Nếu  $f(w(t))$  và  $w'(t)$  liên tục từng khúc trên  $[a, b]$  và  $f(\gamma(t))$  và  $\gamma'(t)$  liên tục từng khúc trên  $[c, d]$ , người ta chứng minh được

$$\int_a^b f(w(t))w'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Thật vậy, khi đó tồn tại hàm  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  song ánh đơn điệu tăng khả vi từng khúc sao cho  $\gamma(t) = w(\varphi(t))$ , cho nên

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_c^d f(w(\varphi(t)))w'(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b f(w(s))w'(s)ds. \end{aligned}$$

Giá trị chung đó được gọi là *tích phân* của hàm  $f(z)$  trên đường cong  $\mathcal{C}$  và kí hiệu  $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$ . Vậy

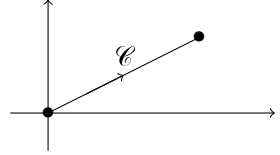
$$(2.1) \quad \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(w(t))w'(t)dt.$$

Nhờ có tính chất ở Định lý 1.9 mà ta cũng có định nghĩa tích phân của hàm phức  $f$  trên đường cong trơn từng khúc  $\mathcal{C}$  một cách tự nhiên và tương tự.

**2.2 Thí dụ.** Tính tích phân sau  $\int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz$ , trong đó  $\mathcal{C}$  là đoạn thẳng từ điểm  $z = 0$  đến  $z = 2 + i$ .

*Giải.* Ta có biểu diễn tham số của  $\mathcal{C}$  là  $w(t) = 2t + it$  với  $0 \leq t \leq 1$ . Vậy

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \bar{z} dz &= \int_0^1 \overline{2t + it} (2 + i) dt \\ &= (2 + i) \int_0^1 (2t - it) dt \\ &= (2 + i) \left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



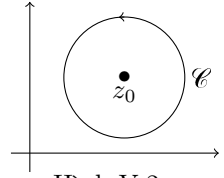
Hình V.1:

□

**2.3 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0}$  trong đó  $\mathcal{C}$  là đường tròn có phương trình  $|z - z_0| = R$  được định hướng dương.

*Giải.* Ta có biểu diễn tham số của  $\mathcal{C}$  là  $w(t) = z_0 + Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ , cho nên

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i. \quad \square$$



Hình V.2:

Trở lại định nghĩa tích phân của hàm  $f(z)$  trên đường cong  $\mathcal{C}$ . Giả sử ta có biểu diễn đại số của hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  và biểu diễn tham số của đường cong  $\mathcal{C}$  là  $w(t) = x(t) + iy(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(w(t))w'(t) &= (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)))(x'(t) + iy'(t)) \\ &= (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) \\ &\quad + i(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)). \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\mathcal{C}} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Như vậy, tích phân của hàm  $f(z)$  trên đường cong  $\mathcal{C}$  được tính theo tích phân đường loại hai trong giải tích thực với phần thực là tích phân đường loại hai của hàm vector  $(u, -v)$  và phần ảo là tích phân đường loại hai của hàm vector  $(v, u)$ , cả hai tích phân đều được tính trên đường cong  $\mathcal{C}$ . Từ nhận xét này cùng với định nghĩa tích của hai số phức ta có thể dựa vào định nghĩa tích phân đường loại hai trong giải tích thực để đưa ra một định nghĩa tích phân đường của hàm phức tương đương với định nghĩa đã được trình bày ở trên như sau:

Cho đường cong Jordan  $\mathcal{C}$  trơn có điểm đầu là  $z_0$  và điểm cuối là  $z^*$ . Hàm  $f$  xác định trên  $\mathcal{C}$ . Một phân hoạch  $P$  của đường  $\mathcal{C}$  bởi  $n+1$  điểm chia  $z_0, z_1, \dots, z_n = z^*$  theo thứ tự đi trên đường cong  $\mathcal{C}$  từ  $z_0$  đến  $z^*$ . Trên mỗi cung  $\widehat{z_{k-1}z_k}$  thuộc đường cong  $\mathcal{C}$  chọn điểm  $\xi_k$  tùy ý ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Lập tổng tích phân của hàm  $f$

$$S(P, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Đặt  $d(P) = \max\{\sup\{|z - z'| : z, z' \in \widehat{z_{k-1}z_k}\} : k = 1, 2, \dots, n\}$  và gọi là đường kính phân hoạch  $P$ . Nếu tồn tại số phức  $I$  sao cho với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi phân hoạch  $P$  với  $d(P) < \delta$  ta luôn có  $|S(P, \xi_k) - I| < \varepsilon$  với mọi cách chọn các điểm  $\xi_k$  thì ta nói hàm  $f$  khả tích trên  $\mathcal{C}$  và  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = I$ .

## Tính chất tích phân hàm phức

Cũng từ mối liên hệ giữa tích phân của hàm phức trên đường cong và tích phân đường loại 2 trong giải tích thực nên các tính chất của tích phân đường loại hai vẫn đúng cho tích phân của hàm phức theo đường cong. Sau đây ta liệt kê các tính chất của tích phân đường

**2.4 Định lý.** Nếu hàm  $f$  có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$ , thì hàm  $z_0 f$  với  $z_0$  là một hằng số phức cũng có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$  và

$$\int_{\mathcal{C}} z_0 f(z) dz = z_0 \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

**2.5 Định lý.** Nếu hai hàm  $f$  và  $g$  có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$ , thì hàm tổng  $f + g$  cũng có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$  và

$$\int_{\mathcal{C}} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}} g(z) dz.$$

**2.6 Định lý.** Cho hàm  $f$  có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$ . Gọi  $\mathcal{C}^-$  là đường cong  $\mathcal{C}$  nhưng được định hướng có chiều ngược lại. Khi đó, hàm  $f$  cũng có tích phân trên  $\mathcal{C}^-$  và

$$\int_{\mathcal{C}^-} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

**2.7 Định lý.** Giả sử  $\mathcal{C}_1$  và  $\mathcal{C}_2$  là hai đường cong sao cho điểm cuối của  $\mathcal{C}_1$  là điểm đầu của  $\mathcal{C}_2$ . Nếu hàm  $f$  có tích phân trên hai đường cong  $\mathcal{C}_1$  và  $\mathcal{C}_2$ , thì  $f$  có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  và

$$\int_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$$

Chú ý, công thức trên vẫn được dùng để ký hiệu cho trường hợp điểm cuối của  $\mathcal{C}_1$  không trùng với điểm đầu của  $\mathcal{C}_2$ ; khi đó,  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  không là đường cong mà chỉ là ký hiệu hợp hai đường cong ấy theo nghĩa tập hợp.

**2.8 Định lý.** Nếu  $z = \varphi(\eta)$  là khả vi liên tục và là ánh xạ 1-1 trên đường cong  $\Gamma$  và  $f$  khả tích trên đường cong  $\mathcal{C} = \varphi(\Gamma)$  thì

$$\int_{\Gamma} f(\varphi(\eta)) \varphi'(\eta) d\eta = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz.$$

*Chứng minh.* Gọi  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$  là một biểu diễn tham số của đường cong  $\Gamma$ . Khi đó,  $\varphi(w(t))$  với  $a \leq t \leq b$  là một biểu diễn tham số của đường cong  $\mathcal{C}$ . Do đó, theo định nghĩa tích phân hàm phức ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} f(z) dz &= \int_a^b f(\varphi(w(t))) [\varphi(w(t))]' dt \\ &= \int_a^b f(\varphi(w(t))) \varphi'(w(t)) w'(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} f(\varphi(\eta)) \varphi'(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

□

**2.9 Định lý.** Cho hàm  $f$  có tích phân trên đường cong  $\mathcal{C}$ . Khi đó, ta có

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML$$

trong đó  $|f(z)| \leq M$  với mọi  $z \in \mathcal{C}$  và  $L$  là độ dài đường cong  $\mathcal{C}$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh trong trường hợp  $\mathcal{C}$  là đường cong trơn. Giả sử  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(w(t)) w'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(w(t))| \cdot |w'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |w'(t)| dt = ML. \end{aligned} \quad \square$$

**2.10 Thí dụ.** Chứng minh rằng  $\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{4\pi}{3}$  với  $\mathcal{C}$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 2$  được định hướng dương. Với mọi  $z \in \mathcal{C}$ , ta có  $|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = 3$ , suy ra  $\left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{3}$ . Do đó,

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{3} 4\pi = \frac{4\pi}{3}$$

do độ dài của  $\mathcal{C}$  là  $4\pi$ .  $\square$

**2.11 Thí dụ.** Cho  $\mathcal{C}_R$  là nửa đường tròn có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$ . Không cần tính giá trị của tích phân chúng ta chứng minh được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{dz}{z^2 + 2} = 0.$$

Với mọi  $z \in \mathcal{C}_R$ , ta có  $|z^2 + 2| \geq |z|^2 - 2 = R^2 - 2$ . Độ dài của  $\mathcal{C}_R$  là  $\pi R$ . Do đó, nếu  $R > \sqrt{2}$  ta có

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 2} \pi R.$$

Do  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{R^2 - 2} = 0$ , nên  $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}_R} \frac{dz}{z^2 + 2} \right| = 0$ , suy ra điều phải chứng minh.  $\square$

Định lý sau về sự khả tích của hàm tổng của chuỗi hàm hội tụ đều tương tự như trong giải tích thực.

**2.12 Định lý.** Giả sử các hàm  $f_n$  liên tục trên miền  $D$  và chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ đều trên  $D$  tới hàm  $f$ . Khi đó, với mọi đường cong trơn (hay trơn từng khúc)  $\mathcal{C} \subset D$  ta có

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz.$$

*Chứng minh.* Đặt  $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ . Theo giả thiết dãy các hàm  $S_n$  liên tục và hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$ . Khi đó, với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ cho trước, tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$  ta có  $|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l}$  với mọi  $z \in D$  trong đó  $l$  là độ dài đường cong  $\mathcal{C}$ . Vậy với mọi  $n > N$  ta có

$$\left| \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{C}} f_k(z) dz - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| = \left| \int_{\mathcal{C}} [S_n(z) - f(z)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon.$$

Vì vậy ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{C}} f_k(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz. \quad \square$$

Ta cũng có định lý tương tự như định lý trên cho dãy hàm như sau.

**2.13 Định lý.** Giả sử  $\{f_n\}$  là dãy các hàm liên tục trên miền  $D$  và hội tụ đều về hàm  $f$ . Khi đó, với mọi đường cong trơn (hay trơn từng khúc)  $\mathcal{C} \subset D$  ta có

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz.$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

## Bài tập

1) Tính các tích phân  $\int_{\Gamma} \operatorname{Re}(z) dz$  và  $\int_{\Gamma} \operatorname{Im}(z) dz$  với

(a)  $\Gamma$  là bán kính vector của điểm  $z = 2 + i$ .

(b)  $\Gamma$  là nửa đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  với  $0 \leq \arg z \leq \pi$  (điểm đầu là  $z = 1$ )

(c)  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z - a| = R$ .

2) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} |z| dz$  với

(a)  $\Gamma$  là nửa đường tròn có phương trình  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

(b)  $\Gamma$  là nửa đường tròn có phương trình  $|z| = 1$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ .

(c)  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = R$ .

3) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} |z| \bar{z} dz$  ở đây  $\Gamma$  là đường cong kín định hướng dương gồm nửa trên đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  và đoạn xác định bởi  $-1 \leq x \leq 1$  và  $y = 0$ .

4) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , trong đó  $f(z) = y - x - i3x^2$  với  $z = x + iy$  và  $\Gamma$  là đoạn thẳng từ điểm  $z = 0$  đến  $z = 1 + i$ .

5) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{z+2}{z} dz$  trong đó  $\Gamma$  là nửa đường tròn có phương trình  $z = 2e^{i\theta}$  với  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

6) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$

(a) trong đó  $\Gamma$  là nửa đường tròn định hướng dương xác định bởi  $|z| = 1$  và  $\operatorname{Im} z \geq 0$  và hàm  $\sqrt{z}$  xác định bởi  $\sqrt{1} = 1$ .

(b) trong đó  $\Gamma$  là nửa đường tròn định hướng dương xác định bởi  $|z| = 1$  và  $\operatorname{Im} z \geq 0$  và hàm  $\sqrt{z}$  xác định bởi  $\sqrt{1} = -1$ .

(c) trong đó  $\Gamma$  là nửa đường tròn định hướng dương xác định bởi  $|z| = 1$  và  $\operatorname{Im} z \leq 0$  và hàm  $\sqrt{z}$  xác định bởi  $\sqrt{1} = 1$ .

(d) trong đó  $\Gamma$  là đường tròn định hướng dương xác định bởi  $|z| = 1$  và hàm  $\sqrt{z}$  xác định bởi  $\sqrt{1} = -1$ .



7) Cho  $C$  và  $\Gamma$  lần lượt là các đường tròn có biểu diễn tham số  $z = Re^{it}$  và  $z = z_0 + Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Nếu  $f$  liên tục từng đoạn trên  $C$ , thì

$$\int_{\Gamma} f(z - z_0) dz = \int_C f(z) dz.$$

8) Giả sử  $\Gamma$  là đường cong kín Jordan giới hạn một miền có diện tích là  $S$ . Chứng minh rằng

$$(a) \int_{\Gamma} \operatorname{Re}(z) dz = iS \quad (b) \int_{\Gamma} \operatorname{Im}(z) dz = -S \quad (c) \int_{\Gamma} \bar{z} dz = 2iS$$

9) Chứng minh rằng  $\left| \int_{\Gamma} \frac{z^3 + \sqrt{3} + i}{2z^2 - 4i} dz \right| \leq \frac{132\pi}{7}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 4$  được định hướng dương.

10) Không tính tích phân, chứng minh rằng  $\left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi R}{2(R^2 - 1)}$  trong đó  $\Gamma$  là một phần tư đường tròn  $z = Re^{it}$  từ  $z = R$  đến  $Ri$  với  $R > 1$ .

11) Chứng minh rằng  $\left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1}$ , trong đó  $\Gamma$  có phương trình tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$  và  $R > 1$ .

12) Chứng minh rằng  $\left| \int_{C_R} \frac{z^2 + 2}{z^4 + 1} dz \right| \leq \frac{R(R^2 + 2)\pi}{R^4 - 1}$  trong đó  $C_R$  có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$  và  $R > 1$ .

13) Chứng minh rằng  $\left| \int_{C_R} \frac{\log z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R}$  trong đó  $C_R$  có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $-\pi \leq t \leq \pi$ ,  $R > 1$  và  $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$  với  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ .

14) Gọi  $C_{\rho}$  là đường tròn  $|z| = \rho$  với  $0 < \rho < 1$  được định hướng dương và giả sử rằng  $f(z)$  là giải tích trong hình tròn đóng  $|z| \leq 1$ . Chứng minh rằng nếu  $z^{-\frac{1}{2}}$  là một nhánh của lũy thừa của  $z$  thì tồn tại một hằng số dương  $M$ , không phụ thuộc  $\rho$ , sao cho

$$\left| \int_{C_{\rho}} z^{-\frac{1}{2}} f(z) dz \right| \leq 2\pi M \sqrt{\rho}.$$

Từ đó chứng minh rằng giá trị tích phân dần về 0 khi  $\rho \rightarrow 0$ .

15) Hàm  $f(z)$  liên tục trên miền  $\{z : |z - z_0| > r_0\}$ . Ta ký hiệu  $M_r = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$  với  $r > r_0$  và giả sử rằng  $rM_r \rightarrow 0$  khi  $r \rightarrow \infty$ . Chứng minh rằng  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = 0$  trong đó  $\Gamma_r$  là đường tròn  $|z - z_0| = r$  được định hướng dương.

16) Chứng minh Định lý 2.13.

17) Chứng minh các Định lý 2.4 - 2.7.

18) Chứng minh rằng  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = 0$  trong đó  $\alpha > 0$  và  $\Gamma$  là đoạn thẳng từ điểm  $\frac{\lambda}{N}$  đến  $\frac{\lambda-it}{N}$  hay từ điểm  $\lambda N$  đến  $(\lambda - it)N$  với  $\lambda > 0$ .

19) Gọi  $C_N$  là biên định hướng dương của hình vuông xác định bởi các đường  $x = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$  và  $y = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$  ở đây  $N$  là một số nguyên dương. Chứng minh rằng  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 0$ .

### § 3 Nguyên hàm

**3.1 Định nghĩa.** Hàm  $F(z)$  được gọi là **nguyên hàm** của hàm  $f(z)$  trên  $D$  nếu nó khả vi trên  $D$  và  $F'(z) = f(z)$  trên  $D$ .

**3.2 Định lý.** Nếu  $F$  và  $G$  là hai nguyên hàm của hàm  $f$  trên miền  $D$ , thì chúng sai khác nhau một hằng số.

*Chứng minh.* Theo giả thiết ta có  $F$  và  $G$  khả vi trên miền  $D$  nên chúng giải tích trên miền  $D$ . Suy ra hàm  $F - G$  giải tích trên miền  $D$  và  $F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$  với mọi  $z \in D$ . Do đó,  $F - G$  là hàm hằng trên  $D$ .  $\square$

Nói chung tích phân của hàm  $f$  trên đường cong nối hai điểm cố định  $z_1$  và  $z_2$  là phụ thuộc vào đường cong ấy. Tuy nhiên, có những hàm số mà tích phân của chúng từ  $z_1$  đến  $z_2$  không phụ thuộc vào đường cong nối  $z_1$  với  $z_2$ . Định lý dưới đây rất hữu dụng trong việc xác định tích phân có phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm cố định hay không, và khi nào tích phân trên một đường cong kín có giá trị là không.

**3.3 Định lý.** Giả sử  $f$  là một hàm liên tục trên miền  $D$ . Khi đó, ba mệnh đề sau là tương đương.

- (a) Hàm  $f$  có nguyên hàm là hàm  $F$  trên  $D$ .
- (b) Tích phân của hàm  $f$  trên các đường cong trong  $D$  từ điểm  $z_1$  đến  $z_2$  là như nhau.
- (c) Tích phân của hàm  $f$  trên đường cong kín nằm hoàn toàn trong  $D$  bằng 0.

*Chứng minh.* Giả sử mệnh đề (a) đúng. Nếu  $\Gamma$  là một đường cong trơn từ  $z_1$  đến  $z_2$  nằm hoàn toàn trong  $D$  và có biểu diễn tham số  $w(t)$  với  $a \leq t \leq b$ . Khi đó,  $w(a) = z_1$ ,  $w(b) = z_2$ , và  $w(t)$  là hàm khả vi liên tục trên  $[a, b]$  suy ra hàm  $F(w(t))$  khả vi liên tục trên  $[a, b]$  và

$$\frac{d}{dt}F(w(t)) = F'(w(t))w'(t) = f(w(t))w'(t).$$

Do đó, ta tính được

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(w(t))w'(t)dt = F(w(t))\Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1).$$

Rõ ràng tích phân trên không phụ thuộc vào đường cong  $\Gamma$  mà chỉ phụ thuộc vào hai điểm cố định  $z_1$  và  $z_2$ .

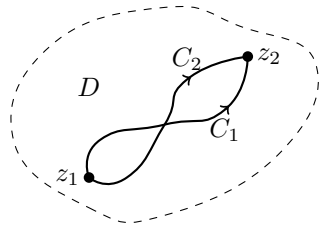
Kết quả vẫn đúng cho trường hợp  $\Gamma$  là đường cong trơn từng khúc nối  $z_1$  đến  $z_2$  và nằm trong  $D$ . Thật vậy, ta có thể chia  $\Gamma$  thành  $n$  đoạn cong nhỏ liên tiếp nhau  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , với  $\Gamma_k$  là đường cong trơn nối  $z'_k$  đến  $z'_{k+1}$  (trong  $D$ ) và  $z_1 = z'_1$ ,  $z_2 = z'_{n+1}$ . Theo kết quả trên ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f_k(z)dz = \sum_{k=1}^n [F(z'_{k+1}) - F(z'_k)] \\ &= F(z'_{n+1}) - F(z'_1) = F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

Trong trường hợp tích phân không phụ thuộc vào đường cong  $\Gamma$  nối điểm  $z_1$  đến  $z_2$  ta ký hiệu tích phân trên đường cong bất kỳ nối  $z_1$  đến  $z_2$  là

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Giả sử mệnh đề (b) đúng. Với  $C$  là một đường cong kín bất kỳ nằm trong  $D$ . Lấy hai điểm  $z_1$  và  $z_2$  thuộc  $C$ .



Hình V.3:

Khi đó,  $C$  được chia thành hai đường cong  $C_1$  và  $C_2$  với  $C_1$  đi từ  $z_1$  đến  $z_2$  và  $C_2$  đi từ  $z_2$  đến  $z_1$ . Kí hiệu  $C_2^-$  là đường cong ngược hướng với  $C_2$ , cho nên  $C_2^-$  là đường cong đi từ  $z_1$  đến  $z_2$ . Do đó, ta có

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2^-} f(z)dz = - \int_{C_2} f(z)dz.$$

Suy ra

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Giả sử mệnh đề (c) đúng. Cố định  $z_0 \in D$ . Với  $z \in D$  bất kỳ. Cho  $C_1$  và  $C_2$  là hai đường cong bất kỳ trong  $D$  nối  $z_0$  đến  $z$ . Khi đó,  $C_1 \cup C_2^-$  là một đường cong kín trong  $D$  cho nên

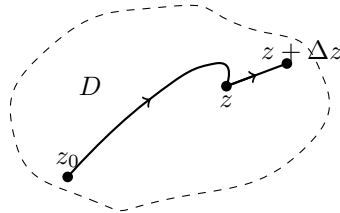
$$0 = \int_{C_1 \cup C_2^-} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

Suy ra

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Nghĩa là tích phân của  $f$  không phụ thuộc vào đường cong nối  $z_0$  đến  $z$ . Ta kí hiệu  $F(z)$  là giá trị chung đó

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)ds.$$



Với  $z + \Delta z \in D$  tùy ý, ta có

Hình V.4:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^z f(s)ds = \int_z^{z + \Delta z} f(s)ds$$

Mặt khác, ta có

$$\int_z^{z + \Delta z} ds = s \Big|_z^{z + \Delta z} \quad \text{suy ra} \quad \int_z^{z + \Delta z} f(z)ds = \Delta z f(z).$$

Vậy

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(s) - f(z)]ds.$$

Do  $f$  liên tục tại  $z$  nên với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$  khi  $|s - z| < \delta$  và  $s \in D$ . Với các điểm  $s$  thuộc đoạn thẳng nối từ  $z$  đến

$z + \Delta z$  và với  $|\Delta z| < \delta$ , ta có  $|s - z| \leq |\Delta z| < \delta$  suy ra  $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ , cho nên theo Định lý 2.9 ta có

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

(tích phân được lấy theo đoạn thẳng nối  $z$  và  $z + \Delta z$  nên có độ dài  $|\Delta z|$ ). Vậy với  $|\Delta z| < \delta$  và  $z + \Delta z \in D$  ta có

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon,$$

cho nên  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$  hay  $F'(z) = f(z)$ . Nghĩa là  $F$  là một nguyên hàm của  $f$  trên  $D$ .  $\square$

**3.4 Thí dụ.** Hàm  $f(z) = z^2$  có nguyên hàm là  $F(z) = \frac{z^3}{3}$  trên  $\mathbb{C}$ , nên

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i).$$

cho mỗi đường cong từ  $z = 0$  đến  $z = i + 1$ .  $\square$

**3.5 Thí dụ.** Hàm  $1/z^2$  liên tục tại mọi điểm trừ gốc tọa độ có nguyên hàm  $-1/z$  trong miền xác định  $|z| > 0$ . Do đó,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0)$$

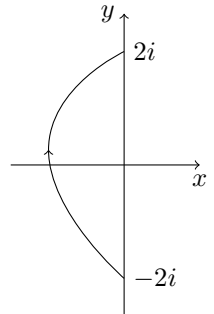
với mọi đường cong từ  $z_1$  đến  $z_2$  không đi qua điểm 0. Đặc biệt,

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

trong đó  $C$  là đường cong kín không đi qua điểm 0.  $\square$

**3.6 Thí dụ.** Cho  $D$  là miền xác định bởi  $|z| > 0$  và  $0 < \arg z < 2\pi$ . Khi đó, hàm logarithm  $\ln z$  được xem là nguyên hàm của hàm  $1/z$  trên  $D$ . Do đó, chúng ta có thể viết

$$\begin{aligned} \int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} &= \ln(2i) - \ln(-2i) \\ &= \ln 2 + i\frac{\pi}{2} - \ln 2 - i\frac{3\pi}{2} \\ &= -i\pi \end{aligned}$$



Hình V.5:

khi tích phân lấy trên đường cong từ  $-2i$  đến  $2i$  không cắt phần không âm của trục  $Ox$ .  $\square$

## Bài tập

1) Bằng cách tìm nguyên hàm, tính mỗi tích phân sau trên đường cong bất kỳ nối hai điểm tương ứng là cận của tích phân.

$$(a) \int_i^{i/2} e^{\pi z} dz, \quad (b) \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz, \quad (c) \int_1^3 (z-2)^3 dz$$

2) Chứng minh rằng

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

khi  $C_0$  là đường cong kín bất kỳ không đi qua điểm  $z_0$ .

3) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{z-2i}{z} dz$  trong đó  $\Gamma$  có biểu diễn tham số  $w(t) = 2t + i(t^2 - 1)$  với  $-1 \leq t \leq 1$ .

4) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \cos(iz) dz$  trong đó  $\Gamma$  có biểu diễn tham số  $w(t) = t^3 \sin \pi t + (1 - 3t^2)i$  với  $0 \leq t \leq 1$ .

5) Với mọi  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  thỏa  $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$  và  $|\beta| \leq \frac{1}{2}$ , chứng minh rằng

$$(i) |e^{\alpha} - 1| \leq |\alpha|.$$

$$(ii) |e^{\alpha} - 1 - \alpha| \leq \frac{|\alpha|^2}{2}.$$

$$(iii) \left| e^{\alpha} - 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right| \leq \frac{|\alpha|^3}{6}.$$

$$(iv) |\log(1 + \beta) - \beta| \leq |\beta^2|.$$

## § 4 Định lý Cauchy-Goursat

Trong bài trước, chúng ta thấy rằng một hàm  $f$  liên tục và có nguyên hàm trong miền  $D$ , thì tích phân của  $f(z)$  trên đường cong kín trong  $D$  có giá trị 0. Trong bài này chúng tôi trình bày một định lý cho các điều kiện

khác trên hàm  $f$  để giá trị tích phân của  $f(z)$  trên đường cong kín đơn là không. Đây là một định lý trọng tâm của lý thuyết hàm phức.

Chúng ta biết rằng tích phân của hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  với  $z = x + iy$  trên đường cong  $C$  có thể biểu diễn qua tích phân đường loại II ở giá trị phần thực và phần ảo như sau.

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Với đường cong  $C$  kín đơn được định hướng dương là biên của miền đóng  $D$ . Khi đó, nếu các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng liên tục trên  $R$ , thì theo công thức Green trong giải tích thực hàm nhiều biến (chẳng hạn xem [10]) ta có

$$\begin{aligned} \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy &= \iint_D (-v'_x(x, y) - u'_y(x, y))dxdy \\ \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy &= \iint_D (u'_x(x, y) - v'_y(x, y))dxdy. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \iint_D (-v'_x(x, y) - u'_y(x, y))dxdy \\ &\quad + i \iint_D (u'_x(x, y) - v'_y(x, y))dxdy. \end{aligned}$$

Mặt khác, nếu hàm  $f(z)$  giải tích trên  $D$ , thì theo dấu hiệu Cauchy-Riemann (trang 80) ta có

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y) \quad \text{và} \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Khi đó,  $f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)$  với mọi  $(x, y) \in D$ . Vậy khi  $f$  giải tích trên  $D$  và  $f'$  liên tục trên  $D$ , thì

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Kết quả này Cauchy đã thiết lập vào đầu thế kỷ 19.

Goursat là người đầu tiên chứng minh được điều kiện liên tục của hàm  $f'$  có thể bỏ được. Việc bỏ giả thiết này đặc biệt quan trọng và nó cho phép chúng ta chứng minh được đạo hàm  $f'$  của hàm giải tích  $f$  là hàm giải tích mà không cần phải có giả thiết sự liên tục của  $f'$ . Chúng ta có định lý Cauchy-Goursat sau.

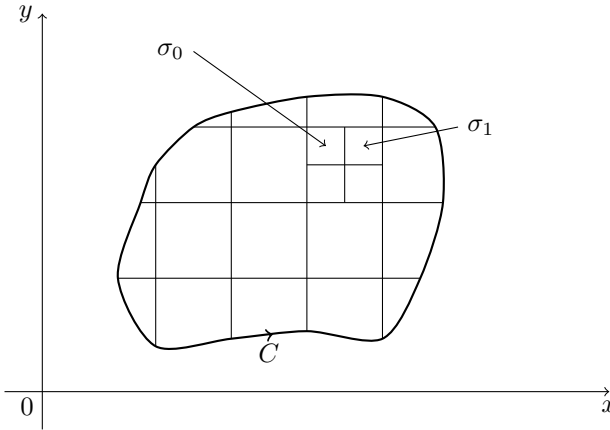
**4.1 Định lý. (Cauchy-Goursat)** Nếu hàm  $f$  giải tích bên trong và trên đường cong kín đơn trơn từng khúc  $C$ , thì  $\int_C f(z)dz = 0$ .

Để chứng minh định lý này ta cần bổ đề sau.

**4.2 Bổ đề.** Cho  $f$  là hàm giải tích trên miền đóng đơn liên  $D$  gồm các điểm bên trong của đường cong kín đơn định hướng dương  $C$  và các điểm trên  $C$ . Với mọi  $\varepsilon > 0$ , miền đóng  $R$  có thể được chia thành hữu hạn các hình vuông và phần của hình vuông sao cho phần trong của chúng không có điểm chung, được đánh số bởi  $j = 1, 2, \dots, n$ , sao cho trong mỗi hình vuông hay phần hình vuông tồn tại một điểm cố định  $z_j$  để sao cho bất đẳng thức

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad z \neq z_j$$

thỏa mãn với mọi  $z$  thuộc hình vuông hay phần hình vuông đó.



Hình V.6:

*Chứng minh.* Chúng ta vẽ các đường thẳng song song với trục thực và trục ảo và cách đều nhau. Khi đó,  $D$  được chia thành các hình vuông nhỏ bên trong và một phần hình vuông nhỏ (có phần của đường cong  $C$  làm biên, là hình vuông nhỏ loại bỏ các điểm không thuộc  $D$ ). Giả sử tồn tại một hình vuông hay phần của hình vuông mà không tìm được điểm  $z_j$  nào để bất đẳng thức trong bổ đề thỏa với mọi  $z$  thuộc hình vuông hay phần



hình vuông ấy. Chia hình vuông hay hình vuông tương ứng của phần hình vuông làm bốn hình vuông bằng nhau. Nếu tồn tại hình vuông nhỏ hay phần hình vuông nhỏ không thỏa điều kiện bất đẳng thức của bổ đề thì ta tiếp tục chia hình vuông tương ứng ra làm bốn hình vuông nhỏ bằng nhau. Giả sử quá trình này tiếp tục vô hạn lần ta được dãy hình vuông hay phần hình vuông  $\{\sigma_k\}$  thỏa

$$D \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \cdots \supset \sigma_k \supset \cdots.$$

Rõ ràng  $\{\sigma_k\}$  là dãy các tập đóng lồng nhau thắt lại (với đường kính của  $\sigma_k$  dần về 0 khi  $n$  dần ra  $\infty$ ). Do đó,

$$\{z_0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k.$$

Ta có  $z_0 \in \sigma_k$  với mọi  $k$ , suy ra  $z_0 \in D$ . Vì  $f$  giải tích trên  $D$  nên khả vi tại  $z_0$ . Do đó, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Trong dãy  $\{\sigma_k\}$  lấy  $\sigma_{k_0}$  sao cho đường chéo của hình vuông tương ứng nhỏ hơn  $\delta$ . Do  $z_0 \in \sigma_{k_0}$ , nên với mọi  $z \in \sigma_{k_0}$  ta có  $|z - z_0| < \delta$  suy ra

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

điều này mâu thuẫn với giả thiết có được dãy  $\{\sigma_k\}$ . Vậy quá trình chia nhỏ hình vuông hay phần hình vuông không thỏa điều kiện bất đẳng thức trong bổ đề là hữu hạn.

Do đó, miền  $D$  có thể chia được thành hữu hạn những hình vuông nhỏ hay phần hình vuông nhỏ thỏa điều kiện bất đẳng thức trong bổ đề.  $\square$

**Chứng minh Định lý 4.1.** Với  $\varepsilon > 0$  nhỏ tùy ý cho trước, chia miền  $D$  thành  $n$  hình vuông và phần hình vuông, được đánh số  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , thỏa bổ đề trên. Nghĩa là, ở hình vuông  $\sigma_j$  có điểm  $z_j$  sao cho

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad z \neq z_j,$$

với mọi  $z \in \sigma_j$ . Đặt  $\delta_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) & \text{khi } z \neq z_j \\ 0 & \text{khi } z = z_j. \end{cases}$  Khi đó,

ta có  $|\delta_j(z)| < \varepsilon$  với mọi  $z \in \sigma_j$ . Do  $\lim_{z \rightarrow z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0 = \delta_j(z_j)$ , ta thấy được hàm  $\delta_j(z)$  liên tục trên  $\sigma_j$ .

Gọi  $C_j$  là biên định hướng dương của hình vuông hay phần hình vuông  $\sigma_j$ . Với mọi  $z \in C_j$ , ta viết được

$$f(z) = f(z_j) + f'(z_j)(z - z_j) + \delta_j(z)(z - z_j).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \int_{C_j} f(z)dz &= (f(z_j) - z_j f'(z_j)) \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z dz \\ &\quad + \int_{C_j} \delta_j(z)(z - z_j)dz. \end{aligned}$$

Do hàm 1 và  $z$  có nguyên hàm trên  $\mathbb{C}$  nên

$$\int_{C_j} dz = 0 \quad \text{và} \quad \int_{C_j} z dz = 0.$$

Suy ra

$$\int_{C_j} f(z)dz = \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz.$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

bởi vì các cạnh của hình vuông hay phần hình vuông bên trong  $D$  (các đoạn thẳng) được lấy tích phân hai lần theo hai hướng ngược nhau nên bù trừ lẫn nhau chỉ còn lại phần biên  $C$  của  $D$  ta lấy tích phân chỉ một lần. Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \right|.$$

Đặt  $s_j$  là cạnh của hình vuông tương ứng với hình vuông hay phần hình vuông  $\sigma_j$ . Khi đó, với mọi  $z \in C_j$  ta có

$$|z - z_j| \leq \sqrt{2}s_j.$$

Suy ra

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j\varepsilon.$$

Trường hợp  $C_j$  là biên của hình vuông, theo Định lý 2.9 ta có

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)dz \right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon,$$

trong đó  $A_j$  là diện tích hình vuông  $\delta_j$ .

Trường hợp  $\sigma_j$  là một phần của hình vuông nên  $C_j$  có một phần của đường cong  $C$  và gọi độ dài của phần cong ấy là  $L_j$ ; do đó, ta ước lượng được độ dài của  $C_j$  là  $s(C_j) < 4s_j + L_j$ . Do đó, ta có

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2}s_j \varepsilon (4s_j + L_j) < 4\sqrt{2}A_j \varepsilon + \sqrt{2}SL_j \varepsilon,$$

trong đó  $S$  là cạnh của một hình vuông lớn chứa đường cong  $C$  và các hình vuông bên trong  $D$  và các hình vuông tạo bởi các phần hình vuông trong việc chia miền  $D$ . Khi đó, tổng diện tích các hình vuông nhỏ,  $A_j$ , nhỏ hơn hoặc bằng  $S^2$ .

Gọi  $L$  là độ dài của đường cong  $C$ . Khi đó, tổng của các  $L_j$  ứng với  $\sigma_j$  là phần hình vuông chính là  $L$ . Do đó, từ các bất đẳng thức trên ta có thể thấy rằng

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < (4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL)\varepsilon.$$

Do  $S$  và  $L$  là các hằng số và  $\varepsilon$  là một số dương bé tùy ý, cho nên bất đẳng thức trên suy ra về trái phải bằng 0. Từ đó ta được  $\int_C f(z) dz = 0$ .  $\square$

## Một chứng minh khác cho Định lý Cauchy-Goursat

**4.3 Bổ đề. (Goursat)** Nếu  $w = f(z)$  là hàm liên tục trên miền đơn liên  $D$  và  $C$  là đường cong Jordan trơn kín chứa trong  $D$  thì với mọi  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại đa giác  $P \subset D$  có các đỉnh nằm trên  $C$  sao cho

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_{\partial P} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

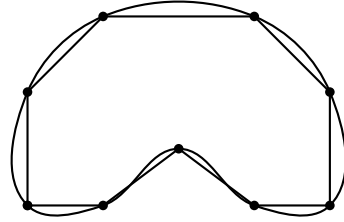
trong đó  $\partial P$  là biên của đa giác  $P$  và được định hướng cùng chiều với  $C$ .

*Chứng minh.* Giả sử đường cong  $C$  được định hướng dương. Theo giả thiết miền đóng  $D_1$  giới hạn bởi biên là đường cong  $C$  nằm trong  $D$  là tập compact. Do  $f$  liên tục trên  $D$  nên cũng liên tục trên  $D_1$ , suy ra  $f$  liên tục đều trên  $D_1$ . Gọi  $l$  là độ dài đường con  $C$ . Với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z_1, z_2 \in D_1$  thỏa  $|z_1 - z_2| < \delta$  ta luôn có

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2l}.$$

Mặt khác, do  $f$  khả tích trên  $C$  nên tồn tại phân hoạch  $P$  trên  $C$  bởi các điểm chia  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z_0$  với  $d(P) < \delta$  ở trên sao cho

$$\left| \int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$



Hình V.7:

và đa giác  $P$  xác định bởi các đỉnh  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$  nằm trong  $D$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial P} f(z)dz - \sum_{k=1}^n f(z_k)\Delta z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}z_k} f(z)dz - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}z_k} f(z_k)dz \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{z_{k-1}z_k} (f(z) - f(z_k))dz \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2l}l(\partial P) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

trong đó các tích phân lấy trên các đoạn thẳng nối từ điểm  $z_{k-1}$  đến  $z_k$ . Vậy ta suy ra được

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**Chứng minh Định lý 4.1.** Giả sử  $C$  là biên được định hướng dương của tam giác  $\Delta$ . Ta sẽ chứng minh

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

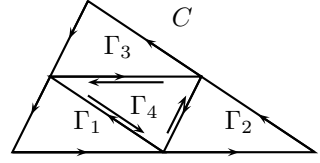
Đặt  $M = \left| \int_C f(z)dz \right|$ . Chia tam giác  $\Delta$  thành bốn tam giác bằng nhau và  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  là biên định hướng dương của các tam giác ấy, ta có

$$M = \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\Gamma_k} f(z)dz \right|$$

Từ bất đẳng thức này suy ra phải tồn tại một tam giác ký hiệu  $\Delta_1$  sao cho

$$\left| \int_{C_1} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

với  $C_1$  là biên định hướng dương của tam giác  $\Delta_1$ . Hình V.8:



Tiếp tục quá trình như trên ta được một dãy các tam giác  $\{\Delta_n\}$  lồng nhau và thắt dần

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$$

với chu vi của tam giác  $\Delta_n$  bằng chu vi của tam giác  $\Delta$  chia cho  $2^n$ , gọi số đó là  $l/2^n$ , và

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^n}$$

trong đó  $C_n$  là biên được định hướng dương của tam giác  $\Delta_n$ . Theo Định lý 1.14 trang 42 ta có

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Vì hàm  $f$  giải tích tại  $z_0 \in D$  nên với mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  mà  $0 < |z - z_0| < \delta$  kéo theo

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

Đặt  $\alpha(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{khi } z \neq z_0 \\ 0 & \text{khi } z = z_0. \end{cases}$  Khi đó, tương tự như phép chứng minh trước của định lý này ta suy ra được  $\alpha(z)$  liên tục và

$$\int_{C_n} f(z)dz = \int_{C_n} (z - z_0)\alpha(z)dz.$$

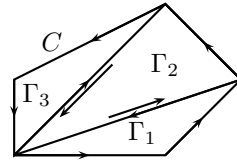
Vậy với  $n$  đủ lớn sao cho  $\frac{l}{2^n} < 3\delta$ , ta có

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{C_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_n} (z - z_0)\alpha(z)dz \right| \leq \frac{l}{3 \cdot 2^n} \varepsilon \frac{l}{2^n}.$$

Suy ra  $M \leq \varepsilon l^2/3$ . Do  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý nên ta phải có  $M = 0$  hay

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Nếu  $C$  là biên định hướng của một  $n + 2$  giác  $P$  thì ta chia đa giác đó thành  $n$  hình tam giác xuất phát từ một đỉnh. Do tính định hướng và bù trừ của các cạnh của các tam giác bên trong đa giác nên ta suy ra



Hình V.9:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$$

trong đó  $\Gamma_k$  là biên định hướng dương của các tam giác.

Nếu  $C$  là đường cong Jordan kín bất kỳ thì từ tính compact của  $C$  và giả thiết của định lý ta có thể tìm được miền  $D$  mà hàm giải tích và chứa  $C$ . Theo bổ đề Goursat với  $\varepsilon > 0$  nhỏ tùy ý tồn tại đa giác  $P$  trong  $D$  sao cho

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz \right| < \varepsilon$$

trong đó  $\partial P$  là biên của đa giác  $P$  được định hướng cùng chiều với  $C$ . Theo kết quả chứng minh phần hai ta có

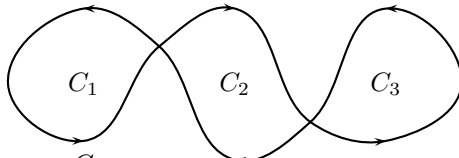
$$\int_{\partial P} f(z)dz = 0.$$

Suy ra  $\left| \int_C f(z)dz \right| < \varepsilon$ . Do  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý nên

$$\left| \int_C f(z)dz \right| = 0 \quad \text{hay} \quad \int_C f(z)dz = 0. \quad \square$$

**4.4 Định lý.** Cho  $f$  là hàm giải tích trong miền đơn liên  $D$  và  $C$  là đường cong kín chứa trong  $D$ . Ta có  $\int_C f(z)dz = 0$ .

*Chứng minh.* Trường hợp  $C$  là đường cong Jordan, thì theo Định lý Cauchy-Goursat ta có ngay kết quả. Trường hợp  $C$  tự cắt nhau tại



$n$  điểm. Khi đó,  $C$  là hợp của  $n + 1$  đường cong kín Jordan trong  $D$  nên tích phân của  $f$  trên mỗi đường cong kín ấy đều bằng không. Suy ra tích phân của  $f$  trên  $C$  bằng không.  $\square$

Từ định lý trên và theo định lý ba mệnh đề tương đương ở bài trước ta có kết quả sau.

**4.5 Hệ quả.** Một hàm  $f$  giải tích trên miền đơn liên  $D$  thì có nguyên hàm trên  $D$ .

**4.6 Thí dụ. (hàm logarithm, log)** Từ Thí dụ 2.3 và Định lý 3.3 ta nhận thấy rằng hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  không có nguyên hàm trên  $D$ . Tuy nhiên, rõ ràng hàm  $f$  giải tích trên miền đơn liên  $D = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ . Do đó, theo Hệ quả 4.5 hàm  $f$  có nguyên hàm trên  $D$ . Ta tìm một nguyên hàm  $F$  của  $f$  sao cho  $F(1) = 0$ . Theo chứng minh của Định lý 3.3 hàm  $F$  như thế được xác định bởi

$$F(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} \quad \mathcal{C} \text{ là đường cong bất kỳ trong } D \text{ đi từ } 1 \text{ đến } z.$$

Đường cong  $\mathcal{C}$  được chọn như hình vẽ. Khi đó, với  $z = re^{i\theta}$  trong đó  $r > 0$  và  $-\pi < \theta < \pi$ , ta tìm được  $F$

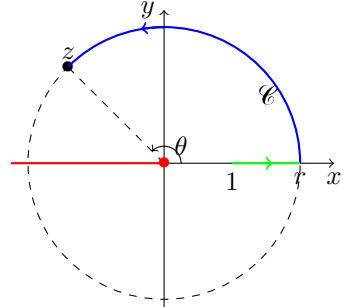
$$F(z) = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{rie^{it}}{re^{it}} dt = \ln r + i\theta.$$

Vậy  $F$  chính là hàm logarithm  $\log$ ; tức là  $\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$  với  $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$ .  $\square$

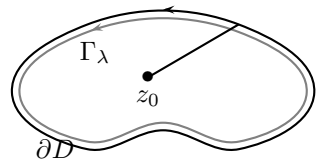
## Các dạng tổng quát của định lý Cauchy-Goursat

**4.7 Định lý.** Cho  $D$  là miền đơn liên bị chặn với biên là đường cong trơn từng khúc,  $f$  là hàm giải tích trên  $\operatorname{Int}(D)$  và liên tục trên  $\partial D$ . Ta có  $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$ .

*Chứng minh.* Ta chứng minh cho trường hợp trong  $D$  tồn tại điểm  $z_0$  sao cho mọi tia xuất phát từ  $z_0$  chỉ cắt biên của  $D$  tại một điểm. Khi đó,  $\partial D$  có phương trình biểu diễn tham số  $w(t) = z_0 + r(t)e^{it}$  với



Hình V.11:



Hình V.12:

$0 \leq t \leq 2\pi$ . Gọi  $\Gamma_\lambda$  đường cong có phương trình  $\gamma(t) = z_0 + \lambda r(t)e^{it}$  với  $0 < \lambda < 1$ . Theo Định lý Cauchy-Goursat ta có

$$\int_{\Gamma_\lambda} f(z)dz = 0.$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{\Gamma_\lambda} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})\lambda w'(t)dt$$

Vậy

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})w'(t)dt = 0$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + r(t)e^{it})w'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} [f(z_0 + r(t)e^{it}) - f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})]w'(t)dt \end{aligned}$$

Vì  $f(z)$  liên tục trên  $\bar{D} = D \cup \partial D$  nên nó liên tục đều trên  $\bar{D}$ . Do đó, với  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho khi  $z, z' \in \bar{D}$  và  $|z - z'| < \delta$  kéo theo  $|f(z) - f(z')| < \frac{\varepsilon}{l}$  với  $l$  là độ dài của  $\partial D$ . Đặt  $r = \max\{r(t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ . Khi chọn  $\lambda > 1 - \frac{\min\{r, \delta\}}{r}$  ta có  $|(z_0 + r(t)e^{it}) - (z_0 + \lambda r(t)e^{it})| < (1 - \lambda)r(t) < \delta$  cho nên  $|f(z_0 + r(t)e^{it}) - f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})| < \frac{\varepsilon}{l}$ . Vậy

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D} f(z)dz \right| &\leq \left| \int_{\partial D} [f(z_0 + r(t)e^{it}) - f(z_0 + \lambda r(t)e^{it})]w'(t)dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{l}l = \varepsilon. \end{aligned}$$

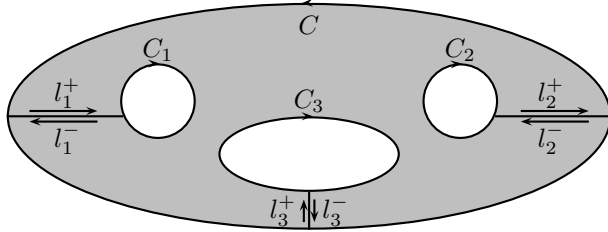
Do  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý nên ta suy ra được  $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ .

Với trường hợp tổng quát, vì  $D$  là miền đơn liên và bị chặn với biên trơn từng khúc nên ta có thể chia  $D$  thành hữu hạn các miền nhỏ  $D_1, \dots, D_N$  có tính chất như trường hợp riêng. Khi đó, với tính bù trừ của các đường biên chung nên ta có

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^N \int_{\partial D_k} f(z)dz = 0. \quad \square$$



**4.8 Định lý.** Cho  $D$  là miền đa liên (hữu hạn),  $f$  là hàm giải tích trên  $\text{Int}(D)$  và liên tục trên  $\partial D$ . Ta có  $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ , trong đó đường cong  $\partial D$  được định hướng dương. (Hướng của biên  $\partial D$  được gọi là dương nếu ta đi dọc theo biên sao cho miền  $D$  ở phía bên trái.)



Hình V.13:

*Chứng minh.* Ta chứng minh định lý cho miền tứ liên  $D$ . Nối 3 đoạn  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  giữa  $C$  lần lượt với các  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Khi đó,  $D^* = D \setminus \{l_1, l_2, l_3\}$  là miền đơn liên. Do đó, theo Định lý Cauchy-Goursat (Định lý 4.7) ta có

$$\int_{\partial D^*} f(z)dz = 0$$

trong đó  $\partial D^* = \partial D \cup l_1^+ \cup l_1^- \cup l_2^+ \cup l_2^- \cup l_3^+ \cup l_3^-$ . Do đó, ta suy ra được

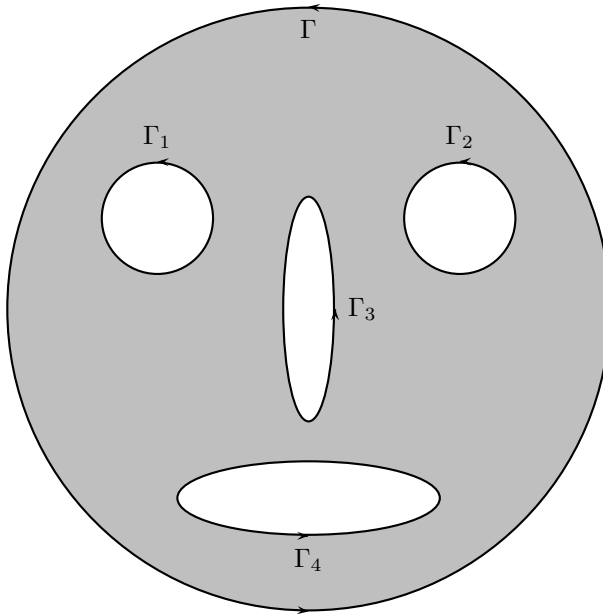
$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0. \quad \square$$

**4.9 Hệ quả.** Cho các đường cong Jordan trơn từng khúc kín được định hướng dương  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , trong đó các đường cong  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  có các phần trong không giao nhau và nằm trong phần trong của  $\Gamma$ . Nếu hàm  $f$  giải tích trong miền trong của  $\Gamma$  và ngoài các  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  và liên tục trên  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , thì

$$(4.10) \quad \int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} f(z)dz.$$

*Chứng minh.* Miền  $D$  xác định bởi các đường cong  $\Gamma$  và  $\Gamma_j$  với  $j = 1, \dots, k$  là một miền  $k+1$  liên với biên định hướng dương  $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1^- \cup \dots \cup \Gamma_k^-$ . Do đó, ta có

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$



Hình V.14:

từ đó suy ra được khẳng định của hệ quả. Hình vẽ minh họa cho một trường hợp  $k = 4$ .  $\square$

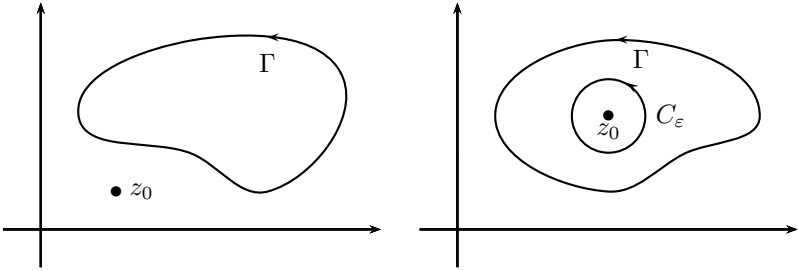
**4.11 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường cong Jordan kín trơn từng khúc không chứa điểm  $z_0$ .

Ta nhận thấy hàm  $\frac{1}{z - z_0}$  giải tích tại mọi điểm trừ điểm  $z_0$ . Nếu  $\Gamma$  không vây quanh điểm  $z_0$ , thì  $\frac{1}{z - z_0}$  giải tích trên  $\Gamma$  và bên trong nó. Do đó,  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 0$ .

Nếu  $\Gamma$  vây quanh điểm  $z_0$ , thì tồn tại  $\varepsilon > 0$  sao cho đường tròn  $C_{\varepsilon}$  có phương trình  $|z - z_0| = \varepsilon$  nằm hoàn toàn bên trong  $\Gamma$ . Khi đó, hàm  $\frac{1}{z - z_0}$  giải tích trên niêm nhị liên xác định bởi  $\Gamma$  và  $C_{\varepsilon}$  và trên biên của nó. Do đó, theo hệ quả trên ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = 2\pi i.$$

( $C_\varepsilon$  có biểu diễn tham số  $w(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ .) □



Hình V.15:

### Bài tập

1) Giả sử  $\Gamma$  là một đường cong định hướng dương Jordan trơn kín giới hạn một miền  $D$ . Hãy tính các tích phân sau theo diện tích của  $D$ .

