1 Bài toán biên hỗn hợp thuần nhất cho truyền nhiệt $1-$ chiều trong đoạn hữu hạn.

1.1 Tóm tắt lí thuyết

Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền nhiệt trong đoạn hữu hạn:

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t), 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{2}$$

với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), 0 \le x \le L. \tag{3}$$

Bài toán biên - ban đầu này là mô hình toán học của quá trình truyền nhiệt trong một thanh dẫn nhiệt. Thanh này có chiều dài L khi ở vị trí cân bằng. Ý nghĩa vật lý của các yếu tố trong bài toán trên:

- Nghiệm $u(x,t)$ của bài toán này là nhiệt độ tại điểm x trên thanh, vào thời điểm t.
- $K > 0$ là hệ số dẫn nhiệt.
- Điều kiện biên (2) mô tả hai đầu luôn có nhiệt độ 0.
- $f(x)$ trạng thái ban đầu, nghĩa là nhiệt độ ban đầu tại vị trí x trên thanh.

Trước hết ta tìm các nghiệm không tầm thường, dạng tách biến $u(x,t) = X(x)T(t)$ của bài toán gồm phương trình (1) và hai điều kiện biên (2). Chú ý nói chung ta không có nghiệm như này thỏa mãn điều kiện ban đầu (3). Từ (1)-(2) ta dẫn đến bài toán giá trị riêng Sturm-Liouville:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L, \tag{4}$$

$$X(0) = X(L) = 0. \tag{5}$$

Lời giải của bài toán Sturm-Liouville (4)-(5) được cho bởi:

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, X_n(x) = \sin(n\pi x/L), n = 1, 2, \ldots$$

Một cách tương ứng ta giải được $T_n(t) = a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}$. Khi đó ta thu được nghiệm tách biến:

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x).$$

Điều thú vị ta có thể viết tất cả các nghiệm của (1)-(2) dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L). \tag{6}$$

Đến đây ta dùng điều kiện ban đầu (3) để tính các hệ số như sau:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx, \tag{7}$$

Một vài nhận xét:

- Nếu nhìn "thoáng" nghiệm (6) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ $2L$ theo biến x. Ta có thể xem đây như một cách tiếp cận khác để giải bài toán biên - ban đầu (1)-(2)-(3) bằng cách thác triển lẻ, tuần hoàn chu kỳ $2L$ theo biến x chuyển bài toán đang xét thành bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt trên toàn đường thẳng.
- Nếu $f \in L^1(0, L)$, không cần liên tục, thì dãy hệ số $a_n, n \in \mathbb{N}$, bị chặn. Khi đó ta sẽ thấy ngay nghiệm u khả vi vô hạn khi $t > 0$. Ngoài ra

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Nếu ta thay điều kiện biên Dirichlet thuần nhất (2) (nhiệt độ hai đầu bằng 0) bởi điều kiện biên Neumann thuần nhất

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \text{ thanh cách nhiệt tại hai đầu} \tag{8}$$

thì điều kiện biên (5) chuyển thành

$$X'(0) = X'(L) = 0. \tag{9}$$

Lời giải của bài toán Sturm-Liouville (4)-(9) được cho bởi:

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, X_n(x) = \cos(n\pi x/L), n = 0, 1, 2, \dots$$

Một cách tương ứng ta giải được $T_n(t) = a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}$. Khi đó ta thu được nghiệm tách biến:

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x).$$

Điều thú vị ta có thể viết tất cả các nghiệm của (1)-(8) dưới dạng

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \cos(n\pi x/L). \tag{10}$$

Đến đây ta dùng điều kiện ban đầu (3) để tính các hệ số như sau:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)dx, n \neq 0, . \tag{11}$$

1. Giải bài toán biên - ban đầu (1)-(2)-(3) trong mỗi trường hợp sau:

   (i) $K = 1, L = 1$, và $f(x) = \sin^3(\pi x)$.

   (ii) $K = 2, L = \pi$, và $f(x) = \sin(\pi x)$.

   Kiểm tra nghiệm ở mỗi trường hợp trên có thông thường hay không.