(a)  $\int_{\Gamma} x dz$

(b)  $\int_{\Gamma} y dz$

(c)  $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$

trong đó  $z = x + iy$ .

2) Dùng định lý Cauchy-Goursat chứng minh rằng  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  với  $\Gamma$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z| = 1$ , khi

(a)  $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$

(b)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$

(c)  $f(z) = ze^{-z}$

(d)  $f(z) = \ln(z-2)$ .

3) Cho  $C_1$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z| = 4$  và  $C_2$  là biên được định hướng dương của hình vuông xác định bởi  $x = \pm 1$ ,  $y = \pm 1$ . Hãy chỉ ra tại sao chúng ta có

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

khi

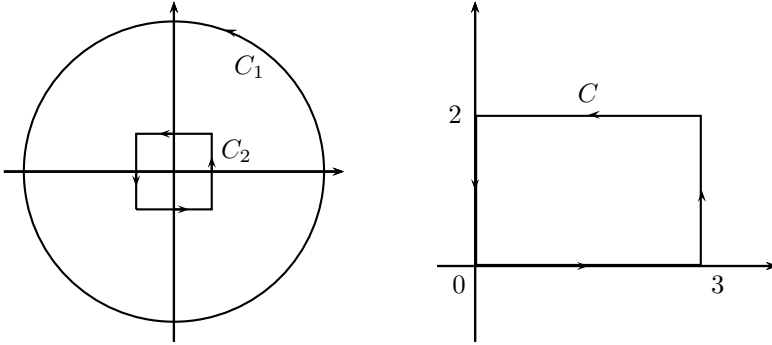
(a)  $f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1}$

(b)  $f(z) = \frac{z+2}{\sin(z/2)}$

(c)  $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$ .

4) Cho  $C$  là biên được định hướng dương của hình chữ nhật  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Chứng minh rằng

$$\int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 2\pi i & \text{khi } n = 0 \end{cases}$$



Hình V.16:

5) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 2}{(1 - e^z) \cos(z)} dz$  trong đó  $\Gamma$  là đường cong định hướng dương có phương trình  $|z - 1 - i| = 1$ .

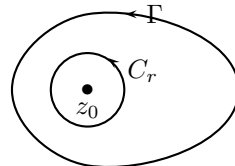
6) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{z - 2i}{z} dz$  trong đó  $\Gamma$  có biểu diễn tham số  $w(t) = 2t + i(t^2 - 1)$  với  $-1 \leq t \leq 1$ .

## § 5 Công thức tích phân Cauchy

**5.1 Định lý.** Cho hàm  $f$  giải tích trên miền trong và liên tục trên đường cong Jordan kín định hướng dương  $\Gamma$ . Nếu  $z_0$  là điểm nằm trong  $\Gamma$  thì

$$(5.2) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

*Chứng minh.* Vì  $z_0$  là điểm nằm trong  $\Gamma$ , nên tồn tại  $r_0 > 0$  sao cho đường tròn tâm  $z_0$  bán kính  $r$ ,  $C_r$ , thuộc phần trong của  $\Gamma$  với mọi  $0 < r \leq r_0$ .



Theo giả thiết ta áp dụng được hệ quả của định lý Cauchy-Goursat đối với hàm  $f$  trên miền nhĩ liên xác định bởi hai đường cong  $\Gamma$  và  $C_r$ . Vậy ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Trong Thí dụ 4.11 ta tính được

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Do đó, với  $0 < r \leq r_0$ , ta có

$$\begin{aligned} f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$  và bên trong  $\Gamma$ . Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $\delta > 0$  sao cho khi  $|z - z_0| < \delta$  ta có  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Khi đó, chúng ta chọn  $0 < r < \min\{\delta, r_0\}$ , và được

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = \varepsilon.$$

Vậy, với mọi  $\varepsilon > 0$  ta có  $\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \varepsilon$ . Ta phải có  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ . □

**5.3 Nhận xét.** Công thức tích phân Cauchy vẫn đúng cho trường hợp miền đa liên hữu hạn, tức là: *Nếu hàm  $f$  giải tích trong miền đa liên (hữu hạn)  $D$  và liên tục trên biên của nó thì với mọi  $z_0 \in D$  ta luôn có*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

trong đó  $\partial D$  là biên định hướng dương của miền  $D$ .

**5.4 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z + i} dz$ , trong đó  $\Gamma$  có biểu diễn tham số  $w(t) = 3e^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Ta thấy  $\sin z$  là hàm giải tích và  $-i$  nằm trong đường cong  $\Gamma$  nên thỏa điều kiện định lý trên. Do đó,

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \frac{e^1 - e^{-1}}{2i} = \frac{e^2 - 1}{e} \pi. \quad \square$$

**5.5 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích tại điểm  $z_0$ , thì nó có đạo hàm mọi cấp trong lân cận của  $z_0$ ; điều đó cũng có nghĩa các đạo hàm ấy giải tích tại  $z_0$ .

*Chứng minh.* Vì  $f$  giải tích tại điểm  $z_0$ , nên tồn tại  $r > 0$  sao cho hàm  $f$  giải tích trên  $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ . Gọi  $C_r$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z - z_0| = r$ . Lấy  $z$  là một điểm tùy ý thỏa  $|z - z_0| < r$ . Khi đó, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Đặt  $d = d(z, C_r) > 0$ . Với  $0 < |\Delta z| < d$ , ta có  $|z + \Delta z - z_0| \leq |z - z_0| + |\Delta z| < r$  và tính được

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \left( \frac{1}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z} \right) \frac{f(\xi)}{\Delta z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi \end{aligned}$$

Do đó, ta biến đổi được

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \left[ \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right] d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} d\xi \right| \end{aligned}$$

Với mọi  $\xi \in C_r$  ta có  $|\xi - z| \geq d$  và  $|\xi - z - \Delta z| \geq ||\xi - z| - |\Delta z|| \geq d - |\Delta z|$ . Do  $f$  giải tích trên  $C_r$  nên nó liên tục trên  $C_r$ ; vì vậy  $|f(\xi)|$  đạt giá trị lớn nhất trên  $C_r$  và gọi giá trị lớn nhất là  $M$ . Suy ra

$$\left| \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} \right| \leq \frac{|\Delta z| M}{d^2 (d - |\Delta z|)}.$$

Hơn nữa, độ dài của  $C_r$  là  $2\pi r$ . Do đó, theo Định lý 2.9 ta được

$$\left| \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|\Delta z| M 2\pi r}{d^2(d - |\Delta z|)}.$$

Ta thấy rằng

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z| M r}{d^2(d - |\Delta z|)} = 0$$

suy ra

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Vậy hàm  $f$  khả vi tại  $z$ . Do  $z$  lấy tùy ý nên  $f$  khả vi trên  $\{z : |z - z_0| < r\}$ ; nghĩa là  $f$  giải tích tại  $z_0$ .

Bằng qui nạp chúng ta chứng minh được hàm  $f$  khả vi mọi cấp trong lân cận của điểm  $z_0$ ; nghĩa là các đạo hàm ấy giải tích tại  $z_0$ .  $\square$

Trong chứng minh định lý trên ta có được công thức đạo hàm của hàm  $f$  tại  $z_0$  là

$$(5.6) \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Bằng cách tương tự và qui nạp ta có thể chứng minh được công thức đạo hàm cấp cao của hàm  $f$  tại  $z_0$ . Ta phát biểu lại trong định lý tổng quát sau.

**5.7 Định lý.** Cho  $D$  là miền đơn liên với  $\Gamma$  là biên của nó và được định hướng dương và  $f$  là hàm giải tích trên  $D$  và liên tục trên  $\Gamma$ . Với mọi  $z \in D$ , ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

và  $f$  khả vi mọi cấp trên  $D$  và

$$(5.8) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Từ công thức đạo hàm cấp  $n$  của hàm  $f$  ta có thể viết lại để áp dụng vào việc tính tích phân như sau.

$$(5.9) \quad \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

trong đó  $\Gamma$  là đường cong đơn vây quanh điểm  $z_0$  và hàm  $f$  liên tục trên  $\Gamma$  và giải tích trên miền trong  $\Gamma$ .

**5.10 Thí dụ.** Giả sử  $\Gamma$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z| = 1$ . Khi đó, ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{z^4} dz = \int_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{(z-0)^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} (e^{2z})'''|_{z=0} = \frac{8\pi i}{3}. \quad \square$$

**5.11 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$  trong đó  $\Gamma$  là đường cong Jordan tròn kín định hướng dương giới hạn miền  $D$ . Ta xét 3 trường hợp:

(a)  $D$  chứa điểm  $z = 0$  và không chứa điểm  $z = 1$

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz = 2\pi i \frac{e^0}{(0-1)^3} = -2\pi i.$$

(b)  $D$  chứa điểm  $z = 1$  và không chứa điểm  $z = 0$

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left( \frac{e^z}{z} \right)'' \Big|_{z=1} = \pi i \frac{e^z(z^2 - 2z + 2)}{z^3} \Big|_{z=1} = e\pi i.$$

(c)  $D$  chứa cả hai điểm  $z = 0$  và  $z = 1$ .

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz = -2\pi i + e\pi i. \quad \square$$

**5.12 Nhận xét.** Từ Định lý 5.7 ta thấy rằng nếu  $f'(z)$  tồn tại trong miền  $D$  thì nó cũng giải tích, do đó suy ra  $f'(z)$  liên tục trên miền  $D$ . Đây là đặc trưng của hàm biến phức mà hàm biến thực không có. Chẳng hạn hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

khả vi trên toàn đường thẳng thực và

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

nhưng ta có thể thấy rằng  $f'(x)$  không liên tục tại  $x = 0$ .

**5.13 Hệ quả.** Nếu hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích tại  $z_0 = x_0 + iy_0$  thì các hàm thành phần  $u$  và  $v$  có các đạo hàm riêng mọi cấp liên tục tại điểm  $(x_0, y_0)$ .



*Chứng minh.* Đạo hàm của hàm  $f$  trong lân cận điểm  $z_0$  được tính bởi công thức

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y) = v'_y(x, y) - iu'_y(x, y).$$

Do hàm  $f$  giải tích tại  $z_0$  nên các đạo hàm riêng của  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  liên tục tại  $(x_0, y_0)$ . Do hàm  $f'$  cũng giải tích tại  $z_0$  và đạo hàm của nó trong lân cận điểm  $z_0$  được tính bởi công thức

$$\begin{aligned} f''(z) &= u''_{xx}(x, y) + iv''_{xx}(x, y) = v''_{xy}(x, y) - iu''_{xy}(x, y) \\ &= -u''_{yy}(x, y) - iv''_{yy}(x, y) \end{aligned}$$

nên các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại  $(x_0, y_0)$ . Tiếp tục quá trình này ta sẽ được các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có đạo hàm riêng mọi cấp liên tục tại  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

**5.14 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích và khác không trên miền đơn liên  $D$ , thì xác định hàm giải tích  $\log f(z)$  nhận giá trị trên một nhánh nào đó trên  $D$ .

*Chứng minh.* Theo giả thiết và Định lý 5.5 ta suy ra  $f'$  giải tích trên  $D$ . Do đó,  $f'/f$  xác định và giải tích trên  $D$ . Từ đó theo Hệ quả 4.5 suy ra nó có nguyên hàm là hàm  $F(z)$  nào đó trên  $D$ . Xét hàm  $f(z)e^{-F(z)}$ . Ta có

$$(f(z)e^{-F(z)})' = f'(z)e^{-F(z)} - f(z)F'(z)e^{-F(z)} = 0 \quad \text{với mọi } z \in D.$$

Do đó, suy ra  $f(z)e^{-F(z)}$  là hằng số. Với cố định  $z_0 \in D$ , ta có

$$f(z)e^{-F(z)} = f(z_0)e^{-F(z_0)} \quad \text{với mọi } z \in D.$$

Từ đó ta xác định  $\log f(z) = F(z) - F(z_0) + \log f(z_0)$ .  $\square$

**5.15 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích và khác không trên miền đơn liên  $D$ , thì tồn tại hàm giải tích  $g$  trên  $D$  sao cho  $g^2 = f$ .

*Chứng minh.* Phép chứng minh tương tự như định lý trên đi đến việc chọn hàm  $g$  là  $e^{-\frac{1}{2}F(z)}$  nhân với một hằng số. Trình bày chi tiết xin dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

Để kết thúc bài này chúng tôi nêu định lý đảo của định lý Cauchy-Goursat và các ứng dụng của nó.

**5.16 Định lý. (Morera)** Nếu hàm  $f$  liên tục trên miền  $D$  và nếu tích phân  $\int_C f(z)dz = 0$  với mọi đường cong  $C$  kín trơn từng khúc nằm trong  $D$ , thì hàm  $f$  giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Theo định lý ba mệnh đề tương đương (Định lý 3.3) thì hàm  $f$  có nguyên hàm  $F$  trên  $D$ . Vì  $D$  là một miền nên  $F$  giải tích trên  $D$ . Do đó, theo Định lý 5.5 hàm  $f = F'$  giải tích trên  $D$ .  $\square$

**5.17 Định lý.** Giả sử  $\{f_n\}$  là dãy hàm giải tích trên  $D$  và hội tụ đều về hàm  $f$ . Khi đó,  $f$  cũng giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Theo Định lý 4.8 (trang 61) ta có  $f$  liên tục trên. Với  $C$  là một đường cong kín trơn từng khúc bất kỳ nằm trong  $D$ , theo định lý Cauchy-Goursat ta có

$$\int_C f_n(z)dz = 0, \quad \text{với mọi } n.$$

Do đó, theo Định lý 2.13 ta được

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z)dz = 0.$$

Vậy theo định lý Morera ta suy ra được  $f$  giải tích trên  $D$ .  $\square$

Tương tự ta cũng có kết quả cho chuỗi hàm như sau.

**5.18 Định lý.** Giả sử các hàm  $f_n$  giải tích trên miền  $D$  và chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  hội tụ đều trên  $D$  về hàm  $f$ . Khi đó, hàm  $f$  cũng giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu  $f(z)$  liên tục trên lân cận của  $z = 0$  thì

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\varphi = 2\pi f(0).$$

2) Chứng minh rằng nếu  $f(z)$  liên tục trên lân cận của  $z = a$  thì  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$  trong đó  $\Gamma_r$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z-a| = r$ .

3) Cho  $f$  là một hàm liên tục trên  $\mathbb{C}$  và  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ . Hãy tính  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z} dz$  trong đó  $C_R$  là đường tròn  $|z| = R$  định hướng dương.

4) Chứng minh rằng nếu  $f(z)$  liên tục trong nửa dải  $\{z = x + iy : x \geq x_0, 0 \leq y \leq h\}$  và tồn tại  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = A$  không phụ thuộc vào  $y$  và đều theo  $y$  thì  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\beta_x} f(z) dz = iAh$  ở đây  $\beta_x$  là đoạn thẳng song song với trục ảo với  $0 \leq y \leq h$  từ dưới lên trên.

5) Chứng minh rằng nếu  $f(z)$  liên tục trong hình quạt xác định bởi  $\{z : 0 < |z - a| \leq r_0, 0 \leq \arg(z - a) \leq \alpha \leq 2\pi\}$  và tồn tại giới hạn  $\lim_{z \rightarrow a} [(z - a)f(z)] = A$  thì  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = iA\alpha$ , ở đây  $\Gamma_r$  là cung của đường tròn  $|z - a| = r$  nằm trong hình quạt đã cho theo hướng dương.

6) Chứng minh nếu  $f(z)$  giải tích trong dải  $0 \leq y \leq h$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + iy) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x + iy) = 0$  và  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  tồn tại thì  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy) dx$  cũng tồn tại và các tích phân này bằng nhau.

7) Nếu  $f(z)$  giải tích trong góc  $0 \leq \arg z \leq \alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2\pi$ ),  $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$  và tích phân  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  tồn tại thì  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz$  cũng tồn tại, trong đó  $\Gamma_r$  là tia  $z = re^{i\alpha}$  với  $0 \leq r \leq R$ .

8) Cho  $C$  là đường tròn  $|z| = 3$  được định hướng dương. Chứng minh rằng nếu

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz \quad |w| \neq 3,$$

thì  $g(2) = 8\pi i$ . Tìm giá trị của  $g(w)$  khi  $|w| > 3$ .

9) Cho  $C$  là một đường cong Jordan kín được định hướng dương và đặt

$$g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - w)^3} dz.$$

Chứng minh rằng  $g(w) = 6\pi i$  khi  $w$  bên trong  $C$  và  $g(w) = 0$  khi  $w$  bên ngoài  $C$ .

10) Tính các tích phân sau

- (a)  $\int_{\Gamma} \frac{z}{2z+1} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  và được định hướng ngược chiều kim đồng hồ.
- (b)  $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz$ , trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $w(t) = -i + 3e^{it}$  với  $t \in [0, 2\pi]$ .
- (c)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+i}$ , trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $w(t) = 2e^{it}$  với  $t \in [0, 2\pi]$ .
- (d)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2-1} dz$ , trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $w(t) = 2e^{it}$  với  $t \in [0, 2\pi]$ .

11) Tính các tích phân sau

- (a)  $\int_{\Gamma} \frac{z+1}{z^2-2z} dz$ , với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 3$  được định hướng dương.
- (b)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z+4)}$ , với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.
- (c)  $\int_{\Gamma} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ , với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.
- (d)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-2)^3}$ , với  $\Gamma$  là đường tròn  $|z-2| = 1$  được định hướng dương.

12) Tính tích phân các tích phân sau

- (a)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2+4)^2}$  trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $|z-i| = 2$  và được định hướng dương.
- (b)  $\int_{\Gamma} \frac{z}{z^4-1} dz$  trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $|z-a| = a$ , với  $a > 1$ , được định hướng dương.
- (c)  $\int_{\Gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$  trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $|z-a| = \frac{3}{2}a$  được định hướng dương.
- (d)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2-a^2)} dz$  trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $|z-a| = \frac{3}{2}a$  được định hướng dương.

13) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} e^z d\bar{z}$  trong đó  $\Gamma$  có phương trình  $|z| = 1$  và được định hướng dương.

14) Chứng minh rằng nếu  $f$  giải tích bên trong và trên đường cong kín đơn  $C$  và  $z_0$  không thuộc  $C$ , thì

$$\int_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

15) Cho  $f$  là một hàm liên tục trên đường cong kín đơn  $C$ . Chứng minh rằng hàm  $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$  giải tích tại mỗi điểm  $z$  bên trong  $C$  và  $g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$ .

16) Cho  $C$  là đường tròn đơn vị có biểu diễn tham số  $z = e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Chứng minh rằng với mỗi hằng số thực  $a$ , ta có

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

Sau đó viết biểu thức tích phân về dạng tham số và đi đến công thức tích phân

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

17) Chứng minh Định lý 5.15.

18) Chứng minh Định lý 5.18.

## § 6 Tích phân loại Cauchy

Ta đã thấy rằng công thức tích phân Cauchy nói lên rằng giá trị tại một điểm  $z_0 \in D$  của hàm giải tích  $f$  trên miền đơn liên  $D$  phụ thuộc vào giá trị biên. Tuy nhiên, hàm  $f$  không đòi hỏi giải tích trên biên mà chỉ cần liên tục trên biên mà thôi. Vì vậy vấn đề tự nhiên được đặt ra là nghiên cứu tính chất của hàm xác định bởi

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

trong đó  $\Gamma$  là đường cong Jordan trơn (hoặc trơn từng khúc) và  $\varphi$  là hàm liên tục trên  $\Gamma$ . Hàm  $F(z)$  xác định như trên gọi là *tích phân loại Cauchy* của hàm  $\varphi$ .

**6.1 Bổ đề.** Giả sử  $\xi = \zeta + i\eta$  và  $z = x + iy \in D \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Nếu với mỗi  $\xi \in \Gamma$  hàm  $\Psi(\xi, z)$  giải tích trên  $D$  và các hàm  $\Psi(\xi, z)$  và  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z)$  liên tục trên  $\Gamma \times D$  thì

$$F(z) = \int_{\Gamma} \Psi(\xi, z) d\xi$$

là hàm giải tích trên  $D$  và có đạo hàm

$$F'(z) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z) d\xi.$$

*Chứng minh.* Đặt

$$\Psi(\xi, z) = u(\zeta, \eta, x, y) + iv(\zeta, \eta, x, y)$$

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Do hàm  $\Psi(\xi, z)$  giải tích trên  $D$  nên các hàm  $u$  và  $v$  khả vi trên  $D$  và

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z) = u'_x(\zeta, \eta, x, y) + iv'_x(\zeta, \eta, x, y) = v'_y(\zeta, \eta, x, y) - iu'_y(\zeta, \eta, x, y)$$

Từ giả thiết  $\Psi(\xi, z)$  và  $\frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z)$  liên tục trên  $\Gamma \times D$  ta suy ra các hàm  $u(\zeta, \eta, x, y)$ ,  $v(\zeta, \eta, x, y)$ ,  $u'_x(\zeta, \eta, x, y)$ ,  $u'_y(\zeta, \eta, x, y)$ ,  $v'_x(\zeta, \eta, x, y)$ ,  $v'_y(\zeta, \eta, x, y)$  liên tục trên  $\Gamma \times D$ . Mặt khác, từ mối liên hệ giữa tích phân hàm phức và tích phân hai lớp ta có ta có

$$U(x, y) = \int_{\Gamma} u(\zeta, \eta, x, y) d\zeta - v(\zeta, \eta, x, y) d\eta$$

$$V(x, y) = \int_{\Gamma} v(\zeta, \eta, x, y) d\zeta + u(\zeta, \eta, x, y) d\eta$$

Vì các hàm  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$  liên tục nên ta suy ra các hàm  $U$  và  $V$  có các đạo hàm riêng và ta có

$$\begin{aligned} U'_x(x, y) &= \int_{\Gamma} u'_x(\zeta, \eta, x, y) d\zeta - v'_x(\zeta, \eta, x, y) d\eta \\ &= \int_{\Gamma} v'_y(\zeta, \eta, x, y) d\zeta + u'_y(\zeta, \eta, x, y) d\eta = V'_y(x, y) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} U'_y(x, y) &= \int_{\Gamma} u'_y(\zeta, \eta, x, y) d\zeta - v'_y(\zeta, \eta, x, y) d\eta \\ &= \int_{\Gamma} [-v'_x(\zeta, \eta, x, y) d\zeta - u'_x(\zeta, \eta, x, y) d\eta] = -V'_x(x, y) \end{aligned}$$

Ta cũng có các đạo hàm riêng  $U'_x, U'_y, V'_x, V'_y$  liên tục trên  $D$ . Do đó, theo điều kiện Cauchy-Riemann (trang 80) hàm  $F$  khả vi trên  $D$  và có đạo hàm

$$\begin{aligned} F'(z) &= U'_x(x, y) + iV'_x(x, y) \\ &= \int_{\Gamma} u'_x(\zeta, \eta, x, y) d\zeta - v'_x(\zeta, \eta, x, y) d\eta \\ &\quad + i \int_{\Gamma} v'_x(\zeta, \eta, x, y) d\zeta + u'_x(\zeta, \eta, x, y) d\eta \\ &= \int_{\Gamma} (u'_x(\zeta, \eta, x, y) + iv'_x(\zeta, \eta, x, y)) d\xi \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z) d\xi \end{aligned} \quad \square$$

**6.2 Định lý.** Nếu hàm  $\varphi$  liên tục trên đường cong Jordan trơn  $\Gamma$  thì tích phân loại Cauchy của nó là một hàm giải tích trên  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  và có đạo hàm

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Hơn nữa,  $F(z)$  có đạo hàm mọi cấp trên  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  và

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

*Chứng minh.* Đặt  $\Psi_k(\xi, z) = \frac{(k-1)!\varphi(\xi)}{(\xi - z)^k}$  với  $k$  là số nguyên dương và  $(\xi, z) \in \Gamma \times D$ . Hàm  $\Psi(\xi, z)$  thỏa điều kiện của bổ đề và

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial z}(\xi, z) = \frac{k!\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \Psi_{k+1}(\xi, z)$$

Do đó, theo bổ đề trên ta có

$$\frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \Psi_k(\xi, z) d\xi = \int_{\Gamma} \Psi_{k+1}(\xi, z) d\xi.$$

Cụ thể với  $k = 1$  ta có

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \Psi_1(x, z) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được

$$F^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi_{n+1}(\xi, z) d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad \square$$

**6.3 Nhận xét.** Từ tính chất của tích phân loại Cauchy ta chứng minh được Định lý 5.7. Nói một cách chính xác Định lý 5.7 là một hệ quả của Định lý 6.2. Thật vậy, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Do đó, theo Định lý 6.2 ta có  $f(z)$  giải tích mọi cấp trên  $D$  và

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

## Định lý Weierstrass

**6.4 Định lý. (Weierstrass)** *Giả sử  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  tới hàm  $f$  và các hàm  $f_n$  giải tích trên  $D$ , thì  $f$  là hàm giải tích trên  $D$ . Hơn nữa, ta có  $\{f'_n\}$  hội tụ đều về  $f'$  trên mọi tập compact trong  $D$ .*

*Chứng minh.* Lấy  $z_0 \in D$  tùy ý. Chọn  $r > 0$  đủ nhỏ để  $\overline{B}(z_0, r) \subset D$ . Với mỗi  $n$  theo công thức tích phân Cauchy với mọi  $z \in B(z_0, r)$  ta có

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Theo giả thiết  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $\overline{B}(z_0, r)$ , cho nên theo Định lý 4.8 trang 61 ta có  $f$  liên tục trên  $\overline{B}(z_0, r)$ ; và dãy  $\left\{\frac{f_n(\xi)}{\xi - z}\right\}$  hội tụ đều về



$\frac{f(\xi)}{\xi-z}$  trên  $\partial B(z_0, r)$  theo biến  $\xi$  với mỗi  $z \in B(z_0, r)$ , cho nên theo Định lý 2.13 trang 141 ta có

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

với mọi  $z \in B(z_0, r)$ . Do đó, theo định lý tích phân loại Cauchy ta có  $f$  giải tích trên  $B(z_0, r)$ ; cụ thể  $f$  giải tích tại  $z_0$ . Vậy hàm  $f$  giải tích trên  $D$ .

Chúng minh đẳng thức  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  trên  $D$  ta cũng áp dụng công thức tích phân Cauchy nhưng trong trường hợp này ta phải xét dãy hàm  $\left\{ \frac{f_n(\xi)}{(\xi-z)^2} \right\}$  thay cho dãy  $\left\{ \frac{f_n(\xi)}{\xi-z} \right\}$ . Trình bày chứng minh chi tiết dành cho bạn đọc xem như bài tập.

Hơn nữa, với  $\varepsilon > 0$  do  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $\overline{B}(z_0, r)$  nên tồn tại  $n_0$  sao cho  $|f_n(z) - f(z)| < \frac{r\varepsilon}{4}$  với mọi  $z \in \overline{B}(z_0, r)$ . Khi đó, với mọi  $z \in \overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$  và mọi  $n > n_0$ , ta có

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f_n(\xi) - f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{r\varepsilon}{4}}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} 2\pi r = \varepsilon.$$

Vậy  $\{f'_n\}$  hội tụ đều về  $f'$  trên  $\overline{B}(z_0, \frac{r}{2})$ . Do tập compact bất kỳ trong  $D$  có thể được phủ bởi hữu hạn các hình tròn đồng, cho nên ta dễ dàng suy ra được dãy  $\{f'_n\}$  hội tụ đều về  $f'$  trên mọi tập compact trong  $D$ .

Từ đó bằng cách áp dụng liên tiếp kết quả đạt được chúng ta có được kết quả tổng quát hơn: *Dãy các đạo hàm  $\{f_n^{(k)}(z)\}$  hội tụ đều về  $f^{(k)}(z)$  trên mọi tập compact trong  $D$ .*  $\square$

Tiếp theo ta xét trường hợp tổng quát hơn với dãy  $\{f_n(z)\}$  trong đó  $f_n(z)$  xác định và giải tích trên miền  $D_n$ . Hàm giới hạn  $f(z)$  cũng xác định trên  $D$  nào đó sao cho mỗi điểm thuộc  $D$  phải thuộc vào mọi  $D_n$  với mọi  $n$  lớn hơn  $n_0$  nào đó. Nói chung  $n_0$  sẽ không giống nhau cho tất cả các điểm của  $D$ , và với lý do này nên giả thiết sự hội tụ đều cho dãy  $\{f_n(z)\}$  trên  $D$  là không thích hợp ở đây. Thật sự, một trường hợp điển hình là các miền  $D_n$  lập thành một dãy tăng nghiêm ngặt  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots$  và  $D$  là hợp của các  $D_n$ . Trong trường hợp này không có một hàm  $f_n(z)$  nào xác định trên  $D$  nhưng hàm giới hạn  $f(z)$  có thể xác định trên  $D$  mặc dù sự hội tụ này không thể là đều.

**6.5 Thí dụ.** Xét  $f_n(z) = \frac{z}{2z^n + 1}$  trên  $D_n = \{z : |z| < 2^{-\frac{1}{n}}\}$ . Rõ ràng các hình tròn  $D_n$  tạo thành một dãy tăng nghiêm ngặt và có hợp là  $D =$

$\{z : |z| < 1\}$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = z$  với  $z \in D$ . Dãy  $\{f_n\}$  không hội tụ đều về  $f(z) = z$  trên  $D$  nhưng nó hội tụ đều trên  $\{z : |z| \leq r\}$  với mọi  $0 < r < 1$ . Thật vậy, với mọi  $0 < \varepsilon < 1$  tùy ý, lấy  $n > \frac{\ln \frac{4}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{r}}$ , với mọi  $|z| \leq r$  ta có  $|z|^n < \frac{\varepsilon}{4}$  và  $|2z^n + 1| > 1 - 2|z|^n > \frac{1}{2}$  và suy ra

$$|f_n(z) - z| = \left| \frac{z}{2z^n + 1} - z \right| = \frac{|2z^{n+1}|}{|2z^n + 1|} < 2\frac{\varepsilon}{4}2 = \varepsilon.$$

Do đó, ta cũng được dãy đã cho hội tụ đều trên các tập compact trong  $D$ .  $\square$

**6.6 Định lý. (Weierstrass)** Giả sử rằng  $f_n(z)$  giải tích trên  $D_n$  và dãy  $\{f_n(z)\}$  hội tụ về hàm  $f$  trên  $D$  hội tụ đều trên các tập compact trong  $D$ . Khi đó,  $f(z)$  giải tích trên  $D$ . Hơn nữa,  $\{f'_n(z)\}$  hội tụ đều về  $f'(z)$  trên các tập compact trong  $D$ ; và tổng quát hơn  $\{f_n^{(k)}(z)\}$  hội tụ đều về  $f^{(k)}(z)$  trên các tập compact trong  $D$

*Chứng minh.* Với  $a \in D$ , tồn tại  $r > 0$  sao cho  $\overline{B}(a, r) \subset D$ . Theo giả thiết dãy  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên  $\overline{B}(a, r)$ . Khi đó, hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 6.4 ta có được kết quả cần chứng minh.  $\square$

## Bài tập

**1)** Giả sử  $\Gamma$  là đường cong kín Jordan giới hạn miền hữu hạn  $D$ , còn  $f(z)$  giải tích ở phần ngoài của miền  $D$  và  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ . Khi đó,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} -f(z) + A & \text{khi } z \notin \overline{D} \\ A & \text{khi } z \in D \end{cases}$$

**2)** Với giả thiết về đường cong  $\Gamma$  và hàm  $f(z)$  như bài tập trên. Chứng minh rằng nếu gốc tọa độ thuộc miền  $D$  thì

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi z - \xi^2} d\xi = \begin{cases} 0 & \text{khi } z \in D \\ \frac{f(z)}{z} & \text{khi } z \notin \overline{D} \end{cases}$$

**3)** Cho hàm  $f$  giải tích trên  $U = \{z : |z| < 1\}$  và liên tục trên  $\overline{U}$  thỏa  $f(0) = 0$ . Chứng minh rằng hàm

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{khi } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{khi } z = 0. \end{cases}$$

liên tục trên  $\bar{U}$  và giải tích trên  $U$ .

4) Chứng minh  $f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z)$  với mọi  $z \in D$  trong Định lý 6.4.

5) Cho  $\{f_n\}$  hội tụ về  $f$  trên  $D = \{z : |z| < R\}$  và hội tụ đều trên  $\{z : |z| \leq r\}$  với mọi  $0 < r < R$ . Chứng minh rằng  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên các tập compact trong  $D$ .

## § 7 Định lý giá trị trung bình và nguyên lý module cực đại

### Định lý giá trị trung bình

**7.1 Định lý.** Giả sử hàm  $f$  giải tích trong miền  $D$  và hình tròn  $\bar{B}(z_0, R) = \{z : |z - z_0| \leq R\} \subset D$ . Khi đó, giá trị  $f(z_0)$  bằng trung bình cộng của các giá trị của nó trên đường tròn  $C_R = \{z : |z - z_0| = R\}$ . Nghĩa là

$$(7.2) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt.$$

*Chứng minh.* Ta định hướng dương đường tròn  $C_R$ , và biểu diễn tham số của nó là  $w(t) = z_0 + Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Khi đó, theo công thức tích phân Cauchy (Định lý 5.1) ta có

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} iRe^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt. \end{aligned} \quad \square$$

**7.3 Định lý.** Giả sử hàm  $f$  giải tích trong lân cận  $B(z_0, \varepsilon)$  của điểm  $z_0$ . Nếu  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  với mỗi  $z$  trong lân cận đó thì hàm  $f$  nhận giá trị  $f(z_0)$  trong lân cận ấy.

*Chứng minh.* Với  $z_1$  tùy ý thuộc lân cận đã cho, nghĩa là  $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ . Đặt  $\rho = |z_1 - z_0| < \varepsilon$ . Theo định lý giá trị trung bình trên đối với đường tròn  $C_\rho$ , ta có

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt.$$

Suy ra

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt.$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có  $|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|$  với mọi  $t$ . Vậy

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt.$$

Từ các kết quả trên ta phải có

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt.$$

Suy ra

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|) dt = 0.$$

Vì  $|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})| \geq 0$  với mọi  $t$ , nên ta phải có  $|f(z_0)| = |f(z_0 + \rho e^{it})|$  với mọi  $t$ . Đặc biệt,  $|f(z_1)| = |f(z_0)|$ . Vậy  $|f(z)| = |f(z_0)|$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ .

Nếu  $f(z_0) = 0$ , thì  $|f(z_0)| = 0$ . Suy ra  $|f(z)| = 0$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ . Vậy  $f(z) = 0$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$  hay  $f(z)$  nhận giá trị  $f(z_0)$  trong  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$ . Nếu  $f(z_0) \neq 0$ , thì  $M = |f(z_0)| > 0$ . Do  $|f(z)| = |f(z_0)|$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ , ta có thể viết

$$f(z) = M e^{i \arg f(z)} = M e^{i \theta(x, y)} = M \cos \theta(x, y) + i M \sin \theta(x, y)$$

với mọi  $z = (x, y)$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ . Do  $f$  giải tích trong  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  nên hàm  $f$  phải thỏa điều kiện Cauchy-Riemann trong lân cận đó, nghĩa là

$$\begin{cases} -M \sin \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} = M \cos \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \\ -M \sin \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = -M \cos \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x}. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \sin \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} + \cos \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \cos \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} - \sin \theta(x, y) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Nếu xem hệ phương trình trên là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ẩn là  $\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x}$  và  $\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}$  có nghiệm duy nhất là  $\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} = 0$ .

Từ đó suy ra  $\theta(x, y)$  là hằng đối với  $(x, y)$  hay  $\theta(x, y) = \theta(x_0, y_0)$  với mọi  $z = (x, y)$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ . Vậy

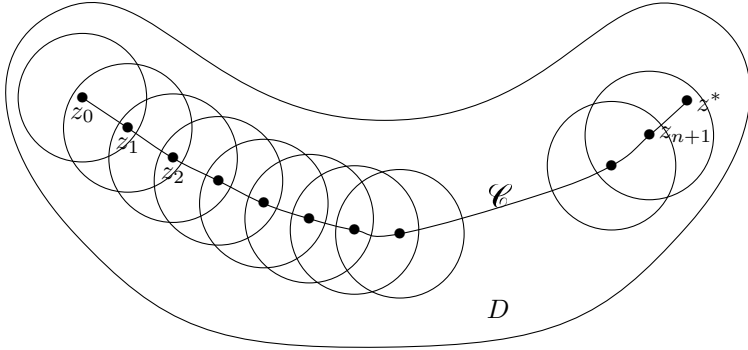
$$f(z) = Me^{i\theta(x_0, y_0)} = Me^{i \arg f(z_0)} = f(z_0)$$

với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ . □

## Nguyên lý modulus cực đại

**7.4 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích và không là hàm hằng trên miền  $D$ , thì  $|f(z)|$  không có giá trị lớn nhất trong  $D$ .

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại  $z_0 \in D$  sao cho  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  với mọi  $z \in D$ . Do  $z_0 \in D$  nên tồn tại  $\varepsilon > 0$  sao cho  $\{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq D$ . Suy ra  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ . Theo Định lý 7.3 ta có  $f(z) = f(z_0)$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < \varepsilon$ .



Hình V.18:

Lấy  $z^* \in D$  tùy ý. Do  $D$  là một miền nên tồn tại một đường cong  $\mathcal{C}$  nối từ  $z_0$  đến  $z^*$  nằm hoàn toàn trong  $D$ , và đường cong  $\mathcal{C}$  là một tập compact. Cũng do  $D$  là miền nên  $d(\mathcal{C}, \partial D) > 0$  (khoảng cách từ  $\mathcal{C}$  đến biên của  $D$ ). Khi đó, trên  $\mathcal{C}$  tồn tại dãy điểm phân biệt  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z^*$  sao cho  $|z_{k+1} - z_k| < \delta = \min \{\varepsilon, d(\mathcal{C}, \partial D)\}$  với  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Theo kết quả trên ta có  $f(z_1) = f(z_0)$  vì  $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ . Suy ra  $|f(z_1)| \geq |f(z)|$  với mọi  $z \in D$ . Theo Định lý 7.3 và lập luận như ở phần đầu ta có  $f(z) = f(z_1)$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_1| < \delta$ . Suy ra  $f(z_2) = f(z_1) = f(z_0)$ .

Tiếp tục quá trình như trên ta chứng minh được  $f(z_n) = \dots = f(z_2) = f(z_1) = f(z_0)$ . Do đó,  $f(z^*) = f(z_0)$ . Vậy ta được  $f(z) = f(z_0)$  với mọi  $z \in D$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết, cho nên ta kết luận được  $|f(z)|$  không có giá trị lớn nhất trong  $D$ . □

**7.5 Hệ quả.** Nếu hàm  $f$  giải tích trên miền bị chặn  $D$  và liên tục trên  $D \cup \partial D$  thì giá trị lớn nhất của  $|f(z)|$  trên  $D \cup \partial D$  đạt trên biên của  $D$ , đó là  $\partial D$ .

*Chứng minh.* Theo giả thiết  $D \cup \partial D$  là tập compact nên  $|f(z)|$  đạt giá trị lớn nhất trên  $D \cup \partial D$ . Giả sử tồn tại  $z_0 \in D$  sao cho  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  với mọi  $z \in D \cup \partial D$ . Khi đó, rõ ràng  $|f(z_0)|$  cũng là giá trị lớn nhất của  $|f(z)|$  trên  $D$ . Do đó, theo Định lý 7.4 hàm  $f(z)$  là hằng trên  $D$ . Do  $f$  liên tục trên  $D \cup \partial D$  nên  $f(z)$  cũng là hằng trên  $D \cup \partial D$ . Do đó, giá trị lớn nhất của  $|f(z)|$  trên  $D \cup \partial D$  đạt được trên  $\partial D$ .  $\square$

**7.6 Chú ý.** Nếu miền  $D$  không bị chặn thì hệ quả trên không còn đúng nữa. Ví dụ xét hàm  $f(z) = e^z$  trên  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ . Hàm  $|f(z)|$  không đạt cực đại trên biên vì  $|f(z)| = 1$  với mọi  $z$  thuộc biên.

## Bài tập

1) Cho hàm  $f$  liên tục trên tập compact  $D$  và giải tích nhưng không là hàm hằng trên phần trong của  $D$ . Giả sử  $f(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$ , chứng minh rằng  $|f(z)|$  có giá trị nhỏ nhất  $m$  trong  $D$  đạt được chỉ trên biên của  $D$ .

2) Giả sử  $f$  là một hàm giải tích không là hằng trong một miền  $D$ . Chứng minh rằng với mọi tập compact  $K \subset D$ , những điểm mà  $|f(z)|$  đạt cực đại trên  $K$  là những điểm biên của  $K$ .

3) Dùng hàm  $f(z) = z$  chứng minh rằng trong bài tập trên giả thiết  $f(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$  là cần thiết không thể bỏ được để có được kết luận của bài tập ấy.

4) Xét hàm  $f(z) = (z + 1)^2$  và tập compact  $D$  là tam giác với các đỉnh  $z = 0$ ,  $z = 2$ , và  $z = i$ . Tìm những điểm trên  $D$  mà  $|f(z)|$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

5) Cho  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  là hàm liên tục trên tập compact  $D$  và giải tích nhưng không là hàm hằng trên phần trong của  $D$ . Chứng minh rằng  $u(x, y)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $D$  chỉ tại biên của  $D$ .

6) Cho hàm  $f(z) = e^z$  và  $D$  là hình chữ nhật xác định bởi  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \pi$ . Tìm các điểm trên  $D$  để hàm  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$  đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất trên  $D$ .

7) Cho hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  liên tục trên tập compact  $D$  và  $f$  giải tích nhưng không là hàm hằng trên phần trong của  $D$ . Chứng minh rằng hàm  $v(x, y)$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên  $D$  chỉ tại biên của  $D$ .

8) Cho dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ về hàm  $f$  trên miền đóng và bị chặn  $\overline{D}$ . Chứng minh rằng nếu  $\{f_n\}$  hội tụ đều về  $f$  trên  $\partial D$  thì nó hội tụ đều trên  $\overline{D}$ .

## § 8 Định lý Liouville và định lý đại số cơ bản

### Định lý Liouville

Cho  $z_0$  là một số phức cố định. Nếu hàm  $f$  giải tích trong và trên đường tròn có phương trình  $|z - z_0| = R$ , đường tròn này được định hướng dương và ký hiệu là  $C_R$ , thì theo Định lý 5.7 ta có

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Ký hiệu  $M_R$  là giá trị lớn nhất của  $|f(z)|$  trên đường tròn  $C_R$ ; khi đó  $|f(z)| \leq M_R$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| = R$ . Từ đó ta tính được

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_R}{R^{n+1}} R dt \\ &= \frac{n! M_R}{R^n}. \end{aligned}$$

Vậy ta có được **bất đẳng thức Cauchy**

$$(8.1) \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}.$$

Trường hợp  $n = 1$ ,

$$(8.2) \quad |f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R}.$$

**8.3 Định lý. (Liouville)** Nếu hàm  $f$  giải tích và bị chặn trên  $\mathbb{C}$ , thì  $f(z)$  là hàm hằng trên  $\mathbb{C}$ .

*Chứng minh.* Vì  $f$  bị chặn trên  $\mathbb{C}$  nên tồn tại  $M > 0$  sao cho  $|f(z)| < M$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$ . Lấy  $z_0$  tùy ý. Theo bất đẳng thức Cauchy ở trên với  $n = 1$ , ta có

$$|f'(z_0)| \leq \frac{MR}{R} \leq \frac{M}{R} \quad \text{với mọi } R > 0.$$

Từ đó suy ra  $f'(z_0) = 0$ . Vậy  $f'(z) = 0$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$ . Do đó,  $f$  phải là hàm hằng.  $\square$

## Định lý đại số cơ bản

**8.4 Định lý. (D’alembert)** Với mỗi đa thức  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  bậc  $n$ , với  $n \geq 1$ , đều có ít nhất một phần tử không. Nghĩa là tồn tại  $z_0$  sao cho  $P(z_0) = 0$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $P(z) \neq 0$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$ . Ta thấy  $P(z)$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ ; do đó  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ . Đặt

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z}.$$

Dễ dàng thấy rằng  $P(z) = wz^n + a_nz^n = (w + a_n)z^n$ . Đặt

$$R = \max \left\{ 2n \frac{|a_i|}{|a_n|}, 1 : i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Với mọi  $i = 0, 1, \dots, n-1$  và mọi  $z$  thỏa  $|z| > R$ , ta có

$$|z^{n-i}| \geq |z| > R \geq 2n \frac{|a_i|}{|a_n|}.$$

suy ra

$$\frac{|a_i|}{|z^{n-i}|} \leq \frac{|a_n|}{2n} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \forall z : |z| > R.$$

Do đó

$$|w| \leq \left| \frac{a_0}{z^n} \right| + \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| + \dots + \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| \leq \frac{|a_n|}{2} \quad \forall z : |z| > R.$$

Từ đó với mọi  $|z| > R$  chúng ta có

$$|P(z)| = |(w + a_n)z^n| \geq (|a_n| - |w|)|z^n| \geq \left( |a_n| - \frac{|a_n|}{2} \right) R^n.$$



Vậy khi  $|z| > R$ , ta có

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_n|R^n},$$

nghĩa là  $|f(z)|$  bị chặn trên tập  $\{z : |z| > R\}$ .

Mặt khác, do  $f(z)$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ , nên  $|f(z)|$  bị chặn trên tập compact  $\{z : |z| \leq R\}$ . Vậy  $|f(z)|$  bị chặn trên  $\mathbb{C}$ . Do đó, theo định lý Liouville  $f(z)$  là hàm hằng trên  $\mathbb{C}$ . Suy ra  $P(z)$  là hàm hằng trên  $\mathbb{C}$ . Đây là điều vô lý (bởi vì nếu  $P(z)$  là hàm hằng thì  $P^{(n)}(z) = 0$  trong khi đó thực sự ta có  $P^{(n)}(z) = n!a_n \neq 0$ ), cho nên tồn tại  $z_0 \in \mathbb{C}$  sao cho  $P(z_0) = 0$ .  $\square$

## Bài tập

1) Cho  $f$  là hàm giải tích trên  $\mathbb{C}$  sao cho  $|f(z)| \leq A|z|$  với mọi  $z$ , trong đó  $A$  là một hằng số thực dương. Chứng minh rằng  $f(z) = az$  trong đó  $a$  là hằng số phức.

2) Chứng minh rằng với  $R$  đủ lớn, hàm đa thức  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  với  $a_n \neq 0$  thỏa bất đẳng thức

$$|P(z)| < 2|a_n|z^n \quad \text{với mọi } |z| \geq R.$$

## § 9 Nguyên lý Montel

**9.1 Định nghĩa.** Họ  $\mathcal{F}$  các hàm xác định trên  $D$  được gọi là **bị chặn đều** trên các tập compact nếu

$$\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} < \infty$$

với mọi tập compact  $K \subseteq D$ .

**9.2 Định nghĩa.** Họ  $\mathcal{F}$  các hàm xác định trên  $D$  được gọi là **đồng liên tục** trên các tập compact nếu với mọi tập compact  $K \subseteq D$  và mọi  $\varepsilon > 0$  tồn tại  $\delta = \delta(K, \varepsilon)$  sao cho

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \quad \text{với mọi } z, z' \in K \text{ thỏa } |z - z'| < \delta.$$

**9.3 Định lý.** Mọi họ các hàm giải tích  $\mathcal{F}$  xác định trên miền  $D$  (nghĩa là  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ ) bị chặn đều trên các tập compact là đồng liên tục trên các tập compact.

*Chứng minh.* Lấy  $K$  là tập compact tùy ý thỏa  $K \subseteq D$ . Khi đó, ta có  $K \cap \partial D = \emptyset$ . Đặt  $d = \frac{1}{4}d(K, \partial D) > 0$ . Đặt

$$B = \{z \in D : d(z, K) \leq 2d\}.$$

Ta có thể chứng minh được  $B$  là tập compact. Theo giả thiết họ  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên  $B$ , nghĩa là tồn tại  $M > 0$  sao cho

$$|f(z)| \leq M \quad \text{mọi } z \in B, \text{ mọi } f \in \mathcal{F}.$$

Với  $\varepsilon > 0$  tùy ý, chọn  $\delta = \min\{d, \frac{d\varepsilon}{M}\}$ . Với  $z_1 \in K$  tùy ý, ta có  $d(z, K) \leq d(z, z_1) \leq 2d$  với mọi  $z \in \overline{B}(z_1, 2d)$ . Suy ra  $\overline{B}(z_1, 2d) \subseteq B$ . Do đó, theo công thức tích phân Cauchy với mọi  $z \in B(z_1, 2d)$  ta có

$$f(z) = \int_{|\eta - z_1| = 2d} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Như vậy, với kết quả vừa chứng minh ta suy ra được với mọi  $f \in \mathcal{F}$  và mọi  $z_1, z_2 \in K$  thỏa  $|z_1 - z_2| < \delta$  ta có  $|\eta - z_2| > 2d - \delta \geq d$  và

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_1| = 2d} \frac{f(\eta)}{\eta - z_1} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_1| = 2d} \frac{f(\eta)}{\eta - z_2} d\eta \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\eta - z_1| = 2d} \frac{f(\eta)(z_1 - z_2)}{(\eta - z_1)(\eta - z_2)} d\eta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M|z_1 - z_2|}{2d \cdot d} 2\pi 2d \\ &< \frac{M}{d} \delta \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy họ  $\mathcal{F}$  đồng liên tục đều trên  $K$ . □

**9.4 Định lý.** Giả sử dãy các hàm giải tích  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}(D)$  bị chặn đều trên các tập compact hội tụ trên một tập con  $E \subseteq D$  nào đó trù mật trong  $D$ . Khi đó, dãy  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên các tập compact trong  $D$ .

*Chứng minh.* Theo định lý trên dãy  $\{f_n\}$  đồng liên tục trên các tập compact. Xét tập  $K \subseteq D$  compact tùy ý. Khi đó,  $B = \{z \in D : d(z, K) \leq$

$d = d(K, \partial D)/2\}$  cũng là tập compact. Theo tính đồng liên tục, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ với mọi } z_1, z_2 \in B \text{ thỏa } |z_1 - z_2| < \delta \text{ và mọi } n.$$

Với  $z \in K$  tùy ý và với mỗi  $z' \in B(z, \eta)$  với  $\eta \leq d$  bất kỳ, ta có  $d(z', K) \leq d(z', z) \leq \eta \leq d$ , suy ra  $B(z, \eta) \subseteq B$ . Mặt khác, do  $E$  trù mật trong  $D$  nên  $B(z, \eta) \cap E \neq \emptyset$ . Từ đó suy ra tồn tại  $z^* \in E \cap B$  sao cho  $|z - z^*| < \delta$ .