   Lời giải. (i) Sử dụng công thức nghiệm (6) với $K = 1, L = 1$ ta có

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x).$$

   Chú ý rằng $\sin^3(\pi x) = 3\sin(\pi x)/4 - \sin(3\pi x/4)$ là tổ hợp của các hàm riêng nên để tính các hệ số ta chỉ cần đồng nhất hệ số như sau:

- Thay $f(x) = \sin^3(\pi x)$ và chuỗi nghiệm $u(x,t)$ vào (3) ta có

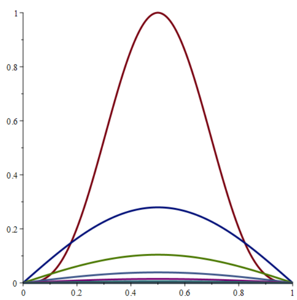
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) = \frac{3}{4}\sin(\pi x) - \frac{1}{4}\sin(3\pi x).$$

  Do đó $a_1 = 3/4, a_3 = -1/4, a_n = 0$ khi $n \notin \{1,3\}$.

Vậy nghiệm của bài toán đang xét

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) - \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x).$$

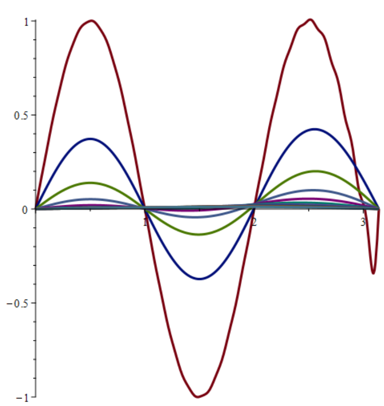
Việc kiểm tra lại nghiệm có thỏa mãn bài toán xem như bài tập.



Hình 1: Nghiệm câu 1 (i).

(ii) Sử dụng công thức nghiệm (6) với $K = 2, L = \pi$ ta có $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2 t}\sin(nx)$. Lưu ý $\sin(\pi x)$ không liên quan đến hàm riêng nên ta không dùng đồng nhất hệ số được. Từ (7) ta tính được

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\pi x)\sin(nx)dx = \frac{2(-1)^n n\sin(\pi^2)}{\pi(\pi^2 - n^2)}.$$



Hình 2: Nghiệm câu 1 (ii).

Vậy nghiệm của bài toán đang xét

$$u(x,t) = \frac{2\sin(\pi^2)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\pi^2 - n^2}e^{-2n^2 t}\sin(nx).$$

Từ $f(\pi) = \sin(\pi^2) \neq 0$ dẫn đến nghiệm tìm được không phải nghiệm thông thường.

2. Giải bài toán biên - ban đầu (1)-(8)-(3) trong mỗi trường hợp sau:

   (i) $K = 1, L = 1$, và $f(x) = \cos^2(\pi x)$.

   (ii) $K = 2, L = \pi$, và $f(x) = \sin(x)$.

   Kiểm tra nghiệm ở mỗi trường hợp trên có thông thường hay không.

   $\boxed{\textit{Lời giải.}}$ (i) Sử dụng công thức nghiệm (10) với $K = 1, L = 1$ ta có

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi)^2 t}\cos(n\pi x).$$

   Chú ý rằng $0, \cos^2(\pi x) = 1/2 + \cos(2\pi x)/2$ đều là tổ hợp của các hàm riêng nên để tính các hệ số ta chỉ cần đồng nhất hệ số như sau:

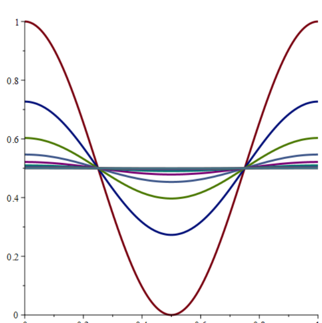
   - Thay $f(x) = \cos^2(\pi x)$ và chuỗi nghiệm $u(x,t)$ vào (3) ta có

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi x).$$

     Do đó $a_0 = a_2 = 1/2, a_n = 0$ khi $n \notin \{0, 2\}$.

   Vậy nghiệm của bài toán đang xét

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2 t}\cos(2\pi x).$$



Hình 3: Nghiệm câu 2 (i).

Việc kiểm tra nghiệm xem như bài tập. Không khó để thấy

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)dx$$

là trung bình của nhiệt độ tại thời điểm ban đầu. Lý do của hiện tượng này: sự trao đổi nhiệt trong thanh hoàn toàn cách li với môi trường bên ngoài.
(ii) Sử dụng công thức nghiệm (10) với $K = 2, L = \pi$ ta có

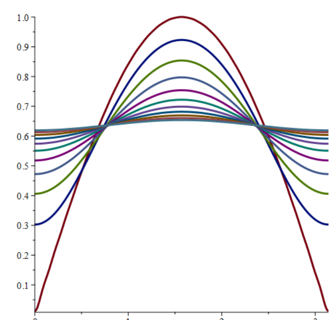
$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2 t} \cos(nx).$$

Lưu ý $\sin(x)$ không liên quan đến hàm riêng nên ta không dùng đồng nhất hệ số được. Từ (11) ta tính được

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } n = 2k+1, \\ \dfrac{4}{\pi(1-4k^2)} & \text{khi } n = 2k. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bài toán đang xét

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} e^{-8k^2 t} \cos(2kx).$$



Hình 4: Nghiệm câu 2 (ii).

Nghiệm tìm được là thông thường. Thật vậy, chú ý chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty}[k^m/(4k^2-1)]e^{-8k^2\epsilon}$ hội tụ với mọi $m \in \mathbb{Z}_+, \epsilon > 0$ nên ta có thể chuyển việc lấy đạo hàm riêng qua chuỗi nghiệm $u(x,t)$. Từ đó không khó khăn để thấy nghiệm $u(x,t)$ khả vi vô hạn, thỏa mãn (1)-(8). Việc kiểm tra (3) không đơn giản chỉ là xem $u(x,0) = f(x)$ mà ta cần xem $\lim_{t\to 0_+} u(x,t) = f(x)$. Điều này có được nhờ chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(4k^2-1)$ hội tụ nên chuỗi nghiệm hội tụ đều trong $[0,\pi]\times[0,1]$. Do đó chuỗi nghiệm liên tục trong $[0,\pi]\times[0,1]$. Đến đây ta kiểm tra xong chuỗi nghiệm tìm được là thông thường.

Tương tự bài trước ta cũng có chuỗi nghiệm cuối cùng sẽ về trạng thái cân bằng, nghĩa là $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2/\pi$. Chứng minh chi tiết xem như bài tập.

3. Xét bài toán biên - ban đầu (1)-(3) với điều kiện biên

$$u(0,t) = u_x(0,t), u_x(L,t) = 0, t \geq 0. \tag{12}$$

(i) Chứng minh rằng tích phân năng lượng

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$$

giảm theo thời gian t.

(i) Xét nghiệm dạng tách biến không tầm thường $u(x,t) = X(x)T(t)$ của bài toán (1)-(12). Chứng minh rằng $X(x)$ thỏa mãn bài toán Sturm-Liouville:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = X'(0), X'(L) = 0.$$

(ii) Chứng minh rằng bài toán Sturm-Liouville ở câu (i) chỉ có nghiệm $\lambda > 0$. Ngoài ra, hai hàm riêng $X_1(x), X_2(x)$ ứng với hai giá trị riêng λ_1, λ_2 khác nhau thì

$$\int_0^L X_1(x)X_2(x)dx = 0.$$

(iii) Chứng minh rằng nếu viết giá trị riêng $\lambda = k^2, k > 0$, thì k là nghiệm của phương trình $k\tan(kL) = 1$. Từ đó ta thu được dãy các giá trị riêng $\lambda_n = k_n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, với $k_n \approx n\pi/L$.

(iii) Giải bài toán Sturm-Liouville ở câu (ii). Từ đó xây dựng chuỗi nghiệm hình thức của bài toán đang xét và đưa ra cách tính hệ số của chuỗi.

(v) Giải bài toán khi $K = 2, L = \pi$, và $f(x) = 1 + 2\sin(x/2)$. Kiểm tra nghiệm tìm được có thông thường không.

Lời giải. (i) Tính toán, và sử dụng phương trình $u_t = Ku_{xx}$, ta được

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^L u_t(x,t)u(x,t)dx = K\int_0^L u_{xx}(x,t)u(x,t)dx \\ &= K[u_x(x,t)u(x,t)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L [u_x(x,t)]^2dx] \end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện biên $u(0,t) = u_x(0,t), u_x(L,t) = 0$ ta có

$$I'(t) = -K\left[[u(0,t)]^2 + \int_0^L [u_x(x,t)]^2dx\right] \leq 0$$

hay $I(t)$ giảm theo t.

(ii) Thay $u(x,t) = X(x)T(t)$ vào (12) với chú ý $T(t) \not\equiv 0$ nên $X(0) = X'(0), X'(L) = 0$. Tiếp tục thay vào (1) ta có

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{KT} = -\lambda$$

với λ là hằng số (không phụ thuộc vào cả x và t).
(iii) Xét tích phân

$$I = \int_0^L X(x)\Big(X''(x) + \lambda X(x)\Big)dx.$$

Do $X(x)$ là nghiệm của phương trình $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ nên $I = 0$. Ngoài ra, sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}\int_0^L X(x)X''(x)dx &= X(x)X'(x)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L [X'(x)]^2dx \\ &= -[X(0)]^2 - \int_0^L [X'(x)]^2dx \quad (\text{ vì } X(0) = X'(0), X'(L) = 0).\end{aligned}$$

Do đó

$$[X(0)]^2 + \int_0^L [X'(x)]^2dx = \lambda\int_0^L X^2(x)dx.$$

Do $X(x)$ không tầm thường nên $\lambda \geq 0$. Nếu $\lambda = 0$ thì $X' = 0$ và $X(0) = 0$. Khi đó $X(x) = X(0) = 0$ là tầm thường. Như vậy $\lambda > 0$.