Theo giả thiết dãy  $\{f_n\}$  hội tụ trên  $E$ , nên tồn tại  $N > 0$  sao cho

$$|f_n(z^*) - f_m(z^*)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{với mọi } n, m > N.$$

Do đó, với mọi  $n, m > N$  ta có

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(z^*)| + |f_n(z^*) - f_m(z^*)| \\ &\quad + |f_m(z^*) - f_m(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Do  $z \in K$  tùy ý, nên dãy  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên  $K$ . □

**9.5 Định lý. (Montel)** *Giả sử  $D$  là một miền trong  $\mathbb{C}$  và  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(D)$ . Khi đó,  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên các tập compact nếu và chỉ nếu mọi dãy  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  chứa một dãy con  $\{f_{n_k}\}$  hội tụ đều trên các tập compact.*

*Chứng minh.* Giả sử họ  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên các tập compact và  $\{f_n\}$  là một dãy tùy ý trong  $\mathcal{F}$ . Lấy một tập đếm được trù mật  $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  trong  $D$ . Ta thấy rằng dãy  $\{f_n\}$  bị chặn đều trên các tập compact. Do đó, với mỗi  $\alpha_j \in E$  ta có  $f_1(\alpha_j), f_2(\alpha_j), \dots$ , bị chặn. Cụ thể dãy

$$f_1(\alpha_1), f_2(\alpha_1), \dots, f_n(\alpha_1), \dots$$

bị chặn nên theo định lý Bolzano-Weierstrass tồn tại một dãy con hội tụ gọi nó là

$$f_{n_1^1}(\alpha_1), f_{n_2^1}(\alpha_1), \dots, f_{n_k^1}(\alpha_1), \dots$$

Ta có thể nhận thấy

$$f_{n_1^1}(\alpha_2), f_{n_2^1}(\alpha_2), \dots, f_{n_k^1}(\alpha_2), \dots$$

là dãy con của dãy  $f_1(\alpha_2), f_2(\alpha_2), \dots, f_n(\alpha_2), \dots$  nên nó bị chặn, cho nên cũng theo định lý Bolzano-Weierstrass tồn tại dãy con hội tụ gọi nó là

$$f_{n_2^2}(\alpha_2), f_{n_3^2}(\alpha_2), \dots, f_{n_k^2}(\alpha_2), \dots$$

Cứ tiếp tục như thế ta tìm được dãy  $f_{n_1^q}(\alpha_q), f_{n_2^q}(\alpha_q), \dots, f_{n_k^q}(\alpha_q), \dots$  hội tụ và nó là dãy con của dãy  $f_{n_1^{q-1}}(\alpha_q), f_{n_2^{q-1}}(\alpha_q), \dots, f_{n_k^{q-1}}(\alpha_q), \dots$ . Như vậy, ta có được các dãy hàm con của dãy hàm  $\{f_n\}$  sau

$$\begin{aligned} & f_{n_1^1}(z), f_{n_2^1}(z), \dots, f_{n_k^1}(z), \dots \\ & f_{n_1^2}(z), f_{n_2^2}(z), \dots, f_{n_k^2}(z), \dots \\ & \dots\dots\dots \\ & f_{n_1^q}(z), f_{n_2^q}(z), \dots, f_{n_k^q}(z), \dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

trong đó mọi dãy sau là dãy con của dãy trước, và dãy con ở dòng thứ  $q$  hội tụ tại  $\alpha_q$ . Khi đó,  $\{f_{n_k}\}_k$  là một dãy con của dãy  $\{f_n\}$  (gọi là dãy đường chéo Cantor). Chúng ta khẳng định rằng dãy con  $\{f_{n_k}\}_k$  hội tụ  $E$ . Thật vậy với mỗi  $\alpha_q$  ta có dãy  $\{f_{n_k^q}(\alpha_q)\}$  hội tụ vì các phần tử  $f_{n_1^q}(\alpha_q), f_{n_{q+1}^q}(\alpha_q), \dots$  là dãy con của dãy  $f_{n_1^q}(\alpha_q), f_{n_2^q}(\alpha_q), \dots, f_{n_k^q}(\alpha_q), \dots$ , nên nó hội tụ. Do sự hội tụ của dãy không phụ thuộc khi ta thay đổi hữu hạn các số hạng của dãy, cho nên dãy  $\{f_{n_k^q}(\alpha_q)\}_k$  hội tụ. Theo Định lý 9.4 dãy  $\{f_{n_k}\}_k$  hội tụ đều trên các tập compact.

Ngược lại, với  $K \subset D$  compact bất kỳ, giả sử tồn tại  $a \in K$  sao cho với mọi  $\varepsilon > 0$  ta có  $\sup\{|f(z)| : z \in K \cap B(a, \varepsilon), f \in \mathcal{F}\} = \infty$ . Khi đó, với mỗi  $n$  tồn tại  $z_n \in K$  thỏa  $|z_n - a| < \frac{1}{n}$  và  $f_n \in \mathcal{F}$  thỏa  $|f_n(z)| > n$ . Theo giả thiết tồn tại dãy con  $\{f_{n_k}\}$  của dãy  $\{f_n\}$  sao cho  $\{f_{n_k}\}$  hội tụ đều trên các tập compact của  $D$ . Rõ ràng tập  $E = \{a\} \cup \{z_{n_k} : k = 1, 2, \dots\}$  là tập compact. Do đó,  $\{f_{n_k}\}$  hội tụ đều trên  $E$ , cho nên  $\{f_{n_k}\}$  bị chặn đều trên  $E$ , nhưng điều này mâu thuẫn với định nghĩa các hàm  $f_n$  và các điểm  $z_n$  là  $|f_{n_k}(z_{n_k})| \geq n_k \rightarrow \infty$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Do đó, với mọi  $a \in K$  tồn tại  $\varepsilon(a) > 0$  sao cho

$$\sup\{|f(z)| : z \in K \cap B(a, \varepsilon(a)), f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Rõ ràng họ  $\{B(a, \varepsilon(a))\}_{a \in K}$  phủ  $K$  nên tồn tại họ con  $\{B(a_j, \varepsilon_j)\}_{j=1}^n$  vẫn phủ  $K$ . Đặt

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} \{\sup\{|f(z)| : z \in K \cap B(a_j, \varepsilon_j), f \in \mathcal{F}\}\}.$$

Từ đó ta suy ra được  $|f(z)| \leq M$  với mọi  $z \in K$  và mọi  $f \in \mathcal{F}$ . Do đó, ta được  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên các tập compact.  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu họ  $\mathcal{F}$  các hàm giải tích trên  $D$  hội tụ đều trên các tập compact của  $D$  thì  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên các tập compact.

## Chương VI

# Hàm điều hòa và hàm điều hòa dưới

### § 1 Hàm điều hòa

#### Khái niệm hàm điều hòa

**1.1 Định nghĩa.** Hàm thực  $u(x, y)$  xác định trên miền  $D$  và có đạo hàm riêng cấp hai liên tục và thỏa điều kiện  $u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0$  với mọi  $(x, y) \in D$  được gọi là **hàm điều hòa**.

**1.2 Thí dụ.** Hàm  $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$  là hàm điều hòa trên  $\mathbb{R}^2$ . Thật vậy  $u'_x(x, y) = 2x + y$ ,  $u''_{xx}(x, y) = 2$  và  $u'_y(x, y) = x - 2y$ ,  $u''_{yy}(x, y) = -2$ , suy ra  $u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0$ .  $\square$

**1.3** Cho hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên  $D$ . Theo Hệ quả 5.13 ta có các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng mọi cấp liên tục. Hơn nữa, theo Định lý Cauchy-Riemann 1.10 trang 80 ta có mối liên hệ giữa hai hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  trên  $D$  như sau

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

suy ra

$$\begin{aligned} u''_{xx}(x, y) &= v''_{yx}(x, y), & u''_{yy}(x, y) &= -v''_{xy}(x, y); \\ v''_{xx}(x, y) &= -u''_{yx}(x, y), & v''_{yy}(x, y) &= u''_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Từ đó ta nhận thấy cả hai hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  đều là hàm điều hòa. Do hai hàm  $u$  và  $v$  có liên hệ với nhau nên ta có khái niệm sau.

**1.4 Định nghĩa.** Cho hai hàm điều hòa  $u$  và  $v$  trên  $D$ . Ta nói  $v$  là hàm liên hợp điều hòa của  $u$  nếu thỏa điều kiện

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

**1.6 Thí dụ.** Theo thí dụ trên ta biết rằng  $u(x, y) = x^2 + xy - y^2$  là hàm điều hòa trên  $\mathbb{R}^2$ . Bây giờ ta tìm hàm liên hợp điều hòa  $v(x, y)$  của  $u(x, y)$ . Theo điều kiện (1.5) ta có

$$v'_y(x, y) = 2x + y \quad v'_x(x, y) = 2y - x.$$

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra được  $v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} + g(x)$ , cho nên  $v'_x(x, y) = 2y + g'(x)$ . Vậy  $g'(x) = -x$  hay  $g(x) = -\frac{x^2}{2} + C$ . Suy ra  $v(x, y) = 2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C$ .  $\square$

**1.7 Nhận xét.** Theo kết quả trên ta có nếu hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên  $D$  thì  $v(x, y)$  là hàm điều hòa liên hợp của hàm  $u(x, y)$ . Hơn nữa, chiều ngược lại cũng đúng, cho nên ta có kết quả ở định lý sau.

**1.8 Định lý.** Hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên miền  $D$  khi và chỉ khi  $v(x, y)$  là hàm liên hợp điều hòa của  $u(x, y)$  trên  $D$ .

*Chứng minh.* Ta chỉ cần chứng minh chiều ngược của định lý. Giả sử  $v(x, y)$  là hàm liên hợp điều hòa của  $u(x, y)$  trên  $D$ . Khi đó, cả hai hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  là các hàm điều hòa nên chúng có đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên  $D$ , cho nên chúng có đạo hàm riêng cấp một liên tục trên  $D$ . Vì  $v(x, y)$  là hàm liên hợp điều hòa của  $u(x, y)$  trên  $D$  nên chúng thỏa điều kiện Cauchy-Riemann. Do đó, theo định lý Cauchy-Riemann, trang 80, hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  khả vi trên  $D$ . Do  $D$  là miền nên  $f$  giải tích trên  $D$ .  $\square$

## Đặc trưng hàm điều hòa

**1.9 Định lý.** Giả sử  $u$  là hàm điều hòa trên miền đơn liên  $D$ . Khi đó,  $u$  là phần thực của một hàm giải tích trên  $D$ .

*Chứng minh.* Với ký hiệu  $z = x + iy = (x, y)$  và từ giả thiết cùng với định lý Cauchy-Riemann ta dễ dàng nhận thấy hàm

$$f(z) = u'_x(x, y) - iu'_y(x, y)$$

giải tích trên  $D$ . Từ đó theo Hệ quả 4.5 tồn tại nguyên hàm  $F$  của  $f$  trên  $D$  và

$$\begin{aligned} dF(z) &= f(z)dz = [u'_x(x, y) - iu'_y(x, y)](dx + idy) \\ &= u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy + i(u'_x(x, y)dy - u'_y(x, y)dx) \end{aligned}$$

Đặt  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ . Khi đó, ta có  $U'_x(x, y) = u'_x(x, y)$  và  $V'_x(x, y) = -u'_y(x, y)$ . Theo ký hiệu vi phân của hàm phức ta có

$$\begin{aligned} d\bar{F}(z) &= dU(x, y) - i dV(x, y) \\ &= U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy - i(V'_x(x, y)dx + V'_y(x, y)dy) \\ &= u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy - i(-u'_y(x, y)dx + u'_x(x, y)dy) \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra được

$$d(F(z) + \bar{F}(z)) = 2[u'_x(x, y)dx + u'_y(x, y)dy] = 2du(x, y)$$

hay  $d(\operatorname{Re} F(z)) = du(x, y)$ . Do đó, ta có  $u(x, y) = \operatorname{Re} F(z) + C$  trong đó  $C$  là hằng số thực. Rõ ràng  $F(z) + C$  là hàm giải tích trên  $D$ .  $\square$

**1.10 Nhận xét.** Trong định lý trên giả thiết  $D$  là miền đơn liên là thiết yếu. Chẳng hạn, ta có thể kiểm tra được rằng hàm  $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  là một hàm điều hòa trên  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Trong khi đó, hàm

$$f(z) = u'_x(x, y) - iu'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

không có nguyên hàm trên  $D$ . Do đó, không có hàm giải tích trên  $D$  nhận  $u(x, y)$  làm phần thực.



**1.11 Định lý. (Giá trị trung bình)** Giả sử  $u$  là hàm điều hòa trong miền  $D$  và  $z_0 \in D$ . Khi đó,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi$$

với mọi  $0 < r < d(z_0, \partial D)$ .

*Chứng minh.* Lấy  $0 < r < d(z_0, \partial D)$  tùy ý. Theo Định lý 1.9 tồn tại hàm giải tích  $f$  nhận  $u(x, y)$  làm hàm phần thực trên miền đơn liên  $B(z_0, R)$  với  $r < R < d(z_0, \partial D)$ . Ta áp dụng Định lý 7.1 trang 177 thu được

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad \square$$

**1.12 Định lý.** Giả sử  $u$  là hàm điều hòa trong miền  $D$  và  $u$  đạt giá trị lớn nhất trong  $D$  thì  $u$  là hàm hằng.

*Chứng minh.* Giả sử hàm  $u$  đạt giá trị lớn nhất tại  $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ . Tồn tại  $r > 0$  sao cho  $B(z_0, r) \subset D$ . Vậy  $u$  cũng đạt giá trị lớn nhất trên  $B(z_0, r)$  tại  $z_0$ . Theo Định lý 1.9 tồn tại hàm giải tích  $f$  trên  $B(z_0, r)$  nhận  $u(x, y)$  làm hàm phần thực. Khi đó, hàm  $e^{f(z)}$  giải tích trên  $B(z_0, r)$  và  $|e^{f(z)}| = e^{u(x, y)}$ . Vậy  $|e^{f(z)}|$  đạt giá trị lớn nhất trên  $B(z_0, r)$  tại  $z_0$ . Do đó, theo Định lý 7.3 trang 177 hàm  $e^{f(z)}$  phải là hàm hằng trên  $B(z_0, r)$ ; từ đó suy ra  $e^{u(x, y)}$  và  $u(x, y)$  là hàm hằng trên  $B(z_0, r)$ . Phần còn lại của phép chứng minh lập luận hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý nguyên lý modulus cực đại trang 179.  $\square$

**1.13 Nhận xét.** Định lý trên vẫn đúng khi ta thay giả thiết hàm  $u$  đạt giá trị lớn nhất trong  $D$  bởi giả thiết hàm  $u$  đạt giá trị nhỏ nhất trong  $D$  bởi vì nếu hàm  $u$  là hàm điều hòa thì hàm  $-u$  cũng là hàm điều hòa.

## Bài tập

- 1) Chứng minh rằng  $u(x, y) = 3x + y$  là hàm điều hòa. Tìm hàm điều hòa  $v(x, y)$  liên hợp với  $u(x, y)$ .
- 2) Chứng minh rằng  $u(x, y) = x^2 - y^2$  là hàm điều hòa. Tìm hàm điều hòa  $v(x, y)$  liên hợp với  $u(x, y)$ .
- 3) Chứng minh rằng  $u(x, y) = 2xy - x$  là hàm điều hòa. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  nhận  $u(x, y)$  làm hàm phần thực.
- 4) Chứng minh rằng  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$  là hàm điều hòa. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  có phần thực là hàm  $u(x, y)$ .
- 5) Chứng minh rằng  $v(x, y) = x^2 - y^2 + xy$  là hàm điều hòa. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  có phần ảo là hàm  $v(x, y)$ .
- 6) Chứng minh rằng  $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$  là hàm điều hòa. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  có phần ảo là hàm  $v(x, y)$ .
- 7) Chứng minh rằng nếu  $v$  là hàm liên hợp điều hòa của  $u$  trên miền  $D$  và  $u$  là hàm liên hợp điều hòa của  $v$  trên  $D$ , thì  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  phải là hàm hằng trên  $D$ .
- 8) Giả sử  $f$  là hàm giải tích trên  $\mathbb{C}$  và hàm điều hòa  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$  là hàm bị chặn trên. Chứng minh rằng  $u(x, y)$  phải là hàm hằng trên  $\mathbb{R}^2$ .
- 9) Cho hàm  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích trên miền  $D$ . Giải thích tại sao các hàm  $U(x, y) = e^{u(x, y)} \cos v(x, y)$  và  $V(x, y) = e^{u(x, y)} \sin v(x, y)$  điều hòa trên  $D$  và  $V(x, y)$  thật sự là một hàm liên hợp điều hòa của  $U(x, y)$ .
- 10) Cho hàm  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  giải tích trên miền  $D$  mà nó không chứa gốc tọa độ. Dùng hệ phương trình Cauchy-Riemann ở dạng tọa độ cực và giả sử các đạo hàm riêng liên tục, chứng minh rằng hàm  $u(r, \theta)$  thỏa, trên miền  $D$ , phương trình đạo hàm riêng

$$r^2 u''_{rr}(r, \theta) + r u'_r(r, \theta) + u''_{\theta\theta}(r, \theta) = 0,$$

nó là *phương trình Laplace dạng cực*. Chứng minh rằng điều đó vẫn đúng cho hàm  $v(r, \theta)$ .

## § 2 Công thức Schwarz và công thức Poisson

**2.1 Định lý. (Công thức Schwarz)** Giả sử  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , với  $z = x + iy$ , là hàm liên tục trên  $\bar{B}(0, r)$  giải tích trên  $B(0, r)$ . Khi đó

$$(2.2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi + iv(0, 0)$$

với  $z \in B(0, r)$ .

*Chứng minh.* Với mọi  $|z| < r$ , theo công thức tích phân Cauchy đối với đường tròn  $|z| = r$  định hướng dương ta có

$$(2.3) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

Đặc biệt, ta có

$$(2.4) \quad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta có

$$(2.5) \quad \begin{aligned} f(z) - \frac{1}{2}f(0) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \left[ \frac{2re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - z} - 1 \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi. \end{aligned}$$

Mặt khác, vì  $|z| = |\bar{z}| < r$  nên  $\left| \frac{r^2}{\bar{z}} \right| > r$  nên  $\frac{f(\xi)}{\xi - \frac{r^2}{\bar{z}}}$  giải tích trên  $B(0, r)$  và liên tục trên  $\bar{B}(0, r)$ . Do đó, theo Định lý Cauchy-Goursat ta có

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - \frac{r^2}{\bar{z}}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{i\varphi} \bar{z}}{\bar{z} re^{i\varphi} - r^2} d\varphi$$

Từ đó ta viết lại

$$(2.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - re^{-i\varphi}} d\varphi = 0.$$

Từ công thức này kết hợp với (2.4) ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(0) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - re^{-i\varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) \frac{re^{-i\varphi} + \bar{z}}{re^{-i\varphi} - \bar{z}} d\varphi. \end{aligned}$$

và do đó ta có

$$(2.7) \quad \frac{1}{2}\overline{f(0)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\varphi})} \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

Cộng (2.5) và (2.7) ta được

$$f(z) - \frac{1}{2}(f(0) - \overline{f(0)}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(re^{i\varphi}) + \overline{f(re^{i\varphi})}] \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi$$

hay

$$f(z) - iv(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

Từ đó ta được điều phải chứng minh.  $\square$

**2.8 Nhận xét.** Công thức Schwarz cho phép ta xác định hàm giải tích  $f(z)$  trên hình tròn  $B(0, r)$  khi biết giá trị của hàm phần thực của nó trên biên là đường tròn  $|z| = r$  và giá trị hàm phần ảo tại  $O$ .

**2.9 Định lý. (Công thức Poisson)** *Giả sử  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , với  $z = x + iy$ , là hàm liên tục trên  $\bar{B}(0, r)$  giải tích trên  $B(0, r)$ . Khi đó, ta có công thức*

$$(2.10) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi$$

và

$$(2.11) \quad u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} d\varphi$$

với  $0 < \rho < r$ .

*Chứng minh.* Từ công thức Schwarz ta có

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[ u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z} \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{\operatorname{Re}(re^{i\varphi} + z)(re^{-i\varphi} - \bar{z})}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Khi  $z = \rho e^{i\theta}$  ta có  $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ ,  $|z| = \rho$  và

$$\begin{aligned} |re^{i\varphi} - \rho e^{i\theta}|^2 &= (r \cos \varphi - \rho \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi - \rho \sin \theta)^2 \\ &= r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2. \end{aligned}$$

Từ đó thay vào công thức (2.10) ta được công thức (2.11).  $\square$

## Bài tập

1) Chứng minh rằng có thể viết công thức Schwarz dưới dạng

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{u(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(0).$$

Gợi ý: Dùng đẳng thức  $\frac{\xi + z}{\xi(\xi - z)} = \frac{2}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}$ .

2) Từ công thức tích phân Poisson hãy chứng minh

$$(a) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi = 1$$

$$(b) \quad u(r, \varphi) - u(R, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(R, \theta) - u(R, \theta_0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

(c) Nếu  $|u(R, \theta) - u(R, \theta_0)| < \varepsilon$  đối với  $|\theta - \theta_0| < \varphi$  thì

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| < \alpha} |u(R, \theta) - u(R, \theta_0)| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta < \varepsilon.$$

3) Chứng minh rằng nếu  $f(z)$  chỉnh hình trong hình tròn xác định bởi  $|z| < 1$  và  $f(\alpha) = 0$  với  $|\alpha| < 1$  và  $|f(z)| \leq 1$  thì với  $|z| \leq 1$  ta có  $|f(z)| \leq \left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|$ .

## § 3 Bài toán Dirichlet

**3.1 (Bài toán Dirichlet)** Cho một miền đơn liên  $D$  trong  $\mathbb{R}^2$  với biên  $\partial D$  là một đường cong Jordan. Giả sử trên  $\partial D$  cho hàm liên tục  $u$ . Hãy tìm một thác triển điều hòa của  $u$  tới  $D$ . Nói cách khác, tìm hàm liên tục trên  $\bar{D}$  điều hòa trong  $D$  sao cho hạn chế của nó trên  $\partial D$  là  $u$ .

Bài toán Dirichlet này tồn tại nghiệm và là nghiệm duy nhất. Tuy nhiên, để đơn giản ta chỉ xét trường hợp  $D$  là hình tròn, và ta có định lý sau.

**3.2 Định lý.** *Đối với mọi hàm  $u$  liên tục trên biên  $\partial B(0, R)$  (là đường tròn có phương trình  $|z| = R$ ) của hình tròn  $B(0, R)$  tồn tại duy nhất hàm liên tục  $h$  trên  $\bar{B}(0, R)$  và điều hòa trong  $B(0, R)$  sao cho  $h|_{\partial B(0, R)} = u$ .*

*Chứng minh.* Đầu tiên ta chứng tỏ rằng nếu bài toán Dirichlet có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Thật vậy, giả sử  $h_1$  và  $h_2$  là hai nghiệm của bài toán Dirichlet. Khi đó, hàm  $v = h_1 - h_2$  liên tục trên  $\bar{B}(0, R)$ , điều hòa trên  $B(0, R)$  và bằng không trên  $\partial B(0, R)$ . Do  $\bar{B}(0, R)$  là tập compact nên  $v$  tồn tại giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên  $\bar{B}(0, R)$ . Nếu giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $v$  trên  $\bar{B}(0, R)$  đạt được trên biên  $\partial B(0, R)$ , thì rõ ràng  $v_{\max} = v_{\min} = 0$ , suy ra  $v = 0$  hay  $h_1 = h_2$  trên  $\bar{B}(0, R)$ . Nếu giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất đạt được trong  $B(0, R)$ , thì theo Định lý 1.12 ta có  $h$  là hàm hằng trên  $B(0, R)$ . Mặt khác, do  $v$  liên tục trên  $\bar{B}(0, R)$  và  $v|_{\partial B(0, R)} = 0$  (lấy  $z_0 \in \partial B(0, R)$  ta có  $0 = v(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < R}} v(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ |z| < R}} \text{const} = \text{const}$ )

nên suy ra  $v \equiv 0$  hay  $h_1 = h_2$  trên  $\bar{B}(0, R)$ .

Để tiện việc chứng minh ta ký hiệu  $D = B(0, R)$ ,  $C_R$  là đường tròn  $|z| = R$  được định hướng dương và ta đồng nhất  $\mathbb{R}^2$  với  $\mathbb{C}$ . Vậy hàm  $u$  liên tục trên đường tròn  $C_R$ . Đối với mỗi điểm  $z \in D$  đặt

$$(3.3) \quad \hat{u}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi.$$

Theo Định lý 1.9 và Định lý 2.9 công thức trên chính là công thức Poisson khi  $\hat{u}$  là hàm điều hòa và  $\hat{u}|_{C_R} = u$ . Thật sự hàm  $\hat{u}$  là hàm điều hòa. Ta có

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\xi + z}{\xi - z} \quad \text{với } \xi = Re^{i\varphi}.$$

Do đó,  $\hat{u}$  là hàm phần thực của hàm

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi(\xi - z)} d\xi.$$

Do  $u(\xi) \frac{\xi + z}{\xi(\xi - z)}$  liên tục trên đường tròn định hướng dương  $C_R$  nên theo tích phân loại Cauchy ta có hàm  $f(z)$  giải tích trên  $D$ . Do đó, ta có hàm  $\hat{u}$  điều hòa trên  $D$ . Ta chỉ còn kiểm tra lại rằng

$$(3.4) \quad u(\xi) = \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in D}} \hat{u}(z) \quad \text{với mỗi } |\xi| = R$$

Trước hết ta tính được

$$\int_{C_R} \frac{\xi + z}{\xi(\xi - z)} d\xi = 2\pi i \left( \frac{z}{-z} + \frac{2z}{z} \right) = 2\pi i$$

Do đó

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi}(Re^{i\varphi} - z)} Re^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi.$$

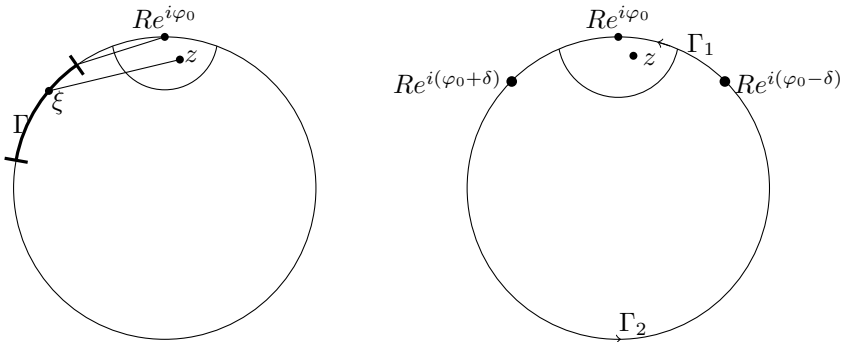
Từ đó ta có

$$(3.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + z}{Re^{i\varphi} - z} d\varphi = 1.$$

Bên cạnh đó với  $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$  bất kỳ ta có

$$(3.6) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Re^{i\varphi_0} \\ z \in D}} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} = 0 \quad \text{với } Re^{i\varphi} \neq Re^{i\varphi_0}$$

Thật sự giới hạn trên là đều theo  $Re^{i\varphi} \in \Gamma \subset C_R$  với  $\Gamma$  là cung bất kỳ trên  $C_R$  không là lân cận của  $Re^{i\varphi_0}$ . Thật vậy khi đó  $d(Re^{i\varphi_0}, \Gamma) > 0$  và chọn  $0 < \delta < \frac{1}{2}d(Re^{i\varphi_0}, \Gamma)$ ; khi đó với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - Re^{i\varphi_0}| < \delta$  ta có  $|\xi - z| \geq |\xi - Re^{i\varphi_0}| - |z - Re^{i\varphi_0}| > d(Re^{i\varphi_0}, \Gamma) - \delta > \frac{1}{2}d(Re^{i\varphi_0}, \Gamma)$  với mọi  $\xi \in \Gamma$ .



Hình VI.1:

Từ (3.3) và (3.5) ta có

$$\begin{aligned}\hat{u}(z) - u(Re^{i\varphi_0}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &\quad - u(Re^{i\varphi_0}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})] \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi\end{aligned}$$

Cho trước  $\varepsilon > 0$  bất kỳ. Do tính liên tục của  $u(Re^{i\varphi})$  tại  $Re^{i\varphi_0}$  ta tìm được  $\delta > 0$  sao cho khi  $|\varphi - \varphi_0| < 2\delta$  ta có

$$|u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})| < \varepsilon.$$

Ký hiệu  $\Gamma_1 = \{Re^{i\varphi} \in C_R : |\varphi - \varphi_0| \leq \delta\}$  và  $\Gamma_2 = C_R \setminus \Gamma_1$ ; các cung  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  được định hướng theo  $C_R$ . Ứng với cung  $\Gamma_1$  ta có

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} [u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})] \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} |u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &< \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &< 2\pi\varepsilon\end{aligned}\quad \text{đẳng thức (3.5)}$$

Mặt khác, do giới hạn trong biểu thức (3.6) là đều đối với  $Re^{i\varphi} \in \Gamma_2$  nên tồn tại  $\delta' > 0$  sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - Re^{i\varphi_0}| < \delta'$  và mọi  $Re^{i\varphi} \in \Gamma_2$  ta có

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} < \varepsilon.$$

Do đó, với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - Re^{i\varphi_0}| < \delta'$  và ứng với cung  $\Gamma_2$  ta có

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi + \varphi_0 - \delta} [u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})] \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi + \varphi_0 - \delta} |u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \\ &< \int_0^{2\pi} 2M\varepsilon d\varphi \\ &< 4M\pi\varepsilon\end{aligned}$$



Từ các kết quả trên, với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - Re^{i\varphi_0}| < \delta'$  ta có

$$\begin{aligned} & |\hat{u}(z) - u(Re^{i\varphi_0})| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \left( \left| \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} [u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})] \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi + \varphi_0 - \delta} [u(Re^{i\varphi}) - u(Re^{i\varphi_0})] \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi \right| \right) \\ & < (1 + 2M)\varepsilon. \end{aligned}$$

Do  $\varepsilon > 0$  bất kỳ nên ta có  $\lim_{\substack{z \rightarrow Re^{i\varphi_0} \\ z \in D}} \hat{u}(z) = u(Re^{i\varphi_0})$ . Từ đó ta có được  $\hat{u}$  liên tục trên  $\bar{B}(0, R)$  và  $\hat{u}|_{C_R} = u$ . Vậy  $\hat{u}$  là hàm cần tìm.  $\square$

**3.7 Định lý.** *Hàm khả tích địa phương  $u$  trên miền  $D$  là điều hòa khi và chỉ khi*

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\{\xi: |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy$$

với mọi  $z \in D$  và mọi  $0 < r < d(z, \partial D)$  (trong đó  $\xi = (x, y)$  là biến).

*Chứng minh.* Giả sử  $u$  điều hòa trong  $D$ . Theo định lý giá trị trung bình 1.11 ta có

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi \quad \text{với } z \in D \text{ và } 0 < r < d(z, \partial D).$$

Do  $u$  là hàm điều hòa nên nó khả tích trên  $\{\xi: |\xi - z| \leq r\}$  và ta có

$$\begin{aligned} \iint_{\{\xi: |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy &= \iint_{\{(s, \varphi): 0 \leq s \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}} u(z + se^{i\varphi}) s ds d\varphi \\ &= \int_0^r s \left[ \int_0^{2\pi} u(z + se^{i\varphi}) d\varphi \right] ds \\ &= \int_0^r s 2\pi u(z) ds \\ &= \pi r^2 u(z) \end{aligned}$$

Từ đó ta có được đẳng thức cần chứng minh.

Ngược lại, đầu tiên ta kiểm tra tính liên tục của hàm  $u$  trên  $D$ . Với  $z_0 \in D$ , đặt  $2r = d(z_0, \partial D)$ . Khi đó, với  $0 < \delta < r$  ta có

$$\{\xi: |\xi - z_0| \leq r + \delta\} \subset D$$

Theo giả thiết hàm  $u$  khả tích trên  $\{\xi : |\xi - z_0| \leq r + \delta\}$  nên tồn tại  $M_\delta = \sup\{|u(\xi)| : |\xi - z_0| \leq r + \delta\}$  (rõ ràng  $M_\delta$  giảm theo  $\delta$ ). Với mọi  $|z - z_0| < \delta$  ta có  $\{\xi : |\xi - z| \leq r\} \subset \{\xi : |\xi - z_0| \leq r + \delta\}$  và

$$\begin{aligned}
 |u(z_0) - u(z)| &= \left| \frac{1}{\pi(r + \delta)^2} \iint_{\{\xi : |\xi - z_0| \leq r + \delta\}} u(\xi) dx dy \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\{\xi : |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy \right| \\
 &\leq \frac{1}{\pi(r + \delta)^2} \left| \iint_{\{\xi : |\xi - z_0| \leq r + \delta, |\xi - z| \geq r\}} u(\xi) dx dy \right| \\
 &\quad \left( \frac{1}{\pi r^2} - \frac{1}{\pi(r + \delta)^2} \right) \left| \iint_{\{\xi : |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy \right| \\
 &\leq \frac{\pi(r + \delta)^2 - \pi r^2}{\pi(r + \delta)^2} M_\delta + \frac{(r + \delta)^2 - r^2}{(r + \delta)^2} M_\delta \\
 &< \frac{4\delta M_\delta}{r} \rightarrow 0 \quad \text{khi } \delta \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Vậy với  $\varepsilon > 0$  cho trước có thể chọn được  $\delta > 0$  đủ bé sao cho với mọi  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  ta có  $|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon$ . Do đó, hàm  $u$  liên tục tại  $z_0$ . Từ đó ta kết luận được  $u$  liên tục trên  $D$  vì  $z_0$  được chọn tùy ý trong  $D$ .

Với  $z_0 \in D$  bất kỳ, hàm  $u$  liên tục trên  $D$  nên theo Định lý 3.2 tồn tại duy nhất hàm điều hòa  $h$  là thác triển của hàm  $u|_{\{z : |z - z_0| = r\}}$  (trong đó  $r > 0$  sao cho  $\bar{B}(z_0, r) \subset D$ ). Ta chứng minh  $u = h$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Do  $u$  và  $h$  liên tục trên  $\bar{B}(z_0, r)$  nên hàm  $v = u - h$  liên tục trên  $\bar{B}(z_0, r)$ , suy ra nó đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên hình tròn đóng đó. Giả sử cả hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất ấy đạt được trên đường tròn  $|z - z_0| = 0$ ; từ đó suy ra  $v_{\max} = 0 = v_{\min}$  (hàm  $v$  bằng 0 trên đường tròn ấy). Do đó,  $v = 0$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  hay  $h(z) = u(z)$  với mọi  $z \in \bar{B}(z_0, r)$ .

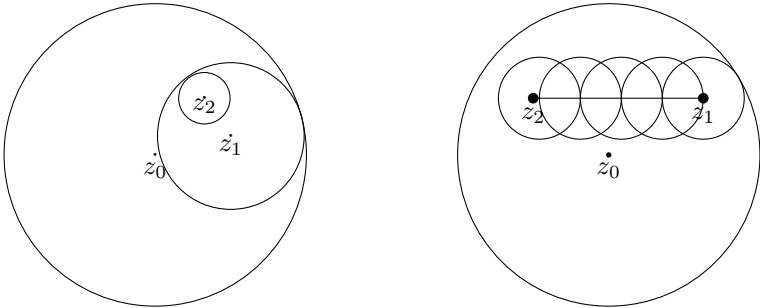
Giả sử một trong hai giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của  $v$  đạt được trong  $B(z_0, r)$ ; nhưng do khi cần ta xét  $-v$  thay cho  $v$  nên ta giả sử  $v$  đạt giá trị lớn nhất trong  $B(z_0, r)$  tại  $z_1$ . Ta cần chứng minh  $v = 0$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Giả sử điều đó không đúng; nghĩa là tồn tại  $z_2 \in B(z_0, r)$  sao cho  $v(z_2) < v(z_1)$ . Đặc biệt, nếu  $z_2 \in B(z_1, r_1)$  với  $r_1 = r - |z_1 - z_0|$ . Khi đó,  $0 < r_2 = r_1 - |z_2 - z_1|$  và  $B(z_2, r_2) \subset B(z_1, r_1) \subset B(z_0, r)$ . Từ giả thiết đối với hàm  $u$  và chiều thuận đối với hàm  $h$  ta dễ dàng suy ra được đẳng

thức tích phân của định lý vẫn đúng đối với hàm  $v$ ; do đó ta có

$$\begin{aligned}
 v(z_1) &= \frac{1}{\pi r_1^2} \iint_{\bar{B}(z_1, r_1)} v(\xi) dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi r_1^2} \iint_{\bar{B}(z_1, r_1) \setminus \bar{B}(z_2, r_2)} v(\xi) dx dy + \frac{1}{\pi r_1^2} \iint_{\bar{B}(z_2, r_2)} v(\xi) dx dy \\
 &\leq \frac{1}{\pi r_1^2} v(z_1) (\pi r_1^2 - \pi r_2^2) + \frac{1}{\pi r_1^2} \pi r_2^2 v(z_2) \\
 &< v(z_1)
 \end{aligned}$$

vô lý. Vậy ta không thể có  $z_2 \in B(z_1, r_1)$ . Với chứng minh này ta thật sự có kết quả sau: với mỗi  $r' > 0$  sao cho  $B(z_1, r') \subset B(z_0, r)$  ta có  $v(z) = v(z_1)$  với mọi  $z \in \bar{B}(z_1, r')$ .

Ta trở lại trường hợp  $z_2 \notin B(z_1, r_1)$ . Ta nối  $z_1$  với  $z_2$  và đặt  $r' = \min\{r - |z_1 - z_0|, r - |z_2 - z_0|\}$ . Khi đó, mọi đường tròn có tâm nằm trên đoạn nối  $z_1$  và  $z_2$  có bán kính  $r'$  đều nằm trong hình tròn  $B(z_0, r)$ . Đầu tiên ta tìm giao điểm  $w_1$  giữa đường tròn tâm  $|z - z_1| = r'$  với đoạn  $z_1 z_2$ . Khi đó, từ nhận xét trên ta suy ra được  $v(w_1) = v(z_1)$ . Nếu đường tròn tâm  $w_1$  bán kính  $r'$  chứa  $z_2$  thì ta gặp mâu thuẫn như trên. Nếu  $z_2$  không nằm trong hình tròn  $B(w_1, r')$  thì tiếp tục xét tròn tâm  $w_2$  bán kính  $r'$  (với  $w_2$  là giao điểm, khác với  $z_1$ , của đường tròn  $|z - w_1| = r'$  với đoạn  $z_1 z_2$ ). Tiếp tục quá trình này sau hữu hạn bước ta nhận được điểm  $z_2$  nằm trong đường tròn tâm  $w_n$  bán kính  $r'$  trong đó  $v(z_2) < v(z_1) = v(w_n)$ . Như vậy, ta gặp phải mâu thuẫn như lý luận trên.



Hình VI.2:

Vậy không tồn tại  $z_2 \in B(z_0, r)$  sao cho  $v(z_2) < v(z_1)$ , nghĩa là  $v$  phải là hàm hằng trên  $B(z_0, r)$ . Hơn nữa, do tính liên tục của  $v$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$

nên  $v$  là hàm hằng (suy ra  $v = 0$ ) trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Vậy  $u = h$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Nghĩa là  $u$  là hàm điều hòa trên  $B(z_0, r)$  cụ thể là tại  $z_0$ . Vậy  $u$  là hàm điều hòa trên  $D$  do  $z_0 \in D$  tùy ý.  $\square$

**3.8 Định lý.** *Hàm thực liên tục  $u$  trên miền  $D$  là điều hòa nếu và chỉ nếu  $u$  có tính chất giá trị trung bình*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi,$$

với mọi  $z \in D$  và mọi  $0 < r < d(z, \partial D)$ .

*Chứng minh.* Do Định lý 1.11 nên chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Do  $u$  là hàm liên tục nên nó khả tích trên  $\{\xi : |\xi - z| \leq r\}$  và ta có

$$\begin{aligned} \iint_{\{\xi : |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy &= \iint_{\{(s, \varphi) : 0 \leq s \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}} u(z + se^{i\varphi}) s ds d\varphi \\ &= \int_0^r s \left[ \int_0^{2\pi} u(z + se^{i\varphi}) d\varphi \right] ds \\ &= \int_0^r s 2\pi u(z) ds \\ &= \pi r^2 u(z) \end{aligned}$$

Do đó, với mọi  $0 < r < d(z, \partial D)$  ta có

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\{\xi : |\xi - z| \leq r\}} u(\xi) dx dy.$$

Do đó, theo Định lý 3.7 ta có  $u$  là hàm điều hòa trên  $D$ .  $\square$

## § 4 Nguyên lý Harnack

**4.1 Bất đẳng thức Harnack.** Chúng ta nhắc lại rằng công thức Poisson cho phép chúng ta biểu diễn hàm điều hòa qua giá trị của nó trên đường tròn. Ta viết lại (2.10) như sau

$$(4.2) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} d\varphi$$

trong đó  $|z| < r$  và hàm  $u$  điều hòa trên  $\bar{B}(0, r)$ . Ta có bất đẳng thức

$$(r - |z|)^2 \leq |re^{i\varphi} - z|^2 \leq (r + |z|)^2$$

suy ra

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \leq \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{r + |z|}{r - |z|}$$

trong đó  $|z| < r$ . Đặc biệt trong trường hợp  $u(z) \geq 0$  với mọi  $z \in B(0, r)$  từ (4.2) ta được

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) d\varphi \leq u(z) \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

Theo Định lý 1.11 ta suy ra được

$$(4.3) \quad \frac{r - |z|}{r + |z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} u(0) \quad \text{với mọi } |z| < r.$$

Bất đẳng thức này được gọi là **bất đẳng thức Harnack**.

**4.4 Định lý. (Harnack)** *Giả sử  $u$  là giới hạn của dãy không giảm các hàm điều hòa  $\{u_k\}$  trên miền  $D$ . Khi đó, hoặc  $u$  là điều hòa hoặc  $u = \infty$ . Trong trường hợp  $u = \infty$ , dãy  $\{u_k\}$  tăng đều trên mọi tập compact trong  $D$  tới  $\infty$ .*

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh nếu dãy  $\{u_k\}$  hội tụ tại  $z_0 \in D$  thì nó hội tụ đều trên mọi hình tròn đóng  $\bar{B}(z_0, \rho) \subset D$ . Khi đó,  $\rho < d(z_0, \partial D)$ , cho nên tồn tại  $\rho < r < d(z_0, \partial D)$ . Suy ra  $B(z_0, r) \subset D$ . Với mọi  $m > n$  ta có  $u_m - u_n \geq 0$ . Theo bất đẳng thức Harnack cho hàm điều hòa  $u_m - u_n$  đối với hình tròn  $B(z_0, r)$  ta có

$$0 \leq u_m(z) - u_n(z) \leq \frac{r + |z - z_0|}{r - |z - z_0|} (u_m(z_0) - u_n(z_0))$$

với mọi  $|z - z_0| < r$ . Khi đó, với mọi  $z \in \bar{B}(z_0, \rho)$  ta có  $|z - z_0| < \rho$  và

$$0 \leq u_m(z) - u_n(z) \leq \frac{r + \rho}{r - \rho} (u_m(z_0) - u_n(z_0)).$$

Vì dãy  $\{u_n(z_0)\}$  hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy dãy hàm  $\{u_n(z)\}$  hội tụ đều trên  $\bar{B}(z_0, \rho)$ .

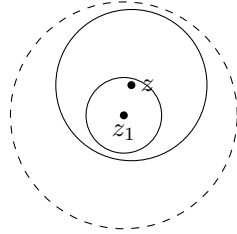
Nếu cần ta thay dãy đang xét bởi dãy  $\{u_k - u_1\}$  cho nên có thể xem  $u_1 \geq 0$ . Do đó,  $u \geq 0$  trên  $D$ . Theo Định lý 3.7 và định lý đơn điệu hội tụ Lebesgue ta có

$$u(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\bar{B}(z, r)} u_k(\xi) dxdy = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\bar{B}(z, r)} u(\xi) dxdy$$

với mọi  $z \in D$  và mọi  $0 < r < d(r, \partial D)$ , và tích phân cuối là tích phân Lebesgue. Như vậy, nếu  $u(z) < \infty$  với mọi  $z \in \Omega$  thì theo kết quả phần đầu dãy hàm đã cho hội tụ đều trên mọi hình tròn đóng nằm trong  $D$ . Do đó, hàm  $u$  liên tục trên  $D$  và dĩ nhiên  $u$  khả tích địa phương với tích phân cuối trong đẳng thức trên trở thành tích phân Riemann thông thường. Khi đó, theo Định lý 3.7 ta được hàm  $u$  điều hòa trên  $D$ .

Giả sử  $\Omega = \{z \in D : u(z) = \infty\} \neq \emptyset$ . Lấy  $z_1 \in \Omega$  và đặt  $3\rho = d(z_1, \partial D)$ . Theo kết quả trên ta có (lưu ý tích phân trong phần này là tích phân Lebesgue)

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{\bar{B}(z_1, \rho)} u(\xi) dxdy = u(z_1) = \infty.$$



Rõ ràng với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_1| < \rho$  ta có  $\bar{B}(z_1, \rho) \subset \bar{B}(z, 2\rho)$  và  $u \geq 0$ , cho nên ta có

$$u(z) = \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{\bar{B}(z, 2\rho)} u(\xi) dxdy \geq \frac{1}{4\pi \rho^2} \iint_{\bar{B}(z_1, \rho)} u(\xi) dxdy = \infty.$$

Vậy  $u(z) = \infty$ , suy ra  $z \in \Omega$ . Do đó, ta được  $B(z_1, \rho) \subset \Omega$ , hay  $\Omega$  là tập mở. Lấy  $z \in \partial\Omega \cap D$  tùy ý. Khi đó, với  $r$  đủ nhỏ ta có  $\bar{B}(z, r) \subset D$  và  $\bar{B}(z, r) \cap \Omega$  có độ đo dương và hàm  $u$  nhận giá trị  $\infty$  trên đó. Vậy ta có

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\bar{B}(z, r)} u(\xi) dxdy \geq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\bar{B}(z, r) \cap \Omega} u(\xi) dxdy = \infty,$$

cho nên  $u(z) = \infty$  suy ra  $z \in \Omega$ . Do đó,  $\Omega$  đóng trong  $D$ . Do  $D$  liên thông cho nên ta phải có  $\Omega = D$ . Vậy  $u = \infty$  trên  $D$ .

Hơn nữa, ta có dãy hàm  $\{u_k\}$  hội tụ đều về  $\infty$  trên mỗi hình tròn đóng nằm trong  $D$ . Thật vậy, xét  $\bar{B}(z_0, \rho) \subset B(z_0, r) \subset D$ , trong đó  $0 < \rho < r$ . Theo bất đẳng thức Harnack cho hàm  $u_n$  trong hình tròn  $B(z_0, r)$  ta có

$$u_n(z) \geq \frac{r - |z - z_0|}{r + |z - z_0|} u_n(z_0) \quad \text{với mọi } |z - z_0| < r.$$

Khi đó, với mọi  $z \in B(z_0, \rho)$  ta có  $|z - z_0| < \rho$  và

$$u_n(z) \geq \frac{r - \rho}{r + \rho} u_n(z_0).$$

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_0) = \infty$  nên suy ra  $\{u_n\}$  hội tụ đều về  $\infty$  trên  $\bar{B}(z_0, \rho)$ . Với  $K \subset D$  là tập compact bất kỳ, ta có  $d(K, \partial D) > 0$ . Từ định nghĩa tập compact và kết quả vừa được chứng minh ta dễ dàng suy ra được dãy  $\{u_n\}$  hội tụ đều về  $\infty$  trên  $K$  (chứng minh chi tiết xin dành cho bạn đọc xem như bài tập).  $\square$

## Bài tập

1) Cho hàm  $u$  liên tục trên  $\bar{B}(z_0, r)$  và điều hòa trên  $B(z_0, r)$ . Chứng minh rằng với mọi  $z \in B(z_0, r)$  ta luôn có

$$(4.5) \quad \frac{r - \rho}{r + \rho} u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{r + \rho}{r - \rho} u(z_0) \quad \text{trong đó } \rho = |z - z_0| < r.$$

2) Trình bày chứng minh dãy  $\{u_k\}$  hội tụ đều về  $\infty$  trên tập compact  $K \subset D$  trong Định lý 4.4.

## § 5 Hàm điều hòa dưới

**5.1 Định nghĩa.** Hàm  $u : D \rightarrow [-\infty, \infty]$  gọi là **nửa liên tục trên** nếu

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|z - z_0| < \delta} u(z) = u(z_0) \quad \text{với mọi } z_0 \in \Omega$$

Một cách tương đương,  $u^{-1}([-\infty, a])$  là mở với mọi  $-\infty < a < \infty$ .

Từ định nghĩa ta thấy được rằng hàm  $u$  liên tục trên  $D$  khi và chỉ khi  $u$  và  $-u$  nửa liên tục trên trên  $D$ .

**5.2 Định nghĩa.** Hàm  $u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$  được gọi là **điều hòa dưới** nếu

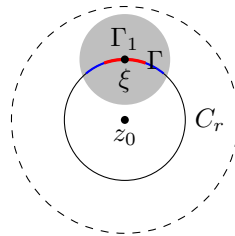
- (a)  $u$  nửa liên tục trên
- (b) Với mọi  $z_0 \in D$  tồn tại  $0 < r < d(z_0, \partial D)$  sao cho nếu  $h$  là hàm điều hòa trên  $B(z_0, \delta)$  và liên tục trên  $\bar{B}(z_0, \delta)$  với  $0 < \delta \leq r$  mà  $h \geq u$  trên  $\partial B(z_0, \delta)$  thì  $h \geq u$  trên  $B(z_0, \delta)$ .

Ta nhận thấy từ định nghĩa hàm điều hòa dưới và kết quả của Định lý 3.2 rõ ràng mọi hàm điều hòa là điều hòa dưới.

**5.3 Định lý.** Nếu hàm  $u$  điều hòa dưới trên miền  $D$  và đạt giá trị lớn nhất trong  $D$  thì  $u$  là hàm hằng.

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại  $z_0 \in D$  để  $u(z_0) \geq u(z)$  với mọi  $z \in D$ , nghĩa là hàm  $u$  đạt giá trị lớn nhất tại  $z_0$ . Giả sử hàm  $u$  không là hàm hằng trên bất cứ  $\varepsilon$ -lân cận nào của  $z_0$ . Khi đó, với  $\rho = d(z_0, \partial D) > 0$  hàm  $u$  không là hàm hằng trên  $B(z_0, \rho)$  nghĩa là tồn tại  $\xi \in B(z_0, \rho)$  sao cho  $u(\xi) < u(z_0)$ . Khi đó, tồn tại  $\varepsilon > 0$  sao cho  $u(\xi) < u(z_0) - \varepsilon$ . Do hàm  $u$  nửa liên tục trên trên  $D$  nên tập  $u^{-1}([-\infty, u(z_0) - \varepsilon])$  mở và  $\xi \in u^{-1}([-\infty, u(z_0) - \varepsilon])$ . Do đó, tồn tại  $0 < \delta < \min\{r, \rho - r\}$  với  $r = |\xi - z_0|$  sao cho  $B(\xi, \delta) \subset u^{-1}([-\infty, u(z_0) - \varepsilon])$ , nghĩa là với mọi  $z \in B(\xi, \delta)$  ta có  $u(z) < u(z_0) - \varepsilon$ .

Lấy  $\Gamma$  là một cung trên đường tròn  $C_r$  có phương trình  $|z - z_0| = r$  chứa  $\xi$  và nằm trong hình tròn  $B(\xi, \delta)$ . Lấy cung nhỏ  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  cũng chứa  $\xi$ . Như trong hình vẽ minh họa điểm  $\xi$  là trung điểm của cả hai cung  $\Gamma$  và  $\Gamma_1$ . Ta xây dựng được hàm liên tục  $h$  trên  $C_r$  thỏa  $h(z) = u(z_0) - \varepsilon$  với mọi  $z \in \Gamma_1$ ,  $h(z) = u(z_0)$  với mọi  $z \in C_r \setminus \Gamma$



Hình VI.4:



và  $h(z)$  phụ thuộc tuyến tính vào  $\arg(z - z_0)$  với mọi  $z \in \Gamma \setminus \Gamma_1$  (xem bài tập). Vậy do cách xây dựng và các kết quả trên ta có  $h(z) \leq u(z)$  với mọi  $z \in C_r$ . Mặt khác, theo Định lý 3.2 hàm  $h$  được thác triển thành hàm điều hòa trên  $B(z_0, r)$ . Từ đó theo định nghĩa của hàm điều hòa dưới cho hàm  $u$  ta suy ra được  $u(z_0) \leq h(z_0)$ . Tuy nhiên, theo Định lý 1.11 và cách xây dựng hàm  $h$  trên  $C_r$  ta có

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0) d\varphi = u(z_0).$$

Vậy ta gặp phải mâu thuẫn. Do đó, phải tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  sao cho  $u$  là hàm hằng trên  $B(z_0, \varepsilon)$ . Phần còn lại của phép chứng minh lập luận hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý nguyên lý modulus cực đại trang 179 (dành cho bạn đọc xem như bài tập).  $\square$

**5.4 Định lý.** Nếu hàm  $u$  điều hòa dưới trên  $D$  và miền  $G$  thỏa  $\bar{G} \subset D$  thì với mọi hàm  $h$  liên tục trên  $\bar{G}$  điều hòa trong  $G$  mà  $h \geq u$  trên  $\partial G$  thì  $h \geq u$  trên  $G$ .

*Chứng minh.* Đặt  $v = u - h$ . Từ tính chất của hàm liên tục và hàm nửa liên tục trên ta nhận thấy hàm  $v$  nửa liên tục trên ở trên  $\bar{G}$  và vì vậy nó đạt cực đại trên  $\bar{G}$  với giá trị cực đại là  $M$ . Đặt  $\Omega = \{z \in G : v(z) = M\}$ . Mặt khác, cũng từ tính chất của hàm điều hòa dưới và hàm điều hòa ta có hàm  $v$  điều hòa dưới trên  $G$ . Nếu  $z \in \Omega$  thì theo chứng minh Định lý 5.3 tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận của  $z$  sao cho hàm  $v$  là hằng trên  $B(z, \varepsilon)$ , nghĩa là  $B(z, \varepsilon) \subset \Omega$ . Vậy  $\Omega$  là tập mở.