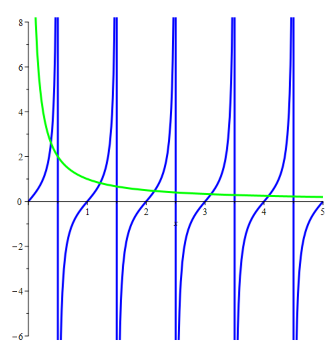
Do $X_1''(x) + \lambda_1 X_1(x) = 0$ nên

$$\begin{aligned}\lambda_1\int_0^L X_1(x)X_2(x)dx = \int_0^L X_1''(x)X_2(x)dx &= X_1'(x)X_2(x)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L X_1'X_2'(x)dx \\ &= X_1(0)X_2(0) - \int_0^L X_1'(x)X_2'(x)dx \quad (\text{ vì } X_1(0) = X_1'(0), X_1'(L) = 0).\end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$X_1(0)X_2(0) - \int_0^L X_1'(x)X_2'(x)dx = \lambda_2\int_0^L X_1(x)X_2(x)dx.$$

Từ trên với chú ý $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ta có đpcm.
(iv) Với $\lambda = k^2, k > 0$, từ phương trình ta giải được $X(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx)$. Thay vào $X(0) = X'(0)$ ta có $a = kb$ và $b \neq 0$. Thay vào $X'(L) = 0$ ta có $k\tan(kL) = 1$.



Hình 5: Dãy các nghiệm dương của $k\tan(kL) = 1$ khi $L = \pi$.

Việc chứng minh phương trình trên có dãy nghiệm $k_n \in (n-1, n), n = 1, 2, \ldots$, xem như bài tập. Để ý rằng $\lim_{n\to\infty} \tan(k_n L) = \lim_{n\to\infty} 1/k_n = 0$ ta có $k_n \approx (n-1)\pi/L$. Với $L = \pi$ ta tính được sáu giá trị riêng đầu tiên $\lambda_n = k_n^2$ với

$$k_1 = 0.3834486028, k_2 = 1.218722014, k_3 = 2.13919688,$$
$$k_4 = 3.099345725, k_5 = 4.076570793, k_6 = 5.062081878.$$

Như vậy ta có dãy hàm riêng (tương ứng):

$$X_n(x) = k_n \cos(k_n x) + \sin(k_n x), n = 1, 2, \ldots$$

Việc kiểm tra lại dãy nghiệm này xem như bài tập. Tiếp theo ta giải được một cách tương ứng

$$T_n(t) = a_n e^{-Kk_n^2 t}.$$

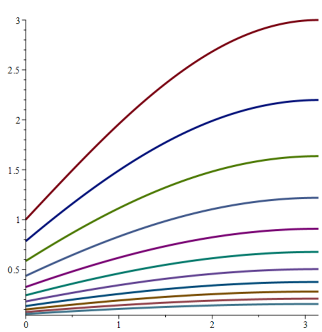
Khi đó ta lập được chuỗi nghiệm hình thức của bài toán đang xét:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-Kk_n^2 t} X_n(x).$$

Chú ý tính trực giao của các hàm riêng nên

$$\int_0^L f(x) X_n(x) dx = a_n \int_0^L X_n^2(x) dx.$$

(v) Nghiệm khi $K = 2, L = \pi$ và $f(x) = 1 + 2\sin(x/2)$ có hình ảnh theo thời gian t như sau:



1.2 Bài tập thực hành

1. Giải bài toán biên - ban đầu (1)-(2)-(3) trong mỗi trường hợp sau:

   (i) $a = 1, L = 1$, và $f(x) = x(1-x)$.

   (ii) $a = 2, L = \pi$, và $f(x) = \sin(x)$.

   Kiểm tra nghiệm ở mỗi trường hợp trên có thông thường hay không. Tính chu kỳ theo thời gian của nghiệm trong từng trường hợp trên.