Nếu  $z' \in G \setminus \Omega$  thì  $v(z') < M$ . Do  $v$  nửa liên tục trên ở trên  $\bar{G}$  nên  $v^{-1}([-\infty, M))$  mở trong  $\bar{G}$  và nó chứa  $z'$ . Khi đó, tồn tại  $\delta' > 0$  sao cho  $B(z', \delta') \cap \bar{G} \subset v^{-1}([-\infty, M))$ . Vậy với mọi  $z \in B(z', \delta') \cap \bar{G}$  ta có  $v(z) < M$  nên suy ra  $B(z', \delta') \cap \bar{G} \subset \bar{G} \setminus \Omega$ . Vậy  $\Omega$  là tập đóng trong  $\bar{G}$ . Như vậy, ta đã chứng minh được  $\Omega$  vừa là tập đóng vừa là tập mở trong miền đóng  $\bar{G}$ . Do đó, ta có hoặc  $\Omega = \emptyset$  hoặc  $\Omega = G$ .

Nếu  $\Omega = \emptyset$  thì giá trị  $M$  đạt được trên  $\partial G$ . Do đó, theo giả thiết ta suy ra được  $M \leq 0$ .

Ngược lại nếu  $C = G$  do  $G$  thì  $v \equiv M$  là hàm hằng trên  $G$ . Giả sử tồn tại  $z_0 \in \partial G$  sao cho  $v(z_0) < M$ . Do  $v$  nửa liên tục trên ở trên  $\bar{G}$  nên  $v^{-1}([-\infty, M))$  mở trong  $\bar{G}$  và chứa  $z_0$ . Do đó, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $B(z_0, \delta) \cap \bar{G} \subset v^{-1}([-\infty, M))$ . Mặt khác, do  $z_0 \in \partial G$  nên tồn tại  $z_1 \in G \cap B(z_0, \delta)$ . Khi đó, ta gặp phải mâu thuẫn  $v(z_1) = M$  (do  $z_1 \in G$ )

và  $v(z_1) < M$  (do  $z_1 \in v^{-1}([-\infty, M))$ ). Vậy  $v \equiv M$  trên  $\partial G$ . Suy ra  $v \equiv M$  trên  $\bar{G}$ . Vì thế ta phải có  $M \leq 0$ .

Vậy ta luôn có  $M \leq 0$  hay  $u \leq h$  trên  $G$ .  $\square$

Hàm  $h$  trong định lý trên được gọi là **chặn trên điều hòa** của hàm  $u$  đối với miền  $G$ .

**5.5 Định lý.** *Nếu hàm  $u$  điều hòa dưới trên miền  $D$  và tại một điểm  $z_0$  nào đó trong miền  $G$  thỏa  $\bar{G} \subset D$  trùng với hàm chặn trên điều hòa  $h$  của  $u$  đối với  $G$  thì  $u = h$  trong  $G$ .*

*Chứng minh.* Cũng như trong chứng minh định lý trên hàm  $v = u - h$  điều hòa dưới ở trên  $G$  và  $v(z) \leq 0$  với mọi  $z \in G$ . Vậy hàm  $v$  đạt giá trị lớn nhất là 0 tại  $z_0 \in G$ . Do đó, tập  $\Omega = \{z \in G : v(z) = 0\} \neq \emptyset$ . Theo chứng minh định lý trên ta phải có  $\Omega = G$ , nghĩa là  $v(z) = 0$  với mọi  $z \in G$  hay  $u(z) = h(z)$  trên  $G$ .  $\square$

**5.6 Định lý.** *Giả sử  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  là họ các hàm điều hòa dưới trong  $D$  sao cho  $u(z) = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(z) < \infty$  với mọi  $z \in D$ . Nếu  $u$  nửa liên tục trên thì  $u$  điều hòa dưới.*

*Chứng minh.* Với  $z_0 \in D$ , với  $0 < r < d(z_0, \partial D)$  sao cho  $\bar{B}(z_0, r) \subset D$  và tồn tại hàm liên tục  $h$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  điều hòa trên  $B(z_0, r)$  thỏa  $u(z) \leq h(z)$  với mọi  $|z - z_0| = r$ . Do  $u(z) = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$  với mọi  $z \in D$  nên  $u(z) \geq u_\alpha(z)$  với mọi  $z \in D$  và mọi  $\alpha \in A$ . Vậy  $u_\alpha(z) \leq h(z)$  với mọi  $\alpha \in A$  và mọi  $|z - z_0| = r$ . Mặt khác, do  $u_\alpha$  là các hàm điều hòa dưới và theo Định lý 5.4 nên ta có  $u_\alpha(z) \leq h(z)$  với mọi  $z \in B(z_0, r)$  và mọi  $\alpha \in A$ . Suy ra  $u(z) \leq h(z)$  với mọi  $z \in B(z_0, r)$ . Vậy  $u$  là hàm điều hòa dưới trên  $D$ .  $\square$

## Bài tập

- 1) Chứng minh rằng hàm  $u$  liên tục trên  $D$  khi và chỉ khi  $u$  và  $-u$  nửa liên tục trên trên  $D$ .
- 2) Chứng minh rằng nếu các hàm  $u_1$  và  $u_2$  nửa liên tục trên trên  $D$  thì  $u_1 + u_2$  cũng nửa liên tục trên trên  $D$ .
- 3) Chứng minh rằng nếu  $u$  là hàm điều hòa dưới và  $v$  là hàm điều hòa trên  $D$  thì  $u + v$  là hàm điều hòa dưới trên  $D$ .

4) Cho đường tròn  $C_R$  có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  $\Gamma$  và  $\Gamma_1$  là các cung trên đường tròn  $C_R$  có biểu diễn tham số lần lượt là  $\gamma(t) = Re^{it}$  với  $\varphi_1 \leq t \leq \varphi_2$  và  $\gamma_1(t) = Re^{it}$  với  $\varphi_3 \leq t \leq \varphi_4$  trong đó  $0 < \varphi_1 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_2 < 2\pi$ . Hãy biểu diễn một hàm liên tục  $h$  trên  $C_R$  thỏa  $h(z) = a$  với mọi  $z \in \Gamma_1$  và  $h(z) = b$  với mọi  $z \in C_R \setminus \Gamma$  trong đó  $a \neq b$ .

5) Hoàn thành việc chứng minh hàm  $u$  là hàm hằng trên  $D$  trong Định lý 5.3.

## § 6 Tiêu chuẩn điều hòa dưới

**6.1 Định lý.** *Để hàm nửa liên tục trên  $u : D \rightarrow [-\infty, \infty)$  điều hòa dưới cần và đủ là*

$$(6.2) \quad u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

với mọi  $z \in D$  và mọi  $0 < r < d(z, \partial D)$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $u$  là hàm điều hòa dưới trên  $D$ , giả sử  $z \in D$  và  $0 < r < d(z, \partial D)$ . Với mỗi  $k$  đặt

$$u_k(\xi) = \max_{|\xi' - z| = r} \{u(\xi') - k|\xi - \xi'|\}.$$

Khi đó,  $u_k$  là các hàm liên tục trên  $C_r$ ,  $|\xi - z| = r$ , và  $u_k \searrow u$ . Thật vậy, rõ ràng dãy  $\{u_k\}$  là dãy giảm. Khi  $\xi, \xi' \in C_r$  ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u(\xi') - k|\xi - \xi'|) = \begin{cases} u(\xi) & \text{khi } \xi' = \xi \\ -\infty & \text{khi } \xi' \neq \xi \end{cases}$$

Do đó, ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) = u(\xi)$  với mọi  $\xi \in C_r$ . Theo Định lý 3.2 gọi  $h_k$  là thác triển điều hòa của hàm  $u_k$  lên  $B(z, r)$ . Bởi vì  $u_{k+1} \leq u_k$  trên  $C_R$  nên với mọi  $\xi = z + \rho e^{i\varphi} \in B(z, r)$  ta suy ra

$$\begin{aligned} h_{k+1}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{k+1}(z + re^{i\varphi}) \frac{r^2 - |\xi - z|^2}{|re^{i\varphi} - (\xi - z)|^2} d\varphi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{i\varphi}) \frac{r^2 - |\xi - z|^2}{|re^{i\varphi} - (\xi - z)|^2} d\varphi \\ &= h_k(\xi) \end{aligned}$$

Vậy  $h_{k+1} \leq h_k$  trên  $\bar{B}(z, r)$ . Do đó, ta xác định được hàm  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$  trên  $\bar{B}(z, r)$ . Hơn nữa, áp dụng định lý Harnack đối với dãy hàm điều hòa  $\{-h_k\}$  ta suy ra được hoặc hàm  $h$  điều hòa trên  $B(z, r)$  hoặc  $h \equiv -\infty$  trên  $B(z, r)$ . Mặt khác, từ định lý giá trị trung bình ta có

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Theo định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue ta lấy giới hạn hai vế thu được

$$h(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Bên cạnh đó, do  $u \leq u_k$  trên  $C_r$  với mọi  $k$  nên  $u \leq h_k$  trên  $C_r$  với mọi  $k$ . Từ tính điều hòa dưới của  $u$  và các hàm  $h_k$  điều hòa trên  $B(z, r)$  nên ta suy ra  $u \leq h_k$  trên  $B(z, r)$  với mọi  $k$ . Cụ thể tại  $z$  ta có  $u(z) \leq h_k(z)$  với mọi  $k$ . Do đó, ta được

$$u(z) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(z) = h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Ngược lại, giả sử  $u$  nửa liên tục trên ở trên  $D$  và thỏa điều kiện (6.2). Cho  $\bar{B}(z_0, r) \subset D$  và  $h$  là hàm liên tục trên  $\bar{B}(z_0, r)$  điều hòa trên  $B(z, r)$

thỏa  $u \leq h$  trên  $C_r$ ,  $|z - z_0| = r$ . Khi đó, hàm  $v = u - h$  nửa liên tục trên ở trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Mặt khác, theo điều kiện (6.2) và định lý giá trị trung bình đối với hàm điều hòa ta có

$$u(z) - h(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

hay

$$v(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

trong đó  $z \in B(z_0, r)$  và  $0 < \rho < r - |z - z_0|$ . Từ kết quả này và tính nửa liên tục trên của  $v$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  và tương tự như cách chứng minh Định lý 5.3 ta cũng thu được kết quả: nếu hàm  $v$  đạt giá trị lớn nhất trong  $B(z_0, r)$  thì nó là hàm hằng trên  $B(z_0, r)$  (phép chứng minh xin dành cho bạn đọc xem như bài tập). Ta có  $v \leq 0$  trên  $C_r$  và hàm  $v$  nửa liên tục trên ở trên  $\bar{B}(z_0, r)$  nên (như trong chứng minh Định lý 5.4 ta suy ra nếu  $v$  đạt giá trị lớn nhất trong  $\bar{B}(z_0, r)$  thì giá trị lớn nhất của  $v$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  phải nhỏ hơn hoặc bằng 0. Nếu giá trị lớn nhất của  $v$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  đạt được trên  $C_r$  thì rõ ràng giá trị lớn nhất đó nhỏ hơn hoặc bằng 0. Vậy ta luôn có giá trị lớn nhất của  $v$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$  nhỏ hơn hoặc bằng 0, suy ra  $v \leq 0$  trên  $B(z_0, r)$  hay  $u \leq h$  trên  $B(z_0, r)$ . Do đó,  $u$  là hàm điều hòa dưới.  $\square$

**6.3 Định lý.** Nếu  $f$  là hàm giải tích trên miền  $D$  thì  $\ln |f|$  điều hòa dưới trên  $D$ .

*Chứng minh.* Tính nửa liên tục trên là hiển nhiên do  $|f(z)|$  là hàm liên tục. Nếu  $z_0 \in D$  và  $f(z_0) \neq 0$  thì ta tìm được một nhánh hàm giải tích  $\log f(z)$  trong lân cận của  $z_0$ . Hơn nữa,  $\log f(z)$  có phần thực là  $\ln |f(z)|$  nên hàm  $\ln |f(z)|$  điều hòa trong lân cận này của  $z_0$ . Do đó, điều kiện thứ hai trong định nghĩa hàm điều hòa dưới thỏa tại  $z_0$ .

Nếu  $f(z_0) = 0$  thì  $\ln |f(z_0)| = -\infty$  do đó điều kiện (6.2) thỏa tại  $z_0$ . Giả sử  $f(z)$  đồng nhất 0 trong một lân cận nào đó của  $z_0$  thì điều kiện (6.2) thỏa trong lân cận đó của  $z_0$  nên theo Định lý 6.1 hàm  $\ln |f(z_0)|$  điều hòa dưới trên lân cận đó. Suy ra điều kiện thứ hai trong định nghĩa hàm điều hòa dưới thỏa tại  $z_0$ . Ngược lại nếu  $f(z)$  không đồng nhất 0 trong một lân cận nào đó của  $z_0$  thì theo Định lý 3.2 trang 234 tồn tại  $r > 0$  sao cho  $f(z) \neq 0$  với mọi  $0 < |z - z_0| \leq r$ . Từ đây cũng giống như phần chứng minh chiều ngược của Định lý 6.1 ta cũng có hàm  $\ln |f(z)|$  thỏa điều kiện thứ hai trong định nghĩa hàm điều hòa dưới tại  $z_0$ .

Vậy hàm  $\ln |f(z)|$  điều hòa dưới trên  $D$ .  $\square$

**6.4 Định lý.** Nếu hàm  $u$  điều hòa dưới trên miền  $D$  và không đồng nhất bằng  $-\infty$ , thì tập  $E = \{z \in D : u(z) = -\infty\}$  không có điểm trong.

*Chứng minh.* Giả sử  $E^\circ \neq \emptyset$ . Khi đó, tồn tại  $z_0 \in \partial E^\circ$  với  $u(z_0) > -\infty$ . Bởi vì giao của  $E^\circ$  với đường tròn  $C_r$ ,  $|z - z_0| = r$  với  $0 < r < d(z_0, \partial D)$  chứa một cung tròn, nên ta có

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = -\infty$$

nó mâu thuẫn với bất đẳng thức (6.2) do  $u$  điều hòa dưới trên miền  $D$

$$-\infty < u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi. \quad \square$$

**6.5 Định lý.** Hàm thực  $u$  thuộc lớp  $C^2$  trên miền  $D$  là điều hòa dưới nếu và chỉ nếu  $u''_{xx} + u''_{yy} \geq 0$  trên  $D$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $G$  là miền tùy ý thỏa  $\bar{G} \subset D$  và  $h$  là hàm liên tục trên  $\bar{G}$ , điều hòa trong  $G$  và thỏa  $u \leq h$  trên  $\partial D$ . Với  $\varepsilon > 0$  bất kỳ, đặt

$$v_\varepsilon(z) = \begin{cases} u(z) - h(z) + \varepsilon|z|^2 & \text{khi } z \in G \\ \varepsilon|z|^2 & \text{khi } z \in \partial D \end{cases}$$

Từ giả thiết của hàm  $u$  và  $h$  ta nhận thấy  $v_\varepsilon$  nửa liên tục trên  $\bar{G}$  và do đó đạt giá trị lớn nhất trên  $\bar{G}$ . Nhưng  $v_\varepsilon$  không thể nhận giá trị này trong  $G$  vì  $v''_{\varepsilon,xx} + v''_{\varepsilon,yy} = u''_{xx} + u''_{yy} + 4\varepsilon > 0$ . Vậy giá trị lớn nhất này đạt được trên  $\partial D$ , nghĩa là  $v_\varepsilon(z) \leq \max_{z \in \partial G} \varepsilon|z|^2$ . Vậy

$$u(z) - h(z) + \varepsilon|z|^2 \leq \varepsilon \max_{z \in \partial G} |z|^2 \quad \text{với mọi } z \in G$$

suy ra  $u(z) - h(z) \leq \varepsilon \max_{z \in \partial G} |z|^2$ . Vì  $\varepsilon > 0$  tùy ý nên ta được  $u \leq h$  trên  $G$ .

Vậy  $u$  là hàm điều hòa dưới trên  $D$ .

Ngược lại, giả sử  $u$  thuộc lớp  $C^2$  điều hòa dưới trên  $D$  nhưng  $u''_{xx}(z_0) + u''_{yy}(z_0) < 0$  với  $z_0$  nào đó trong  $D$ . Lấy  $r > 0$  đủ nhỏ để  $u''_{xx} + u''_{yy} \leq 0$  trên  $\bar{B}(z_0, r) \subset D$ . Vậy nếu  $v = -u$  thì  $v''_{xx} + v''_{yy} \geq 0$  trên  $\bar{B}(z_0, r)$ . Theo chiều thuận của định lý ta có  $-u = v$  là điều hòa dưới trên  $B(z_0, r)$ . Từ Định lý 6.1 và Định lý 3.8 ta suy ra  $u$  là điều hòa trên  $B(z_0, r)$ . Ta gặp phải mâu thuẫn  $u''_{xx}(z_0) + u''_{yy}(z_0) = 0$ .  $\square$

## Bài tập

1) Cho  $u$  là hàm nửa liên tục trên ở trên miền  $D$  thỏa

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi}) d\varphi$$

với mọi  $z \in D$  và mọi  $0 < r < d(z, \partial D)$ . Chứng minh rằng nếu  $u$  đạt giá trị lớn nhất trong  $D$  thì  $u$  là hàm hằng trên  $D$ .

## § 7 Định lý Hartogs

**7.1 Định nghĩa.** Giả sử  $\{u_k\}$  là một dãy các hàm trên miền  $D$ . Ta nói dãy  $\{u_k\}$  là bị chặn trên đều trên các tập compact trong  $D$  nếu với mọi tập compact  $K \subset D$  tồn tại  $M_K$  sao cho  $u_k(z) \leq M_K$  với mọi  $z \in K$  với mọi  $k$ .

**7.2 Định lý.** Giả sử  $\{u_k\}$  là một dãy các hàm điều hòa dưới bị chặn trên đều trên các tập compact trong miền  $D$  và giả sử

$$(7.3) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} u_k(z) \leq A \quad \text{với mọi } z \in D$$

Khi đó, với mọi  $\varepsilon > 0$  và mọi tập compact  $K \subset D$  tồn tại  $N$  sao cho

$$(7.4) \quad u_k(z) \leq A + \varepsilon \quad \text{với mọi } z \in K \text{ và mọi } k \geq N.$$

*Chứng minh.* Dễ dàng thấy rằng ta có ngay định lý khi  $A = \infty$ . Trong trường hợp  $A < \infty$  để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp  $u_k \leq 0$  trên  $D$  với mọi  $k$ . Cho  $K$  là một tập compact trong  $D$ . Đặt  $3r = d(K, \partial D)$ . Với mỗi  $z_0 \in K$ , từ tính điều hòa dưới của  $u_k$  ta có

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{B}(z_0, r)} u_k(\xi) dx dy &= \int_0^r \int_0^{2\pi} u_k(z_0 + se^{i\varphi}) s ds d\varphi \\ &= \int_0^r s \left[ \int_0^{2\pi} u_k(z_0 + se^{i\varphi}) d\varphi \right] ds \\ &\geq 2\pi \int_0^r s u_k(z_0) ds \\ &= \pi r^2 u_k(z_0). \end{aligned}$$

Với trường hợp dãy hàm đang xét áp dụng bổ đề Fatou ta nhận được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \iint_{\bar{B}(z_0, r)} u_k(\xi) dx dy \leq \iint_{\bar{B}(z_0, r)} \limsup_{k \rightarrow \infty} u_k(\xi) dx dy \leq A\pi r^2.$$

Từ đó với mọi  $\varepsilon > 0$  tìm được  $k_0$  sao cho

$$\iint_{\bar{B}(z_0, r)} u_k(\xi) dx dy \leq (A + \frac{\varepsilon}{2})\pi r^2 \quad \text{với mọi } k > k_0$$

Giả sử  $z \in D$  thỏa  $|z - z_0| < \delta$  với  $0 < \delta < r$ . Khi đó, ta có  $\bar{B}(z_0, r) \subset \bar{B}(z, r + \delta) \subset D$ . Vì vậy cũng theo tính điều hòa dưới của  $u_k$  như trên ta có (và chú ý  $u_k \leq 0$ )

$$\begin{aligned} \pi(r + \delta)^2 u_k(z) &\leq \iint_{\bar{B}(z, r + \delta)} u_k(\xi) dx dy \\ &\leq \iint_{\bar{B}(z_0, r)} u_k(\xi) dx dy \\ &\leq \pi r^2 (A + \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{với mọi } k \geq k_0 \end{aligned}$$

Do đó, với  $\delta_0 < \min\{r, \frac{r\varepsilon}{4\max\{|A|, 1\}}\}$ , với mọi  $|z - z_0| < \delta_0$  và mọi  $k \geq k_0$  ta có

$$\begin{aligned} u_k(z) &\leq \frac{r^2}{(r + \delta_0)^2} (A + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &< A - \frac{\delta_0(2r + \delta_0)}{(r + \delta_0)^2} A + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< A + \frac{2\delta_0|A|}{r} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< A + \varepsilon \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có  $K \subset \bigcup_{z_0 \in K} B(z_0, \delta_0)$ . Vì  $K$  compact nên tồn tại hữu hạn điểm  $z_1, z_2, \dots, z_n \in K$  sao cho  $K \subset \bigcup_{j=1}^n B(z_j, \delta_j)$ . Đặt  $N = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . Khi đó, với mọi  $k \geq N$  và với  $z \in K$  bất kỳ tồn tại  $1 \leq j \leq n$  sao cho  $|z - z_j| < \delta_j$  và ta có

$$u_k(z) < A + \varepsilon$$

□



## Bài tập

1) Chứng minh rằng trong phép chứng minh Định lý 7.2 giả thiết  $u_k \leq 0$  không làm mất tính tổng quát của phép chứng minh.

## Chương VII

# Lý thuyết chuỗi và lý thuyết thặng dư

### § 1 Chuỗi Taylor

#### Định lý Weierstrass

Trước đây, chúng ta đã nêu một số định lý Weierstrass như Định lý 5.18 trang 168 và Định lý 6.6 trang 176 ở dạng dãy hàm. Bây giờ ta sẽ nêu lại các định lý ấy dưới dạng chuỗi hàm và trình bày chứng minh chi tiết.

**1.1 Định lý. (Weierstrass)** *Nếu chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều và hàm  $f_n$  giải tích trên miền  $D$  với mọi  $n$  thì hàm tổng  $f$  của chuỗi hàm là một hàm giải tích trên miền  $D$  và*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

*Chứng minh.* Từ Định lý 4.19 trang 65 ta có được hàm  $f$  liên tục trên  $D$ . Lấy  $\Gamma$  là đường cong Jordan trơn kín bất kỳ nằm trong miền  $D$  và phần trong của nó cũng nằm trong  $D$  và gọi  $l$  là chiều dài của  $\Gamma$ . Đặt  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ . Theo giả thiết chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$  nên dãy hàm  $\{S_n(z)\}$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên  $D$ . Suy ra với  $\varepsilon > 0$  cho trước tồn tại  $n_0$  sao cho với mọi  $n$  nguyên dương thỏa  $n > n_0$  ta có

$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon/l$  với mọi  $z \in D$ , suy ra

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma} S_n(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} (f(z) - S_n(z)) dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon.$$

Do đó ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz.$$

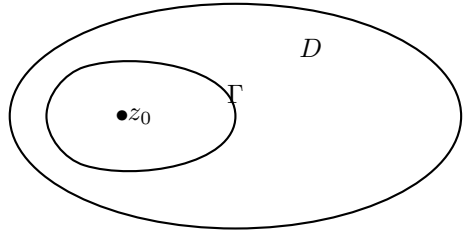
Mặt khác, vì  $S_n(z)$  giải tích trên  $D$  với mỗi  $n$  nguyên dương nên theo định lý Cauchy ta có

$$\int_{\Gamma} S_n(z) dz = 0 \quad \text{với mỗi } n \text{ nguyên dương.}$$

Do đó, ta được  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ . Từ kết quả chứng minh được và theo định lý Morera ta có hàm  $f(z)$  giải tích trên miền  $D$ .

Với  $z_0 \in D$  tùy ý, lấy đường cong Jordan trơn kín  $\Gamma$  bao quanh điểm  $z_0$  sao cho  $z_0 \in D_{\Gamma} \subset D$  (trong đó  $D_{\Gamma}$  là miền giới hạn bởi đường cong  $\Gamma$ ). Đặt

$$d = \min_{z \in \Gamma} |z - z_0| > 0.$$



Hình VII.1:

Với mỗi  $k$  nguyên dương ta có

$$\left| \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{d^{k+1}} \quad \text{với mọi } z \in \Gamma$$

Do chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều về hàm  $f(z)$  trên  $D$  nên suy ra được

chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$  hội tụ đều về hàm  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$  trên  $\Gamma$ . Tương

tự như chứng minh ở phần đầu cho việc lấy tích phân của hàm tổng, và theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(z_0) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \\
&= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \right] dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0)
\end{aligned}$$

Vì  $z_0$  lấy tùy ý trong  $D$  nên ta có

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \text{với mọi } z \in D. \quad \square$$

**1.2 Nhận xét.** Trong chứng minh định lý trên ta đã chứng minh được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Hơn nữa, đẳng thức này cũng đúng với mọi đường cong Jordan trơn từng khúc trong  $D$ . Từ đó ta viết lại như sau

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \left[ \sum_{k=1}^n f_k(z) \right] dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma} f_k(z) dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta có được kết quả như sau: tích phân của hàm tổng của chuỗi hàm hội tụ đều trên  $D$  được tính bởi lấy tích phân của từng số hạng.

**1.3 Chú ý.** Trong định lý trên ta đã chứng minh được tính chất lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi tại các điểm  $z \in D$  chứ không phải tại các điểm  $z \in \bar{D}$ ; ta không có điều này là do ta đã sử dụng  $d = d(\Gamma, z_0) > 0$  trong chứng minh. Ví dụ sau chứng tỏ đối với  $z \in \bar{D}$  định lý này không còn đúng nữa.

Xét chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ . Chuỗi hàm này hội tụ đều trên  $\{z : |z| \leq 1\}$  và mọi số hạng của nó đều là các hàm giải tích trên  $\{z : |z| \leq 1\}$ . Tuy nhiên, chuỗi các đạo hàm của nó là  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$  lại phân kỳ tại  $z = 1$ .

## Định lý Taylor

Xét chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ . Giả sử chuỗi này có bán kính hội tụ  $R > 0$ . Khi đó, ta có được một hàm  $f$  có tập xác định  $\{z : |z - z_0| < R\}$  xác định bởi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Hàm  $f$  giải tích trên  $\{z : |z - z_0| < R\}$ . Do đó, nó có đạo hàm mọi cấp và

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k},$$

với  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Đặc biệt tại  $z = z_0$  ta có  $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ .

Vấn đề ngược lại, giả sử ta có hàm  $f$  có đạo hàm mọi cấp tại  $z_0$ . Đặt

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Khi đó, ta thiết lập được chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Chuỗi lũy thừa này được gọi là **chuỗi Taylor của hàm  $f$  tại  $z_0$**  (khi  $z_0 = 0$ , ta nói là **chuỗi Maclaurin**) Định lý sau nói lên mối quan hệ giữa bản thân hàm  $f$  và chuỗi Taylor của nó.

**1.4 Định lý. (Taylor)** Cho hàm  $f$  giải tích trong hình tròn mở  $|z - z_0| < R_0$ . Khi đó, chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , với  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , hội tụ về hàm  $f$  khi  $|z - z_0| < R_0$ . Với  $|z - z_0| < R_0$ , ta viết  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  được gọi là khai triển Taylor của hàm  $f$  trong lân cận điểm  $z_0$ . Trường hợp đặc biệt  $z_0 = 0$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  ta nói  $f$  được khai triển Maclaurin.

Nhắc lại,  $f^{(n)}(z_0)$  được tính bởi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

với  $\Gamma$  là đường cong kín nằm trong đường tròn  $|z - z_0| = r < R_0$  và bao quanh  $z_0$ , cho nên ta có

$$(1.5) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

*Chứng minh định lý Taylor.* Giả sử với bất kỳ  $z' \in \{z : |z - z_0| < R_0\}$ . Khi đó, ta có  $|z' - z_0| < R_0$ , nên tồn tại số thực  $0 < R_1 < R_0$  sao cho  $z' \in \{z : |z - z_0| \leq qR_1\}$  trong đó  $0 < q < 1$ . Gọi  $\Gamma$  là đường tròn được định hướng dương và có phương trình  $|z - z_0| = R_1$ . Khi đó, điểm  $z'$  được chọn ở trên nằm bên trong  $\Gamma$ . Theo công thức tích phân Cauchy, ta có

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z'} dz.$$

Mặt khác, với  $z \in \Gamma$  ta có  $|z - z_0| = R_1 > qR_1 \geq |z' - z_0|$ , nên ta biến đổi được

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z'} &= \frac{1}{z - z_0 - (z' - z_0)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Chuỗi hàm  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$  hội tụ đều trên  $\Gamma$  bởi vì  $\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| \leq \frac{qR_1}{R_1} = q < 1$ . Do đó, ta tính được

$$\begin{aligned}
f(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \right] dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z' - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z' - z_0)^n.
\end{aligned}$$

Vậy  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  hội tụ về  $f(z)$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| < R_0$ .  $\square$

**1.6 Hệ quả.** Hàm  $f$  xác định trên miền  $D$  là giải tích khi và chỉ khi với mọi  $z_0 \in D$  hàm  $f$  có thể khai triển được thành chuỗi Taylor tại điểm  $z_0$  với bán kính hội tụ của nó là  $R \geq d(z_0, \partial D)$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập.  $\square$

**1.7 Nhận xét.** Định lý Taylor thể hiện sự khác nhau cơ bản giữa hàm giải tích phức và hàm biến số thực. Trong giải tích thực người ta chứng minh được hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm mọi cấp trên  $\mathbb{R}$ , chẳng hạn

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

và  $f^{(n)}(0) = 0$  với mọi  $n$ . Tuy nhiên, hàm  $f(x)$  không đồng nhất bằng không trong một lân cận nào của điểm 0, trong khi đó chuỗi Taylor của  $f(x)$  tại  $x = 0$  là chuỗi hàm 0 tầm thường.

## Khai triển Maclaurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

Ta nhận thấy (về hình thức) công thức chuỗi Taylor của một hàm phức hoàn toàn giống công thức chuỗi Taylor của một hàm thực. Hơn nữa, công thức đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản phức cũng giống công thức đạo hàm của hàm sơ cấp cơ bản thực tương ứng, cho nên khai triển Maclaurin của các hàm sơ cấp cơ bản phức có công thức hoàn toàn giống với khai triển Maclaurin của các hàm sơ cấp cơ bản thực.

Ta đã biết hàm logarithm phức  $\ln z$  giải tích trên  $\mathbb{C}$  bỏ đi nửa trục thực dương, do đó hàm  $\ln(z-1)$  giải tích trên  $z=0$  và ta có

$$(\ln(z-1))' = \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{với mọi } |z| < 1.$$

Từ tính chất nguyên hàm và  $\ln(-1) = i\pi$  nên ta được khai triển

$$\ln(z-1) - i\pi = \int_0^z (\ln(z-1))' dz = -\int_0^z \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Sau đây chúng tôi liệt kê một số khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp cơ bản.

$$(1.8) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = \infty$$

$$(1.9) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$

$$(1.10) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty$$

$$(1.11) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad R = 1$$

$$(1.12) \quad \ln(z-1) = i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad R = 1$$

$$(1.13) \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad R = 1$$

$$(1.14) \quad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n(n-1)\cdots 1} z^n \quad R = 1$$

**1.15 Thí dụ.** Khai triển Maclaurin của các hàm sau  $f(z) = z^2 e^{3z}$  và  $g(z) = \frac{z}{z^4+9}$ .

$$f(z) = z^2 e^{3z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^{n+2}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2} z^n}{(n-2)!},$$

với  $R = \infty$ .



$$g(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9} \frac{1}{1 + \frac{z^4}{9}} = \frac{z}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^4}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}},$$

với  $R = \sqrt{3}$ . □

## Bài tập

1) Chứng minh Hệ quả 1.6.

2) Khai triển Maclaurin của các hàm sau và tìm bán kính hội tụ.

(a)  $\frac{1}{z-2}$ , (b)  $\sinh z$ , (c)  $\cosh z$ , (d)  $\frac{1}{(z-a)^k}$  với  $a \neq 0$  và  $k \in \mathbb{N}$

3) Khai triển Maclaurin các hàm sau và tìm bán kính hội tụ.

(a)  $\sin^2 z$  (b)  $(a+z)^\alpha$  (c)  $\frac{1}{az+b}$  (d)  $\frac{z}{z^2-4z+13}$  (e)  $\frac{z^2}{(z+1)^2}$

4) Tìm tổng của các chuỗi sau trong  $|z| < 1$

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$  (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$  (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$

5) Hãy tìm hai số hạng đầu tiên trong khai triển Maclaurin của hàm  $\tanh z$ , và tìm bán kính hội tụ của nó.

6) Chứng minh rằng ta có khai triển Taylor

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \quad \text{với } |z-i| < \sqrt{2}.$$

7) Khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm  $z_0$  và tìm bán kính hội tụ của các hàm sau.

(a)  $\sin(2z - z^2)$  tại  $z_0 = 1$

(d)  $\ln z$  tại  $z = -1$

(b)  $\frac{z}{z^2+4}$  tại  $z_0 = i$ .

(e)  $\frac{z}{z^2-2z+5}$  tại  $z_0 = 1$

(c)  $\frac{z}{z+2}$  tại  $z_0 = 1$ .

(f)  $\frac{z^2}{(z+1)^2}$  tại  $z_0 = 1$

8) Bằng cách khai triển Maclaurin các hàm số sau hãy tìm  $f^{(n)}(0)$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$

(a)  $f(z) = z \cosh(z^2)$

(b)  $f(z) = \sin(z^2)$

9) Chứng minh rằng nếu khai triển hàm  $\frac{1}{\cos z}$  tại  $z = 0$  dưới dạng

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

thì các số  $E_{2n}$  (các số Euler) thỏa mãn

$$E_0 = 1, \quad E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \dots + \binom{2n}{2n} E_{2n} = 0.$$

10) Chứng minh rằng hàm  $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & \text{khí } z \neq 2k\pi i \\ 0 & \text{trường hợp khác} \end{cases}$  giải tích tại  $z = 0$ . Nếu khai triển Maclaurin của  $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

chứng minh rằng các số  $B_n$  (các số Bernoulli) thỏa mãn

$$B_0 = 1, \quad \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0.$$

11) Giả sử trong  $D = \{z : |z| < R\}$  hàm  $f(z)$  có khai triển dạng

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

(a) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \quad r < R$$

(b) Nếu  $\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r)$  thì

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad r < R.$$

(c) Chứng minh rằng nếu một trong các bất đẳng thức trên biến thành đẳng thức, nghĩa là  $|c_k| = \frac{M(r)}{r^k}$  thì  $f(z) = c_k z^k$

12) Giả sử  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  là hàm giải tích trong hình tròn  $\{z : |z| < 1\}$  và nó ánh xạ hình tròn này 1-1 lên miền  $G$  với diện tích  $S$ . Chứng minh

$$S = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n |c_n|^2$$

13) Chứng minh các bất đẳng thức sau đúng với mọi  $z \in \mathbb{C}$ :

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}.$$

## § 2 Chuỗi Laurent

Chuỗi Taylor là một công cụ giúp ta nghiên cứu hàm số trong lân cận của một điểm nào đó mà tại điểm đó hàm ấy là giải tích. Tuy nhiên, ta có những hàm không giải tích tại điểm ta quan tâm. Khi đó, chuỗi Taylor không thể sử dụng được, do vậy ta phải dùng một công cụ khác để có thể nghiên cứu hàm trong một lân cận của một điểm mà tại đó hàm không giải tích; đó là chuỗi Laurent.

**2.1 Định nghĩa.** Chuỗi hàm có dạng  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  gọi là **chuỗi Laurent** theo lũy thừa của  $z - z_0$  hay chuỗi Laurent tại  $z_0$ .

**2.2 Định lý.** Nếu các hệ số của chuỗi Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  thỏa

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r < R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \leq \infty$$

thì miền hội tụ của chuỗi đã cho là hình vành khăn  $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$  và tổng  $f(z)$  của chuỗi hàm là một hàm giải tích trong hình vành khăn  $D$ , các hệ số  $c_n$  của chuỗi thỏa

$$(2.3) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

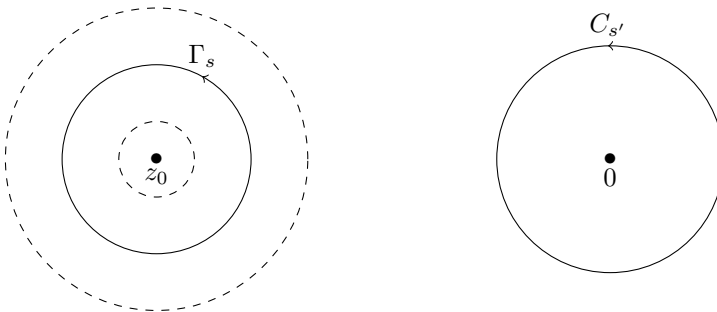
ở đây  $\Gamma_s$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z - z_0| = s$  với  $r < s < R$  tùy ý.

*Chứng minh.* Viết chuỗi đã cho thành tổng của hai chuỗi

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n \quad \text{và} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Từ giả thiết và theo Định lý Cauchy-Hadamard trang 72 chuỗi thứ hai có bán kính hội tụ là  $R$ , và theo Định lý 2.9 trang 89 hàm tổng của nó, đặt là  $f^+(z)$ , giải tích trên  $\{z : |z - z_0| < R\}$ . Hơn nữa, theo Định lý Taylor 1.4 ta có

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^+(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Hình VII.2:

Đặt  $u = \frac{1}{z - z_0}$ . Khi đó, chuỗi  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$  được viết lại thành  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} u^n$ . Do đó, theo Định lý Cauchy-Hadamard và Định lý 2.9 chuỗi mới

này có hàm tổng  $g(u)$  giải tích trên  $\{u : |u| < r'\}$  với  $r' = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}} = \frac{1}{r}$ . Vậy chuỗi hàm  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$  hội tụ về hàm giải tích  $f^-(z) = g(\frac{1}{z-z_0})$  trên  $\{z : |z-z_0| > r\}$ . Hơn nữa, với  $s' = \frac{1}{s}$  theo Định lý Taylor 1.4 ta có

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s'}} \frac{g(u)}{u^{n+1}} du & n = 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s^-} \frac{f^-(z)}{\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^{n+1}} \frac{-dz}{(z-z_0)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^-(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \end{aligned}$$

và

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s'}} \frac{g(u)}{u} du$$

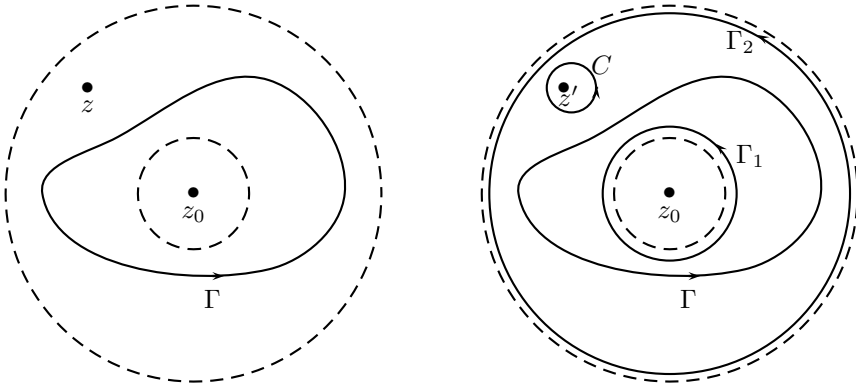
(chú ý rằng đường tròn  $\Gamma_s^-$  qua ánh xạ  $u = \frac{1}{z-z_0}$  biến thành đường tròn  $C_{s'}$  định hướng dương tâm 0 bán kính  $s'$ ). Từ các kết quả trên ta được chuỗi Laurent đã cho hội tụ về hàm giải tích  $f(z) = f^+(z) + f^-(z)$  trên hình vành khăn  $D = \{z : r < |z-z_0| < R\}$ . Hơn nữa, với  $n$  nguyên không âm ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^-(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^+(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s'}} \frac{g(u)}{u^{-n+1}} du + c_n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{s'}} u^{n-1} g(u) du + c_n \\ &= c_n \end{aligned}$$

và với  $n$  nguyên âm ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^-(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f^+(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \\ &= c_n + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} (z-z_0)^{-n-1} f^+(z) dz \\ &= c_n \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi  $n$  nguyên ta có đẳng thức (2.3). □



Hình VII.3:

**2.4 Định lý. (Laurent)** Giả sử hàm  $f$  giải tích trên miền nhị liên là vành  $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$  và  $\Gamma$  là đường cong Jordan trơn từng khúc kín nằm trong vành đó và bao quanh điểm  $z_0$ . Khi đó, với mỗi điểm  $z$  thuộc vành ấy hàm  $f$  được biểu diễn thành chuỗi

$$(2.5) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

trong đó

$$(2.6) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

hay

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz.$$

*Chứng minh.* Lấy  $z'$  tùy ý thuộc  $D = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ . Tồn tại tại  $R_1 < r'_1 < r'_2 < R_2$  sao cho  $\Gamma \subset D_1 = \{z : r'_1 < |z - z_0| < r'_2\}$  và  $z' \in D_1$ . Từ đó, ta có thể chọn được  $r_1, r_2, q$  sao cho  $R_1 < r_1 < r'_1 < r'_2 < r_2 < R$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\frac{r_1}{q} \leq r'_1$  và  $qr_2 \geq r'_2$ . Vậy ta có  $\Gamma \subset D_2 = \left\{z : \frac{r_1}{q} < |z - z_0| < r_2 q\right\}$  và  $z' \in D_2$ . Gọi  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  là hai đường tròn định hướng dương lần lượt có phương trình  $|z - z_0| = r_1$  và  $|z - z_0| = r_2$ . Khi đó, theo định lý Cauchy-Goursat cho miền đa liên ta suy ra được

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ . Chọn  $C$  là một đường cong Jordan kín trơn bao quanh  $z'$  và có phần trong hoàn toàn trong  $D_2$ . Xét miền tam liên xác định bởi các đường cong  $\Gamma_1, \Gamma_2, C$ . Theo định lý Cauchy-Goursat cho miền đa liên ta có

$$\int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z'} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z'} dz + \int_C \frac{f(z)}{z - z'} dz.$$

Mặt khác, theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z'} dz.$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z'} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z'} dz.$$

Với  $z \in \Gamma_1$  ta có  $|z - z_0| = r_1$ , và  $z' \in D_2$  nên  $|z' - z_0| > \frac{r_1}{q}$ , suy ra  $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < q < 1$ . Ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z'} &= \frac{1}{z - z_0 - (z' - z_0)} = \frac{-1}{(z' - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right)^n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}}$  hội tụ đều trên  $\Gamma_1$  do  $\left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| < q < 1$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z'} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(z) \left( - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}} \right) dz \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z' - z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z' - z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z' - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Với  $z \in \Gamma_2$  ta có  $|z - z_0| = r_2$ , và  $z' \in D_2$  nên  $|z' - z_0| < r_2 q$ , suy ra  $\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < q < 1$ . Ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z'} &= \frac{1}{z - z_0 - (z' - z_0)} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$  hội tụ đều trên  $\Gamma_2$  do  $\left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| < q < 1$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z'} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(z) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z' - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z' - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z' - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z' - z_0)^n. \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z' - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z' - z_0)^n}.$$

Do đó, với mọi  $z \in D$  ta có biểu diễn (2.5). □

**2.7 Định nghĩa.** Với ký hiệu kết quả trong định lý trên, chuỗi

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  được gọi là **chuỗi Laurent của hàm**  $f(z)$ , trong đó

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  là **phần đều** và  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$  là **phần chính**. Biểu thức

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  được gọi là **khai triển Laurent** của hàm  $f(z)$

trên vành  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .



**2.8 Thí dụ.** Khai triển Laurent hàm  $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$  trên vành  $1 < |z| < 2$ . Ta viết lại  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$ . Ta có

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad |z| < 2.$$

Vậy  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ . Ta nhận thấy

$$c_{-1} = 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \quad \text{suy ra} \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = -2\pi i,$$

trong đó  $\Gamma$  là đường cong kín trong vành đã cho bao quanh điểm  $z = 0$ .  $\square$

**2.9 Thí dụ.** Khai triển hàm  $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$  trên vành  $0 < |z| < \infty$ . Ta có

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} \\ &= -\frac{1}{6} + z^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+5)! z^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Giả sử  $\Gamma$  là đường cong kín trơn từng khúc bao quanh  $z = 0$ . Ta có  $\int_{\Gamma} z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i c_{-1} = 0$ .  $\square$

## Bài tập

1) Khai triển Laurent các hàm sau trên miền  $0 < |z| < \infty$

(a)  $\frac{e^z}{z^2}$       (b)  $\frac{\sin(z^2)}{z^4}$       (c)  $\frac{\sinh z}{z^2}$       (d)  $z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right)$

2) Khai triển hàm  $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$  thành chuỗi Laurent trong vành  $2 < |z| < \infty$ .

3) Khai triển hàm  $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$  thành chuỗi Laurent trong miền  $0 < |z| < \infty$ .

4) Khai triển hàm  $f(z) = z^3 \cos \frac{2}{z}$  thành chuỗi Laurent trong miền  $0 < |z| < \infty$ . Từ đó tính tích phân  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  với  $\Gamma$  là đường tròn được định hướng dương và có phương trình  $|z| = 1$ .

5) Khai triển hàm  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$  thành chuỗi Laurent trong miền  $1 < |z| < 3$ . Từ đó tính tích phân  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  với  $\Gamma$  là đường tròn được định hướng dương và có phương trình  $|z| = 2$ .

6) Khai triển hàm  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$  thành chuỗi Laurent (a) trong lân cận điểm  $z = 2$ ; (b) trong miền xác định bởi  $1 < |z| < 2$ .

7) Khai triển hàm  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$  thành chuỗi Laurent trong lân cận điểm  $z = i$  và  $z = \infty$ .

8) Khai triển hàm  $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$  trong lân cận của điểm  $z = 1$ .

9) Khai triển hàm  $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ , trong đó  $0 < |a| < |b|$ , thành chuỗi Laurent trong (a) lân cận điểm  $z = 0$ ; (b) lân cận điểm  $z = a$ ; (c) miền xác định bởi  $|a| < |z| < |b|$ .

10) Viết hai chuỗi Laurent theo lũy thừa của  $z$  biểu diễn hàm  $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$  trên các miền xác định, và chỉ rõ các miền ấy.

11) Chứng minh rằng khoảng cách của không điểm gần nhất tới  $z = 0$  đối với hàm  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  không nhỏ hơn  $\frac{r|c_0|}{M+|c_0|}$  ở đây  $r$  là số dương nhỏ hơn bán kính hội tụ của chuỗi đã cho còn  $M = M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .

12) (a) Cho  $a$  là một số thực thỏa  $-1 < a < 1$ . Hãy khai triển Laurent hàm  $\frac{a}{z-a}$  theo lũy thừa của  $z$  trên miền  $|a| < |z| < \infty$ .

(b) Cho  $z = e^{i\theta}$  vào kết quả của (a) và đi đến các đẳng thức với  $|a| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a \cos \theta - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

13) Ký hiệu  $C$  là đường tròn  $|z| = 1$  được định hướng dương.

(a) Tính tích phân  $\int_C z^n e^{\frac{1}{z}} dz$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Từ kết quả trên tính tích phân  $\int_C e^{z+\frac{1}{z}} dz$ .

## § 3 Các loại điểm

### Không-điểm

**3.1 Định nghĩa.** Điểm  $z_0$  được gọi là **không-điểm** của hàm  $f(z)$  nếu  $f(z_0) = 0$ .

Giả sử  $z_0$  là không-điểm của hàm  $f(z)$  và hàm  $f(z)$  giải tích trong  $\varepsilon$ -lân cận của điểm  $z_0$ . Khi đó, khai triển Taylor của hàm  $f(z)$  trong  $\varepsilon$ -lân cận ấy của điểm  $z_0$  có dạng

$$\begin{aligned} f(z) &= f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \end{aligned}$$

Nếu hàm  $f(z)$  không đồng nhất bằng 0 trong  $\varepsilon$ -lân cận của điểm  $z_0$  thì tồn tại ít nhất hệ số  $c_n$  trong khai triển Taylor khác 0. Chỉ số bé nhất trong các hệ số khác 0 này được gọi là **cấp của không-điểm**  $z_0$ . Như vậy, nếu  $z_0$  là không điểm cấp  $n > 0$ , thì hàm  $f$  có khai triển Taylor trong lân cận của điểm  $z_0$  là

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n \left[ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0) + \dots \right] \end{aligned}$$

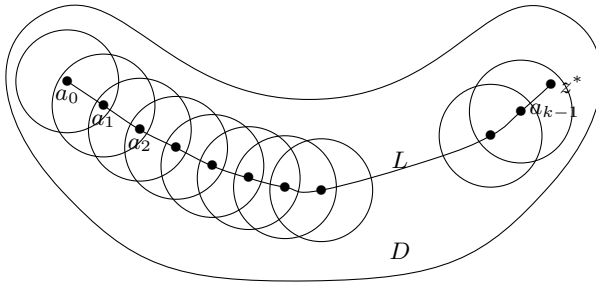
trong đó  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Đặt  $\varphi(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0) + \dots$ . Ta nhận thấy  $\varphi(z)$  giải tích trong lân cận của  $z_0$  và  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Vì  $\varphi(z)$  liên tục tại  $z_0$  nên  $\varphi(z) \neq 0$  trong một lân cận của điểm  $z_0$ . Ta có thể phát biểu kết quả trên thành định lý sau.

**3.2 Định lý.** Cho hàm  $f(z)$  giải tích trong một  $\varepsilon$ -lân cận của điểm  $z_0$  và nhận  $z_0$  làm không-điểm. Nếu  $f(z)$  không đồng nhất bằng 0 trong lân cận ấy của  $z_0$ , thì tồn tại một lân cận của điểm  $z_0$  sao cho trong lân cận này hàm  $f(z)$  chỉ nhận  $z_0$  làm không điểm duy nhất.

**3.3 Nhận xét.** Trong phần chứng minh định lý trên ta thấy có kết quả sau: Nếu  $z_0$  là không điểm cấp  $m$  của hàm  $f$  và hàm  $f$  giải tích tại  $z_0$ , thì ta có thể viết  $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$  trong đó  $\varphi(z)$  là một hàm giải tích tại  $z_0$  và  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

**3.4 Định lý. (Sự duy nhất của hàm giải tích)** Cho hai hàm  $f$  và  $g$  giải tích trong miền  $D$  và  $\{z_n\}$  là một dãy phân biệt trong  $D$  và hội tụ về  $a \in D$ . Nếu  $f(z_n) = g(z_n)$  với mọi  $n$  thì  $f(z) = g(z)$  với mọi  $z \in D$ .

*Chứng minh.* Đặt  $R = d(a, \partial D) = \inf \{|z - a| : z \in \partial D\}$ . Do  $D$  là một miền và  $a \in D$  nên ta có  $R > 0$ . Đặt  $\varphi(z) = f(z) - g(z)$ . Theo giả thiết ta có  $\varphi(z)$  giải tích trên  $D$  nên  $\varphi(z)$  giải tích trên  $R$ -lân cận của  $a$  và  $\varphi$  liên tục tại  $a$ . Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  và  $\varphi(z_n) = f(z_n) - g(z_n)$  nên  $\varphi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = 0$ . Vậy  $a$  và  $z_n$  là các không điểm của  $\varphi$ . Do các  $z_n$  phân biệt trên  $D$ , nên  $a$  không là không-điểm duy nhất trong bất kỳ lân cận nào của  $a$ . Do đó, theo Định lý 3.2 hàm  $\varphi$  phải đồng nhất 0 trên  $R$ -lân cận của  $a$ , tức là  $\varphi(z) = 0$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - a| < R$ .



Hình VII.4:

Lấy  $z^*$  tùy ý thuộc  $D$ . Do  $D$  là một miền nên tồn tại một đường cong  $L$  trong  $D$  nối  $a$  đến  $z^*$ . Đặt  $r = \inf \{|z - z'| : z \in L, z' \in \partial D\} > 0$ . Chọn  $0 < \delta < \min\{r, R\}$ . Do  $L$  là tập compact nên tồn tại hữu hạn điểm  $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_k = z^*$  trên  $L$  sao cho  $|a_{l-1} - a_l| < \delta$  với mọi  $l = 1, 2, \dots, k$ . Ta có  $\varphi$  đồng nhất 0 trên  $\{z : |z - a_0| < \delta\}$ . Do  $|a_1 - a_0| < \delta$  nên  $\varphi(a_1) = 0$ . Theo chứng minh phần đầu ta cũng có thể chứng minh được  $\varphi$  đồng nhất 0 trên  $\{z : |z - a_1| < \delta\}$ . Do  $|a_2 - a_1| < \delta$  nên  $\varphi(a_2) = 0$ . Tiếp tục quá trình như trên ta sẽ thu được  $\varphi(a) = \varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \dots = \varphi(a_k) = 0$ , suy ra  $\varphi(z^*) = 0$ . Vậy  $\varphi$  đồng nhất 0 trên  $D$ . Suy ra  $f(z) = g(z)$  với mọi  $z \in D$ .  $\square$

**3.5 Chú ý.** Trong định lý trên dãy  $\{z_n\}$  phải hội tụ về một điểm thuộc  $D$ . Đây là điều kiện không thể bỏ qua. Xét hai hàm  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$  và  $g(z) = 0$  trên miền  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Xét dãy  $\{z_n\}$  trong  $D$  với  $z_n = \frac{1}{n\pi}$ . Ta có  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0 \notin D$ . Ta có  $f(z_n) = \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = 0 = g(z_n)$  trên

$D$ . Nghĩa là ta không có kết luận của định lý duy nhất bởi vì dãy  $\{z_n\}$  hội tụ về điểm 0 không thuộc  $D$ .

**3.6 Chú ý.** Định lý duy nhất khẳng định tính duy nhất về sự thác triển của hàm giải tích trên miền. Chẳng hạn, đối với mọi số thực  $x$  ta có  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Ta thác triển hàm  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  lên hàm  $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$  với  $z \in \mathbb{C}$ . Xét hai hàm  $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$  và  $g(z) = 1$  trên  $\mathbb{C}$ . Ta thấy  $f(z)$  và  $g(z)$  trùng nhau trên trục số thực (khi  $z$  là số thực). Cho nên theo định lý duy nhất ta có  $f(z) = g(z) = 1$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$  hay  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$ .

**3.7 Định lý.** Giả sử  $f$  là hàm giải tích trên  $D$  và  $f$  không là hàm hằng. Khi đó, trên mọi tập compact  $K \subset D$  không tồn tại vô hạn điểm để  $f$  nhận cùng giá trị. Nói cách khác, nghịch ảnh  $f^{-1}(w)$  không có điểm tụ trong  $D$  với mọi  $w \in \mathbb{C}$ .

*Chứng minh.* Giả sử trên  $K$  có vô hạn điểm để  $f$  nhận cùng giá trị  $c$ . Do tính compact của  $K$  nên trong  $K$  tồn tại dãy phân biệt  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0 \in K$  sao cho  $f(z_n) = c$  với mọi số nguyên dương  $n$ . Do đó, theo định lý sự duy nhất của hàm giải tích ta suy ra  $f(z) = c$  với mọi  $z \in D$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết, cho nên ta có được định lý.  $\square$

## Điểm bất thường

**3.8 Định nghĩa.** Điểm  $z_0$  được gọi là **điểm bất thường** của hàm  $f(z)$  nếu hàm  $f(z)$  không giải tích tại  $z_0$  nhưng giải tích tại một số điểm trong bất kỳ lân cận nào của  $z_0$ .

**3.9 Thí dụ.** Hàm  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  nhận các điểm  $z = 0$ ,  $z = \frac{1}{n\pi}$  với  $n \in \mathbb{Z}$  khác không, làm điểm bất thường.  $\square$

**3.10 Định nghĩa.** Điểm bất thường  $z_0$  của hàm  $f(z)$  được gọi là **điểm bất thường cô lập** nếu tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận thủng của  $z_0$  sao cho hàm  $f(z)$  giải tích trên đó.

**3.11 Thí dụ.** Các điểm  $z = \frac{1}{n\pi}$  với  $n \in \mathbb{Z}$  khác không, là điểm bất thường cô lập của hàm  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ ; trong khi đó, điểm  $z = 0$  là điểm bất thường không cô lập của hàm  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ .  $\square$

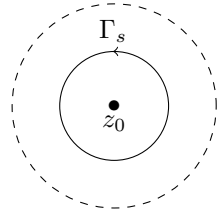
**3.12 Định nghĩa. (Phân loại điểm bất thường cô lập)** Cho  $z_0$  là điểm bất thường cô lập của hàm  $f(z)$ . Khi đó, ta nói

- (i)  $z_0$  là **điểm bất thường bỏ được** nếu  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  tồn tại trong  $\mathbb{C}$ .
- (ii)  $z_0$  là **cực điểm** nếu  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .
- (iii)  $z_0$  **điểm bất thường cốt yếu** nếu hàm  $f(z)$  không có giới hạn trong  $\bar{\mathbb{C}}$  khi  $z$  dần về  $z_0$ .

**3.13 Định lý.** Cho  $z_0$  là điểm bất thường cô lập của hàm  $f$ . Nếu  $f$  bị chặn trong lân cận thủng của  $z_0$  thì  $f$  có thể mở rộng giải tích tới  $z_0$ ; hơn nữa  $z_0$  là điểm bất thường bỏ được.

*Chứng minh.* Theo giả thiết tồn tại  $r > 0$  sao cho  $f$  giải tích và bị chặn trong hình vành khăn  $D = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ . Đặt  $M = \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty$ . Ta có khai triển Laurent của hàm  $f$  trong hình vành khăn  $D$  là

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{với} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$



trong đó  $\Gamma_s$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z - z_0| = s$  với  $0 < s < r$  tùy ý. Do đó, ta ước lượng được

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_s} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq s \frac{M}{s^{n+1}} = \frac{M}{s^n}.$$

Cho  $s \rightarrow 0$  ta suy ra được  $c_n = 0$  với  $n = -1, -2, \dots$ . Vậy khai triển Laurent của hàm  $f$  được viết lại là

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Vậy hàm giải tích  $f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  trên  $\{z : |z - z_0| < r\}$  là một mở rộng giải tích của  $f(z)$  tới  $z_0$ . Từ tính hội tụ đều của chuỗi hàm  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  ta suy ra được

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0.$$

Vậy  $z_0$  là điểm bất thường bỏ được.  $\square$

**3.14 Định lý. (Weierstrass)** *Điểm bất thường cô lập  $a \in \mathbb{C}$  là điểm bất thường cốt yếu của hàm giải tích  $f(z)$  nếu và chỉ nếu  $\overline{f(B(z, r) \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$  với mọi  $r > 0$ .*

*Chứng minh.* Giả sử  $\overline{f(B(z, r) \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$  với mọi  $r > 0$ . Khi đó, với  $b \in \mathbb{C}$  bất kỳ, với mỗi  $n$  nguyên dương ta có  $B(b, \frac{1}{n}) \cap f(B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$ , suy ra tồn tại  $z_n \in B(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}$  sao cho  $f(z_n) \in B(b, \frac{1}{n})$  hay  $|f(z_n) - b| < \frac{1}{n}$ . Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = b$ . Do  $b \in \mathbb{C}$  bất kỳ nên  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  không tồn tại, suy ra  $a$  là điểm bất thường cốt yếu.

Ngược lại, giả sử  $a \in \mathbb{C}$  là điểm bất thường cốt yếu của  $f$  nhưng tồn tại  $r > 0$  sao cho  $\overline{f(B(a, r) \setminus \{a\})} \neq \mathbb{C}$ . Nghĩa là tồn tại  $b \in \mathbb{C}$  và  $s > 0$  sao cho  $f(B(a, r) \setminus \{a\}) \cap B(b, s) = \emptyset$ . Khi đó, với mọi  $z$  thỏa  $0 < |z - a| < r$  ta có  $f(z) \notin B(b, s)$  hay  $|f(z) - b| \geq s$ . Rõ ràng hàm  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - b}$  giải tích và bị chặn trên (bởi  $\frac{1}{s}$ ) trong hình vành khăn  $\{z : 0 < |z - a| < r\}$ . Do đó, theo Định lý 3.13 hàm  $\varphi$  có thể mở rộng giải tích đến điểm  $a$  thành hàm  $\varphi^*(z)$ . Khi đó, tồn tại giới hạn

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow a} \varphi^*(z).$$

Do đó, tồn tại giới hạn  $\lim_{z \rightarrow a} [f(z) - b]$  trong  $\overline{\mathbb{C}}$  hay tồn tại giới hạn  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  trong  $\overline{\mathbb{C}}$ . Điều này mâu thuẫn với  $a$  là điểm bất thường cốt yếu. Vậy  $\overline{f(B(z, r) \setminus \{a\})} = \mathbb{C}$  với mọi  $r > 0$ .  $\square$

**3.15 Định nghĩa.** Một hàm  $f$  được gọi là **hàm phân hình** trên  $D$  nếu những điểm trong  $D$  mà  $f$  không giải tích là những cực điểm của  $f$ .

Chuỗi Laurent cho phép chúng ta nghiên cứu dễ dàng hơn các hàm giải tích trong lân cận của một điểm nào đó mà tại điểm đó hàm mất tính giải tích. Điểm như vậy chính là điểm bất thường cô lập. Hơn nữa, ta có mối liên hệ giữa chuỗi Laurent và điểm bất thường cô lập trong định lý sau.

**3.16 Định lý.** Cho  $z_0 \in \mathbb{C}$  là điểm bất thường cô lập của hàm  $f(z)$  và khai triển Laurent của hàm  $f(z)$  trong lân cận thủng của  $z_0$  là  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ . Khi đó,

- (i) điểm  $z_0$  là điểm bất thường bỏ được nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi bằng không;



- (ii) điểm  $z_0$  là cực điểm nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi chỉ có hữu hạn số hạng khác không;
- (iii) điểm  $z_0$  là điểm bất thường cốt yếu nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi có vô số số hạng khác 0.

*Chứng minh.*

- (i) Giả sử  $z_0$  là điểm bất thường bỏ được của hàm  $f$ , tức là  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \neq \infty$ . Khi đó, tồn tại  $R > 0$  sao cho hàm  $f$  giải tích trên miền xác định bởi  $0 < |z - z_0| < R$ , cùng với điều kiện giới hạn của hàm  $f$  tại  $z_0$  là xác định, ta có  $f$  bị chặn trên miền đó. Nghĩa là

$$|f(z)| \leq M = \sup_{z \in V} |f(z)| < \infty,$$

với mọi  $z \in V = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ . Chuỗi Laurent của hàm  $f$  trong vành  $V$  là

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{với } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

trong đó  $\Gamma_1$  là đường tròn định hướng bất kỳ có phương trình  $|z - z_0| = R_1$  với  $0 < R_1 < R$ . Suy ra

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{R_1^{n+1}} R_1 dt = \frac{M}{R_1^n}.$$

Vậy  $|c_n| \leq \frac{M}{R_1^n}$  đúng với mọi  $0 < R_1 < R$ . Suy ra với  $n < 0$  ta phải có  $c_n = 0$  (vì ta cho  $R_1 \rightarrow 0$ ). Điều đó có nghĩa là phần chính của chuỗi Laurent bằng không.

Ngược lại, giả sử phần chính của chuỗi Laurent của hàm  $f$  trong lân cận thủng  $V$  của  $z_0$  bằng không, nghĩa là

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{với } z \in V = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Do chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  hội tụ đều trong hình tròn  $\{z : |z - z_0| < R_1\}$

với  $R_1 < R$ , nên ta có

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} c_n (z - z_0)^n \\ &= c_0 \neq \infty.\end{aligned}$$

Vậy  $z_0$  là điểm bất thường bỏ được.

- (ii) Giả sử  $z_0$  là cực điểm của hàm  $f$ , tức là  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Chọn  $0 < R_1 < R$  sao cho  $f(z) \neq 0$  với mọi  $0 < |z| < R_1$ . Do hàm  $f$  giải tích trên  $0 < |z| < R_1$ , nên hàm  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$  giải tích và khác không trên  $0 < |z| < R_1$  và  $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$ . Đặt  $\varphi(z_0) = 0$ . Theo chứng minh phần (i) ta suy ra được hàm  $\varphi$  giải tích trên hình tròn  $|z - z_0| < R_1$ . Vì vậy ta có khai triển Taylor của hàm  $\varphi$  trên  $|z - z_0| < R_1$  là

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} c'_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= (z - z_0)^m \psi(z)\end{aligned}$$

với  $m \geq 1$  và  $c'_m \neq 0$ . Ta thấy  $\psi(z)$  là hàm giải tích và khác không trên  $|z - z_0| < R_1$  và  $\psi(z_0) = c'_m$ . Do đó, ta có thể viết

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\psi(z)}.$$

Vì hàm  $\frac{1}{\psi(z)}$  giải tích trên  $|z - z_0| < R_1$ , nên ta có khai triển Taylor

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Đặc biệt  $c_0 = \frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{c'_m} \neq 0$ . Vậy với  $0 < |z - z_0| < R_1$  ta có

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Đây chính là khai triển Laurent của hàm  $f$  trên  $0 < |z - z_0| < R_1$ . Ta nhận thấy phần chính của chuỗi Laurent có hữu hạn số hạng và hệ số của  $(z - z_0)^{-m}$  là  $c_0 \neq 0$  với  $m \geq 1$ .

Ngược lại, giả sử khai triển Laurent của hàm  $f$  trong miền  $0 < |z - z_0| < R$  là  $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  với  $m \geq 1$  và  $c_{-m} \neq 0$ . Suy ra

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n} (z - z_0)^n.$$

Ta có  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-m+n} (z - z_0)^n = c_{-m} \neq 0$  và  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m = 0$ . Suy ra

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(z - z_0)^m}{(z - z_0)^m} = \infty.$$

Vậy  $z = z_0$  là cực điểm hàm  $f$ .

- (iii) Nếu  $z_0$  là điểm bất thường cốt yếu thì theo kết quả ở phần (i) và (ii) ta phải có phần chính trong khai triển Laurent trong lân cận thủng của  $z_0$  có vô số số hạng khác 0.

Ngược lại, nếu phần chính của khai triển Laurent trong lân cận thủng của  $z_0$  có vô hạn số hạng khác 0 ta phải có  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  không tồn tại trong  $\bar{\mathbb{C}}$ . Nghĩa là  $z_0$  là điểm bất thường cốt yếu của  $f$ .  $\square$

**3.17 Định nghĩa.** Giả sử  $z_0$  là cực điểm của hàm  $f$ . Khi đó, chỉ số  $m$  lớn nhất sao cho hệ số  $c_{-m}$  của  $(z - z_0)^{-m}$  trong khai triển Laurent của

hàm  $f$  trong lân cận thủng của  $z_0$  khác không được gọi là **cấp của cực điểm**  $z_0$ .

**3.18 Nhận xét.** Trong phần chứng minh (ii) của định lý trên ta thấy có kết quả sau: Nếu  $z_0$  là cực điểm cấp  $m$  của hàm  $f$ , thì ta có thể viết  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$  trong đó  $\phi(z)$  là hàm giải tích tại  $z_0$  và  $\phi(z_0) \neq 0$ . Hơn nữa, điều ngược lại cũng đúng. Ta phát biểu kết quả trong định lý sau.

**3.19 Định lý.** *Điểm bất thường cô lập  $z_0$  là cực điểm cấp  $m$  của hàm  $f$  khi và chỉ khi  $f$  có thể được viết dưới dạng*

$$(3.20) \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

trong đó  $\phi(z)$  là hàm giải tích tại  $z_0$  và  $\phi(z_0) \neq 0$ .

Từ kết quả này ta có mối liên hệ giữa khái niệm không-điểm và khái niệm cực điểm như sau.

**3.21 Định lý.** *Cho  $p$  và  $q$  là hai hàm giải tích tại  $z_0$  và  $p(z_0) \neq 0$ . Khi đó,  $z_0$  là không điểm cấp  $m$  của  $q$  khi và chỉ khi  $z_0$  là cực điểm cấp  $m$  của  $p(z)/q(z)$ .*

*Chứng minh.* Giả sử  $z_0$  là không điểm cấp  $m$  của  $q$ . Khi đó, tồn tại hàm  $\varphi(z)$  giải tích tại  $z_0$  và  $\varphi(z_0) \neq 0$  sao cho  $q(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ .

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/\varphi(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Ta thấy  $p(z)/\varphi(z)$  là hàm giải tích tại  $z_0$  và  $p(z_0)/\varphi(z_0) \neq 0$ . Điều đó kéo theo  $z_0$  là cực điểm cấp  $m$  của  $p(z)/q(z)$ .

Ngược lại, giả sử  $z_0$  là cực điểm cấp  $m$  của  $p(z)/q(z)$ . Khi đó, tồn tại hàm  $\phi(z)$  giải tích và khác 0 tại  $z_0$  sao cho

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Ta viết lại được  $q(z) = \frac{p(z)}{\phi(z)}(z - z_0)^m$ . Do  $p(z)/\phi(z)$  giải tích tại  $z_0$  và  $p(z_0)/\phi(z_0) \neq 0$ , nên suy ra được  $z_0$  là không điểm cấp  $m$  của hàm  $q$ .  $\square$

**3.22 Thí dụ. (1)** Xét điểm bất thường  $z = 0$  của hàm  $\frac{\sin z}{z}$ . Ta có khai triển

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Vậy ta có khai triển Laurent của hàm  $\frac{\sin z}{z}$  trên  $0 < |z| < \infty$  là

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Vậy phần chính của chuỗi Laurent bằng 0, nên  $z = 0$  là điểm bất thường bỏ được. Hơn nữa, ta thấy  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ . Như vậy, hàm  $\frac{\sin z}{z}$  có thể mở rộng thành hàm giải tích trên  $\mathbb{C}$ , đó chính là hàm

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{khi } z \neq 0 \\ 1 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$$

**(2)** Xét điểm bất thường  $z = 0$  của hàm  $\frac{\cos z}{z^2}$ . Ta có khai triển

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Vậy khai triển Laurent của hàm  $\frac{\cos z}{z^2}$  trên miền  $0 < |z| < \infty$  là

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}.$$

Vậy phần chính của chuỗi Laurent là  $\frac{1}{z^2}$ . Do đó,  $z = 0$  là cực điểm cấp 2.

**(3)** Xét điểm bất thường  $z = 0$  của hàm  $e^{\frac{1}{z}}$ . Ta có khai triển Laurent của  $e^{\frac{1}{z}}$  trên  $0 < |z| < \infty$  là

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

Như vậy, phần chính của chuỗi Laurent có vô số số hạng khác không, nên  $z = 0$  là điểm bất thường cốt yếu của hàm  $e^{\frac{1}{z}}$ .  $\square$

## Điểm bất thường cô lập $\infty$

**3.23 Định nghĩa.** Điểm  $\infty$  được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm giải tích  $f(z)$  trên  $D = \{z : |z| > R\}$  nếu 0 là điểm bất thường cô lập của hàm  $g(z) = f(\frac{1}{z})$ , nghĩa là hàm  $f$  không giải tích tại điểm  $z = \infty$ .

Trong trường hợp định nghĩa trên hàm  $f(\frac{1}{z})$  giải tích trong hình vành khăn xác định bởi  $0 < |z| < \frac{1}{R}$  và khai triển Laurent của nó gọi là khai triển Laurent của hàm  $f(z)$  tại  $\infty$  trong vành khăn  $R < |z| < \infty$  và ta được chuỗi Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Đây cũng chính là khai triển Laurent của hàm  $f(z)$  tại 0 trong hình vành khăn  $D$  xác định bởi  $R < |z| < \infty$ , nhưng có điểm khác biệt quan trọng là chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  là phần chính và chuỗi  $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$  là phần đều của khai triển Laurent tại  $\infty$  trong hình vành khăn  $D$ .

Phân loại tính bất thường của điểm bất thường cô lập  $\infty$  được suy tương ứng từ phân loại tính bất thường của điểm 0 đối với hàm  $f(\frac{1}{z})$ . Như vậy, với kết quả ở phần trước ta có

- Nếu tồn tại  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$  thì  $\infty$  là *điểm bất thường bỏ được* của hàm  $f(z)$  và ta có thể mở rộng giải tích hàm  $f$  đến  $\infty$ .
- Nếu  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  thì tồn tại  $m > 0$  để  $c_n = 0$  với mọi  $n > m$  và  $c_m \neq 0$ . Khi đó,  $\infty$  là *cực điểm cấp  $m$*  của hàm  $f(z)$ .
- Nếu không tồn tại giới hạn  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  trong  $\overline{\mathbb{C}}$  thì có vô số  $m > 0$  để  $c_m \neq 0$  và điểm  $\infty$  được gọi là *điểm bất thường cốt yếu* của  $f(z)$ .

**3.24 Thí dụ.** Điểm  $z = \infty$  là cực điểm của mọi đa thức khác hằng số. Bậc của cực điểm chính là bậc của đa thức.  $\square$

**3.25 Thí dụ. (hàm nguyên)** Ta biết rằng hàm nguyên giải tích trong toàn mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$ . Như vậy, theo Định lý Taylor trang 219 mọi hàm nguyên đều có khai triển MacLaurin trên  $\mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ta xét tính bất thường của điểm  $\infty$  đối với hàm nguyên.

- (a) Tồn tại  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$ , nói cách khác  $\infty$  là điểm bất thường bỏ được của  $f$ . Khi đó,  $f$  bị chặn trên  $\mathbb{C}$  nên theo Định lý Liouville trang 181  $f$  là hàm hằng.
- (b) Giả sử  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ . Khi đó, khai triển Laurent của  $f$  tại  $\infty$  có phần chính là một đa thức

$$g(z) = \sum_{k=1}^m c_k z^k.$$

Do đa thức cũng là một hàm nguyên nên hiệu  $\varphi(z) = f(z) - g(z)$  cũng là hàm nguyên và  $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_0$  là hệ số  $c_0$  trong khai triển Laurent của  $f$  tại  $\infty$  ở trên. Do đó, theo trường hợp trên  $\varphi(z)$  là hàm hằng, hay  $f(z) - g(z) = \text{const}$ . Vậy  $f$  là một đa thức.

- (c) Giả sử  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  không tồn tại trong  $\overline{\mathbb{C}}$ . Trường hợp này ta gọi  $f$  là hàm siêu việt. □

**3.26 Định lý.** Điểm  $\infty$  là điểm bất thường cốt yếu của hàm giải tích  $f$  nếu và chỉ nếu  $f(\{z : |z| > R\}) = \mathbb{C}$  với mọi  $R$ .

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

## Bài tập

1) Điểm  $z_0$  là không điểm cấp  $k$  đối với  $f(z)$  và là không điểm cấp  $l$  đối với  $\varphi(z)$ . Nếu  $f$  và  $\varphi$  giải tích tại  $z_0$ , hãy xét tính không điểm của  $z_0$  và cấp của nó đối với các hàm sau

(a)  $f(z)\varphi(z)$                       (b)  $f(z) + \varphi(z)$                       (c)  $\frac{f(z)}{\varphi(z)}.$

2) Tìm cấp của không điểm  $z = 0$  đối với các hàm

(a)  $z^2(e^{z^2} - 1)$                       (b)  $1 - \cos z$

(c)  $z \sin z$

(d)  $6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$

3) Tìm các không-điểm và cực điểm của các hàm số sau (nếu có). Xác định cấp của chúng.

(a)  $z^2 + 9$  (b)  $\frac{z^2 + 9}{z^4}$  (c)  $\frac{\sin z}{z^2}$  (d)  $(z^2 - 4)^3$  (e)  $\sin z^3$

4) Tìm các điểm bất thường bỏ được của các hàm sau:

(a)  $\frac{z}{\tan z}$  (b)  $\frac{1 - \cos z}{z^2}$  (c)  $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}$  (d)  $\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{1}{(z - \frac{\pi}{2})^2}$

5) Chứng minh rằng nếu  $f$  giải tích trong một lân cận thủng của  $z_0$  và liên tục tại  $z_0$  thì  $f$  giải tích tại  $z_0$ .

6) Chứng minh rằng các hàm sau là hàm nguyên

(a)  $f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{khi } z \neq 0 \\ 1 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$  (b)  $f(z) = \begin{cases} \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}} & \text{khi } z \neq \pm \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\pi} & \text{khi } z = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$

7) (Nguyên lý thác triển giải tích) Giả sử  $f$  và  $g$  là hai hàm giải tích trong tập mở liên thông  $D$ . Chứng minh rằng nếu tồn tại tập mở khác rỗng  $U \subset D$  sao cho  $f|_U = g|_U$  thì  $f = g$ . Cho một phản ví dụ trong trường hợp  $D$  không là tập liên thông.

8) Cho  $f$  là một hàm giải tích trên  $D$  và  $z_0$  là điểm trong của  $D$ . Chứng minh rằng nếu  $f$  không là hàm hằng thì tồn tại  $r > 0$  sao cho  $\{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$  và  $f(z) \neq f(z_0)$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| = r$ .

9) Cho  $f$  là một hàm giải tích và không là hàm hằng trong một lân cận của không-điểm  $z_0$  (của  $f$ ). Chứng minh rằng tồn tại  $r > 0$  sao cho  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $0 < |z - z_0| \leq r$ .

10) Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  giải tích trên miền đóng đơn liên  $D$  với biên là một đường cong đơn kín  $C$ , ngoại trừ các cực điểm bên trong  $C$  nếu có, và nếu tất cả không điểm của  $f$  trên  $D$  là bên trong  $C$  và có cấp hữu hạn, thì số không điểm của  $f$  phải là hữu hạn.

11) Cho  $D$  là miền đóng giới hạn bởi đường cong đơn  $C$ . Chứng minh rằng nếu hàm  $f$  giải tích trên  $D$  trừ các cực điểm bên trong  $C$ , thì số các cực điểm ấy phải là hữu hạn.



12) Chứng minh Định lý 3.26.

13) Xây dựng các hàm số có trong mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$

(a) Cực điểm cấp 2 tại  $\infty$ .

(b) Cực điểm cấp 2 tại  $z = 0$  với phần chính bằng  $\frac{c-2}{z^2}$  và cực điểm đơn tại  $\infty$ .

14) Tìm dạng tổng quát của hàm số với tính chất

(a) Có một cực điểm đơn trên  $\mathbb{C}$ .

(b) Có một cực điểm cấp  $n$ .

(c) Cực điểm cấp 2 tại  $z = 0$  với phần chính có khai triển dạng  $\frac{1}{z^2}$ .

(d) Cực điểm cấp  $n$  tại  $z = 0$  và cực điểm cấp  $m$  tại  $\infty$ .

15) Cho  $f$  là một hàm phân hình. Chứng minh rằng nếu  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$  thì  $f$  được viết dưới dạng

$$f(z) = \frac{p(z)}{\prod_{j=1}^k (z - z_j)^{m_j}}$$

trong đó  $p(z)$  là một đa thức.

## § 4 Thặng dư và cách tính thặng dư

### Khái niệm thặng dư

**4.1 Định nghĩa.** Giả sử hàm  $f$  giải tích trong lân cận thủng của điểm  $z_0$ . Khi đó, hệ số  $c_{-1}$  của chuỗi Laurent của hàm  $f$  trong lân cận thủng ấy được gọi là **thặng dư** của hàm  $f$  tại  $z_0$  và ký hiệu  $\text{Res}(f, z_0)$ .

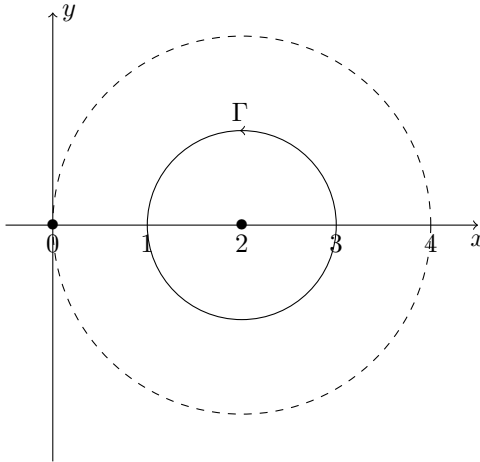
**4.2 Nhận xét.** Từ định nghĩa thặng dư của hàm  $f$  và công thức (2.6) ta thấy: nếu  $\Gamma$  là đường cong Jordan kín trơn từng khúc bao quanh điểm  $z_0$  sao cho hàm  $f$  giải tích trên  $\Gamma$  và tại các điểm bên trong  $\Gamma$  trừ điểm  $z_0$ , thì

$$(4.3) \quad \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz \quad \text{hay} \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$



Hình VII.6:

**4.4 Thí dụ.** Xét tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-2)^4}$  trong đó  $\Gamma$  là đường tròn định hướng dương  $|z-2|=1$ . Ta thấy hàm dưới dấu tích phân giải tích tại mọi điểm trừ hai điểm  $z=0$  và  $z=2$ , nên nó có chuỗi Laurent trong hình tròn thủng  $0 < |z-2| < 2$ . Theo nhận xét trên, tích phân cần tính bằng  $2\pi i$  nhân với thặng dư của hàm  $\frac{1}{z(z-2)^4}$  tại điểm  $z=2$ . Để xác định thặng dư ấy ta tìm chuỗi Laurent của hàm dưới dấu tích phân trong miền  $0 < |z-2| < 2$ . Ta có



Hình VII.7:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-2)^4} &= \frac{1}{(z-2)^4} \frac{1}{2+z-2} = \frac{1}{2(z-2)^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-4}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Hệ số của  $\frac{1}{z-2}$  trong chuỗi trên là thặng dư cần tìm, nó là  $\frac{-1}{2^4}$ . Vậy

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \frac{-1}{16} = -\frac{\pi i}{8}. \quad \square$$

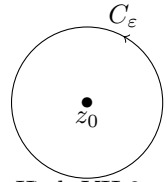
### Cách tính thặng dư

**4.5 Định lý.** Giả sử  $z_0$  là cực điểm của hàm  $f$  và hàm  $f$  được viết ở dạng

$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ , trong đó  $\phi(z)$  giải tích và khác không tại  $z_0$ . Khi đó,

$$(4.6) \quad \text{Res}(f(z), z_0) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

*Chứng minh.* Do hàm  $\phi(z)$  giải tích và khác không tại  $z_0$ , nên tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  sao cho  $\phi(z)$  giải tích trên  $\{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ . Gọi  $C_\varepsilon$  là đường tròn được định hướng dương có phương trình  $|z - z_0| = \varepsilon$ . Theo công thức tích phân Cauchy ta có



Hình VII.8:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m} dz \\ &= \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \end{aligned} \quad \square$$

**4.7 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ . Tại  $z_0 = 1$ , ta viết lại hàm  $f$  như sau  $f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{z-1}$ . Do đó, ta có

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z(z-1)}, 1\right) = \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = 1. \quad \square$$

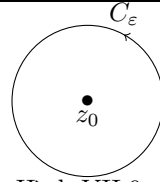
**4.8 Định lý.** Cho hai hàm số  $p$  và  $q$  giải tích tại điểm  $z_0$ . Nếu  $p(z_0) \neq 0$ ,  $q(z_0) = 0$  và  $q'(z_0) \neq 0$ , thì

$$(4.9) \quad \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_0\right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

*Chứng minh.* Do hàm  $q(z)$  giải tích tại  $z_0$  và  $q(z_0) = 0$ ,  $q'(z_0) \neq 0$ , nên  $q(z)$  có khai triển Taylor tại  $z_0$  là

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)\varphi(z).$$

Trong đó  $\varphi(z)$  là hàm giải tích tại  $z_0$  và  $\varphi(z_0) = q'(z_0) \neq 0$ . Do đó, ta có thể chọn được  $\varepsilon > 0$  đủ nhỏ sao cho hàm  $\frac{p(z)}{\varphi(z)}$  giải tích trên  $\{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ . Gọi  $C_\varepsilon$  là đường tròn được định hướng dương có phương trình  $|z - z_0| = \varepsilon$ . Theo công thức tích phân Cauchy ta có



Hình VII.9:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_0\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{p(z)}{q(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{\frac{p(z)}{\varphi(z)}}{z - z_0} dz \\ &= \frac{p(z_0)}{\varphi(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

**4.10 Thí dụ.** Tính thặng dư của hàm  $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$  tại  $z = i$ . Ta có

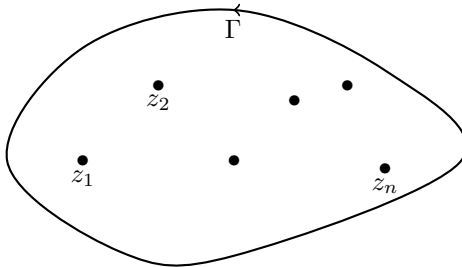
$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, i\right) = \frac{z^2 - 1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{-2}{2i} = i.$$

□

## Dùng thặng dư tính tích phân

**4.11 Định lý. (Thặng dư Cauchy)** Giả sử  $\Gamma$  là đường cong Jordan trơn kín được định hướng dương. Nếu hàm  $f$  chỉ có hữu hạn điểm bất thường cô lập  $z_1, \dots, z_n$  và hàm  $f$  giải tích tại các điểm còn lại trong  $\Gamma$ , thì

$$(4.12) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z), z_k).$$

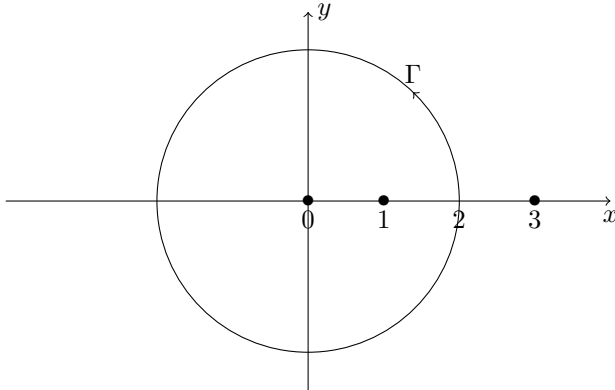


Hình VII.10:

*Chứng minh.* Cho các điểm  $z_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) là tâm các đường tròn định hướng dương  $\Gamma_k$  với bán kính đủ nhỏ sao cho chúng ở bên trong đường cong  $\Gamma$  và đôi một không có điểm chung. Đường cong  $\Gamma$  cùng với các đường tròn  $\Gamma_k$  tạo thành một miền đa liên mà hàm  $f$  giải tích trên nó và trên biên của nó. Do đó, theo định lý Cauchy-Goursat cho miền đa liên và nhận xét của định nghĩa thặng dư, ta có

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_k). \quad \square$$

**4.13 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^3 - 4z^2 + 3z} dz$  trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương. Ta nhận thấy hàm  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 4z^2 + 3z}$  giải tích trong đường tròn  $|z| = 2$  trừ hai điểm cô lập  $z = 0$  và  $z = 1$ . Do đó, ta được

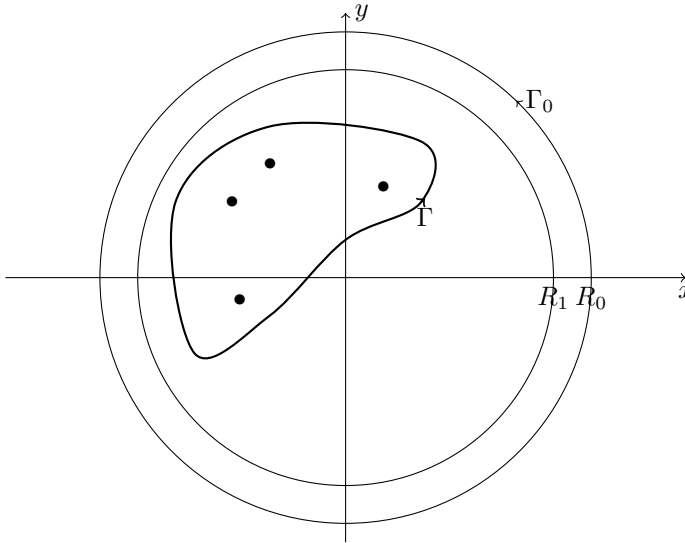


Hình VII.11:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{z^2 + 1}{z^3 - 4z^2 + 3z} dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), 1)) \\ &= 2\pi i \left( \frac{z^2 + 1}{3z^2 - 8z + 3} \Big|_{z=0} + \frac{z^2 + 1}{3z^2 - 8z + 3} \Big|_{z=1} \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{-2} \right) \\ &= -\frac{4\pi i}{3}. \end{aligned} \quad \square$$

**4.14 Định lý.** Nếu hàm  $f$  giải tích tại mọi điểm trừ hữu hạn các điểm bất thường cô lập và  $\Gamma$  là đường cong Jordan trơn kín bao quanh các điểm bất thường cô lập đó, thì

$$(4.15) \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right).$$



Hình VII.12:

*Chứng minh.* Trước tiên, ta vẽ một đường tròn có phương trình  $|z| = R_1$  với bán kính  $R_1$  đủ lớn sao cho nó chứa đường cong  $\Gamma$  bên trong. Theo giả thiết ta có hàm  $f$  giải tích trên miền xác định bởi  $R_1 < |z| < \infty$  nên nó có chuỗi Laurent trên miền đó, cụ thể là

$$(4.16) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{với } R_1 < |z| < \infty$$

ở đó  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$  với  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  và  $\Gamma_0$  là đường tròn định hướng dương có phương trình  $|z| = R_0$  với  $R_0 > R_1$ . Đặc biệt, với  $n = -1$  ta có

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Mặt khác, từ chuỗi Laurent (4.16) ta có thể khai triển

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} \quad \text{với } 0 < |z| < \frac{1}{R_1}.$$

Đây chính là chuỗi Laurent của hàm  $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$  trên miền  $0 < |z| < \frac{1}{R_1}$ . Ta nhận thấy  $c_{-1}$  là hệ số của  $\frac{1}{z}$  trong chuỗi trên, nên nó là thặng dư của hàm  $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$  tại  $z = 0$ , nghĩa là  $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = c_{-1}$ . Do đó,

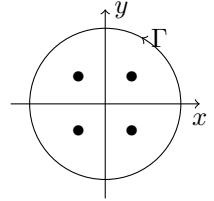
$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Bây giờ ta áp dụng định lý Cauchy-Goursat cho miền nhị liên xác định bởi hai đường cong  $\Gamma$  và  $\Gamma_0$ , ta được  $\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz$ . Từ đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh.  $\square$

**4.17 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.

Hàm  $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$  chỉ không giải tích tại bốn điểm nằm trong đường tròn  $|z| = 2$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1} &= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{z^2} \frac{1}{\frac{1}{z^4} + 1}, 0\right) \\ &= 2\pi i \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^4 + 1}, 0\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$



Hình VII.13:

$\square$

**4.18 Định lý.** Nếu  $f$  giải tích tại  $\infty$  thì

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)],$$

trong đó  $\Gamma$  là đường cong Jordan kín đủ lớn để  $f$  giải tích ngoài  $\Gamma$ .

*Chứng minh.* Theo Định lý 4.14 ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz = \text{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Vì  $f$  giải tích tại  $\infty$ , nghĩa là  $f(\frac{1}{z})$  giải tích tại 0 nên khai triển của  $f(z)$  tại  $\infty$  là

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n \quad \text{hay} \quad f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^n.$$

Khi đó, ta có  $f(\infty) = c_0$ ,  $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} z^{n-2}$  và

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)] &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{z^n} - c_0 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^{n-1}} \\ &= c_{-1} \\ &= \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz. \end{aligned} \quad \square$$

**4.19 Hệ quả.** Nếu  $\infty$  là không điểm bậc  $m > 1$  của hàm  $f(z)$  tức là 0 là không điểm cấp  $m$  của hàm  $f(\frac{1}{z})$  thì  $c_0 = c_{-1} = \dots = c_{-m+1} = 0$  và do đó

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Nếu  $m = 1$  tức là  $c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$  thì

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z).$$

*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

## Bài tập

1) Tính thặng dư của các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập của chúng

$$(a) \frac{1}{z^3 - z^5} \quad (b) \frac{z^{2n}}{1 + z^n} \quad (c) \frac{\sin 2z}{(z+1)^3} \quad (d) \tan z$$



2) Tính thặng dư của các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập của chúng

(a)  $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$     (b)  $\frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)}$     (c)  $z^n \sin \frac{1}{z}$  với  $n \in \mathbb{N}$     (d)  $\frac{1}{\sin z}$

3) Dùng thặng dư để tính các tích phân sau.

(a)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 1}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z - 1| = 1$  được định hướng dương.

(b)  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - 3)(z^5 - 1)}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 2$  được định hướng dương.

(c)  $\int_{\Gamma} \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  được định hướng dương.

(d)  $\int_{\Gamma} \frac{z}{(z - 1)(z - 2)^2} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z - 2| = \frac{1}{2}$  được định hướng dương.

(e)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2 - 9)} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  được định hướng dương.

(f)  $\int_{\Gamma} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 2$  được định hướng dương.

(g)  $\int_{\Gamma} \sin \frac{1}{z} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  được định hướng dương.

(h)  $\int_{\Gamma} z^n e^{\frac{z}{2}} dz$ , trong đó  $n$  là số nguyên và  $\Gamma$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 1$  được định hướng dương.

4) Tính  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{zg(z)} dz$  ở đây  $\Gamma$  là đường cong Jordan kín giới hạn miền  $G$  chứa điểm  $z = 0$ . Các hàm  $f$  và  $g$  giải tích trên  $G$  liên tục trên  $\overline{G} = G \cup \Gamma$ ,  $g(z) \neq 0$  với mọi  $z \in C$  và  $g(z)$  có các không điểm đơn tại  $a_1, \dots, a_n$  thuộc  $G$ ,  $a_i \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

5) Chứng minh Hệ quả 4.19.

6) Gọi  $C_N$  là biên định hướng dương của hình vuông xác định bởi các đường  $x = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$  và  $y = \pm(N + \frac{1}{2})\pi$  ở đây  $N$  là một số nguyên dương.

Dùng thặng dư hãy tính tích phân  $\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z}$ . Sau đó dùng kết quả của bài tập 19 trang 144 để thu được kết quả  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

7) Tính tích phân  $\int_C \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 + 3}$  ở đây  $C$  là biên được định hướng dương của hình chữ nhật xác định bởi các đường  $x = \pm 2$ ,  $y = 0$  và  $y = 1$ .

8) Cho  $q(z)$  là hàm giải tích tại  $z_0$  thỏa  $q(z_0) = 0$  và  $q'(z_0) \neq 0$ . Chứng minh rằng  $z_0$  là cực điểm cấp 2 của hàm  $f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$  và  $\text{Res}(f(z), z_0) = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}$ . Sử dụng kết quả này hãy tính thặng dư của các hàm sau tại  $z = 0$

(a)  $f(z) = \csc^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}$

(b)  $f(z) = \frac{1}{(z + z^2)^2}$

## Chương VIII

# Ứng dụng lý thuyết thặng dư

### § 1 Tích tích phân suy rộng

**1.1** Trong giải tích thực, tích phân suy rộng của hàm số  $f$  xác định trên  $[a, \infty)$  được định nghĩa như sau

$$(1.2) \quad \int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Khi giới hạn ở vế phải tồn tại, ta nói tích phân suy rộng trên hội tụ về giới hạn ấy. Tương tự, ta cũng có tích phân suy rộng sau

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^a f(x)dx.$$

Nếu hàm  $f$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , ta có khái niệm tích phân suy rộng của hàm  $f$  trên  $(-\infty, \infty)$  được định nghĩa như sau

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx + \lim_{R' \rightarrow \infty} \int_{-R'}^0 f(x)dx.$$

Khi hai giới hạn của vế phải tồn tại, thì ta nói tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$  hội tụ về tổng hai giới hạn ấy.

**1.4 Định nghĩa.** Giá trị chính Cauchy của tích phân suy rộng

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  được định nghĩa bởi

$$(1.5) \quad \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx$$

với điều kiện giới hạn ở về phải tồn tại.

**1.6** Nếu tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  hội tụ, thì giá trị chính Cauchy của nó tồn tại, và giá trị đó chính là giá trị mà tích phân  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  hội tụ đến. Thật vậy, bởi vì

$$\int_{-R}^R f(x)dx = \int_{-R}^0 f(x)dx + \int_0^R f(x)dx$$

và giới hạn khi  $R \rightarrow \infty$  của mỗi tích phân ở về phải tồn tại khi  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  hội tụ. Tuy nhiên, sự tồn tại giá trị chính Cauchy của tích phân  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  không suy ra được tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  hội tụ.

**1.7 Thí dụ.** Ta thấy tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$  phân kỳ nhưng

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-R}^R = 0. \quad \square$$

Khi  $f$  là hàm chẵn trên  $\mathbb{R}$  ta có mệnh đề sau.

**1.8 Mệnh đề.** Nếu hàm  $f$  là hàm chẵn trên  $\mathbb{R}$  và giá trị chính Cauchy  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  tồn tại, thì hai tích phân suy rộng  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  và  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  hội tụ và

$$(1.9) \quad 2 \int_0^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

*Chứng minh.* Vì  $f$  là hàm chẵn và giá trị chính Cauchy  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  tồn tại, nên ta có

$$\int_0^R f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x)dx$$

và tích phân suy rộng  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  hội tụ về  $\frac{1}{2} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ . Hơn nữa, do tích phân  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  hội tụ và

$$\int_{-R'}^0 f(x)dx = \int_0^{R'} f(x)dx$$

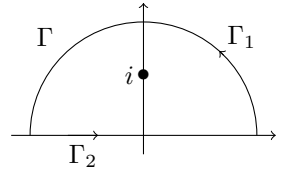
nên tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  hội tụ và bằng hai lần  $\int_0^{\infty} f(x)dx$ . Từ đó ta được đẳng thức phải chứng minh.  $\square$

Thí dụ sau mô tả phương pháp dùng thặng dư và sử dụng các kết quả trên để tính tích phân suy rộng của hàm  $f$ .

**1.10 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

*Giải.* Do  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  hội tụ nên

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}.$$



Xét tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ , trong đó  $\Gamma$  là biên của nửa hình tròn trên tâm  $z = 0$  bán kính  $R$  định hướng dương. Với  $R > 1$  ta có

Hình VIII.1:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2} &= \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{i2t}} dt + \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} = \pi - \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{i2t}} dt.$$

Với  $R > 1$ , ta ước lượng

$$\left| \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{i2t}} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{i2t}} \right| dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1} dt = \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

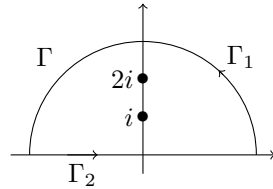
Do  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{R^2-1} = 0$  nên  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{i2t}} dt = 0$ . Vậy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad \text{hay} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \quad \square$$

**1.11 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ .

*Giải.* Do  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$  hội tụ nên

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}. \end{aligned}$$



Hình VIII.2:

Xét tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ , trong đó  $\Gamma$  là biên của nửa hình tròn trên tâm  $z = 0$  bán kính  $R$  định hướng dương. Với  $R > 2$  ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= 2\pi i \left[ \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right) \right] \\ &= 2\pi i \left( \frac{1}{3 \cdot 2i} + \frac{1}{-3 \cdot 4i} \right) \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \\ &= \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{i2t}+1)(R^2e^{i2t}+4)} dt + \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6} - \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{i2t}+1)(R^2e^{i2t}+4)} dt.$$

Với  $R > 2$ , ta ước lượng

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{i2t}+1)(R^2e^{i2t}+4)} dt \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{i2t}+1)(R^2e^{i2t}+4)} \right| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)} dt \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)}. \end{aligned}$$

Do  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} = 0$  nên

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{(R^2e^{i2t}+1)(R^2e^{i2t}+4)} dt = 0.$$

Vậy

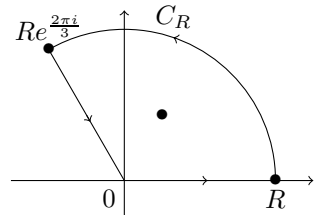
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

hay

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}. \quad \square$$

**1.12 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ .

*Giải.* Với tích phân suy rộng này ta không thể dùng miền như các ví dụ trên để tính tích phân bởi vì hàm  $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$  có cực điểm thực  $-1$ . Ta cần phải xét miền  $D = \{z = re^{i\varphi} : 0 < r < R, 0 < \varphi < \frac{2\pi}{3}\}$  với  $R > 1$ ; miền này chứa một cực điểm  $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  của hàm  $f$ . Vậy với biên  $\partial D$  định hướng dương, theo định lý thặng dư Cauchy ta có



Hình VIII.3:

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^3+1}, e^{i\frac{\pi}{3}} \right) = 2\pi i \frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i).$$

Ta tính tích phân về trái theo các đường cong thành phần

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^3+1} = \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \int_0^R \frac{dx}{x^3+1} - \int_0^R \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{t^3+1} dt,$$

suy ra

$$(1.13) \quad \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i) = \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}.$$

Ta có ước lượng

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} \right| \leq \frac{2\pi R}{3(R^3-1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Do đó, ta được  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^3+1} = 0$ . Từ đó, lấy giới hạn hai vế (1.13) khi  $R \rightarrow \infty$  ta được

$$\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} \quad \text{hay} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square$$

## Bài tập

1) Tính các tích phân suy rộng sau

$$(a) \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$(c) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$(d) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$$

$$(e) \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$(f) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \text{ là số tự nhiên}$$

$$(g) \int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1} dx$$

$$(h) \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx$$

$$(i) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$$

2) Cho  $a$  là một số thực và ký hiệu

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{a^2+1}+a} + i\sqrt{\sqrt{a^2+1}-a})$$



- (a) Chứng minh rằng  $\pm z_0, -\pm \bar{z}_0$  là các không điểm của  $(z^2 - a)^2 + 1$ .
- (b) Tìm các thặng dư của hàm  $\frac{1}{((z^2 - a)^2 + 1)^2}$  tại các cực điểm trong nửa trên mặt phẳng phức,  $\text{Im } z \geq 0$ .
- (c) Dùng thặng dư để tính tích phân và đưa đến công thức tích phân

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dx}{((x^2 - a)^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\pi}{8\sqrt{2(a^2 + 1)^3}} [(2a^2 + 3)\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} + a} + a\sqrt{\sqrt{a^2 + 1} - a}]. \end{aligned}$$

## § 2 Tính tích phân suy rộng có sin hoặc cos

Thặng dư có thể được dùng để tính tích phân suy rộng dạng

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx \quad \text{hay} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx$$

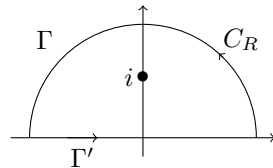
ở đó  $a$  là hằng số dương. Phương pháp dùng để tính tích phân suy rộng ở mục trước không thể áp dụng ở đây vì  $|\sin az|$  và  $|\cos az|$  không bị chặn khi  $|z| \rightarrow \infty$ . Sử dụng đẳng thức

$$\int_{-R}^R f(x) \cos ax dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin ax dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx$$

và chúng ta dùng thặng dư như ở mục trước để tính được tích phân cần tìm.

**2.2 Thí dụ.** Chúng ta sẽ chứng minh rằng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}$ .

Bởi vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên ta chỉ cần tìm giá trị chính Cauchy của tích phân suy rộng đã cho. Xét hàm  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ . Ta thấy hàm  $f(z)e^{i3z}$  giải tích trên tập xác định bởi  $\text{Im } z \geq 0$  trừ điểm  $z = i$ . Gọi  $\Gamma$  là biên của nửa trên hình tròn  $\{z : |z| \leq R, \text{Im } z \geq 0\}$  được định hướng dương. Với  $R > 1$  ta có



Hình VIII.4:  
được định hướng

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2}, i \right) = 2\pi i \left( \frac{e^{i3z}}{(z + i)^2} \right)' \Big|_i \\ &= 2\pi i \left( \frac{3ie^{i3z}(z + i)^2 - 2(z + i)e^{i3z}}{(z + i)^4} \right) \Big|_i \\ &= 2\pi i \frac{3ie^{-3}(2i)^2 - 2(2i)e^{-3}}{(2i)^4} \\ &= \frac{2\pi}{e^3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz,$$

trong đó  $C_R$  có biểu diễn tham số  $z = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$  và  $R > 1$ . Do đó, ta được

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

Khi  $z = x + iy$  với  $y \geq 0$  ta có  $|e^{i3z}| = |e^{-3y+i3x}| = e^{-3y} \leq 1$ , và  $z = Re^{it}$  với  $R > 1$  ta có

$$\left| \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{1}{(|z|^2 - 1)^2} = \frac{1}{(R^2 - 1)^2}.$$

Suy ra

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2}.$$

Do  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} = 0$  nên  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz = 0$ . Do đó,

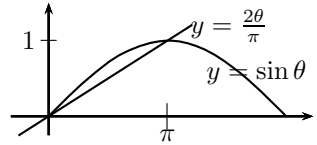
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{(z^2 + 1)^2} dz = \frac{2\pi}{e^3}.$$

$$\text{Vậy } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx = \operatorname{Re} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} dx \right) = \frac{2\pi}{e^3}. \quad \square$$

**2.3 Bổ đề. (Bất đẳng thức Jordan)** Với  $R > 0$ , ta có

$$\int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}.$$

*Chứng minh.* Khi  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ta có  $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$  (xét đồ thị của hai hàm ở hai vế). Suy ra với  $R > 0$  ta có  $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-R \frac{2\theta}{\pi}}$  khi  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Do đó,



Hình VIII.5:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2R} e^{-R \frac{2\theta}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \\ &< \frac{\pi}{2R}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R \sin(\pi-t)} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt < \frac{\pi}{2R}.$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta suy ra được bất đẳng thức Jordan.  $\square$

**2.4 Định lý.** Cho  $f$  là hàm giải tích trên nửa trên mặt phẳng phức ( $y \geq 0$ ) và ngoài đường tròn  $z = R_0 e^{i\theta}$ , và cho  $C_R$  là nửa đường tròn định hướng dương có biểu diễn tham số  $z = Re^{i\theta}$  với  $0 \leq \theta \leq \pi$  và  $R > R_0$ . Nếu tồn tại  $M_R$  sao cho với mọi  $z \in C_R$  ta có  $|f(z)| \leq M_R$  ở đó  $M_R$  tiến về 0 khi  $R$  dần ra  $\infty$ , thì

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (a > 0).$$

*Chứng minh.* Trước hết ta có

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{ia(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Vì

$$|f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}| \leq M_R R \quad \text{và} \quad |e^{iaRe^{i\theta}}| \leq e^{-aR \sin \theta},$$

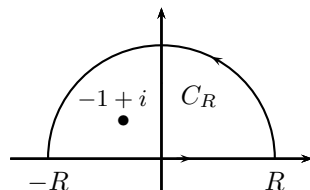
và từ bất đẳng thức Jordan, ta có

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^{\pi} M_R R e^{-aR \sin \theta} d\theta < M_R R \frac{\pi}{aR} = \frac{M_R \pi}{a}.$$

Theo giả thiết  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R \pi}{a} = 0$ . Suy ra  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$ .  $\square$

**2.5 Thí dụ.** Xét tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$ . Trong giải tích thực ta có thể chứng minh được tích phân suy rộng này hội tụ. Vì vậy để tính giá trị hội tụ ta chỉ cần tính giá trị chính Cauchy của nó.

Xét hàm  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z}{(z+1-i)(z+1+i)}$ ; hàm này giải tích trên nửa trên mặt phẳng phức ( $y \geq 0$ ) trừ điểm  $-1+i$ . Gọi  $\Gamma$  là biên của nửa



Hình VIII.6:

trên hình tròn  $\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  được định hướng dương với  $R > 3$ . Ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2}, -1 + i \right) \\ &= 2\pi i \frac{(-1 + i)e^{i(-1+i)}}{2i} \\ &= \pi(-1 + i)e^{-1-i}. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz,$$

trong đó  $C_R$  là nửa đường tròn có biểu diễn tham số  $w(\theta) = Re^{i\theta}$  với  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx &= \operatorname{Im} \left( \int_{-R}^R \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx \right) \\ &= \operatorname{Im}(\pi(-1 + i)e^{-1-i}) - \operatorname{Im} \left( \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz \right). \end{aligned}$$

Khi  $z \in C_R$ , ta có

$$|f(z)| = \left| \frac{z}{z^2 + 2z + 2} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 2R - 2}.$$

Do  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{R^2 - 2R - 2} = 0$  nên theo định lý trên ta có

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz = 0$$

suy ra

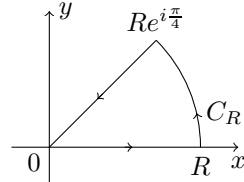
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left( \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 + 2z + 2} dz \right) = 0$$

Từ đó suy ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} (\cos 1 + \sin 1)$$

do  $\operatorname{Im}(\pi(-1 + i)e^{-1-i}) = \frac{\pi}{e} (\cos 1 + \sin 1)$ . □

**2.6 Thí dụ.** Ta xét hàm  $f(z) = e^{iz^2}$  và miền  $D$  xác định như hình bên. Hàm  $f$  giả tích trên  $D$  nên  $\int_{\partial D} e^{iz^2} dz = 0$ . Mặt khác, tích phân này được tính theo các đường cong thành phần như sau



Hình VIII.7:

$$\int_{\partial D} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz - \int_0^R e^{-t^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dt$$

suy ra

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Do đó, lấy giới hạn hai vế ta được

$$(2.7) \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \\ = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bên cạnh đó, ta có

$$\left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2t} R dt = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \theta} d\theta \leq \frac{R\pi}{4R^2},$$

bất đẳng thức cuối có được từ bất đẳng thức Jordan (trong phần chứng minh). Do đó, ta được  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$ . Từ đó ta nhận được kết quả

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

hay

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Hai tích phân thu được ở trên thường được gọi là *tích phân Fresnel*.  $\square$

## Bài tập

1) Tính các tích phân suy rộng sau

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx, \quad (a > 0)$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1} dx,$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 3} dx,$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + 4} dx,$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 4x + 20} dx,$$

$$(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx,$$

$$(g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2 + 4x + 5} dx,$$

$$(h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^2 + b^2}, \quad b > 0.$$

2) Tính các tích phân suy rộng sau

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx,$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx, \quad a > 0, b > 0$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^4 + 4} dx, \quad a > 0,$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin ax}{x^4 + 4} dx, \quad a > 0,$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx,$$

$$(f) \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

3) Bằng cách dùng hàm  $f(z) = e^{-z^2}$  và xét hình chữ nhật  $D$  xác định bởi bốn đỉnh  $a, a+bi, -a+bi, -a$  để suy ra được tích phân  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx$ .

### § 3 Tính tích phân xác định chứa sin và cos

Trong bài này chúng ta sẽ dùng thặng dư để tính tích phân xác định dạng

$$(3.1) \quad \int_0^{2\pi} F(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi$$

trong đó  $F$  là hàm hữu tỉ. Từ sự biến thiên của  $\varphi$  từ 0 đến  $2\pi$  gọi cho chúng ta xem  $\varphi$  là argument của một điểm  $z$  trên đường tròn đơn vị tâm tại gốc tọa độ, cho nên ta viết  $z = e^{i\varphi}$  với  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Mặt khác, từ  $z = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , suy ra  $z^{-1} = e^{i(-\varphi)} = \cos \varphi - i \sin \varphi$  và

$$(3.2) \quad \cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi.$$

Khi đó, tích phân (3.1) được viết lại

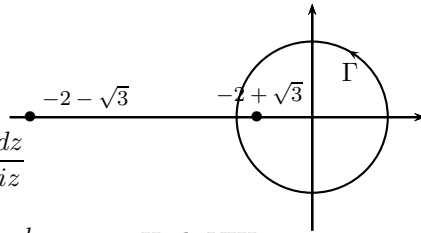
$$(3.3) \quad \int_{\Gamma} F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz},$$

trong đó  $\Gamma$  là đường tròn được định hướng dương có phương trình  $|z| = 1$ . Ngược lại, tích phân (3.1) chính là dạng tham số của tích phân trên. Dùng thặng dư để tính tích phân (3.3), từ đó ta thu được kết quả của (3.1).

**3.4 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos \varphi)^2}$ .

Với  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  (trong đó  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) và theo công thức (3.3) ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos \varphi)^2} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\left(2 + \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_{\Gamma} \frac{4z}{i(z^2 + 4z + 1)^2} dz, \end{aligned}$$



Hình VIII.8:

trong đó  $\Gamma$  là đường tròn đơn vị tâm tại  $z = 0$  được định hướng dương. Ta tính được

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{4z}{i(z^2 + 4z + 1)^2} dz &= \frac{2\pi i}{i} \operatorname{Res}\left(\frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2}, -2 + \sqrt{3}\right) \\ &= 2\pi \left(\frac{4z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2}\right)' \Big|_{-2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$



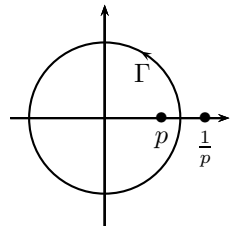
$$\begin{aligned}
&= 8\pi \frac{z + 2 + \sqrt{3} - 2z}{(z + 2 + \sqrt{3})^3} \Big|_{-2+\sqrt{3}} \\
&= 8\pi \frac{2\sqrt{3} - 2(-2 + \sqrt{3})}{(2\sqrt{3})^3} \\
&= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$$V_{\hat{a}Y} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos \varphi)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square$$

**3.5 Thí dụ.** Tính tích phân  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2}$  trong đó  $0 < p < 1$ .

Tương tự như thí dụ trên ta tính như sau

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{1 - 2p \frac{z+z^{-1}}{2} + p^2} \frac{dz}{iz} \\
&= i \int_{\Gamma} \frac{dz}{pz^2 - (p^2 + 1)z + p} \\
&= i \int_{\Gamma} \frac{dz}{(pz - 1)(z - p)} \\
&= -2\pi \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(pz - 1)(z - p)}, p \right) \\
&= \frac{2\pi}{1 - p^2}
\end{aligned}$$



Hình VIII.9:

(trong tích phân phức trên hàm dưới dấu tích phân có hai điểm bất thường cô lập  $p$  và  $\frac{1}{p}$ , nhưng chỉ có điểm  $p$  nằm trong đường tròn đơn vị  $\Gamma$ ).  $\square$

## Bài tập

Dùng thặng dư để tính tích phân xác định

1)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + \cos x)^2}$  với  $1 < a$ .

2)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sin x)^2}$

3)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + \sin x}$ .

4)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{5 - \cos 2\varphi} d\varphi$$

$$6) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \cos \varphi}.$$

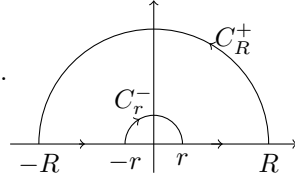
$$7) \int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} d\varphi, |a| < 1$$

$$8) \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi d\varphi, n = 1, 2, \dots$$

## § 4 Đường bị khoét lỗ

**4.1 Thí dụ.** Tính tích phân Euler  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .

Với mọi  $0 < r < R$ , ký hiệu  $C_r$  và  $C_R$  là các nửa đường tròn tâm 0 bán kính  $r$  và  $R$  nằm trong nửa mặt phẳng trên. Ký hiệu  $\Gamma$



Hình VIII.10:

là biên của miền  $G$  giới hạn bởi  $C_R$ ,  $C_r$  và các đoạn  $[-R, -r]$  và  $[r, R]$ .

Xét hàm  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ . Vì hàm  $f$  giải tích trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nên theo định lý

Cauchy-Goursat ta có  $\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ . Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \\ &= \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

Với mọi  $z \in C_R$  ta có  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{R} \rightarrow 0$  khi  $R \rightarrow \infty$ . Do đó, theo Định lý 2.4 ta có

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Khai triển Laurent của hàm  $f$  tại 0 là

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} z^n}{(n+1)!}.$$

Do đó, ta có

$$\int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r^-} \frac{dz}{z} + \int_{C_r^-} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} z^n}{(n+1)!} \right] dz.$$

Tính từng tích phân ta được

$$\int_{C_r^-} \frac{dz}{z} = - \int_0^\pi \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} d\varphi = -\pi i$$

và theo Định lý 2.12 trang 141 và Định lý 3.3 trang 145

$$\begin{aligned} \int_{C_r^-} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} z^n}{(n+1)!} \right] dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} \int_{C_r^-} z^n dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} (r^{n+1} - (-r)^{n+1}) \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra được

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} z^n}{(n+1)!} \right] dz = 0$$

và

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{dz}{z} = -\pi i.$$

Từ các kết quả trên cho  $r \rightarrow 0$  và  $R \rightarrow \infty$  ta được

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz + 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \right] \\ &= 0 - \pi i + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

Do đó, ta được

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

Trong thí dụ trên ta đã chứng minh

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i\pi = -i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz}}{z}, 0 \right).$$

Điều này đúng trong trường hợp tổng quát sau, và cách chứng minh cũng ngắn gọn hơn.

**4.2 Định lý.** Giả sử hàm  $f$  có cực điểm đơn tại  $z = 0$ . Khi đó,

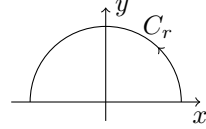
$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i\pi \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

với  $C_r$  có biểu diễn tham số  $w(t) = re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$ .

*Chứng minh.* Vì  $z = 0$  là cực điểm đơn nên  $f(z)$  có khai triển Laurent trong lân cận thủng điểm  $z = 0$  là

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{c_{-1}}{z} + g(z)$$

trong đó  $g(z)$  là hàm giải tích tại  $z = 0$ . Do đó, hàm  $g$  bị chặn trong lân cận của điểm  $z = 0$ , nghĩa là tồn tại  $r_0 > 0$  đủ nhỏ sao cho  $|g(z)| \leq M$  với mọi  $|z| \leq r_0$ . Khi đó, ta có



Hình VIII.11:

$$\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| \leq \pi r M \quad \text{với mọi } 0 < r \leq r_0.$$

Do đó, ta được  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} g(z) dz = 0$ . Từ đó ta tính được

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \int_{C_r} \frac{c_{-1}}{z} dz + \int_{C_r} g(z) dz \right) \\ &= c_{-1} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{r i e^{it}}{r e^{it}} dt + 0 \\ &= i\pi \operatorname{Res}(f(z), 0), \end{aligned}$$

do  $c_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), 0)$ . □

Hoàn toàn tương tự như định lý trên ta có kết quả tổng quát cho cực điểm đơn  $z_0$  của hàm  $f$ .

**4.3 Hệ quả.** Giả sử hàm  $f$  có cực điểm đơn tại  $z_0$ . Khi đó, ta có

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i\pi \operatorname{Res}(f(z), z_0)$$

trong đó  $C_r$  là nửa đường tròn có biểu diễn tham số  $w(t) = z_0 + r e^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$ .

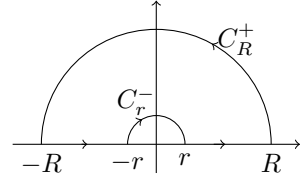
*Chứng minh.* Dành cho bạn đọc xem như bài tập. □

**4.4 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx$ .

*Giải.* Với nhánh hàm logarithm  $\log z$  xác định bởi  $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$  với  $-\frac{\pi}{2} <$

$\operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2}$ , ta xét hàm  $f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2}$ .

Hàm  $f$  giải tích trên miền  $D$  như hình vẽ với mọi  $0 < r < 2 < R$  trừ một cực điểm duy nhất  $2i$ . Do đó, theo định lý thặng dư Cauchy ta có



Hình VIII.12:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2}, 2i \right) \\ &= 2\pi i \left( \frac{\log z}{(z + 2i)^2} \right)''_{2i} \\ &= 2\pi i \frac{\frac{1}{z}(z + 2i)^2 - 2(z + 2i) \log z}{(z + 2i)^4} \Big|_{2i} \\ &= \pi \frac{\ln 2 - 1 + i\frac{\pi}{2}}{16}. \end{aligned}$$

Trong khi đó, tích phân về trái được biểu diễn như sau

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz &= \int_{C_R} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz + \int_{C_r^-} \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2} dz \\ &\quad + \int_r^R \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx - \int_{-r}^{-R} \frac{\ln(-x) + i\pi}{(x^2 + 4)^2} dx. \end{aligned}$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned} \pi \frac{\ln 2 - 1 + i\frac{\pi}{2}}{16} &= \int_{C_R} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz + \int_{C_r^-} \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2} dz \\ (4.5) \quad &\quad + 2 \int_r^R \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx + i\pi \int_r^R \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

Ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz \right| &\leq \frac{\ln R + \pi}{(R^2 - 4)^2} \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\ \left| \int_{C_r^-} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz \right| &\leq \frac{\ln r + \pi}{(4 - r)^2} \pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} dz = 0.$$

Do đó, lấy giới hạn hai vế (4.5) khi  $r \rightarrow 0$  và  $R \rightarrow \infty$  ta được

$$\pi \frac{\ln 2 - 1 + i\frac{\pi}{2}}{16} = 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}.$$

Do đó, ta được kết quả

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \pi \frac{\ln 2 - 1}{32} \quad \text{và} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{32}. \quad \square$$

## Bài tập

1) Tính các tích phân sau

(a)  $\int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \frac{\sin x}{x} dx$

(b)  $\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 4)} dx$

(c)  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + 9)^2} dx$

(d)  $\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx$

(e)  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}$

(f)  $\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2 + 1)^2} dx, -1 < a < 3$

(g)  $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} dx$

(h)  $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x} \ln x}{x^2 + 1} dx$

(i)  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$

(j)  $\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2 + 1} dx$

2) Chứng minh Hệ quả 4.3.

## § 5 Tích phân theo đường phân nhánh

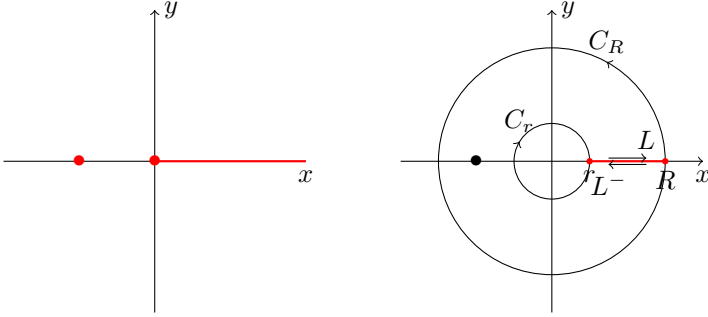
Định lý thặng dư Cauchy có thể được dùng để tính tích phân suy rộng thực khi một phần của đường lấy tích phân của hàm  $f(z)$  mà định lý được áp dụng nằm trên đường phân nhánh của hàm đó. Chúng ta bắt đầu bằng một ví dụ cụ thể.

**5.1 Thí dụ.** Xét tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$  với  $0 < a < 1$ . Ta nhận thấy tích phân này hội tụ vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)}}{\frac{1}{x^{a+1}}} = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^a(1+x)}}{\frac{1}{x^a}} = 1.$$

Hãy tính giá trị của tích phân suy rộng này.

*Giải.* Xét hàm  $f(z) = \frac{1}{z^a(1+z)}$  trong đó  $z = re^{i\varphi}$  với  $r > 0$  và  $0 < \varphi < 2\pi$ . Khi đó, nhánh của hàm lũy  $z^a$  là  $z^a = |z|^a e^{ia\varphi}$ ; và hàm  $f(z)$  giải tích trên miền xác định bởi mặt phẳng  $\mathbb{C}$  bỏ đi điểm  $z = -1$  và nửa đường thẳng thực đóng dương. Theo định lý thặng dư Cauchy tích phân của hàm



Hình VIII.13:

$f(z)$  xác định trên biên định hướng dương của miền đơn liên  $D$  xác định bởi hình vành khăn  $r < |z| < R$  với  $0 < r < 1 < R$  cắt bỏ đoạn  $r \leq x \leq R$  trên trục thực, ta có

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^a(1+z)} = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^a(1+z)}, -1 \right) = \frac{2\pi i}{(-1)^a} = \frac{2\pi i}{e^{ia\pi}}.$$

Gọi  $C_R$  là đường tròn  $|z| = R$  định hướng dương,  $C_r^-$  là đường tròn  $|z| = r$  định hướng âm,  $L$  là đường cắt phía trên,  $L^-$  là đường cắt phía dưới. Khi đó, ta có

$$(5.2) \quad \int_{\partial D} \frac{dz}{z^a(1+z)} = \int_{C_R} \frac{dz}{z^a(1+z)} + \int_{C_r^-} \frac{dz}{z^a(1+z)} + \int_L \frac{dz}{z^a(1+z)} + \int_{L^-} \frac{dz}{z^a(1+z)}.$$

Đầu tiên ta ước lượng hai tích phân đầu

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^a(1+z)} \right| &\leq \frac{2\pi R}{R^a(R-1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\ \left| \int_{C_r^-} \frac{dz}{z^a(1+z)} \right| &\leq \frac{2\pi r}{r^a(1-r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Do đó, ta được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^a(1+z)} = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{dz}{z^a(1+z)} = 0.$$

Tham số hóa hai tích phân sau của đẳng thức (5.2) ta được

$$\begin{aligned} \int_L \frac{dz}{z^a(1+z)} &= \int_r^R \frac{dx}{x^a(1+x)} \\ \int_{L^-} \frac{dz}{z^a(1+z)} &= - \int_r^R \frac{dx}{e^{i2a\pi} x^a(1+x)} \end{aligned}$$

Vậy với các kết quả vừa tìm được, lấy giới hạn hai vế (5.2) khi  $r \rightarrow 0$  và  $R \rightarrow \infty$  nhận được

$$\frac{2\pi i}{e^{ia\pi}} = (1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}.$$

Từ đó ta tính được tích phân suy rộng ban đầu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)} = \frac{2\pi i}{e^{ia\pi}(1 - e^{-i2a\pi})} = \frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \quad \square$$

**5.3 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$ .

*Giải.* Ta nhận thấy rằng tích phân suy rộng đã cho hội tụ. Từ hàm dưới dấu tích phân ta nghĩ ngay hàm phức cần xét là  $f(z) = \frac{\log(z)}{(1+z)^3}$  trong đó  $\log(z) = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$  với  $0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$ . Khi đó, hàm  $f$  giải tích trên  $D = \{z : r < |z| < R\} \setminus (\{-1\} \cup \{z = x + i0 : r \leq x \leq R\})$  với  $0 < r < 1 < R$ ; và  $f$  liên tục trên  $\partial D$ , trong đó đoạn  $[r, R]$  trên trục thực được hiểu bờ trên và bờ dưới, trong đó với bờ trên  $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3}$  và bờ dưới  $f(x) = \frac{\ln x + i2\pi}{(1+x)^3}$ . Do đó, theo định lý thặng dư Cauchy ta có

$$\int_{\partial D} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{\log(z)}{(1+z)^3}, -1 \right) = \frac{2\pi i}{2!} (\log(z))''_{-1} = -\pi i.$$

Tích phân ở vế trái được viết lại như sau

$$\begin{aligned} (5.4) \quad \int_{\partial D} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz &= \int_{C_R} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz + \int_{C_r^-} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz \\ &\quad + \int_L \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz + \int_{L^-} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz. \end{aligned}$$

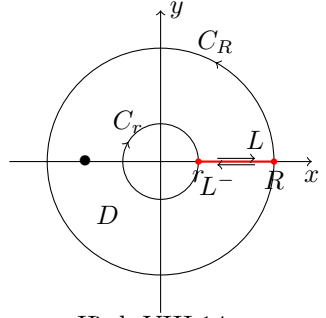


với các đường được mô tả ở hình bên. Do

$$|\log(z)| = \sqrt{\ln^2 |z| + \text{Arg}^2(z)} < \ln |z| + 2\pi, \text{ nên ta có}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz \right| \leq \frac{2\pi R(\ln R + 2\pi)}{(R-1)^3}$$

$$\left| \int_{C_r^-} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz \right| \leq \frac{2\pi r(\ln r + 2\pi)}{(1-r)^3}$$



Hình VIII.14:

Từ đó ta suy ra được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz = 0 \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz = 0.$$

Tham số hóa đường cong  $L$  và  $L^-$  để tính hai tích phân sau của (5.4) ta được

$$\int_L \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz = \int_r^R \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$$

$$\int_{L^-} \frac{\log(z)}{(1+z)^3} dz = - \int_r^R \frac{\ln x + i2\pi}{(1+x)^3} dx$$

Lấy giới hạn hai vế (5.4) khi  $r \rightarrow 0$  và  $R \rightarrow \infty$  cùng với các kết quả trên ta suy ra được

$$-i\pi = - \int_0^\infty \frac{i2\pi}{(1+x)^3} dx \quad \text{hay} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy, khi xét hàm  $f(z) = \frac{\log(z)}{(1+z)^3}$  ta không thu được tích phân cần tìm. Bây giờ ta xét hàm  $g(z) = \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3}$  có tính giải tích và liên tục tương tự như hàm  $f$ . Với miền  $D$  và biên  $\partial D$  như đã xét ở trên, theo định lý thặng dư Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz &= 2\pi i \text{Res} \left( \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3}, -1 \right) \\ &= \frac{2\pi i}{2!} (\log^2(z))''_{-1} \\ &= 2\pi i \frac{1 - \log z}{z^2} \Big|_{-1} \\ &= 2\pi i + 2\pi^2. \end{aligned}$$

Tích phân ở vế trái được viết lại như sau

$$(5.5) \quad \int_{\partial D} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz + \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz \\ + \int_L \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz + \int_{L^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz.$$

Do  $|\log^2(z)| = \ln^2|z| + \text{Arg}^2(z) < \ln^2|z| + 4\pi^2$ , nên ta có

$$\left| \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz \right| \leq \frac{2\pi R(\ln^2 R + 4\pi^2)}{(R-1)^3} \\ \left| \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz \right| \leq \frac{2\pi r(\ln^2 r + 4\pi^2)}{(1-r)^3}$$

Từ đó ta suy ra được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = 0 \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = 0.$$

Tham số hóa đường cong  $L$  và  $L^-$  để tính hai tích phân sau của (5.5) ta được

$$\int_L \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = \int_r^R \frac{\ln^2 x}{(1+x)^3} dx \\ \int_{L^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = - \int_r^R \frac{(\ln x + i2\pi)^2}{(1+x)^3} dx$$

Lấy giới hạn hai vế (5.5) khi  $r \rightarrow 0$  và  $R \rightarrow \infty$  cùng với các kết quả trên ta suy ra được

$$2\pi^2 + i2\pi = \int_0^\infty \frac{4\pi^2 - i4\pi \ln x}{(1+x)^3} dx.$$

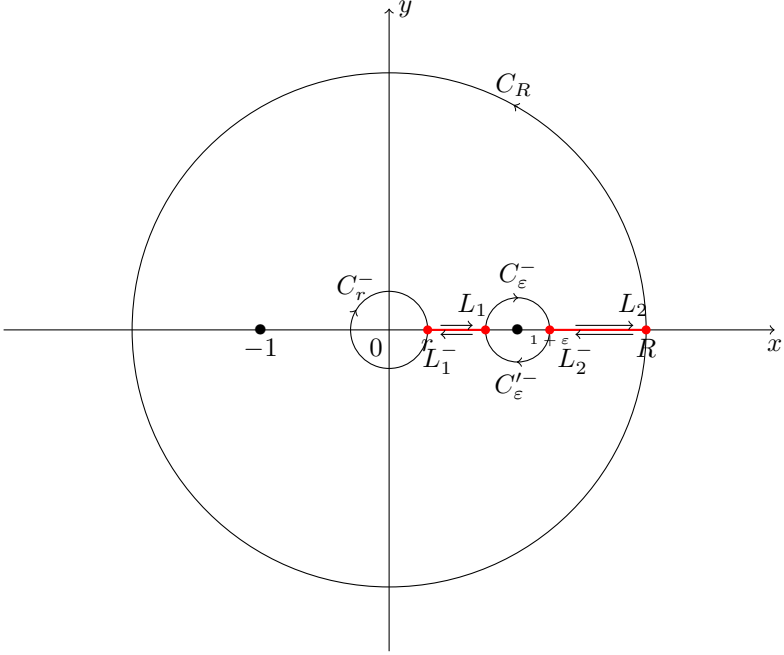
Suy ra

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy, khi dùng hàm  $g(z) = \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3}$  để áp dụng định lý thặng dư Cauchy ta tính được tích phân đã cho.  $\square$

**5.6 Thí dụ.** Tính tích phân suy rộng  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ .

*Giải.* Tích phân suy rộng đã cho thực sự hội tụ. Để tính tích phân này ta áp dụng cách tính tích phân hàm phức theo đường phân nhánh và đường khoét lõm. Cũng như ở ví dụ trên ta cần xét hàm  $f(z) = \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1}$  trong đó  $\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$  với  $0 < \operatorname{Arg}(z) < 2\pi$ . Với miền  $D$  và biên định



Hình VIII.15:

hướng dương  $\partial D$  của nó được biểu diễn như hình vẽ, hàm  $f$  thỏa điều kiện định lý thặng dư Cauchy, cho nên ta có

$$\int_{\partial D} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\log^2(z)}{z^2 - 1}, -1\right) = 2\pi i \frac{(i\pi)^2}{-2} = \pi^3 i.$$

Tích phân về trái được viết lại theo các thành phần của biên như sau

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz &= \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \\ &+ \int_{L_1 \cup L_2} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{L_1^- \cup L_2^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \\ &+ \int_{C_\epsilon^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{C_\epsilon'^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \end{aligned} \quad (5.7)$$

Do  $|\log^2(z)| = \ln^2|z| + \text{Arg}^2(z) < \ln^2|z| + 4\pi^2$ , nên ta có

$$\left| \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \right| \leq \frac{2\pi R(\ln^2 R + 4\pi^2)}{R^2 - 1}$$

$$\left| \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \right| \leq \frac{2\pi r(\ln^2 r + 4\pi^2)}{1 - r^3}$$

Từ đó ta suy ra được

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz = 0 \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz = 0.$$

Tham số hóa các đường cong  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_1^-$  và  $L_2^-$  để tính tích phân thứ ba và thứ tư của (5.7) ta được

$$\int_{L_1 \cup L_2} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = \int_r^{1-\varepsilon} \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{\ln^2 x}{x^2 - 1} dx$$

$$\int_{L_1^- \cup L_2^-} \frac{\log^2(z)}{(1+z)^3} dz = - \int_r^{1-\varepsilon} \frac{(\ln x + i2\pi)^2}{x^2 - 1} dx - \int_{1+\varepsilon}^R \frac{(\ln x + i2\pi)^2}{x^2 - 1} dx.$$

Tập thời chúng ta dùng ký hiệu  $\text{Log}(z) = \ln|z| + \text{Arg}(z)$  với  $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$ . Khi đó, hàm  $\text{Log}(z)$  giải tích tại 1 và  $\text{Log}(z) = \log(z)$  với mọi  $z \in C_\varepsilon^-$ ,  $\text{Log}(z) + i2\pi = \log(z)$  với mọi  $z \in C_\varepsilon'^-$ . Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{C_\varepsilon^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{C_\varepsilon'^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \\ &= \int_{C_\varepsilon^-} \frac{\text{Log}^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{C_\varepsilon'^-} \frac{(\text{Log} z + i2\pi)^2}{z^2 - 1} dz \\ &= \int_{C_\varepsilon^- \cup C_\varepsilon'^-} \frac{(\text{Log}(z) + i2\pi)^2}{z^2 - 1} dz - \int_{C_\varepsilon^-} \frac{4\pi i \text{Log}(z) - 4\pi^2}{z^2 - 1} dz \\ &= -2\pi i \text{Res} \left( \frac{(\text{Log}(z) + i2\pi)^2}{z^2 - 1}, 1 \right) + \int_{C_\varepsilon} \frac{4\pi i \text{Log}(z) - 4\pi^2}{z^2 - 1} dz \\ &= 4\pi^3 i + \int_{C_\varepsilon} \frac{4\pi i \text{Log}(z) - 4\pi^2}{z^2 - 1} dz \end{aligned}$$

Do đó, theo Hệ quả 4.3 ta suy ra được

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{C_\varepsilon^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz + \int_{C_\varepsilon'^-} \frac{\log^2(z)}{z^2 - 1} dz \right) \\
 = -4\pi^3 i + \pi i \operatorname{Res} \left( \frac{4\pi i \operatorname{Log}(z) - 4\pi^2}{z^2 - 1}, 1 \right) \\
 = 4\pi^3 i + \pi i - 2\pi^3 i \\
 = 2\pi^3 i
 \end{aligned}$$

Tổng hợp các kết quả thu được và lấy giới hạn phần ảo hai vế (5.7) khi  $r \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  ta được

$$\pi^3 = - \int_0^\infty \frac{4\pi \ln x}{x^2 - 1} dx + 2\pi^3 \quad \text{hay} \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}. \quad \square$$

## Bài tập

1) Hàm beta là hàm hai biến thực  $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$  với  $p > 0, q > 0$ . Bằng cách đổi biến bởi thay  $t = \frac{1}{x+1}$  hãy tính  $B(p, 1-p)$  với  $0 < p < 1$ .

2) Tính các tích phân

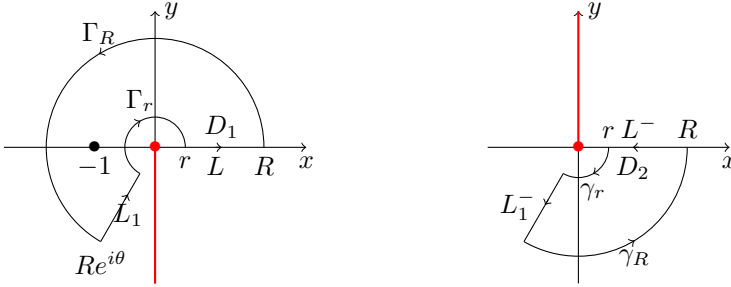
$$(a) \int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2 + a^2} dx \qquad (b) \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2} dx$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+a)(x+b)} dx, \quad a > b > 0$$

3) Bài tập này trình bày một cách giải thích việc tính tích phân theo tham số hóa trên các đường  $L$  và  $L^-$  trong đẳng thức (5.2) trong Thí dụ 5.1. Đặt

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z^a(1+z)} & |z| > 0, 0 < \operatorname{Arg} z < 2\pi \\
 f_1(z) &= \frac{1}{z^a(1+z)} & |z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2} \\
 f_2(z) &= \frac{1}{z^a(1+z)} & |z| > 0, \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \frac{5\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Xét hàm  $f_1$  trên miền  $D_1$  và  $f_2$  trên miền  $D_2$  trong đó  $D_1$  và  $D_2$  là hai phần của hình vành khăn  $r < |z| < R$  được cắt bởi hai tia từ 0 với góc 0 và  $\theta$  với  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  theo hình sau



Hình VIII.16:

(a) Với  $\partial D_1$  và  $\partial D_2$  lần lượt là biên định hướng dương của các miền  $D_1$  và  $D_2$ , hãy tính  $\int_{\partial D_1} f_1(z)dz$  và  $\int_{\partial D_2} f_2(z)dz$ .

(b) Chứng minh rằng  $\int_{L_1} f_1(z)dz = \int_{L_1} f_2(z)dz = \int_L f(z)dz$  và

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f_1(z)dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f_2(z)dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} f_1(z)dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f_2(z)dz = 0. \end{aligned}$$

(c) Với các kết quả trên và phương pháp như ở Thí dụ 5.1 hãy tính lại tích phân  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$ .

## § 6 Nguyên lý argument và định lý Rouché

### Nguyên lý argument

**6.1 Định lý.** Cho miền  $D$  và hàm  $f$  giải tích trên  $\bar{D}$  trừ đi một số hữu hạn các cực điểm của  $f$ . Nếu hàm  $f$  không nhận giá trị 0 trên biên  $\partial D$  thì hiệu số giữa số các không điểm và số các cực điểm của  $f$  bằng số vòng quay của hàm  $f(z)$  quanh 0 theo chiều dương khi  $z$  biến thiên một vòng trên  $\partial D$ .

*Chứng minh.* Gọi  $\Gamma$  là đường cong định hướng dương của biên  $\partial D$ . Ký hiệu  $\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$  là góc quay của  $f(z)$  khi  $z$  quay một vòng theo chiều dương trên  $\Gamma$ . Ta cần chứng minh

$$(6.2) \quad \Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) = 2\pi(N - P),$$

trong đó  $N$  là số không-điểm trong  $D$  và  $P$  là số cực điểm trong  $D$ . Ta sẽ chứng minh đẳng thức trên bằng cách tính tích phân của hàm  $f'(z)/f(z)$  trên đường cong  $\Gamma$  theo hai cách. Thứ nhất, cho  $z = z(t)$  với  $a \leq t \leq b$  là biểu diễn tham số của đường cong được định hướng  $\Gamma$ , suy ra

$$(6.3) \quad \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'(z(t))z'(t)}{f(z(t))} dt.$$

Theo giả thiết ta thấy ảnh  $\mathcal{C}$  của  $\Gamma$  qua ánh xạ  $w = f(z)$  không đi qua gốc tọa độ  $w = 0$  trong mặt phẳng phức  $w$ , nên ảnh của bất kỳ điểm  $z = z(t)$  trên  $\Gamma$  có thể biểu diễn ở dạng mũ là  $w = \rho(t)e^{i\phi(t)}$ . Nghĩa là đường cong định hướng  $\mathcal{C}$  có biểu diễn tham số  $f(z(t)) = \rho(t)e^{i\phi(t)}$  với  $a \leq t \leq b$ . Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f'(z(t))z'(t) &= \frac{d}{dt}(f(z(t))) \\ &= \frac{d}{dt}[\rho(t)e^{i\phi(t)}] \\ &= \rho'(t)e^{i\phi(t)} + i\rho(t)\phi'(t)e^{i\phi(t)}. \end{aligned}$$

Do  $f$  là hàm giải tích và khác không trên  $\Gamma$  nên  $f'$  cũng là hàm giải tích trên  $\Gamma$  và đường cong  $\Gamma$  được qui ước là đường cong trơn từng khúc nên các hàm số  $\rho'(t)$  và  $\phi'(t)$  liên tục từng khúc trên  $[a, b]$ . Từ các đẳng thức trên ta tính được tích phân (6.3) như sau

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\phi(t)} + i\rho(t)\phi'(t)e^{i\phi(t)}}{\rho(t)e^{i\phi(t)}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + i \int_a^b \phi'(t) dt \\ &= \ln |\rho(t)| \Big|_a^b + i\phi(t) \Big|_a^b \\ &= 0 + i(\phi(b) - \phi(a)) = i\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z) \end{aligned}$$

Thứ hai, chúng ta dùng định lý thặng dư Cauchy để tính tích phân trên. Ta thấy  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  giải tích bên trong và trên  $\Gamma$  trừ các điểm mà chúng là

không điểm hay cực điểm của hàm  $f(z)$ . Nếu  $z_0$  là không điểm bậc  $m_0$  của hàm  $f$ , thì ta có thể viết  $f(z) = (z - z_0)^{m_0}g(z)$  trong đó  $g(z)$  giải tích và khác không tại  $z_0$ . Do đó,

$$f'(z) = m_0(z - z_0)^{m_0-1}g(z) + (z - z_0)^{m_0}g'(z),$$

nên

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Do  $\frac{g'(z)}{g(z)}$  giải tích tại  $z_0$ , nên  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  có cực điểm đơn tại  $z_0$ , và thặng dư của nó tại  $z_0$  là  $\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = m_0$ . Mặt khác, nếu hàm  $f$  có  $z_0$  là cực điểm cấp  $m_p$ , thì chúng ta có thể viết  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^{m_p}}$  với  $\phi(z)$  là hàm giải tích và khác không tại  $z_0$ . Ta có

$$f'(z) = \frac{\phi'(z)(z - z_0)^{m_p} - m_p(z - z_0)^{m_p-1}\phi(z)}{(z - z_0)^{2m_p}},$$

suy ra

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} - \frac{m_p}{z - z_0}.$$

Do  $\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$  giải tích tại  $z_0$  nên  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  có cực điểm đơn tại  $z_0$  và thặng dư của nó tại  $z_0$  là  $-m_p$ . Từ kết quả xét các không điểm và cực điểm của hàm  $f$  và theo định lý thặng dư Cauchy ta có

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N - P).$$

Vậy từ hai cách tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  ta có  $\Delta_{\Gamma} \text{Arg } f(z) = 2\pi(N - P)$ . □

**6.4 Chú ý.** Trong chứng minh trên giá trị  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  còn được gọi là **thặng dư logarithm** của hàm  $f$ .

**6.5 Thí dụ.** Xét hàm  $f(z) = \frac{(2z-1)^7}{z^3}$ . Cho  $\Gamma$  là đường tròn tâm  $z = 0$  có bán kính  $R = 2$ . Khi đó, ta có  $N = 7$  và  $P = 3$ ; do đó  $\Delta_{\Gamma} \text{Arg } f(z) = 2\pi(N - P) = 8\pi$ . □



**6.6 Định lý. (Hurwitz)** Nếu các hàm  $f_n(z)$  giải tích và khác không trên miền  $D$  và  $\{f_n(z)\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  về hàm  $f$  thì  $f(z)$  hoặc là đồng nhất 0 hoặc là không bằng 0 trên  $D$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $f$  không đồng nhất 0 trên  $D$ . Do đó, theo định lý sự duy nhất của hàm giải tích các không điểm của  $f(z)$  trong  $D$  nếu có là các không điểm cô lập. Vậy với mọi  $z_0 \in D$  tồn tại  $r > 0$  sao cho  $f(z) \neq 0$  với mọi  $0 < |z - z_0| \leq r < d(z_0, \partial D)$ . Do đó,  $|f(z)|$  đạt giá trị nhỏ nhất dương trên đường tròn  $|z - z_0| = r$ , ký hiệu đường tròn này được định hướng dương là  $C$ . Nó kéo theo rằng dãy  $\{1/f_n(z)\}$  hội tụ đều trên  $C$  về hàm  $1/f(z)$ . Mặt khác, theo Định lý 6.4 trang 174 dãy  $\{f'_n(z)\}$  hội tụ đều về  $f'(z)$  trên mọi tập compact trong  $D$ . Do đó, dãy  $\{\frac{f'_n}{f_n}\}$  hội tụ đều về  $\frac{f'}{f}$  trên  $C$ . Từ đó theo kết quả tương tự Định lý 2.13 trang 141 ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Theo giả thiết  $\frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$  giải tích trên  $D$  nên các tích phân của vế trái bằng 0, vì thế tích phân của vế phải bằng 0 (hoặc ta có thể lập luận: do hàm  $f_n$  không có không điểm và cũng không có cực điểm trong  $C$ ). Theo nguyên lý argument tích phân của vế phải bằng  $2\pi i$  nhân với hiệu số không điểm và số số cực điểm của hàm  $f(z)$ . Nhưng hàm  $f(z)$  không có cực điểm trong  $C$ , cho nên nó cũng không có không điểm trong  $C$ . Đặc biệt, ta có  $f(z_0) \neq 0$ . Do đó,  $f(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$ .  $\square$

## Định lý Rouché

**6.7 Định lý.** Cho hai hàm  $f$  và  $g$  giải tích trên miền đóng  $\bar{D}$  đơn liên với biên là đường cong  $\Gamma$ . Nếu  $|f(z)| > |g(z)|$  với mọi  $z \in \Gamma$ , thì  $f(z)$  và  $f(z) + g(z)$  có số các không điểm bằng nhau trong miền  $D$  (đếm số bội).

*Chứng minh.* Với mọi  $z \in \Gamma$ , ta có  $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ , suy ra

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \quad \text{với mọi } z \in \Gamma.$$

Điều này chứng tỏ  $f(z)$  và  $f(z) + g(z)$  khác không trên  $\Gamma$ . Do đó, với mọi  $z \in \Gamma$ , ta có thể viết

$$f(z) + g(z) = f(z) \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$$

và

$$\operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

suy ra

$$\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) = \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) + \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Theo giả thiết ta thấy  $f + g$  và  $f$  không có cực điểm trên trong  $D$ , nên theo nguyên lý argument ta có

$$N(f + g) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(f(z) + g(z)) \quad \text{và} \quad N(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z).$$

Do đó, ta có

$$N(f + g) = N(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Mặt khác, ta có  $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$  với mọi  $z \in \Gamma$ . Điều này cho ta thấy, nếu  $z$  chạy trên đường biên  $\Gamma$  thì ảnh của nó qua ánh xạ  $w = 1 + \frac{f(z)}{g(z)}$  chạy trên đường cong nằm trong đường tròn tâm tại 1 bán kính 1,  $|w - 1| = 1$ , nghĩa là không bao quanh điểm  $w = 0$ . Do đó,  $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$ . Vậy  $N(f + g) = N(f)$ .  $\square$

**6.8 Thí dụ.** Ta sẽ tìm số nghiệm của đa thức  $f(z) = z^5 + 5z^3 + 2z$  trong hình tròn đơn vị  $\{z : |z| < 1\}$ .

Xét hàm  $h(z) = 5z^3$  và  $g(z) = z^5 + 2z$ . Ta có  $h(z) + g(z) = f(z)$ , và với mọi  $z$  thỏa  $|z| = 1$  ta có

$$|h(z)| = |5z^3| = 5 > 3 = |z^5| + |2z| \geq |z^5 + 2z| = |g(z)|.$$

Do đó, theo định lý Rouché trong hình tròn mở đơn vị  $\{z : |z| < 1\}$  hàm  $f(z)$  có số không điểm bằng số không điểm của hàm  $h(z)$  là 3. Nghĩa là hàm  $f(z)$  có 3 nghiệm trong hình tròn đơn vị đó.

Bây giờ ta tìm số nghiệm của đa thức trong hình vành khăn  $\{z : 1 \leq |z| < 3\}$ . Lúc này ta xét hàm  $h(z) = z^5$  và  $g(z) = 5z^3 + 2z$ . Với mọi  $z$  thỏa  $|z| = 3$  ta có

$$|g(z)| = |5z^3 + 2z| \leq 5|z|^3 + 2|z| = 141 < 243 = |z|^5 = |h(z)|.$$

Do đó, theo định lý Rouché trong hình tròn  $\{z : |z| < 3\}$  hàm  $f(z) = g(z) + h(z)$  có số không điểm bằng số không điểm của hàm  $h(z)$  là 5. Nghĩa là hàm  $f(z)$  có 5 nghiệm trong hình tròn  $\{z : |z| < 3\}$ . Vậy trong hình vành khăn  $\{z : 1 \leq |z| < 3\}$  hàm  $f$  có 2 nghiệm.  $\square$

**6.9 Thí dụ.** Ta sẽ chứng minh lại định lý đại số cơ bản. Xét đa thức cấp  $n$

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad \text{với } a_n \neq 0$$

Đặt  $f(z) = a_nz^n$  và  $g(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$ , và chọn  $R > \max \left\{ n \left| \frac{a_i}{a_n} \right|, 1 : i = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$ . Với  $|z| = R$ , ta có

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| &= \left| \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} \right| \\
&\leq \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^n} + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^{n-1}} + \cdots + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|} \\
&< \frac{R}{n} \frac{1}{R^n} + \frac{R}{n} \frac{1}{R^{n-1}} + \cdots + \frac{R}{n} \frac{1}{R} \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Vậy  $|f(z)| > |g(z)|$  với mọi  $z$  thỏa  $|z| = R$ . Theo định lý Rouché đối với hàm  $f(z)$  và  $g(z)$  và đường tròn  $|z| = R$ , ta có  $P(z) = f(z) + g(z)$  có cùng số không điểm với  $f(z)$  (là  $n$ ) trong đường tròn  $|z| = R$ . Do  $P(z)$  có không quá  $n$  nghiệm, nên suy ra  $P(z)$  có đúng  $n$  nghiệm.  $\square$

**6.10 Định lý.** *Giả sử  $z_0$  là một nghiệm cấp  $m$  của phương trình  $f(z) = a$  trong đó  $f$  là một hàm giải tích và không là hằng trong một lân cận của  $z_0$ . Khi ấy, với mọi  $\varepsilon$ -lân cận đủ bé của  $z_0$  và mọi  $b \neq a$  đủ gần  $a$ , phương trình  $f(z) = b$  có đúng  $m$  nghiệm phân biệt trong  $\varepsilon$ -lân cận ấy.*

*Chứng minh.* Do  $f$  giải tích và không là hàm hằng trong lân cận của  $z_0$  nên tồn tại  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$  sao cho  $z_0$  là không điểm duy nhất (cấp  $m$ ) của  $f(z) - a$  trong lân cận ấy,  $|f(z) - a| \neq 0$  với mọi  $|z - z_0| = \varepsilon$  và  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$ . Đặt  $m = \min\{|f(z) - a| : |z - z_0| = \varepsilon\} > 0$  (xem Định lý 3.2 trang 234 và một số kết quả trong mục đó). Khi đó, với mọi  $b$  thỏa  $0 < |b - a| < m$ , ta có

$$|f(z) - a| > |b - a| \quad \text{với mọi } z \text{ thỏa } |z - z_0| = \varepsilon.$$

Theo Định lý Rouché đối với hai hàm  $f(z) - a$  và  $a - b$  và với đường tròn  $|z - z_0| = \varepsilon$ , ta có hai hàm  $f(z) - b$  và  $f(z) - a$  có cùng số không điểm (là  $m$ ) bên trong đường tròn  $|z - z_0| = \varepsilon$ . Các không điểm của  $f(z) - b$  là phân biệt vì nếu có một không điểm nào đó có cấp lớn hơn hoặc bằng 2 thì  $f'$  bằng không tại điểm đó mâu thuẫn với điều kiện cho  $\varepsilon$ -lân cận trên. Vậy phương trình  $f(z) - b = 0$  có  $m$  nghiệm phân biệt trong  $\varepsilon$ -lân cận của  $z_0$ .  $\square$

**6.11 Định lý. (Nguyên lý bảo toàn miền)** *Nếu hàm  $f$  giải tích và không là hàm hằng trên miền  $D$ , thì  $D^* = f(D)$  là một miền.*

*Chứng minh.* Lấy hai điểm bất kỳ  $w_1$  và  $w_2$  trong  $D^*$ . Khi đó, tồn tại  $z_1, z_2 \in D$  sao cho  $w_1 = f(z_1)$  và  $w_2 = f(z_2)$ . Vì  $D$  là miền nên tồn tại

đường cong  $\gamma$  trong  $D$  nối  $z_1$  và  $z_2$ . Do  $f$  giải tích trên  $D$  nên  $f$  liên tục trên  $D$ , suy ra  $f(\gamma)$  là đường cong trong  $D^*$  nối  $w_1$  và  $w_2$ . Vậy  $D^*$  là tập liên thông.

Giả sử  $w_0$  là điểm tùy ý thuộc  $D^*$  và  $z_0 \in D$  sao cho  $f(z_0) = w_0$ . Do  $f$  là hàm giải tích và không là hàm hằng trên  $D$  và theo định lý duy nhất, tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $\bar{B}(z_0, \delta) \subset D$  và  $f(z) \neq w_0$  với mọi  $z \in \partial B(z_0, \delta)$ . Đặt  $\alpha = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - w_0| > 0$ . Khi đó, ta có  $B(w_0, \alpha) \subset D^*$ . Thật vậy, lấy  $w_1 \in B(w_0, \alpha)$  tùy ý. Xét hàm  $f(z) - w_1 = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$ . Bởi vì  $|f(z) - w_0| \geq \alpha$  với mọi  $z$  thỏa  $|z - z_0| = \delta$  và  $|w_0 - w_1| < \alpha$ , ta có

$$|f(z) - w_0| > |w_1 - w_0| \quad \text{với mọi } z \text{ thỏa } |z - z_0| = \delta$$

Theo định lý Rouché đối với hai hàm  $f(z) - w_0$  và  $w_0 - w_1$  và đường tròn  $|z - z_0| = \delta$ , ta có hai hàm  $f(z) - w_1$  và  $f(z) - w_0$  có số không điểm bằng nhau trong đường tròn  $|z - z_0| = \delta$ . Do  $z_0$  là một không điểm của hàm  $f(z) - w_0$ , cho nên hàm  $f(z) - w_1$  phải có không điểm nằm trong đường tròn  $|z - z_0| = \delta$ . Gọi  $z_1$  là một không điểm của  $f(z) - w_1$  trong đường tròn  $|z - z_0| = \delta$ , suy ra  $z_1 \in D$  và  $f(z_1) = w_1 \in D^*$ . Do đó,  $B(w_0, \alpha) \subset D^*$ . Vậy  $D^*$  là tập mở, nên nó là một miền.  $\square$

**6.12 Định lý. (Hurwitz)** *Giả sử dãy các hàm giải tích  $\{f_n\}$  trên miền  $D$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  tới hàm  $f$  và giả sử  $f$  không là hàm hằng. Khi đó, với mọi  $a \in f(D)$  tồn tại  $N > 0$  sao cho  $a \in f_n(D)$  với mọi  $n > N$ .*

*Chứng minh.* Theo Định lý 6.4 trang 174 hàm  $f$  giải tích trên  $D$ . Lấy  $z_0 \in D$  sao cho  $f(z_0) = a$ . Cũng như trong chứng minh định lý nguyên lý bảo toàn miền do  $f$  không là hàm hằng nên tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $\bar{B}(z_0, \delta) \subset D$  và  $\alpha = \inf_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - a| > 0$ . Vì  $\{f_n\}$  hội tụ đều tới  $f$  trên  $\partial B(z_0, \delta)$  tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$  ta có  $|f_n(z) - f(z)| < \alpha$  với mọi  $|z - z_0| = \delta$ , cho nên  $|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - a|$  với mọi  $|z - z_0| = \delta$ . Vậy với mỗi  $n > N$  hai hàm giải tích  $f(z) - a$  và  $f_n(z) - f(z)$  thỏa mãn điều kiện định lý Rouché trên  $\bar{B}(z_0, \delta)$  nên  $f_n(z) - a = (f_n(z) - f(z)) + (f(z) - a)$  có cùng số không điểm với hàm  $f(z) - a$  trong  $B(z_0, \delta)$ . Do  $z_0$  là một không điểm của  $f(z) - a$  nên  $f_n(z) - a$  phải có một không điểm trong  $B(z_0, \delta)$  nghĩa là tồn tại  $z_n \in B(z_0, \delta) \subset D$  sao cho  $f_n(z_n) - a = 0$ , suy ra  $a \in f_n(D)$ . Vậy  $a \in f_n(D)$  với mọi  $n > N$ .  $\square$

## Bài tập

1) Cho  $\Gamma$  là đường tròn đơn vị được định hướng dương,  $|z| = 1$ . Xác định giá trị  $\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} f(z)$  với các hàm  $f$  sau

$$(a) \quad f(z) = z^2 \qquad (b) \quad f(z) = \frac{z^3 + 2}{z} \qquad (c) \quad f(z) = \frac{(3z - i)^5}{2z^3 - i}$$

2) Xác định số nghiệm của các đa thức sau trong hình tròn đơn vị  $\{z : |z| < 1\}$

$$(a) \quad z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z \qquad (b) \quad 2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$$

3) Xác định số nghiệm của các đa thức sau bên trong đường tròn  $|z| = 2$

$$(a) \quad z^4 + 3z^3 + 6, \quad (b) \quad z^4 - 2z^3 + 9z^2 + z - 1, \quad (c) \quad z^5 + 3z^3 + z^2 + 1.$$

4) Xác định số nghiệm của phương trình  $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$  trong hình vành khăn  $\{z : 1 \leq |z| < 2\}$ .

5) Chứng minh rằng nếu  $c$  là một số phức thỏa  $|c| > e$  thì phương trình  $cz^n = e^z$  có  $n$  nghiệm (đếm cả số bội) bên trong đường tròn  $|z| = 1$ .

6) Chứng minh rằng nếu dãy hàm  $\{f_n\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  đến hàm  $f$  và các hàm  $f_n$  không có không điểm trong  $D$  với mọi  $n$  thì hàm  $f$  cũng không có không điểm trong  $D$ .

7) Nếu các hàm  $f_n(z)$  giải tích và có tối đa  $m$  không điểm trên miền  $D$  và  $\{f_n(z)\}$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $D$  về hàm  $f$  thì  $f(z)$  hoặc là đồng nhất 0 hoặc có nhiều nhất  $m$  không điểm trên  $D$ .

## Chương IX

# Ảnh xạ bảo giác

### § 1 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Giả sử  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  giải tích tại  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$  và  $f'(z_0) \neq 0$ . Suy ra định thức Jacobi của hai hàm  $u$  và  $v$  khác không tại  $(x_0, y_0)$ , cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} J(u, v)(x_0, y_0) &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)} \\ &= [u'_x(x_0, y_0)]^2 + [v'_x(x_0, y_0)]^2 \\ &= |f'(z_0)|^2 \end{aligned}$$

Trong giải tích cổ điển, theo định lý hàm ngược (chẳng hạn xem [1, trang 102]) khi  $J(u, v)(x_0, y_0) \neq 0$  thì các hàm số  $u = u(x, y)$  và  $v = v(x, y)$  có các hàm ngược trong lân cận của điểm  $(x_0, y_0)$ .

Nói một cách khác, nếu  $f'(z_0) \neq 0$  thì hàm  $w = f(z)$  sẽ đơn trị trong một lân cận nào đó của  $z_0$  và hàm ngược  $z = f^{-1}(w)$  cũng khả vi trong lân cận của điểm  $w_0 = f(z_0)$  và

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Giả sử đường cong  $\gamma$  có biểu diễn tham số  $\gamma(t)$  với  $t \in [a, b]$  và là đường cong Jordan trơn đi qua điểm  $z_0 = \gamma(t_0)$  với  $t_0 \in (a, b)$  và ta có  $\gamma'(t_0) \neq 0$ . Khi đó, ảnh của  $\gamma$  qua ánh xạ  $w = f(z)$  ở trên là đường cong  $\Gamma = f(\gamma)$  đi

qua điểm  $w_0 = f(z_0)$ . Phương trình biểu diễn tham số của  $\Gamma$  là

$$\omega(t) = f(\gamma(t)) \quad t \in [a, b]$$

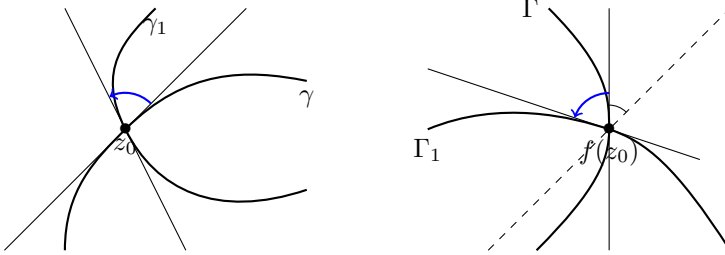
và ta có

$$\omega'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$$

Từ đẳng thức trên ta suy ra đường cong  $\Gamma$  có tiếp tuyến tại  $w_0$  và ta có

$$\text{Arg } f'(z_0) = \text{Arg } \omega'(t_0) - \text{Arg } \gamma'(t_0).$$

Như vậy, qua ánh xạ  $w = f(z)$  với  $f'(z_0) \neq 0$  tiếp tuyến của đường cong  $\gamma$  tại  $z_0$  quay một góc bằng  $\text{Arg } f'(z_0)$  và tịnh tiến từ điểm  $z_0$  đến điểm  $f(z_0)$  trở thành tiếp tuyến của đường cong ảnh  $\Gamma = f(\gamma)$ .



Hình IX.1:

Bây giờ giả sử  $\gamma_1$  là một đường cong Jordan trơn khác cũng qua điểm  $z_0$  có biểu diễn tham số  $\gamma_1(t)$  với  $t \in [c, d]$  thỏa  $z_0 = \gamma_1(\tau_0)$  và  $\gamma_1'(\tau_0) \neq 0$  với  $\tau_0 \in (c, d)$ . Gọi  $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ . Tương tự như trên ta có

$$\text{Arg } f'(z_0) = \text{Arg } \omega_1'(\tau_0) - \text{Arg } \gamma_1'(\tau_0)$$

Từ đó ta suy ra được

$$\text{Arg } \omega'(t_0) - \text{Arg } \omega_1'(\tau_0) = \text{Arg } \gamma'(t_0) - \text{Arg } \gamma_1'(\tau_0)$$

hay

$$\widehat{(\Gamma, \Gamma_1)} = \widehat{(\gamma, \gamma_1)}$$

trong đó  $\widehat{(\Gamma, \Gamma_1)}$  và  $\widehat{(\gamma, \gamma_1)}$  lần lượt là góc giữa  $\Gamma$  và  $\Gamma_1$  và góc giữa  $\gamma$  và  $\gamma_1$ .

Như vậy, ta đã chứng minh được kết quả: qua ánh xạ  $w = f(z)$  với  $f'(z_0) \neq 0$  góc giữa hai đường cong tại điểm  $z_0$  được bảo toàn về độ lớn và hướng. Hàm có tính chất như vậy được gọi là hàm bảo toàn góc tại  $z_0$ .

Mặt khác, cũng với đường cong  $\gamma$  và hàm  $f$  ở trên, ta có

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|w(t) - w(t_0)|}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \left| \frac{w'(t_0)}{\gamma'(t_0)} \right| = |f'(z_0)|.$$



Kết quả này chỉ phụ thuộc vào  $f'(z_0)$  mà không phụ thuộc vào đường cong  $\gamma$  qua  $z_0$ . Như vậy, qua ánh xạ  $w = f(z)$  với  $f'(z_0) \neq 0$  hệ số co giãn (độ giãn, trong trường hợp này là  $|f'(z_0)|$ ) của ảnh của đường cong tại  $z_0$  không phụ thuộc vào dạng và hướng của đường cong. Hàm có tính chất như vậy được gọi là hàm có hệ số co giãn đều tại  $z_0$ .

## Bài tập

1) Chứng minh rằng nếu hàm  $f(z)$  giải tích tại  $z_0$  và  $f'(z_0) \neq 0$  thì trong lân cận của  $z_0$  hàm  $f$  có hàm ngược giải tích tại  $w_0 = f(z_0)$  và  $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$ .

2) Cho ánh xạ thực hiện nhờ các hàm số  $w = z^2$  và  $w = z^3$ . Tìm góc quay, hướng xuất phát từ điểm  $z_0$  và hệ số co giãn tại các điểm sau đây.

(a)  $z_0 = 1$       (b)  $z_0 = -\frac{1}{4}$       (c)  $z_0 = 1 + i$       (d)  $z_0 = -3 + 4i$ .

3) Phần nào của mặt phẳng co lại, phần nào của mặt phẳng giãn ra, nếu ánh xạ được thực hiện nhờ các hàm số

(a)  $w = z^2$       (b)  $w = z^2 + 2z$       (c)  $w = \frac{1}{z}$       (d)  $w = e^z$ .

4) Cho hàm  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  xác định trên miền  $D$  sao cho các hàm  $u(x, y)$  và  $v(x, y)$  có các đạo hàm riêng liên tục trên  $D$  và thỏa  $u'_x(x, y) = -v'_y(x, y)$  và  $u'_y(x, y) = v'_x(x, y)$  với mọi  $(x, y) \in D$ . Chứng minh rằng hàm  $g(z) = f(\bar{z})$  bảo giác trên  $D' = \{z : \bar{z} \in D\}$  nếu  $u'(x, y)^2 + v'(x, y)^2 > 0$  với mọi  $(x, y) \in D$ .

## § 2 Ánh xạ bảo giác

**2.1 Định nghĩa.** Ánh xạ  $w = f(z)$  biến miền  $D$  của mặt phẳng phức ( $z$ ) thành miền  $D^*$  của mặt phẳng phức ( $w$ ) được gọi là **ánh xạ bảo giác** trong miền  $D$  nếu tại mọi điểm  $z \in D$  góc giữa các đường cong được bảo toàn (cả về độ lớn và hướng) và độ giãn không đổi theo mọi hướng.

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm ta đã chứng minh được kết quả sau:

**2.2 Định lý.** Giả sử ánh xạ  $w = f(z)$  biến miền  $D$  thành miền  $D^*$ . Nếu  $f(z)$  là một hàm giải tích trên  $D$  và  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$  thì  $f$  là ánh xạ bảo giác trên  $D$ .

Định lý sau đây được xem là định lý đảo của định lý trên

**2.3 Định lý.** *Giả sử ánh xạ  $w = f(z)$  biến miền  $D$  thành miền  $D^*$ . Nếu  $f(z)$  là ánh xạ bảo giác trên  $D$  thì  $f(z)$  là một hàm giải tích trên  $D$  và  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$ .*

*Chứng minh.* Lấy  $z_0 \in D$  tùy ý. Xét hai điểm

$$z_1 = z_0 + \Delta z_1 \qquad z_2 = z_0 + \Delta z_2$$

qua ánh xạ  $f$  chúng lần lượt biến thành các điểm

$$w_1 = w_0 + \Delta w_1 \qquad w_2 = w_0 + \Delta w_2$$

trong đó  $w_0 = f(z_0)$ . Do  $f$  bảo giác trên  $D$  nên  $f$  bảo giác tại  $z_0$ , nghĩa là với  $|\Delta z_1|$  và  $|\Delta z_2|$  đủ bé ta có

$$\operatorname{Arg} \Delta w_2 - \operatorname{Arg} \Delta w_1 \approx \operatorname{Arg} \Delta z_2 - \operatorname{Arg} \Delta z_1$$

và

$$\left| \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \right| \approx \left| \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \right| \approx k \neq 0$$

với sai khác một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn so với  $\min(|\Delta z_1|, |\Delta z_2|)$ . Ta đặt

$$\arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \approx \arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \approx \alpha.$$

Từ các ước lượng trên ta suy ra được ước lượng

$$\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \approx \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \approx k e^{i\alpha}$$

với sai khác một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn so với  $\min(|\Delta z_1|, |\Delta z_2|)$ .

Vì  $z_1$  và  $z_2$  chọn tùy ý trong lân cận của  $z_0$  nên với mọi  $z$  trong lân cận của  $z_0$  (nghĩa là  $z = z_0 + \Delta z$ ) ta có

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \approx k e^{i\alpha}$$

với sai khác một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn so với  $|\Delta z|$ . Vậy

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha}.$$

Nghĩa là  $f$  khả vi tại  $z_0$  và  $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$ . Vì  $z_0$  lấy tùy ý nên  $f$  giải tích trên  $D$  và  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$ .

Chú ý rằng phép chứng minh trình bày ở trên mang tính trực quan cao. Ta có thể luận theo tinh thần giải tích như sau

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \left| \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} \right| e^{i(\text{Arg } \Delta f(z_0) - \text{Arg } \Delta z)}$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} \right| &= r \neq 0 && \text{do tính chất dẫn đều} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\text{Arg } f(z_0) - \text{Arg } \Delta z) &= \alpha && \text{do tính bảo toàn góc} \end{aligned}$$

Do đó,  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = re^{i\alpha} \neq 0$ . Vậy tồn tại  $f'(z_0)$  và  $f'(z_0) \neq 0$ .  $\square$

**2.4 Thí dụ.** Hàm mũ  $f(z) = e^z$  bảo giác trên mỗi miền đơn điệu của nó. Hàm  $f(z) = \frac{1}{z}$  bảo giác trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**2.5 Thí dụ.** Xét hàm  $\cos z$ . Ta đã biết  $(\cos z)' = -\sin z = 0$  khi và chỉ khi  $z = k\pi$  với  $k$  nguyên. Vậy hàm  $\cos z$  bảo giác tại mọi điểm trừ các điểm  $k\pi$  với  $k$  nguyên.  $\square$

**2.6 Thí dụ.** Hàm lũy thừa  $w = f(z) = z^n$ , với  $n$  nguyên dương, là hàm bảo giác trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Tại  $z = 0$  hàm không bảo giác khi  $n > 1$ . Thật vậy, dễ thấy rằng ảnh của  $z_1$  và  $z_2$  thỏa

$$|z_1| = |z_2| \qquad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

qua ánh xạ  $f(z) = z^n$  trùng nhau. Hơn nữa, mọi góc có đỉnh tại  $z = 0$  qua ánh xạ lũy thừa  $f(z) = z^n$  sẽ tăng lên  $n$  lần.  $\square$

**2.7 Định nghĩa.** Góc giữa hai đường cong  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  tại điểm  $z = \infty$  là góc giữa ảnh của hai đường cong đó qua ánh xạ  $w = f(z) = \frac{1}{z}$  tại  $w = 0$ , tức là góc giữa hai đường cong  $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$  và  $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$  tại  $w = 0$ .

**2.8 Định lý.** Hàm phân tuyến tính bảo giác trên  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Chứng minh.* Xét ánh xạ phân tuyến tính  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  với  $ad-bc \neq 0$  và  $c \neq 0$ . Ta biết rằng hàm  $f$  giải tích trên  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  nên nó bảo giác trên  $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ . Vậy ta chỉ còn chứng minh hàm  $f$  bảo giác tại  $z = -\frac{d}{c}$  và  $z = \infty$ .

Cho  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  là hai đường cong bất kỳ qua điểm  $z = -\frac{d}{c}$ . Ta có  $f(-\frac{d}{c}) = \infty$  và đặt  $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$  và  $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ . Ta cần chứng minh  $(\widehat{\gamma_1, \gamma_2})_{z=-\frac{d}{c}} = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})_{w=\infty}$ . Theo định nghĩa góc giữa hai đường cong tại điểm  $\infty$ , ta có  $(\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})_{w=\infty}$  là góc giữa hai đường cong  $\Gamma_1^*$  và  $\Gamma_2^*$  tại  $w^* = 0$  trong đó  $\Gamma_1^* = g(\Gamma_1)$ ,  $\Gamma_2^* = g(\Gamma_2)$  và  $w^* = g(w) = \frac{1}{w}$ . Ta có

$$w^* = \frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b}$$

đây là hàm phân tuyến tính. Do đó, ánh xạ  $w^*$  đối với biến  $z$  bảo giác tại  $z = -\frac{d}{c} \neq -\frac{b}{a}$ . Do  $\Gamma_1^*$  và  $\Gamma_2^*$  chính là ảnh của  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  qua ánh xạ  $w^* = \frac{cz+d}{az+b}$  cho nên  $(\widehat{\gamma_1, \gamma_2})_{z=-\frac{d}{c}} = (\widehat{\Gamma_1^*, \Gamma_2^*})_{w^*=0}$ . Do đó, ta được  $(\widehat{\gamma_1, \gamma_2})_{z=-\frac{d}{c}} = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})_{w=\infty}$ , nghĩa là ánh xạ  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  bảo giác tại  $z = -\frac{d}{c}$ .

Cho  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  là hai đường cong bất kỳ có điểm vô tận. Gọi  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  là ảnh của  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  qua ánh xạ  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ . Gọi  $\Gamma_1^*$  và  $\Gamma_2^*$  là ảnh của  $\gamma_1$  và  $\gamma_2$  qua ánh xạ  $z^* = \frac{1}{z}$ . Theo định nghĩa góc giữa hai đường cong ở điểm  $\infty$  ta có  $(\widehat{\gamma_1, \gamma_2})_{z=\infty} = (\widehat{\Gamma_1^*, \Gamma_2^*})_{z^*=0}$ . Mặt khác, ta có

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a+bz^*}{c+dz^*}.$$

Vậy  $\Gamma_1$  và  $\Gamma_2$  là ảnh của  $\Gamma_1^*$  và  $\Gamma_2^*$  qua ánh xạ  $w = \frac{a+bz^*}{c+dz^*}$ . Theo chứng minh hai phần trên ta có ánh xạ  $w = \frac{a+bz^*}{c+dz^*}$  bảo giác tại  $z^* = 0$  cho nên  $(\widehat{\Gamma_1^*, \Gamma_2^*})_{z^*=0} = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})_{w=\frac{a}{c}}$ . Do đó, ta được

$$(\widehat{\gamma_1, \gamma_2})_{z=\infty} = (\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})_{w=\frac{a}{c}}$$

nghĩa là ánh xạ  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  bảo giác tại  $z = \infty$ . □

**2.9 (Hàm Joukowski)** Ta nhận thấy hàm Joukowski  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  khả vi trên  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  và đạo hàm của nó là  $f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$ . Suy ra  $f'(z) = 0$  khi và chỉ khi  $z = \pm 1$ . Vậy ta có ngay kết quả: hàm  $f$  bảo giác trên  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}$ . Ta xét tính bảo giác của hàm  $f$  tại các điểm  $z = 0, 1, -1, \infty$ .

Tại  $z = 0$  ta có  $f(0) = \infty$ . Xét hàm  $g(z) = \frac{1}{z}$ . Khi đó, ta có hàm hợp

$$(g \circ f)(z) = 2 \frac{1}{z + \frac{1}{z}} = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

và

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) = -\frac{1}{\frac{1}{4}(z + \frac{1}{z})^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{2(1 - z^2)}{(z^2 + 1)^2}.$$

Vậy  $(g \circ f)'(0) = 2 \neq 0$ . Do đó, hàm  $g \circ f$  bảo giác tại  $z = 0$ . Vậy hàm  $f$  bảo giác tại  $z = 0$ .

Tại  $z = \infty$  và với hàm  $g(z) = \frac{1}{z}$ , ta xét hàm

$$(f \circ g)(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right) = f(z).$$

Theo kết quả chứng minh trên ta suy ra được hàm  $f \circ g$  bảo giác tại  $z = 0$ . Điều này lại suy ra hàm  $f$  bảo giác tại  $z = \infty$  vì  $g(0) = \infty$ .

Ta biến đổi hàm  $f$  như sau

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}.$$

Vậy  $f$  là một ánh xạ hợp thành  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$  với

$$f_1(z) = \frac{z-1}{z+1} \qquad f_2(z) = z^2 \qquad f_3(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Ta nhận thấy các hàm  $f_1$  và  $f_3$  là hàm phân tuyến tính và hàm  $f_2$  là hàm lũy thừa. Hàm  $f_1$  bảo giác tại  $z = \pm 1$ ; hàm  $f_2$  không bảo giác tại  $f_1(1) = 0$  và  $f_1(-1) = \infty$ ; hàm  $f_3$  bảo giác tại  $f_2(0) = 0$  và  $f_2(\infty) = \infty$ . Do đó, hàm  $f$  không bảo giác tại  $z = 1$  và  $z = -1$ .

## Bài tập

1) Chứng minh rằng hàm  $f(z) = z^n$ , với  $n > 1$  nguyên, không bảo giác tại  $z = \infty$ .

**2)** Xét ánh xạ Joukowski  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ . Hãy tìm ảnh của đường tròn  $|z| = R$ .

**3)** Tìm ảnh của đường tròn  $|z| = 1$  qua ánh xạ  $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ , đồng thời tìm miền bảo giác của nó.

### § 3 Bổ đề Schwarz

**3.1 Định lý. (Bổ đề Schwarz)** Cho hàm  $f(z)$  giải tích trong hình tròn đơn vị  $U = \{z : |z| < 1\}$  và liên tục trên  $\bar{U} = \{z : |z| \leq 1\}$ . Nếu hàm  $f$  thỏa mãn  $f(0) = 0$  và  $|f(z)| < 1$  với mọi  $z \in U$  thì  $|f(z)| \leq |z|$  với mọi  $z \in \bar{U}$  và  $|f'(0)| \leq 1$ . Thêm vào đó, nếu  $|f'(0)| = 1$  hay tồn tại  $z_0 \in U$  sao cho  $z_0 \neq 0$  mà  $|f(z_0)| = |z_0|$  thì  $|f(z)| = |z|$  với mọi  $z \in U$  và  $f(z) = e^{i\alpha}z$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Chứng minh.* Xét hàm

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{khi } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{khi } z = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng hàm  $\varphi(z)$  liên tục trên  $\bar{U}$  và giải tích trên  $U \setminus \{0\}$ . Theo công thức tích phân Cauchy đối với hàm  $f(z)$  ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{và} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi = f(0) = 0$$

trong đó  $z \in U$  và  $C$  là đường tròn  $|z| = 1$  định hướng dương. Do đó, với  $z \in U$  ta suy ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi} \right) d\xi = \frac{z}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi.$$

Vậy với  $z \in U \setminus \{0\}$  ta có

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Hơn nữa, ta có

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi = f'(0) = \varphi(0).$$

Do đó,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} dz \quad \text{với mọi } z \in U.$$

Do  $\varphi(z)$  liên tục trên  $\bar{U}$  nên theo định lý về tích phân loại Cauchy ta suy ra được  $\varphi(z)$  giải tích trên  $U$ . Nếu  $\varphi(z)$  là hàm hằng trên  $U$  thì cũng suy ra được nó là hàm hằng trên  $\bar{U}$  (do tính liên tục); cho nên  $|\varphi(z)|$  cũng là hằng trên  $\bar{U}$ . Nếu  $\varphi(z)$  không là hàm hằng trên  $U$  thì từ nguyên lý cực đại suy ra  $|\varphi(z)|$  đạt cực đại trên biên. Do đó, ta luôn có

$$\max_{z \in \bar{U}} |\varphi(z)| = \max_{|z|=1} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Do  $|f(z)| < 1$  với mọi  $z \in U$  và  $f(z)$  liên tục trên  $\bar{U}$  nên  $|f(z)| \leq 1$  với mọi  $z \in \bar{U}$ . Vậy  $\max_{|z|=1} |f(z)| \leq 1$ , suy ra  $|\varphi(z)| \leq 1$  với mọi  $z \in \bar{U}$ . Do đó, từ định nghĩa hàm  $\varphi(z)$  và  $f(0) = 0$  ta suy ra được  $|f(z)| \leq |z|$  với mọi  $z \in \bar{U}$  và  $|f'(0)| = |\varphi(0)| \leq 1$ .

Hơn nữa, giả sử thêm giả thiết  $|f'(0)| = 1$  hay tồn tại  $z_0 \in U$  mà  $z_0 \neq 0$  sao cho  $|f(z_0)| = |z_0|$ . Điều đó có nghĩa là  $|\varphi(z)|$  đạt giá trị lớn nhất trên  $\bar{U}$  tại một điểm trong  $U$ . Theo nguyên lý modulus cực đại ta phải có  $\varphi$  là hàm hằng trên  $\bar{U}$  và  $|\varphi(z)| = 1$ . Từ đó theo định nghĩa của hàm  $\varphi$  ta suy ra được  $f(z) = e^{i\alpha} z$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$  là hằng số.  $\square$

**3.2 Định nghĩa.** Một hàm đơn điệu  $f$  từ  $D$  lên  $D^*$  trong đó  $D$  và  $D^*$  là các miền tùy ý trong  $\mathbb{C}$  được gọi là **phép đẳng cấu** (hay *đẳng cấu chỉnh hình*) nếu các hàm  $f : D \rightarrow D^*$  và  $f^{-1} : D^* \rightarrow D$  là chỉnh hình (giải tích). Trường hợp  $D^* = D$  phép đẳng cấu được gọi là **phép tự đẳng cấu**.

**3.3 Định lý.** Mọi phép tự đẳng cấu của hình tròn đơn vị  $B(0, 1)$  là tự đẳng cấu phân tuyến tính.

*Chứng minh.* Giả sử  $w = f(z)$  là một tự đẳng cấu của  $B(0, 1)$ . Ta ký hiệu  $w_0 = f(0)$ . Theo Thí dụ 4.10 trang 116 ánh xạ phân tuyến tính  $g(w) = \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1}$  là tự đẳng cấu của hình tròn  $B(0, 1)$  biến điểm  $w_0$  thành điểm 0. Khi đó, ánh xạ hợp thành  $h = g \circ f$  cũng là một tự đẳng cấu của  $B(0, 1)$  với  $h(0) = 0$ . Vậy theo bổ đề Schwarz ta có

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{với mọi } z \in B(0, 1)$$

Hơn nữa, ta cũng thấy ánh xạ ngược  $h^{-1}$  cũng thỏa các điều kiện của bổ đề Schwarz, cho nên ta có  $|h^{-1}(w)| \leq |w|$  với mọi  $w \in B(0, 1)$ . Do nếu  $z \in B(0, 1)$  và  $w = h(z)$  thì  $h^{-1}(w) = z$ , nên  $|z| \leq |h(z)|$ . Kết hợp với kết quả trên ta có  $|h(z)| = |z|$  với mọi  $z \in B(0, 1)$ . Lại theo bổ đề Schwarz ta có  $h(z) = e^{i\alpha}z$  với mọi  $z \in B(0, 1)$  trong đó  $\alpha$  là một hằng số thực nào đó. Do đó,

$$\frac{f(z) - w_0}{\bar{w}_0 f(z) - 1} = e^{i\alpha} z \quad \text{hay} \quad f(z) = \frac{w_0 - e^{i\alpha} z}{1 - \bar{w}_0 e^{i\alpha} z}.$$

Vậy  $f$  là một hàm phân tuyến tính. □

## Bài tập

1) Tìm ánh xạ bảo giác  $w = f(z)$  biến miền  $D$  thành miền  $D^*$

(a)  $D = \{z : |z - 2| < 1\}$ ,  $D^* = \{w : |w - 2i| < 2\}$

(b)  $D = \{z : |z| < 1, |z - i| < 1\}$ ,  $D^* = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$

(c)  $D = \{z : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ ,  $D^* = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$

(d)  $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $D^* = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$  sao cho  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = \infty$ .

## § 4 Định lý ánh xạ Riemann

**4.1 Định lý.** Mọi song ánh chỉnh hình  $\varphi : D \rightarrow D^*$  là một đẳng cấu chỉnh hình.

*Chứng minh.* Xét hàm  $\psi = \varphi^{-1} : D^* \rightarrow D$ . Lấy  $w_0 \in D^*$  tùy ý. Khi đó, ta đặt  $z_0 = \psi(w_0)$ , suy ra  $\varphi(z_0) = w_0$ . Lấy  $\varepsilon > 0$  bé tùy ý sao cho  $B(z_0, \varepsilon) \subseteq D$ . Vì  $\varphi$  chỉnh hình nên theo nguyên lý bảo toàn miền  $\varphi(B(z_0, \varepsilon))$  là một miền. Hơn nữa, do  $w_0 = \varphi(z_0) \in \varphi(B(z_0, \varepsilon))$  cho nên tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $B(w_0, \delta) \subseteq \varphi(B(z_0, \varepsilon))$ . Suy ra  $\psi(B(w_0, \delta)) \subseteq \psi(\varphi(B(z_0, \varepsilon))) = B(z_0, \varepsilon)$ . Vậy  $\psi$  liên tục tại  $w_0$ . Do  $w_0 \in D^*$  tùy ý nên  $\psi$  liên tục trên  $D^*$ .

Theo giả thiết ta được  $\varphi'$  chỉnh hình trên  $D$ . Do đó, theo Định lý 3.7 trang 236 tập  $E = \{z \in D : \varphi'(z) = 0\}$  không có điểm tụ trong  $D$ . Bởi vì nếu điều đó xảy ra ta sẽ có  $\varphi'(z) = 0$  với mọi  $z \in D$  sẽ dẫn đến điều mâu thuẫn  $\varphi$  là hàm hằng trên  $D$ .



Xét  $F = \varphi(E)$ . Khi đó, do  $\varphi$  là song ánh nên  $F$  cũng không có điểm tụ trong  $D^*$ . Hơn nữa, ta có  $D^* = \varphi(D)$  là một miền nên cũng có  $D^* \setminus F$  là một miền. Lấy  $w_1 \in D^* \setminus F$  tùy ý. Từ đẳng thức

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_0)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\varphi(z) - \varphi(z_1)} \quad \text{với } z = \psi(w), z_1 = \psi(w_1)$$

và sự liên tục của  $\psi$ , ta suy ra được  $\psi'(w_1) = \frac{1}{\varphi'(z_1)}$ . Vậy  $\psi$  khả vi trên miền  $D^* \setminus F$ , cho nên nó cũng giải tích trên  $D^* \setminus F$ .

Ngoài ra do  $F$  không có điểm tụ trong  $D^*$  nên với mỗi  $a \in F$  tồn tại  $\eta > 0$  sao cho  $B(a, \eta) \cap F \setminus \{a\} = \emptyset$ . Do  $\psi$  giải tích trong  $\eta$ -lân cận thủng của  $a$  và liên tục tại  $a$  nên  $\psi$  giải tích tại  $a$ . Từ đó ta kết luận được  $\psi$  giải tích trên  $D^*$ .  $\square$

**4.2 Nhận xét.** Một trường hợp đặc biệt của định lý trên đối với ánh xạ bảo giác: Nếu  $f$  là ánh xạ bảo giác trên miền  $D$  và là đơn ánh trên  $D$  thì ánh xạ ngược của  $f$  trên  $f(D)$  cũng là ánh xạ bảo giác. Hơn nữa, ta cũng có một phần của mệnh đề đảo này trong định lý sau.

**4.3 Định lý.** *Giả sử  $f$  là một hàm giải tích trên tập mở  $D$  sao cho  $f$  là đơn ánh trên  $D$ . Khi ấy,  $f$  là một ánh xạ bảo giác tại mỗi điểm của  $D$ . Hơn nữa, hàm ngược của  $f$  cũng là ánh xạ bảo giác tại mỗi điểm của  $D' = f(D)$ .*

*Chứng minh.* Giả sử tồn tại  $z_0 \in D$  sao cho  $f'(z_0) = 0$ . Khi đó, phương trình  $f(z) = f(z_0)$  có nghiệm  $z_0$  với cấp lớn hơn hoặc bằng 2; do đó, theo Định lý 6.10 trang 290 với  $w$  đủ gần  $f(z_0)$  phương trình  $f(z) = w$  có nhiều hơn một nghiệm trong lân cận của điểm  $z_0$ . Vậy hàm  $f$  không là đơn ánh trong lân cận nào của điểm  $z_0$ , đây là điều vô lý. Do đó, ta phải có  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $z \in D$ . Điều đó có nghĩa là  $f$  là ánh xạ bảo giác trên  $D$ . Phần còn lại của định lý có được từ nhận xét trên.  $\square$

**4.4 Định lý. (Định lý ánh xạ Riemann)** *Mọi miền đơn liên  $D$  khác  $\mathbb{C}$  tương đương chỉnh hình với hình tròn đơn vị  $U = \{z : |z| < 1\}$ .*

*Chứng minh.*  $D \neq \mathbb{C}$  nên chọn  $w_0 \notin D$ . Gọi  $\mathcal{F}$  là họ các hàm đơn điệu chỉnh hình từ  $D$  vào  $U$ . Chúng ta phải chứng minh tồn tại  $\psi \in \mathcal{F}$  ánh xạ  $D$  lên  $U$ .

Đầu tiên chúng ta chứng minh  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ . Ta nhận thấy hàm  $g(z) = z - w_0$  chỉnh hình và không nhận giá trị 0 trên  $D$ . Do  $D$  là miền đơn liên và theo

Định lý 5.15 trang 167 cho nên tồn tại hàm chỉnh hình  $\varphi$  trên  $D$  sao cho  $\varphi^2(z) = z - w_0$ . Nếu  $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$  thì cũng có  $\varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2)$ , suy ra  $z_1 = z_2$ . Vậy  $\varphi$  là đơn ánh. Lập luận tương tự chứng tỏ rằng không có hai điểm  $z_1$  và  $z_2$  trong  $D$  sao cho  $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$ . Theo nguyên lý bảo toàn miền  $\varphi(D)$  là một miền, cho nên  $\varphi(D)$  chứa một hình tròn  $B(a, r)$  với  $0 < r < |a|$ . Do không có hai điểm  $z_1$  và  $z_2$  trong  $D$  sao cho  $\varphi(z_1) = -\varphi(z_2)$  nên có thể chọn  $r$  đủ nhỏ để  $\overline{B}(-a, r) \cap \varphi(D) = \emptyset$ . Do đó,  $|\varphi(z) + a| > r$  với mọi  $z \in D$ . Khi đó, hàm  $f(z) = \frac{r}{\varphi(z) + a}$  thuộc họ  $\mathcal{F}$ .

Bước tiếp theo ta chứng tỏ rằng nếu  $\psi \in \mathcal{F}$  mà  $\psi(\Omega)$  không phủ  $U$  và nếu  $z_0 \in D$  thì tồn tại  $\psi_1 \in \mathcal{F}$  để

$$|\psi'_1(z_0)| > |\psi'(z_0)|.$$

Theo Thí dụ 4.10 trang 116 các hàm  $\varphi_\alpha$  với  $\alpha \in U$  xác định bởi

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

là hàm song ánh biến  $U$  thành  $U$ , và ký hiệu hàm ngược của nó là

$$\varphi_\alpha^{-1}(z) = \frac{z + \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1} = \varphi_{-\alpha}.$$

Giả sử  $\psi \in \mathcal{F}$  và  $\alpha \in U$  và  $\alpha \notin \psi(D)$ . Khi đó,  $\varphi_\alpha \circ \psi \in \mathcal{F}$  và  $\varphi_\alpha \circ \psi$  không có không điểm trong  $D$ . Do đó, theo Định lý 5.15 trang 167 tồn tại một hàm chỉnh hình trên  $D$  sao cho  $g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi$ . Như trong phần chứng minh  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ta thấy rằng  $g$  là đơn ánh. Do đó,  $g \in \mathcal{F}$ ; và nếu  $\psi_1 = \varphi_\beta \circ g$  ở đây  $\beta = g(z_0)$ , nó kéo theo rằng  $\psi_1 \in \mathcal{F}$ . Với ký hiệu ánh xạ  $s(w) = w^2$ , chúng ta có

$$\psi = \varphi_{-\alpha} \circ \varphi_\alpha \circ \psi = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ g = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta} \circ \psi_1.$$

Do  $\psi_1(z_0) = \varphi_\beta \circ g(z_0) = \varphi_\beta(\beta) = 0$ , đạo hàm hàm hợp cho ta

$$\psi'(z_0) = F'(0)\psi'_1(z_0) \quad \text{ở đây } F = \varphi_{-\alpha} \circ s \circ \varphi_{-\beta}.$$

Chúng ta thấy rằng  $F(U) \subseteq U$  và  $F$  không là đơn ánh trên  $U$  (do  $\varphi_{-\alpha}$  và  $\varphi_{-\beta}$  là đơn ánh và  $s$  không là đơn ánh); hơn nữa  $F$  cũng liên tục trên  $\overline{U}$ . Theo công thức tích phân Cauchy ta có

$$|F'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{F(\xi)}{\xi^2} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi r}{r^2} = \frac{1}{r} \quad \text{với } 0 < r < 1.$$

Cho  $r \rightarrow 1$  ta suy ra được  $|F'(0)| \leq 1$ . Thật sự ta không thể có  $|F'(0)| = 1$ . Thật vậy nếu  $|F'(0)| = 1$  và  $F(0) = 0$  thì theo bổ đề Schwarz ta phải có  $F(z) = cz$  với  $|c| = 1$  điều này mâu thuẫn với tính không 1-1 của  $F$ ; còn nếu  $|F'(0)| = 1$  và  $\gamma = F(0) \neq 0$  thì hàm  $F_1 = \varphi_\gamma \circ F$  giải tích trên  $U$  liên tục trên  $\overline{U}$  thỏa  $F_1(U) = \varphi_\gamma(F(U)) \subseteq \varphi_\gamma(U) = U$ ,  $F_1(0) = \varphi_\gamma(F(0)) = \varphi_\gamma(\gamma) = 0$  và

$$|F'_1(0)| = |\varphi'_\gamma(F_1(0))| \cdot |F'_1(0)| = |\varphi'_\gamma(\gamma)| = \frac{1}{1 - |\gamma|^2} > 1,$$

điều này mâu thuẫn với kết luận của bổ đề Schwarz. Vậy ta có  $|F'(0)| < 1$ , cho nên  $|\psi'(z_0)| < |\psi'_1(z_0)|$ .

Cố định  $z_0 \in D$  và đặt

$$\eta = \sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \mathcal{F}\}.$$

Lập luận trên suy ra mọi  $h \in \mathcal{F}$  với  $|h'(z_0)| = \eta$  sẽ ánh xạ  $D$  lên  $U$ . Thật vậy, nếu  $h$  như thế nhưng không là toàn ánh thì tồn tại  $h_1 \in \mathcal{F}$  sao cho  $\eta = |h'(z_0)| < |h'_1(z_0)|$ , mâu thuẫn với định nghĩa  $\eta$ . Hơn nữa, cũng từ điều đó ta thấy rằng  $\eta > 0$ . Do đó, phép chứng minh hoàn thành khi ta chỉ ra được  $h \in \mathcal{F}$  sao cho  $|h'(z_0)| = \eta$ .

Do  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  nên với mỗi  $n$  nguyên dương tồn tại  $\psi_n \in \mathcal{F}$  sao cho  $|\psi'_n(z_0)| > \eta - \frac{1}{n}$ . Do đó, ta được dãy  $\{\psi_n\} \subseteq \mathcal{F}$  có tính chất  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\psi'_n(z_0)| = \eta$ . Bởi vì  $|\psi(z)| < 1$  với mọi  $z \in D$  đối với mỗi  $\psi \in \mathcal{F}$ , nghĩa là họ hàm  $\mathcal{F}$  bị chặn đều trên  $D$ , và theo Định lý Montel 9.5 (trang 185) dãy  $\{\psi_n\}$  trong  $\mathcal{F}$  có dãy con  $\{\psi_{n_k}\}_k$  hội tụ đều trên các tập compact tới  $h$ . Theo Định lý Weierstrass 6.4 trang 174 hàm  $h$  giải tích trên  $D$  và  $h' = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi'_{n_k}$ . Từ đó ta được  $|h'(z_0)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\psi'_{n_k}(z_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\psi'_n(z_0)| = \eta$ . Do đó,  $h$  không là hàm hằng. Bởi vì  $\psi_n(D) \subseteq U$  với  $n \geq 1$  ta suy ra được  $h(D) \subseteq \overline{U}$ . Theo nguyên lý bảo toàn miền ta suy ra  $h(D) \subseteq U$ .

Vậy ta chỉ còn chứng minh  $h$  là đơn ánh. Cố định hai điểm khác nhau  $z_1$  và  $z_2$  thuộc  $D$ , đặt  $\alpha = h(z_1)$  và  $\alpha_k = \psi_{n_k}(z_1)$  đối với  $k = 1, 2, \dots$ , và giả sử  $\overline{\Delta}$  là hình tròn đóng tâm  $z_2$  nằm trong  $D$  nhưng không chứa  $z_1$  sao cho  $h - \alpha$  không có không điểm trên  $\partial\overline{\Delta}$ . Ta có tìm được  $\overline{\Delta}$  như thế bởi vì tập không điểm của hàm giải tích nhưng không hàm hằng  $h - \alpha$  không có điểm tụ trong  $D$  (Định lý 3.7 trang 236). Dãy hàm  $\{\psi_{n_k} - \alpha_k\}_k$  hội tụ đều trên  $\overline{\Delta}$  tới  $h - \alpha$ . Ngoài ra các hàm  $\psi_{n_k} - \alpha_k$  không có không điểm trong  $\Delta$ , bởi vì các hàm này là 1-1 và có chỉ một không điểm  $z_1$ . Theo định lý Hurwitz (trang 287)  $h - \alpha$  không có không điểm trong  $\Delta$ , đặc biệt  $h(z_2) - \alpha \neq 0$  hay  $h(z_2) \neq h(z_1)$ .  $\square$

**4.5 Hệ quả.** Hai miền đơn liên trong  $\mathbb{C}$  thì đồng phôi với nhau.

*Chứng minh.* Nếu  $D$  là một miền đơn liên trong  $\mathbb{C}$  thì hoặc  $D$  trùng với  $\mathbb{C}$  hoặc đồng phôi với  $B(0, 1)$  (theo định lý ánh xạ Riemann). Từ đó ta kết luận được  $D$  đồng phôi với  $\mathbb{C}$  (vì  $B(0, 1)$  đồng phôi với  $\mathbb{C}$ ). Vậy hai miền đơn liên bất kỳ đồng phôi với nhau (do cùng đồng phôi với  $\mathbb{C}$ ).  $\square$

## Bài tập

- 1) Chứng minh rằng  $\mathbb{C}$  không thể tương đương chỉnh hình với hình tròn mở.
- 2) Chứng minh rằng nếu  $f$  là một ánh xạ bảo giác tại  $z_0$  thì tồn tại một  $\varepsilon$ -lân cận  $U$  của  $z_0$  sao cho  $f$  có hàm ngược trên  $U$  và hàm ngược ấy cũng là ánh xạ bảo giác trên  $f(U)$ .

## § 5 Bài toán biểu diễn bảo giác

Xét bài toán của ánh xạ bảo giác: cho trước một hàm  $f$  giải tích trong một tập mở của  $\mathbb{C}$ , hãy tìm một *tập mở liên thông*  $D$  (thành phần liên thông) để cho  $f$  đơn ánh trên đó, và hãy xác định  $f(D)$ ; nghĩa là xác định miền đơn diện của  $f$ .

Nhận thấy rằng, theo kết quả trước đây bài toán này luôn luôn có lời giải trong một lân cận điểm  $z_0$  ở đó hàm  $f$  là bảo giác. Tuy nhiên, nó không có lời giải nào trong mọi lân cận của những điểm mà ở đó  $f$  không bảo giác. Thật vậy, nếu  $f$  giải tích tại  $z_0$  nhưng không bảo giác tại  $z_0$ , nghĩa là  $f'(z_0) = 0$ , khi đó phương trình  $f(z) = f(z_0)$  có nghiệm  $z_0$  với cấp lớn hơn hoặc bằng 2; do đó, theo Định lý 6.10 trang 290 hàm  $f$  không là đơn ánh trong bất kỳ lân cận nào của điểm  $z_0$ . Theo Định lý 4.3 nếu hàm giải tích  $f$  là đơn ánh trên tập mở thì  $f$  là ánh xạ bảo giác trên  $D$ . Như vậy, ta có được một điều kiện cần để hàm giải tích  $f$  là đơn ánh trên  $D$ . Tuy nhiên, đây không là điều kiện đủ; chẳng hạn như hàm  $f(z) = e^z$  mà ta đã biết nó không là đơn ánh trên  $\mathbb{C}$  nhưng nó bảo giác trên  $\mathbb{C}$  vì  $f'(z) \neq 0$  với mọi  $z \in \mathbb{C}$ .

Ta cũng biết rằng, hàm  $f(z) = e^z$  là hàm tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi i$  (Định lý 3.4 trang 92) nên mọi dải dạng  $\{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$  đều là miền đơn diện của hàm  $f$ . Ta thường quan tâm tới những dải có dạng  $B_k = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, (2k-1)\pi < y < (2k+1)\pi\}$  hay  $B'_k = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, 2k\pi < y < 2(k+1)\pi\}$  với  $k \in \mathbb{Z}$ . Mỗi dải như vậy cho chúng ta một nhánh hàm logarithm, ngược của  $f$ . Đặc

biệt, với dải  $B_0$  ứng với hàm  $\log z$  và với dải  $B'_0$  ứng với hàm  $\ln z$ . Ta cũng có, ảnh của  $B_k$  qua  $f$  là  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  và ảnh của  $B'_k$  qua  $f$  là  $D' = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ .

Tương tự, nếu  $p$  là một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 thì hàm  $f(z) = z^p$  là bảo giác tại mọi điểm  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nhưng không đơn ánh trên đó. (Hàm  $f$  không bảo giác tại 0; thật sự nó biến hai nửa đường thẳng tạo một góc  $\theta$  ở 0 thành hai nửa đường thẳng tạo thành góc  $p\theta$  ở 0.) Từ kết quả căn bậc  $p$  của một số phức thì miền đơn diệp của  $f$  là miền hình quạt vô tận tâm 0 xác định bởi góc  $\alpha < \text{Arg } z < \alpha + \frac{2\pi}{p}$ . Chẳng hạn, ta quan tâm đến những miền đơn diệp  $S_k$  xác định bởi góc  $\frac{(2k-1)\pi}{p} < \text{Arg } z < \frac{(2k+1)\pi}{p}$  với  $k = 0, 1, \dots, p-1$ . Ta cũng thấy rằng ảnh của  $S_k$  qua  $f$  là  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Hàm  $f(z) = z^p$  là ánh xạ bảo giác từ  $S_k$  lên  $D$  và có hàm ngược  $f^{-1}(z) = \sqrt[p]{z}$  là một nhánh của hàm đa trị  $w = \sqrt[p]{z}$ .

Bây giờ ta hãy nhắc lại bài toán ngược của phép biểu diễn bảo giác: cho trước hai miền  $D$  và  $D'$ , hãy tìm xem khi nào tồn tại một phép biểu diễn bảo giác từ  $D$  lên  $D'$  và xác định cụ thể những phép biểu diễn bảo giác đó. Thật sự, chúng ta đã xét một số ví dụ cụ thể cho lời giải bài toán này có thể chưa dùng thuật ngữ ánh xạ bảo giác. Ta biết rằng nếu  $f$  là ánh xạ bảo giác và là đơn ánh từ  $D$  lên  $D'$  thì tất nhiên  $f$  là một phép đồng phôi. Do đó, ta có ngay một điều kiện cần để bài toán có lời giải là  $D$  và  $D'$  đồng phôi. Tuy nhiên, đây không là điều kiện đủ như ví dụ  $\mathbb{C}$  và  $B(0, 1)$  đồng phôi nhưng không tồn tại ánh xạ bảo giác từ  $\mathbb{C}$  lên  $B(0, 1)$  (theo định lý Liouville hàm giải tích và bị chặn trên  $\mathbb{C}$  phải là hàm hằng). Định lý ánh xạ Riemann cho chúng ta lời giải đối với trường hợp  $D$  và  $D'$  là những miền đơn liên khác  $\mathbb{C}$ .

## Bài tập

1) Tìm miền đơn diệp của hàm Joukowski  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  và mô tả phép biểu diễn bảo giác của nó.

## Chương X

# Tích vô hạn

### § 1 Tích số vô hạn

**1.1 Định nghĩa.** Cho dãy số phức  $\{p_n\}$ . Một **tích vô hạn** các số phức của dãy  $\{p_n\}$

$$(1.2) \quad p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

được xác định bởi giới hạn của dãy các tích riêng xác định bởi  $P_n = p_1 \cdots p_n$ . Tích vô hạn trên được gọi là **hội tụ đến giá trị**  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  nếu giới hạn này tồn tại và khác không.

Có những lý do để chúng ta loại trừ trường hợp  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$ . Nếu ta chấp nhận giá trị  $P = 0$  thì bất cứ tích vô hạn nào với một nhân tử bằng 0 (trong dãy ban đầu có một phần tử bằng 0) sẽ hội tụ, và sự hội tụ đó không phụ thuộc vào toàn bộ các nhân tử của tích. Một lý do cho điều kiện  $P \neq 0$  xuất phát từ việc chúng ta muốn biểu diễn một hàm qua tích vô hạn và điều này phải có thể thực hiện được đối với cả hàm có các không điểm. Cũng vì lý do đó chúng ta đi đến quy ước chung là tích vô hạn (1.2) được gọi là hội tụ nếu và chỉ nếu chỉ có hữu hạn các nhân tử bằng không và nếu các tích riêng được thành lập từ các nhân tử khác không dần về một giới hạn hữu hạn khác không.

## 1.3 Thí dụ. Xét tích vô hạn

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Ta đặt

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Do đó

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Xét tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^{n-1}}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8) \cdots$  với  $|z| < 1$ . Ta có

$$P_n = \prod_{k=1}^n (1 + z^{2^{k-1}}) = \frac{(1-z)(1+z)(1+z^2) \cdots (1+z^{2^{n-1}})}{1-z} = \frac{1-z^{2^n}}{1-z}.$$

Vì vậy ta tính được

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^{2^n}}{1-z} = \frac{1}{1-z}. \quad \square$$

Trong tích vô hạn hội tụ, nhân tử tổng quát  $p_n$  dần về 1. Thật vậy, sau khi loại bỏ các nhân tử bằng không, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1.$$

Với kết quả này, người ta thường viết tích vô hạn ở dạng

$$(1.4) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Khi đó,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  là điều kiện cần để tích vô hạn này hội tụ.

Nếu không có nhân tử nào bằng không, một điều tự nhiên là so sánh tích vô hạn (1.4) với chuỗi vô hạn

$$(1.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$$

trong đó  $\log(z) = \ln|z| + i\varphi$  với  $-\pi < \varphi \leq \pi$  và  $\varphi = \arg(z)$  nghĩa là  $\varphi$  là argument chính của  $z$ . Ta có kết quả sau.

**1.6 Định lý.** *Tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  với  $1 + a_n \neq 0$  với mọi  $n$  hội tụ đồng thời với chuỗi vô hạn  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ .*

*Chứng minh.* Trong số phức ta cũng có đẳng thức

$$e^{\log(z)} = z.$$

Do đó, với  $S_n$  là tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi (1.5) và  $P_n$  là tích riêng của tích vô hạn (1.4) ta có

$$e^{S_n} = P_n.$$

Vậy nếu chuỗi (1.5) hội tụ và có tổng là  $S$ , thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{S_n} = e^S \neq 0.$$

Nghĩa là tích vô hạn (1.4) hội tụ về  $e^S$ .

Ngược lại, giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0$ . Chúng ta lấy giá trị logarithm của  $P$  là giá trị chính

$$\log(P) = \ln|P| + i\arg(P).$$

Với mỗi  $n$  ta lấy giá trị logarithm của  $P_n$  như sau

$$\log(P_n) = \ln|P_n| + i\text{Arg}(P_n) \quad \text{với } \arg(P) - \pi < \text{Arg}(P_n) \leq \arg(P) + \pi.$$

Theo tính chất của logarithm ta suy ra được

$$S_n = \log(P_n) + h_n \cdot 2\pi i, \quad \text{trong đó } h_n \text{ là số nguyên hoàn toàn xác định.}$$

Với hai giá trị liên tiếp ở trên chúng ta thu được



$$(h_{n+1} - h_n)2\pi i = \log(P_n) - \log(P_{n+1}) + \log(1 + a_{n+1}).$$

Suy ra

$$(h_{n+1} - h_n)2\pi = \operatorname{Arg}(P_n) - \operatorname{Arg}(P_{n+1}) + \arg(1 + a_{n+1})$$

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$  cùng với điều kiện  $\arg(P) - \pi < \operatorname{Arg}(P_n) \leq \arg(P) + \pi$  nên với mọi  $n > N$  nào đó ta suy ra được

$$|\arg(1 + a_n)| < \frac{2\pi}{3}, \quad |\operatorname{Arg}(P_n) - \arg(P)| < \frac{2\pi}{3}.$$

Vậy với mọi  $n > N$  ta suy ra được

$$\begin{aligned} |h_{n+1} - h_n| &\leq \frac{1}{2\pi} (|\operatorname{Arg}(P_n) - \arg(P)| \\ &\quad + |\operatorname{Arg}(P_{n+1}) - \arg(P)| + |\arg(1 + a_n)|) \\ &< \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là  $h_{n+1} = h_n$  với mọi  $n > N$ , suy ra khi  $n > N$  các  $h_n$  cùng bằng một số nguyên  $h$  cụ thể nào đó và  $S_n = \log(P_n) + h \cdot 2\pi i$  (khi  $n > N$ ). Do đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log(P_n) + h \cdot 2\pi i] = \log(P) + h \cdot 2\pi i.$$

Vậy chuỗi (1.5) hội tụ. □

**1.7 Định nghĩa.** Tích vô hạn (1.4) được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi tương ứng (1.5) hội tụ tuyệt đối.

**1.8 Định lý.** Điều kiện cần và đủ để tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  hội tụ tuyệt

đối là chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ tuyệt đối.

*Chứng minh.* Với giá trị chính của logarithm ta có

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1 + z)}{z} = 1.$$

Khi  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  hội tụ tuyệt đối hay  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ tuyệt đối, ta đều suy ra được  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Khi đó, với  $\varepsilon > 0$  nhỏ hơn 1 tồn tại  $N > 0$  sao cho với mọi  $n > N$  ta có

$$\left| \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} - 1 \right| < \varepsilon,$$

suy ra

$$||\log(1 + a_n)| - |a_n|| < |\log(1 + a_n) - a_n| < \varepsilon |a_n|$$

hay

$$(1 - \varepsilon)|a_n| < |\log(1 + a_n)| < (1 + \varepsilon)|a_n|.$$

Từ bất đẳng thức kép trên ta suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$  hội tụ tuyệt đối. Từ đó ta có được kết luận của định lý.  $\square$

**1.9 Hệ quả.** Giả sử  $0 \leq u_n < 1$ . Khi đó, tích  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$  hội tụ nếu và chỉ nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ .

*Chứng minh.* Theo định lý trên tích  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$  hội tụ khi và chỉ khi chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n)$  hội tụ tuyệt đối nghĩa là chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ.  $\square$

## § 2 Tích vô hạn hàm phức

Bây giờ ta muốn định nghĩa tích vô hạn của một dãy hàm. Cũng tương tự như quy ước khi ta định nghĩa tích vô hạn, ta định nghĩa tích vô hạn của dãy hàm  $\{a_n(z)\}$  trên tập  $D$  khi với mỗi  $z \in D$  chỉ có hữu hạn các số  $a_n(z)$  bằng không. Khi đó, ta có tích của dãy hàm  $\{a_n(z)\}$  là

$$(2.1) \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n(z).$$

Từ Định lý 1.6 để tìm miền hội tụ của tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  ta chỉ việc tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n(z))$ . Khái niệm hội tụ tuyệt đối của tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  được định nghĩa thông qua chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n(z))$ , ta có định nghĩa sau.

**2.2 Định nghĩa.** Tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  được gọi là **hội tụ tuyệt đối** trên tập  $D$  nếu chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n(z))$  hội tụ tuyệt đối trên  $D$ .

**2.3 Nhận xét.** Từ Định lý 1.6 ta suy ra được nếu hàm xác định bởi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n(z))$  giải tích trên  $D$  thì hàm xác định bởi tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  cũng giải tích trên  $D$ .

**2.4 Định nghĩa.** Tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  được gọi là **hội tụ đều** trên  $D$  nếu dãy các tích riêng  $p_n(z) = \prod_{k=1}^n u_k(z)$  hội tụ đều trên  $D$ .

**2.5 Định lý.** Tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  khi và chỉ khi tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(u_n(z))$ .

*Chứng minh.* Đặt  $p_n(z) = \prod_{k=1}^n u_k(z)$  và  $s_n(z) = \sum_{k=1}^n \log(u_k(z))$ . Cũng như trong chứng minh định lý 1.6 ta có đẳng thức sau

$$e^{s_n(z)} = p_n(z).$$

Điều này cùng với sự liên tục của hàm mũ ta suy ra được sự hội tụ đều của tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(u_n(z))$  kéo theo sự hội tụ đều của tích  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ . Tương tự như chứng minh định lý 1.6 ta có thể thu được

$$s_n(z) = \log(p_n(z)) + h \cdot 2\pi i \quad \text{với mọi } z \in D \text{ khi } n \text{ đủ lớn}$$

trong đó  $h$  là một số nguyên xác định. Vì vậy từ sự liên tục của hàm logarithm ta suy ra được nếu tích  $\prod_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  hội tụ đều trên  $D$  thì tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \log(u_n(z))$  hội tụ đều trên  $D$ .  $\square$

**2.6 Thí dụ.** Xét tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$  trên tập compact  $D$  bất kỳ. Khi đó, tồn tại  $R > 0$  sao cho  $|z| < R$  với mọi  $z \in D$ . Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{n} = 0$  nên với  $n$  đủ lớn ta có

$$\log \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}.$$

Từ khai triển Maclaurin của hàm  $\log(1 + z/n)$  khi  $n > R$  ta có

$$\log \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{kn^k}.$$

Mặt khác, với mọi  $z \in D$ , ta có

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{kn^k} \right| < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R^k}{2n^k} = \frac{1}{2(1 - \frac{R}{n})} \frac{R^2}{n^2}.$$

Do chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(1 - \frac{R}{n})} \frac{R^2}{n^2}$  hội tụ nên chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$  hội tụ đều và tuyệt đối trên  $D$ . Vậy tích vô hạn  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$  hội tụ đều và tuyệt đối trên bất kỳ tập compact nào trong  $\mathbb{C}$ .

Mặt khác, với mọi  $|z| < R$  và  $n$  đủ lớn ta có

$$\left| \left( \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right)' \right| = \left| \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{z}{n}} - \frac{1}{n} \right| = \frac{|z|}{n^2 |1 + \frac{z}{n}|} \leq \frac{2R}{n^2}.$$

Suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \left( 1 + \frac{z}{n} \right) - \frac{z}{n} \right)'$  hội tụ đều trên  $\{z : |z| < R\}$ . Vậy hàm xác định bởi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$  giải tích trên  $\{z : |z| < R\}$ .

Do  $R$  tùy ý nên suy ra hàm xác định bởi tích  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ ; hơn nữa hàm này chỉ có các không điểm là các số nguyên âm.  $\square$

**2.7 Thí dụ.** Cho dãy số phức  $\{a_n\}$ . Xét tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right)$ .

Theo Định lý 1.8 tích vô hạn đã cho hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$  hội tụ. Trong trường hợp này tích vô hạn đã cho hội tụ đều trên bất kỳ tập compact nào. Hơn nữa, với  $|z| < R$  và  $n$  đủ lớn ta có

$$\left| \left( \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \right)' \right| = \frac{1}{|a_n(1 - \frac{z}{a_n})|} < \frac{2}{|a_n|}.$$

Suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) \right)'$  hội tụ đều trên  $\{z : |z| < R\}$ . Vậy hàm xác định bởi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right)$  giải tích trên  $\{z : |z| < R\}$ . Do  $R$  tùy ý nên suy ra hàm xác định bởi tích  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right)$  giải tích trên  $\mathbb{C}$ ; hơn nữa hàm này chỉ có các không điểm tại  $a_n$  với  $n = 1, 2, \dots$   $\square$

Ta có kết quả gần như liên hệ với Định lý 1.8 đối với sự hội tụ đều của tích vô hạn các hàm, nhưng trước hết ta cần chứng minh bổ đề sau.

**2.8 Bổ đề.** Nếu  $u_1, \dots, u_N$  là các số phức và nếu

$$p_N = \prod_{n=1}^N (1 + u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|)$$

thì

$$p_N^* \leq e^{|u_1| + \dots + |u_N|} \quad |p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

*Chứng minh.* Trong giải tích thực ta chứng minh được bất đẳng thức  $1 + x \leq e^x$  với mọi  $x \geq 0$ . Do đó, ta có

$$p_N^* = \prod_{n=1}^N (1 + |u_n|) \leq \prod_{n=1}^N e^{|u_n|} = e^{|u_1| + \dots + |u_N|}.$$

Với  $N = 1$ , ta có  $|P_1 - 1| = |u_1| = p_N^* - 1$ . Vậy bất đẳng thức thứ hai cần chứng minh đúng với  $N = 1$ . Giả sử nó đúng với  $N - 1$ . Khi đó, ta suy ra được

$$\begin{aligned} |p_N - 1| &= |p_{N-1}(1 + u_N) - 1| = |(p_{N-1} - 1)(1 + u_N) + u_N| \\ &\leq |p_{N-1} - 1|(1 + |u_N|) + |u_N| \\ &\leq (p_{N-1}^* - 1)(1 + |u_N|) + |u_N| = p_N^* - 1. \end{aligned}$$

Ta suy ra được điều phải chứng minh.  $\square$

**2.9 Định lý.** *Giả sử  $\{u_n(z)\}$  là dãy các hàm bị chặn trên tập  $D$  sao cho chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$  hội tụ đều trên  $D$ . Khi đó, tích*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

*hội tụ đều trên  $D$  và  $f(z_0) = 0$  với  $z_0$  nào đó thuộc  $D$  nếu và chỉ nếu tồn tại  $n$  để  $u_n(z_0) = -1$ . Ngoài ra, nếu  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  là một hoán vị bất kỳ của  $\{1, 2, 3, \dots\}$  thì*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_{n_k}(z)).$$

*Chứng minh.* Từ giả thiết suy ra rằng  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$  bị chặn trên  $D$ . Thật

vậy, do chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$  hội tụ đều trên  $D$  nên tồn tại  $N_0$  sao cho  $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |u_n(z)| <$

1 với mọi  $z \in D$ , và do dãy  $\{u_n(z)\}$  bị chặn trên  $D$  nên tồn tại  $M_0$  sao cho  $|u_n(z)| < M_0$  với mọi  $z \in D$  với mọi  $1 \leq n \leq N_0$ ; do đó, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| = \sum_{n=1}^{N_0} |u_n(z)| + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |u_n(z)| < N_0 M_0 + 1 \quad \text{với mọi } z \in D.$$

Đặt  $p_N(z) = \prod_{n=1}^N (1 + u_n(z))$  và  $C = e^{N_0 M_0 + 1}$ . Khi đó, theo Bổ đề 2.8 ta có

$$\begin{aligned} |p_N(z)| &= \prod_{n=1}^N |1 + u_n(z)| \leq \prod_{n=1}^N (1 + |u_n(z)|) \\ &\leq e^{\sum_{n=1}^N |u_n(z)|} \\ &< e^{N_0 M_0 + 1} = C \end{aligned}$$

với mọi  $z \in D$ .

Cho  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  tùy ý. Lấy  $N_1$  sao cho

$$(2.10) \quad \sum_{n=N_1}^{\infty} |u_n(z)| < \varepsilon \quad \text{với mọi } z \in D.$$

Giả sử  $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  là một hoán vị bất kỳ của  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Nếu  $N > N_1$  và nếu  $M > N$  và đủ lớn sao cho

$$\{1, 2, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$$

và nếu  $q_M(z) = \prod_{k=1}^M (1 + u_{n_k}(z))$ , thì

$$q_M(z) - p_N(z) = p_N(z) \left( \prod_{\substack{1 \leq k \leq M \\ n_k > N}} (1 + u_{n_k}(z)) - 1 \right).$$

Do đó, từ (2.10) và Bổ đề 2.8 ta suy ra được

$$\begin{aligned} |q_M(z) - p_N(z)| &\leq |p_N(z)| \left( \prod_{\substack{1 \leq k \leq M \\ n_k > N}} |1 + u_{n_k}(z)| - 1 \right) \\ &\leq |p_N(z)| \left( \prod_{n > N} |1 + u_n(z)| - 1 \right) \\ &\leq |p_N(z)| (e^{\sum_{n > N} |u_n(z)|} - 1) \\ &\leq |p_N(z)| (e^{\varepsilon} - 1) \\ &\leq 2\varepsilon |p_N(z)| \\ &< 2\varepsilon C \end{aligned}$$

với mọi  $z \in D$  và  $N > N_1$ . Đặc biệt, khi  $n_k = k$  với mọi  $k = 1, 2, \dots$  thì  $q_M(z) = p_M(z)$ . Khi đó, ta viết lại

$$|p_M(z) - p_N(z)| < 2\varepsilon C \quad \text{với mọi } M > N > N_1, z \in D.$$

Vậy dãy hàm  $\{p_N(z)\}$  hội tụ đều trên  $D$  về hàm giới hạn  $f$ . Mặt khác, từ bất đẳng thức ở trên ta suy ra được bất đẳng thức

$$|p_M(z) - p_N(z)| \leq 2\varepsilon |p_N(z)| \quad \text{với mọi } z \in D \text{ và } M > N > N_1.$$

Do  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  nên với mọi  $z \in D$  và  $M > N > N_1$  ta suy ra được

$$(1 - 2\varepsilon)|p_N(z)| \leq |p_M(z)| \leq (1 + 2\varepsilon)|p_N(z)|.$$

Do đó, cho  $M \rightarrow \infty$  ta được

$$(1 - 2\varepsilon)|p_N(z)| \leq |f(z)| \leq (1 + 2\varepsilon)|p_N(z)| \quad \text{với mọi } z \in D.$$

Nếu tồn tại  $z_0 \in D$  và  $n$  sao cho  $u_n(z_0) = -1$ , thì  $p_N(z) = 0$  khi  $N > n$ , suy ra  $f(z_0) = 0$ . Ngược lại, nếu  $f(z_0) = 0$  thì ta phải có  $p_N(z_0) = 0$  suy ra tồn tại  $n$  sao cho  $u_n(z_0) = 0$ .

Trở lại trường hợp tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} |q_M(z) - f(z)| &\leq |q_M(z) - p_N(z)| + |p_N(z) - f(z)| \\ &< 2\varepsilon C + |p_N(z) - f(z)| \end{aligned}$$

với mọi  $z \in D$ ,  $M > N > N_1$ . Từ đó suy ra dãy  $\{q_M(z)\}$  hội tụ về hàm  $f(z)$  là hàm giới hạn của  $\{p_N\}$ .  $\square$

**2.11 Định lý.** Giả sử  $0 \leq u_n < 1$ . Khi đó,  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) > 0$  nếu và chỉ

$$\text{nếu } \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

*Chứng minh.* Đặt  $p_n = \prod_{k=1}^n (1 - u_k)$ . Ta nhận thấy  $p_n > 0$  và  $p_{n+1} = p_n(1 - u_{n+1}) \leq p_n$ . Vậy dãy  $\{p_n\}$  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 cho nên tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \geq 0$ . Theo Định lý 2.9 nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$  và  $u_n \neq 1$

với mọi  $n$  nên suy ra  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) = p > 0$ .



Ngược lại, nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$  và do  $1 - x < e^{-x}$  khi  $x \geq 0$ , ta có

$$p \leq p_n = \prod_{k=1}^n (1 - u_k) \leq e^{-\sum_{k=1}^n u_k} \quad \text{với mọi } n.$$

Cho  $n \rightarrow \infty$  ta suy ra được  $p = 0$ . □

**2.12 Định lý.** Giả sử các hàm  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , giải tích trên miền  $\Omega$ , không hàm nào đồng nhất bằng không trên  $\Omega$ , và chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$  hội tụ đều trên mọi tập compact trong  $\Omega$ . Khi đó, tích  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều trên các tập compact, và hàm  $f$  giải tích trên  $\Omega$ . Ngoài ra

$$(2.13) \quad m(f; z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n; z) \quad z \in \Omega$$

ở đây  $m(f; z)$  ký hiệu số bội của không điểm  $z$  của  $f$  (nếu  $f(z) \neq 0$  ta xem  $m(f; z) = 0$ ).

*Chứng minh.* Đặt  $u_n(z) = f_n(z) - 1$ . Suy ra các hàm  $u_n(z)$  giải tích trên  $\Omega$  nên chúng bị chặn trên các tập compact trong  $\Omega$ . Theo Định lý 2.9 đối với dãy hàm  $\{u_n(z)\}$  ta suy ra được tích  $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  hội tụ đều về hàm  $f$  trên các tập compact trong  $\Omega$ . Do đó,  $f$  giải tích trên  $\Omega$ .

Lấy  $z_0 \in \Omega$ . Nếu  $f(z_0) \neq 0$  thì theo Định lý 2.9 ta được  $f_n(z_0) \neq 0$  với mọi  $n$ . Do đó, ta có được đẳng thức (2.13). Nếu  $f(z_0) = 0$ , thì tồn tại một lân cận  $V$  trong  $\Omega$  của  $z_0$  sao cho  $f(z) \neq 0$  với mọi  $z \in V$ . Do đó, các  $f_n$  chỉ đạt giá trị không trong  $V$  tại  $z_0$ ; hơn nữa chỉ có hữu hạn các hàm  $f_n$  như thế bởi vì chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} |1 + f_n(z_0)|$  hội tụ. Nghĩa là tồn tại  $N > 0$  sao cho  $f_n(z) \neq 0$  với mọi  $n > N$  mọi  $z \in V$ . Do đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(f_n; z_0) = \sum_{n=1}^N m(f_n; z_0).$$

Hơn nữa, theo Định lý 2.9 ta suy ra được đẳng thức (2.13) tại  $z_0$ . Ta cũng nhận thấy chỉ có hữu hạn các số hạng của chuỗi trong (2.13) là dương với mọi  $z \in \Omega$ . □

### § 3 Dạng chính tắc Weierstrass

Nếu  $g(z)$  là một hàm giải tích thì  $f(z) = e^{g(z)}$  cũng là hàm giải tích và nó khác không với mọi  $z$ . Ngược lại, giả sử  $f(z)$  là một hàm giải tích khác không. Khi đó, hàm  $f'(z)/f(z)$  giải tích, suy ra nó có nguyên hàm là hàm  $g(z)$  nào đó. Mặt khác, đạo hàm của hàm  $f(z)e^{-g(z)}$  bằng không suy ra  $f(z)e^{-g(z)}$  là hàm hằng gọi là  $C$ . Khi đó, ta có

$$f(z) = Ce^{g(z)} \qquad f(z) = e^{g(z) + \log C}.$$

Như vậy, ta có một tính chất đặc trưng của hàm giải tích: Hàm  $f(z)$  giải tích và khác không khi và chỉ khi nó có dạng  $e^{g(z)}$  trong đó  $g(z)$  là hàm giải tích.

Từ kết quả trên và từ Định lý 3.2 ta dễ dàng chứng minh được kết quả tổng quát cho hàm giải tích có hữu hạn các không điểm. Kết quả này được phát biểu trong định lý sau.

**3.1 Định lý.** *Nếu hàm giải tích  $f(z)$  có  $m$  ( $m$  có thể bằng không) không điểm tại gốc tọa độ (tại 0) và có các không điểm khác là  $a_1, a_2, \dots, a_N$  (các số có thể lặp lại). Khi đó, hàm  $f$  có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

trong đó  $g(z)$  là hàm giải tích.

**3.2 Định lý.** *Tồn tại hàm giải tích có không là không điểm bội  $m$  và có vô hạn không điểm khác không  $a_1, a_2, \dots$  (nếu  $\alpha$  là một không điểm bội  $m$  thì  $\alpha$  sẽ xuất hiện  $m$  lần trong dãy) thỏa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .*

*Chứng minh.* Xét tích vô hạn các hàm  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)}$  trong đó  $p_n(z)$

là một đa thức. Cho  $R > 0$  bất kỳ. Xét  $D = \{z : |z| \leq R\}$ . Theo giả thiết ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{a_n} = 0 \qquad \text{với mọi } z \in D.$$

Do đó, với  $n$  đủ lớn ta có khai triển

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\frac{z}{a_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{a_n}\right)^3 - \dots$$

Chọn đa thức  $p_n(z)$  là một tổng riêng của chuỗi lũy thừa trên:

$$p_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{m_n}.$$

Từ đó ta tính được

$$\begin{aligned} \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + p_n(z) \\ = -\frac{1}{m_n + 1} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{m_n + 1} - \frac{1}{m_n + 2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{m_n + 2} - \cdots \end{aligned}$$

Do đó, modulus của nó được ước lượng khi  $z \in D$  như sau

$$\begin{aligned} \left| \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + p_n(z) \right| &\leq \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \left( \frac{z}{a_n} \right)^k \right| \\ &\leq \frac{1}{m_n + 1} \sum_{k=m_n+1}^{\infty} \left( \frac{R}{|a_n|} \right)^k \\ &= \frac{1}{m_n + 1} \left( \frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \left( 1 - \frac{R}{|a_n|} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Giả sử  $m_n$  được chọn sau cho chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n + 1} \left( \frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1}$  hội tụ (chẳng hạn ta chọn  $m_n = n$ ). Khi đó, với  $n$  đủ lớn ta có

$$\left| \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + p_n(z) \right| \leq \frac{1}{m_n + 1} \left( \frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \left( 1 - \frac{R}{|a_n|} \right)^{-1} < \pi.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left| \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{p_n(z)} \right| &= \left| \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) + p_n(z) \right| \\ &\leq \frac{2}{m_n + 1} \left( \frac{R}{|a_n|} \right)^{m_n+1} \end{aligned}$$

Vậy chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{m_n}}$  hội tụ đều trên tập

compact  $D$ , suy ra tích  $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{a_n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{m_n} \left( \frac{z}{a_n} \right)^{m_n}}$  hội tụ đều

trên tập compact  $D$  về hàm  $f$ ; hơn nữa hàm  $f$  giải tích trên  $D$ . Do  $R$  tùy ý nên  $f$  giải tích trên  $D$ . Ta cũng có hàm  $f$  chỉ có các không điểm là  $a_1, a_2, a_3, \dots$  □

**3.3 Định lý. (Weierstrass)** Nếu hàm giả tích  $f$  nhận 0 là không điểm bội  $m$  và có vô hạn không điểm khác không  $a_1, a_2, \dots$  thỏa  $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  (ngoài ra không còn không điểm nào khác) thì hàm  $f$  có thể được biểu diễn ở dưới dạng

$$(3.4) \quad f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}$$

trong đó  $m_n$  là các số tự nhiên xác định và  $g(z)$  là hàm giả tích.

*Chứng minh.* Theo định lý trên tồn tại hàm giả tích

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}}$$

chỉ có các không điểm  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Do đó, hàm xác định bởi

$$\frac{f(z)}{z^m P(z)}$$

sau khi rút gọn là một hàm giả tích không có bất kỳ một không điểm nào. Vì vậy nó phải có dạng  $\frac{f(z)}{z^m P(z)} = e^{g(z)}$  trong đó  $g(z)$  là một hàm giả tích. Từ đó ta được điều phải chứng minh.  $\square$

**3.5 Định lý.** Mọi hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$  là thương của hai hàm giả tích.

*Chứng minh.* Nếu  $F(z)$  là một hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$  thì chúng ta có thể tìm được một hàm giả tích  $g(z)$  (áp dụng Định lý 3.3) sao cho mỗi không điểm của  $g(z)$  là một cực điểm của  $F(z)$  và ngược lại. Khi đó, hàm  $F(z)g(z)$  sau khi rút gọn là một hàm giả tích  $f(z)$ , và chúng ta thu được  $F(z) = f(z)/g(z)$ .  $\square$

**3.6 Định nghĩa.** Với  $p$  là một số nguyên không âm, hàm  $G(u, p)$  xác định bởi

$$G(u, p) = \begin{cases} 1 - u & p = 0 \\ (1 - u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^p}{p}} & p > 0 \end{cases}$$

Hàm  $G(u, p)$  được gọi là **nhân tử sơ cấp Weierstrass**.

Cho  $\{a_n\}$  là một dãy không có số hạng nào bằng không và có modulus không giảm. Tích vô hạn

$$(3.7) \quad \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

được gọi là **tích chính tắc Weierstrass** ứng với dãy  $\{a_n\}$  và  $p$  được gọi là **genus** của tích chính tắc.

## § 4 Genus của hàm giải tích

Ta đã chứng minh rằng tích chính tắc Weierstrass hội tụ và là một hàm giải tích chỉ có các không điểm là các số  $a_1, a_2, a_3, \dots$  nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{p+1} \quad \text{hội tụ với mỗi } R,$$

điều đó có được khi chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$  hội tụ.

**4.1 Định nghĩa.** Nếu hàm giải tích  $f$  có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

trong đó  $a_1 \neq 0$ ,  $|a_{n+1}| \geq |a_n|$  với mọi  $n$ , và  $g(z)$  là một đa thức có bậc  $q$ . Khi đó, ta nói hàm  $f$  có genus hữu hạn và  $\max\{q, p\}$  được gọi là **genus** của hàm  $f$ .

**4.2 Thí dụ.** Xét hàm giải tích  $\sin \pi z$ . Ta nhận thấy các không điểm là các số nguyên  $z = \pm n$ . Do

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ phân kỳ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ hội tụ}$$

chúng ta phải lấy  $p = 1$  và thu được biểu diễn ở dạng

$$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Người ta chứng minh được  $e^{g(z)} = \pi$ . Do đó,  $\sin \pi z$  có biểu diễn ở dạng tích chính tắc là

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Vậy hàm giải tích  $\sin \pi z$  có genus 1. □

**4.3 Thí dụ.** Hàm giải tích có genus 0 là hàm ở một trong các dạng

$$Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad \text{với} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty,$$

hoặc

$$Cz^m \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Hàm giải tích có genus 1 là hàm ở một trong các dạng

$$Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \quad \text{với} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty,$$

hoặc

$$Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad \text{với} \quad \alpha \neq 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|},$$

hoặc

$$Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad \text{với} \quad \alpha \neq 0. \quad \square$$

**4.4 Định lý. (Borel)** Cho  $F(z)$  là một hàm giải tích có genus là 0 hoặc 1. Nếu tất cả các không điểm của  $F(z)$  là thực thì đạo hàm của nó  $F'(z)$  có tất cả các không điểm là thực và giữa hai không điểm liên tiếp của  $F(z)$  có một và chỉ một không điểm của  $F'(z)$ . Genus của  $F'(z)$  bằng với genus của  $F(z)$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $F(z)$  có genus 0 và có các không điểm thực. Nếu  $F(z)$  có dạng

$$F(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

trong  $a_n$  là các số thực, thì

$$\begin{aligned}\frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{Cmz^{m-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) - Cz^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} \\ &= \frac{m}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - a_n}.\end{aligned}$$

Do đó, phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  xác định bởi (với  $z = x + iy$ )

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = -\frac{my}{x^2 + y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-y}{(x - a_n)^2 + y^2}.$$

Từ đó ta thấy rằng phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  bằng không chỉ khi  $y = 0$ . Do đó,  $F'(z)$  chỉ có không điểm thực. Mặt khác, ta có

$$\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)' = -\frac{m}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - a_n)^2}$$

nó nhận giá trị thực âm khi  $z$  là số thực. Vậy giữa hai không điểm thực liên tiếp của  $F(z)$  và khi  $z$  tăng hàm  $F'(z)/F(z)$  phải giảm từ  $\infty$  về  $-\infty$ . Do đó,  $F'(z)$  có đúng một không điểm thực giữa hai không điểm thực liên tiếp của  $F(z)$ . Trường hợp hàm  $F(z)$  có dạng

$$F(z) = Cz^m \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

với  $a_n$  là các số thực, ta chứng minh cũng giống như trên để được kết luận của định lý.

Giả sử hàm giải tích  $F(z)$  có genus 1 và có các không điểm đều là thực. Nếu  $F(z)$  có dạng

$$F(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$$

với  $\alpha, a_n$  là các số thực, thì ta tính được

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{Ce^{\alpha z}(mz^{m-1} + \alpha z^m) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}}{Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}} \\ &\quad - \frac{Cz^m e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n^2} e^{\frac{z}{a_n}} \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}}{Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}} \\ &= \frac{m}{z} + \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{a_n(a_n - z)} \\ &= \frac{m}{z} + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right). \end{aligned}$$

Do đó, phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  xác định bởi (với  $z = x + iy$ )

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = -\frac{my}{x^2 + y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-y}{(x - a_n)^2 + y^2}.$$

Từ đó ta thấy rằng phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  bằng không chỉ khi  $y = 0$ . Do đó,  $F'(z)$  chỉ có không điểm thực. Mặt khác, ta có

$$\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)' = -\frac{m}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_n)^2}$$

giống trường hợp trên, nên ta có được kết luận của định lý. Trường hợp hàm  $F(z)$  có dạng

$$F(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

với  $\alpha$  và  $a_n$  là các số thực. Ta tính được

$$\begin{aligned} \frac{F'(z)}{F(z)} &= \frac{Ce^{\alpha z}(mz^{m-1} + \alpha z^m) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}{Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} \\ &\quad - \frac{Cz^m e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{k \neq n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} \\ &= \frac{m}{z} + \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n - z}. \end{aligned}$$



Do đó, phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  xác định bởi (với  $z = x + iy$ )

$$\operatorname{Im}\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right) = -\frac{my}{x^2 + y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-y}{(x - a_n)^2 + y^2}.$$

Từ đó ta thấy rằng phần ảo của  $F'(z)/F(z)$  bằng không chỉ khi  $y = 0$ . Do đó,  $F'(z)$  chỉ có không điểm thực. Mặt khác, ta có

$$\left(\frac{F'(z)}{F(z)}\right)' = -\frac{m}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_n)^2}.$$

Ta cũng có được kết quả của định lý. Trường hợp hàm  $F(z)$  có dạng

$$F(z) = Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

với  $\alpha$  và  $a_n$  là các số thực. Ta cũng suy ra được kết luận của định lý như các trường hợp trên.  $\square$

## § 5 Hàm gamma

Hàm giải tích  $\sin \pi z$  có tất cả các số nguyên là không điểm và nó là hàm đơn giản nhất có tính chất này. Chúng ta sẽ xem xét các hàm giải tích mà nó chỉ có các số nguyên dương là không điểm hay chỉ có các số nguyên âm làm không điểm. Chẳng hạn, hàm giải tích đơn giản nhất chỉ có tất cả số nguyên âm là không điểm là hàm xác định bởi tích chính tắc Weierstrass

$$(5.1) \quad G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Rõ ràng hàm  $G(-z)$  chỉ có các số nguyên dương là không điểm. Từ biểu diễn của hàm  $\sin \pi z$  ở dạng tích chính tắc ta suy ra được

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Ta nhận thấy rằng hàm  $G(z-1)$  chỉ có các không điểm là các số nguyên không dương, tức là nó có các không điểm giống với  $G(z)$  và thêm 0. Do đó, hàm thu được sau khi đơn giản  $\frac{G(z-1)}{zG(z)}$  là hàm giải tích và không có không điểm nào, cho nên tồn tại hàm giải tích  $\gamma(z)$  sao cho

$$\frac{G(z-1)}{zG(z)} = e^{\gamma(z)} \quad \text{hay} \quad G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z).$$

Để xác định hàm  $\gamma(z)$  ta lấy logarithm hai vế rồi tính đạo hàm hai vế.

$$\log(G(z-1)) = \log(ze^{\gamma(z)}G(z))$$

và

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \frac{G'(z)}{G(z)}.$$

Tính đạo hàm  $G'(z)$  và đơn giản biểu thức  $G'(z)/G(z)$  như trong chứng minh Định lý 4.4 ta thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)}_1 \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

So sánh kết quả này với đẳng thức trước ta suy ra được  $\gamma'(z) = 0$ . Vậy  $\gamma(z)$  là một hằng số và ký hiệu hằng số này là  $\gamma$ . Vậy ta có được tính chất của hàm  $G(z)$  như sau

$$G(z-1) = e^{\gamma} z G(z).$$

Nếu ta đặt  $H(z) = G(z)e^{\gamma z}$ , thì

$$H(z-1) = G(z-1)e^{\gamma(z-1)} = e^{\gamma} z G(z)e^{\gamma(z-1)} = zH(z).$$

Ta hãy xác định giá trị của  $\gamma$ . Dùng định nghĩa và tính chất của hàm  $G(z)$  khi lấy  $z = 1$  ta có

$$1 = G(0) = e^{\gamma} G(1)$$

suy ra

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma} &= G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} e^{-\frac{1}{k}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)
\end{aligned}$$

Hằng số  $\gamma$  được gọi là **hằng số Euler**, giá trị gần đúng của nó là 0.5772157.

Đặt  $\Gamma(z) = 1/[zH(z)]$ . Khi đó, ta có

$$(5.2) \quad \Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)H(z+1)} = \frac{1}{H(z)} = z\Gamma(z).$$

Hàm  $\Gamma(z)$  được gọi là **hàm gamma Euler**. Ta có biểu diễn của hàm gamma là

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

và ta có đẳng thức

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{1}{zH(z)}(-z)\Gamma(-z) = \frac{1}{H(z)zH(-z)} \\
&= \frac{1}{zG(z)G(-z)} \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi z}.
\end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng  $\Gamma(z)$  là một hàm phân hình với các cực điểm là  $0, -1, -2, \dots$  nhưng không có không điểm.

Từ định nghĩa hàm gamma ta dễ dàng tính được  $\Gamma(1) = 1$ , và từ công thức (5.2) ta lần lượt tính được  $\Gamma(2) = 1$ ,  $\Gamma(3) = 1 \cdot 2$ ,  $\Gamma(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3$ , và công thức tổng quát  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Từ đẳng thức  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$  với  $z = \frac{1}{2}$  ta tính được  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

# Tài liệu tham khảo

- [1] Hồ Công Xuân Vũ Ý, Nguyễn Khắc Quỳnh Anh. *Phép Tính Vi Phân Hàm Vector*. (Tập bài giảng). Trường Đại học Tiền Giang, Tiền Giang, 2011.
- [2] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill, Inc., New York, third edition, 1979.
- [3] Nguyễn Hữu Anh. *Nhập Môn Giải Tích Phức*. Tủ sách Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên (Tp. Hồ Chí Minh), 1999.
- [4] James Ward Brown, Ruel V. Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, New York, eighth edition, 2009.
- [5] Lê Thị Thiên Hương. *Toán Cao Cấp, Tập 1: Phép tính vi tích phân hàm một biến và lý thuyết chuỗi*. NXB Giáo Dục, Tp Hồ Chí Minh, 2003. (Tái bản lần thứ ba).
- [6] Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải. *Hàm Biến Phức*. NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2006. (In lần thứ 3 có sửa chữa và bổ sung).
- [7] Nguyễn Văn Khuê, Vũ Tuấn. *Hàm Số Biến Số Phức*. NXB Giáo Dục, Hà Nội, 1990.
- [8] Rosa Peter. *Đùa Với Cái Vô Hạn*. NXB Giáo Dục, Hà Nội, 2007. (Bản dịch của: Nguyễn Xuân Huy, Phạm Ngọc Khôi, Ngô Ánh Tuyết, Hồ Thuần).
- [9] Trương Văn Thương. *Hàm Số Biến Số Phức*. NXB Giáo Dục, Đà Nẵng, 1999.

- [10] Vũ Tuấn, Phan Đức Thành, Ngô Xuân Sơn. *Giải Tích Toán Học, tập 2*. NXB Giáo Dục, 1988. (In lần thứ tư có chỉnh lí).

## Kiểm Tra Lần I

**Câu 1.** (a) Tính và đưa về dạng đại số biểu thức  $\frac{(1-2i)(\overline{3+4i})}{6+5i}$ .

(b) Tìm các căn bậc hai của  $4-5i$ . (Gợi ý: dùng định nghĩa và dạng đại số của số phức.)

**Câu 2.** Chứng minh rằng với mỗi điểm  $z$  thuộc đường tròn có phương trình  $|z|=3$  ta có  $\frac{12}{5} \leq \left| \frac{z^3+3}{2z-4} \right| \leq 15$

**Câu 3.** Tìm các căn bậc 4 của  $-8-8\sqrt{3}i$ .

**Câu 4.** Tính  $\text{Im}(\sqrt{3}+i)^{2008}$

**Câu 5.** (a) Chứng minh tính chất: nếu dãy  $\{z_n\}$  hội tụ về  $z_0$  và  $c$  là một hằng số phức thì  $\{cz_n\}$  hội tụ về  $cz_0$ .

(b) Chứng minh rằng nếu hai chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  và  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  hội tụ thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n)$  cũng hội tụ và  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$

**Câu 6.** Chứng minh rằng  $D = \{z : \text{Im}z > 0 \text{ hay } z = (x, 0) \text{ với } x \geq 0\}$  là miền đơn điệu của hàm  $f(z) = z^2$ , và tìm hàm ngược của  $f$  trên  $D$ .

**Câu 7.** Tính các giới hạn hoặc chứng minh nó không tồn tại

(a)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|\text{Im}z}{z}$

(b)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|z|}{z}$

**Câu 8.** Tìm miền hội tụ của dãy hàm  $\left\{ \frac{1}{z^2+n} \right\}$ . Dãy hàm đã cho có hội tụ đều trên miền hội tụ đó hay không?

**Câu 9.** Tìm bán kính hội tụ của chuỗi hàm lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{n^2} z^n$  với  $c$  là hằng số phức.

**Câu 10.** Xét tính khả vi của hàm  $f(z) = \overline{z}\text{Re}z^2$ . Tìm tất cả các điểm mà hàm  $f$  giải tích

**Câu 11.** Cho  $f$  là một hàm giải tích trên miền  $D$ . Chứng minh rằng nếu hàm  $f(\overline{z})$  cũng giải tích trên  $D$ , thì  $f$  là hàm hằng.

## Kiểm Tra Lần II

- Câu 1.** Tìm tất cả các số phức  $z$  sao cho  $e^{2z+3-4i} = -\sqrt{3} - i$ .
- Câu 2.** Dùng định nghĩa các hàm mũ và lượng giác chứng minh rằng  $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$  và  $\overline{\sin(iz)} = -\sin(i\bar{z})$
- Câu 3.** Giải phương trình  $\sin 2z = i$ .
- Câu 4.** Dùng định nghĩa chứng minh đẳng thức  $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$ .
- Câu 5.** Tính  $\ln(-1 + i)^3$  và  $\text{Ln}(-1 + i\sqrt{3})$
- Câu 6.** Tìm modulus của giá trị của lũy thừa  $(2 - 2i)^{2+3i}$ .
- Câu 7.** Tìm ảnh của đường tròn có phương trình  $|z + i - 2| = 3$  qua ánh xạ tuyến tính  $w = (4 + 5i)z - 6i + 7$ .
- Câu 8.** Tìm ảnh của dải  $0 < x + y < 1$  qua ánh xạ  $w = \frac{1}{z}$ .
- Câu 9.** Tìm ảnh của đường thẳng  $y = x + 1$  qua ánh xạ  $w = \frac{z - i}{z + i}$
- Câu 10.** Tính tích phân  $\int_C \bar{z} dz$  trong đó  $C$  là đường cong từ  $-1 - i$  đến  $1 + i$  dọc theo đồ thị  $y = x^3$ .
- Câu 11.** Tính tích phân  $\int_C \frac{dz}{z^2 + 2}$  với  $C$  là đường tròn  $|z - i| = 2$  được định hướng dương.
- Câu 12.** Tính tích phân  $\int_C \frac{z}{z^2 - (1 - 2i)z - 2i} dz$  với  $C$  là đường tròn  $|z| = 3$  được định hướng dương.
- Câu 13.** Chứng minh rằng hàm  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$  là hàm điều hòa trên  $\mathbb{R}^2$ . Tìm một hàm giải tích trên  $\mathbb{C}$  nhận  $u(x, y)$  làm hàm phần thực.
- Câu 14.** Chứng minh rằng  $\left| \int_C \frac{z^3 + \sqrt{3} + i}{2z^2 - 4} dz \right| \leq \frac{132\pi}{7}$  trong đó  $C$  là đường tròn có phương trình  $|z| = 4$  được định hướng dương.

## ĐỀ THI SỐ 1

- Câu 1(a)** Xét sự tồn tại của giới hạn  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}\text{Im}z}{|z|}$ .
- (b) Tìm tất cả các giá trị của  $z$  sao cho  $e^{z-3i} = -4 + 4i$ .
- (c) Chứng minh rằng  $|e^{ix} - 1 - ix| = |e^{-ix} - 1 + ix|$  với mọi số thực  $x$ .
- (d) Tìm số nghiệm của phương trình  $3z^4 - 7z^3 + 3z - 1 + i = 0$  trong hình tròn  $\{z : |z| < 2\}$ .
- Câu 2(a)** Tìm tất cả các điểm  $z = x + iy$  sao cho hàm  $f(z) = 2xy + x + i(x^2 + y)$  khả vi tại đó và tính đạo hàm tại những điểm đó.
- (b) Chứng minh rằng có hàm giải tích  $f(z)$  nhận hàm  $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + x$  là phần thực của nó. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  ấy.
- (c) Tìm hàm phân tuyến tính biến 3 điểm  $3i, \infty, i$  thành 3 điểm  $0, -i, -2i$  (theo tương ứng).
- (d) Khai triển Taylor hàm  $f(z) = \frac{1}{1+z}$  tại điểm  $z_0 = -i$  và tìm bán kính hội tụ của nó.
- Câu 3.** Tính các tích phân sau
- (a) Tính  $\int_{\Gamma} 2\bar{z}dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đoạn thẳng định hướng từ  $1 + 2i$  đến  $4 + 3i$ .
- (b) Tính  $\int_{\Gamma} \frac{2z}{z^4 - 3} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.
- (c) Tính  $\int_{\Gamma} \frac{\sin 2z}{(z-i)^2} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z+2| = 3$  được định hướng dương.
- (d) Khai triển Laurent hàm số  $f(z) = z^3 \cos \frac{2006}{z}$  trong miền  $\{z : 0 < |z| < \infty\}$ . Từ đó tính tích phân  $\int_{\Gamma} z^3 \cos \frac{2006}{z} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.
- Câu 4(a)** Chứng minh rằng  $\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 - 2z + 5} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 5}$  trong đó  $C_R$  có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$  và  $R > 4$ .



- (b) Tìm thặng dư của hàm  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5}$  tại các điểm bất thường cô lập trong miền  $D = \{z : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$  với  $R > 4$ .
- (c) Tính tích phân  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 2z + 5}$  trong đó  $\Gamma$  là biên được định hướng dương của miền  $D$  như ở phần (b).
- (d) Từ các kết quả trên hãy tính tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$ .

## ĐỀ THI SỐ 2

- Câu 1.** (a) Tìm bán kính hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(1+2i)n}}{(3-4i)^{n-1}} (z-5i)^n$ .
- (b) Tìm tất cả các giá trị của  $z$  sao cho  $e^{iz} = 2$ .
- (c) Tính  $\operatorname{Im}(\sin(1+2i))$ .
- (d) Tìm số nghiệm của phương trình  $z^3 - 2z^2 + 12z - 4 + 5i = 0$  trong hình tròn  $\{z : |z| < 2\}$ .
- Câu 2.** (a) Tìm tất cả các điểm  $z = x + iy$  sao cho hàm  $f(z) = x^3 + y^2 + i(x + 2y^3)$  khả vi tại đó và tính đạo hàm tại những điểm đó.
- (b) Chứng minh  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  là hàm điều hòa. Tìm hàm giải tích  $f(z)$  sao cho nó có phần thực là  $u(x, y)$ .
- (c) Tìm tất cả các giá trị của  $z$  sao cho  $\cos z = \frac{5}{4}$ .
- (d) Tìm hàm phân tuyến tính biến 3 điểm  $1, \infty, 1 + \frac{i}{2}$  thành 3 điểm  $-i, 1 - i, 0$  (theo tương ứng).
- Câu 3.** (a) Tính  $\int_{\Gamma} \frac{z^4}{z^5 + 1} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 2$  được định hướng dương.
- (b) Tính  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-i)^2(z+2008i)^{2009}}$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z| = 3$  được định hướng dương.
- (c) Tính  $\int_{\Gamma} z^{2006} e^{\frac{2008}{z}} dz$ , trong đó  $\Gamma$  là đường tròn  $|z+1| = 4$  được định hướng dương.

- (d) Khai triển Laurent hàm  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3i)}$  trên vành  $1 < |z| < 3$ .

**Câu 4. (a)** Chứng minh rằng  $\left| \int_{C_R} \frac{z^2+2}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{R(R^2+2)\pi}{R^4-1}$  trong đó  $C_R$  có biểu diễn tham số  $w(t) = Re^{it}$  với  $0 \leq t \leq \pi$  và  $R > 1$ .

- (b) Đặt  $D = \{z : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$  với  $R > 1$ . Tìm các điểm bất thường cô lập của hàm  $f(z) = \frac{z^2+2}{z^4+1}$  trong miền  $D$ .

- (c) Tính  $\int_{\Gamma} \frac{z^2+2}{z^4+1} dz$  trong đó  $\Gamma$  là biên được định hướng dương của miền  $D$  ở phần (b).

- (d) Từ các kết quả trên hãy tính tích phân suy rộng  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{x^4+1} dx$ .

# Chỉ mục

- ánh xạ đồng phôi, 57
- ánh xạ bảo giác, 295, 303
- đối xứng qua đường tròn, 106
- đề thi Olympic sinh viên, 19, 26, 29
- đồng liên tục đều trên tập compact, 183
- đồng phôi, 57, 59
- độ dài đường cong, 134
- đạo hàm, 78
- đạo hàm cấp cao, 79
- định lý Abel, 70
- định lý Bolzano-Weierstrass, 40
- định lý Cauchy-Goursat, 150, 251
- định lý Cauchy-Hadamard, 72
- định lý Cauchy-Riemann, 80, 84
- định lý Harnack, 203
- định lý Hurwitz, 287, 291
- định lý Lagrange, 129
- định lý Liouville, 181
- định lý Merten, 46
- định lý Montel, 185
- định lý Morera, 168
- định lý Rouché, 287
- định lý Taylor, 219
- định lý Weierstrass, 174, 176, 216, 238, 322
- định lý ánh xạ Riemann, 303, 307
- định lý đại số cơ bản, 182, 289
- định lý đường cong Jordan, 134
- định lý duy nhất, 235
- định lý giá trị trung bình, 190
- định lý tích phân loại Cauchy, 173
- định lý thặng dư Cauchy, 250
- định lý giá trị trung bình, 177
- đẳng cấu chỉnh hình, 301, 302
- đẳng thức Lagrange, 19, 21
- đơn vị ảo, 7, 8, 10
- đường cong, 131, 134
  - độ dài, 134
  - trơn từng khúc, 134
- đường cong Jordan, 134
- đường cong kín, 134
- đường cong khả vi, 134
- đường cong trơn, 134
- đường cong trơn từng khúc, 134
- đường gấp khúc, 131
- đường kính phân hoạch, 138
- đường tròn, 16
- đa thức Chebyshev, 29
- đa thức với hệ số thực, 11
- điều hòa dưới, 206
- điều kiện Cauchy-Riemann, 80, 87, 192
- điểm bất động, 115
- điểm bất thường, 236
- điểm bất thường bỏ được, 237, 244
- điểm bất thường cốt yếu, 237, 244

điểm bất thường cô lập, 236, 244  
điểm biên, 32  
điểm cô lập, 34  
điểm dính, 34  
điểm giới hạn, 34, 48  
điểm ngoài, 32  
điểm tụ, 48  
điểm trong, 32  
điểm vô cùng, 30

argument, 22  
argument chính, 23

bất đẳng tam giác, 17  
bất đẳng thức Cauchy, 19, 181  
bất đẳng thức Harnack, 203  
bất đẳng thức Jordan, 265  
bán kính hội tụ, 71, 72  
bài toán Dirichlet, 195  
bị chặn đều trên tập compact, 183  
bổ đề Schwarz, 300  
bảo toàn góc, 294  
bao đóng, 32  
biên, 32  
biểu diễn Riemann, 30  
biểu diễn tham số đường cong, 131

cấp của cực điểm, 242  
cấp của không điểm, 234  
công thức Euler, 25, 95  
công thức lượng giác Lagrange, 29  
công thức Moivre, 25  
công thức Poisson, 194, 202  
công thức Schwarz, 193  
công thức tích phân Cauchy, 162  
cực điểm, 237, 242, 244  
căn bậc  $n$ , 26, 102  
căn nguyên thủy, 26  
chuỗi hàm, 63

hội tụ đều, 63  
hội tụ tuyệt đối, 65  
chuỗi hội tụ, 43, 63  
chuỗi lũy thừa, 70, 89  
chuỗi Laurent, 225, 230, 247  
chuỗi phân kỳ, 43  
chuỗi số phức, 43  
tiêu chuẩn Cauchy, 44  
chuỗi tích Cauchy, 46, 50, 74  
chuỗi Taylor, 219  
compact, 34, 58  
cung, 131

dấu hiệu Cauchy-Riemann, 80  
dạng đại số, 8  
dạng Euler, 25  
dạng lượng giác, 22  
dạng mũ, 25  
dãy Cauchy, 39  
dãy hàm, 60  
dãy hàm hội tụ, 60  
dãy hàm hội tụ đều, 291  
dãy hội tụ, 37, 40  
dãy hội tụ đều trên các tập compact, 176  
dãy số phức, 37  
tiêu chuẩn Cauchy, 39  
diện Riemann, 125

góc giữa hai đường cong, 107, 294, 297  
genus, 323  
genus của hàm số, 323, 324  
giới hạn của dãy hàm, 60  
giới hạn của hàm số, 52  
giá trị chính Cauchy, 258

hằng số Euler, 329  
hình tròn đóng, 33

- hình tròn mở, 33
- hình vành khăn, 33
- hàm đơn điệu, 50
- hàm đa trị, 125
- hàm điều hòa, 188
- hàm beta, 283
- hàm chặn trên điều hòa, 208
- hàm chẵn hình, 88
- hàm gamma, 329
- hàm giải tích, 88, 89, 190, 246, 291
  - sự duy nhất, 235
- hàm hợp, 59
- hàm hyperbolic, 98
- hàm Joukowski, 55, 90, 121, 299, 307
- hàm lượng giác phức, 95
- hàm lũy thừa, 102, 299, 307
- hàm liên hợp điều hòa, 189
- hàm liên tục, 56
- hàm liên tục đều, 57
- hàm logarithm, 101, 127, 157, 307
- hàm mũ, 91, 306
- hàm mũ cơ số phức, 103
- hàm ngược, 51
- hàm nguyên, 88, 244
- hàm phức biến thực, 128
- hàm phân hình, 238, 322
- hàm phân tuyến tính, 112, 297, 299
- hàm số biến số phức, 50
  - chẵn hình, 88
  - giải tích, 88
  - khả vi, 78
  - liên tục, 56
  - liên tục đều, 57
  - tích phân, 136
- hàm tuyến tính, 105
- hệ số co giãn đều, 295
- hội tụ đều, 60, 63, 313
- hội tụ đều trên mọi tập compact, 62, 287, 291, 292
- hội tụ tuyệt đối, 44, 65, 311, 313
- họ các hàm bị chặn đều, 183
- họ hàm đồng liên tục đều, 183
- hoàn toàn bị chặn, 41
- không điểm của hàm số, 324
- không gian vector các hàm giải tích, 88
- không-điểm, 234
- khả tích, 129, 138
- khả vi, 128
- khai triển Laurent, 230
- khai triển Maclaurin, 219, 221
- khai triển Taylor, 219
- khoảng cách, 34
- lân cận, 32
- lân cận thủng, 32
- lũy thừa bậc  $n$ , 10
- lũy thừa phức, 103
- liên tục, 56
- liên tục đều, 57
- liên thông, 58
- logarithm, 100, 127
  - giá trị chính, 101
- mặt cầu Riemann, 30
- mặt phẳng phức, 7
- mặt phẳng phức mở rộng, 30
- miền, 34
- miền đóng, 34
- miền đơn điệu, 50, 306
- miền đơn liên, 133, 156
- miền đa liên, 133, 159
- modulus, 16
- nửa liên tục trên, 206

- nghiệm đa thức, 11
  - nghiệm liên hợp, 11
  - nguyên hàm, 144, 157
  - nguyên lý argument, 284
  - nguyên lý bảo toàn miền, 290
  - nguyên lý Harnack, 202
  - nguyên lý modulus cực đại, 179, 191
- nhân tử sơ cấp Weierstrass, 322
- phép đồng phôi, 57, 307
- phép đẳng cấu, 301
- phép liên hợp phức, 14
- phép tự đẳng cấu, 301
- phân hoạch, 138
- phần ảo, 7
- phần thực, 7
- phần trong, 33
- phủ mở, 40
- phương trình đường tròn, 109
- phương trình của đường tròn, 16
- phương trình Laplace dạng cực, 192
- số phức, 6
  - argument, 22
  - căn bậc  $n$ , 26
  - dạng đại số, 8
  - dạng Euler, 25
  - dạng lượng giác, 22
  - modulus, 16
  - phép cộng, 7
  - phép chia, 9
  - phép nhân, 7
  - phép trừ, 9
- số phức liên hợp, 7
- tích Cauchy, 46
- tích chính tắc Weierstrass, 323
- tích hai số phức, 7
- tích phân, 136, 138
- tích phân không phụ thuộc đường cong, 145
- tích phân loại Cauchy, 172, 300
- tích phân suy rộng, 257, 264
- tích vô hạn, 308
- tập đóng, 32, 48
- tập bị chặn, 34
- tập compact, 34, 40, 183, 291
- tập liên thông, 33, 35, 132
- tập mở, 32
- tổng hai số phức, 7
- tổng riêng thứ  $n$ , 43
- tổng tích phân, 138
- thành phần liên thông, 34
- thặng dư, 247
- thặng dư logarithm, 286
- thuần ảo, 7
- tiêu chuẩn Cauchy, 39, 44, 61, 64
- tiêu chuẩn Weierstrass, 66
- trục giao, 107
- tuyến tính từng mảnh, 131
- vành các hàm giải tích, 88
- vi phân hàm phức, 84, 190