2. (a) Bằng việc xét
$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$$
để chứng minh các bài toán (1)-(2)-(3) và (1)-(8)-(3) có tối đa một nghiệm.
(b) Cho $f \in L^1(0,L)$. Chứng minh rằng bài toán (1)-(2)-(3) có nghiệm thỏa mãn $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ đều theo x trên $[0,L]$. Ngoài ra (1)-(8)-(3) có nghiệm thỏa mãn
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx \text{ đều theo } x \text{ trên } [0,L].$$

3. Giải bài toán biên - ban đầu (1)-(8)-(3) trong mỗi trường hợp sau:
   (i) $a = 1, L = 1$, và $f(x) = \sin^2(2\pi x)$.
   (ii) $a = 2, L = \pi$, và $f(x) = \sin(3x)$.

   Kiểm tra nghiệm ở mỗi trường hợp trên có thông thường hay không.

4. Xét bài toán biên - ban đầu (1)-(3) với điều kiện biên là một trong các trường hợp sau:
   (a) $u_x(0,t) = u(L,t) = 0, t \geq 0$.
   (b) $u(0,t) = u_x(0,t), u(L,t) = 0, t \geq 0$.
   (c) $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = -u_x(L,t), t \geq 0$.
   (d) $u_x(0,t) = u(0,t), u(L,t) = -u_x(L,t)$.
   (e) $u(0,t) = u(L,t), u_x(0,t) = u_x(L,t), t \geq 0$.

   Khảo sát bài toán trên cho từng trường hợp theo các bước sau.
   (i) Chứng minh rằng tích phân năng lượng
   $$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$$
   giảm theo thời gian t.
   (ii) Xét nghiệm dạng tách biến không tầm thường $u(x,t) = X(x)T(t)$ của bài toán (1) với điều kiện biên tương ứng. Chứng minh rằng $X(x)$ thỏa mãn bài toán Sturm-Liouville: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ với điều kiện biên tương ứng
   (iii) Chứng minh rằng bài toán Sturm-Liouville ở câu (ii) chỉ có nghiệm $\lambda > 0$, trừ ra ý (d) có thêm $\lambda = 0$. Ngoài ra, hai hàm riêng $X_1(x), X_2(x)$ ứng với hai giá trị riêng λ_1, λ_2 khác nhau thì
   $$\int_0^L X_1(x)X_2(x)dx = 0.$$
   (iv) Giải bài toán Sturm-Liouville ở câu (ii). Từ đó xây dựng chuỗi nghiệm hình thức của bài toán đang xét và đưa ra cách tính hệ số của chuỗi. Với $f \in L^1(0,L)$, hãy quan sát dáng điệu của chuỗi nghiệm khi $t \to \infty$.
   (v) Đưa ra các dữ kiện cụ thể rồi tính toán chi tiết cho từng trường hợp.

2 Nguyên lý cực đại.

2.1 Tóm tắt lý thuyết

Lấy $K > 0, T > 0$, và $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, xét $Q_T(a,b) = \{(x,t) : \ a < x < b, 0 < t \leq T\}$ và biên parabolic của $Q_T(a,b)$ xác định bởi

$$\partial_p Q_T(a,b) = \bar{Q}_T(a,b) \setminus Q_T(a,b) = [a,b] \times \{0\} \cup \{a,b\} \times [0,T].$$

Trong trường hợp đặc biệt $a = 0, b = 1$ ta ký hiệu $Q_T(0,1) = Q_T$.
Giả sử $u \in C^{2,1}(Q_T(a,b)) \cap C(\bar{Q}_T(a,b))$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt

$$u_t = K u_{xx} \text{ trong } Q_T(a,b).$$

Khi đó, ta có

$$\min_{\partial_p Q_T(a,b)} u \leq u(x,t) \leq \max_{\partial_p Q_T(a,b)} u, \forall (x,t) \in Q_T(a,b).$$

Từ đây ta có: nếu $v, w \in C^{2,1}(Q_T(a,b)) \cap C(\bar{Q}_T(a,b))$ cùng là nghiệm của phương trình truyền nhiệt trên thì

$$|v(x,t) - w(x,t)| \leq \max_{\partial_p Q_T(a,b)} |v - w|, \forall (x,t) \in Q_T(a,b).$$

Nếu ta thêm giả thiết $v \leq w$ trên $\partial_p Q_T(a,b)$ thì

$$v \leq w \text{ trong } Q_T(a,b).$$

Kết quả này được gọi là nguyên lý so sánh.

2.2 Ví dụ thực hành

1. Giả sử $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ là nghiệm của bài toán (1)-(2)-(3) với dữ liệu

   $$K = 1, L = 1, f(x) = \sin^2(\pi x).$$

   Chứng minh rằng $0 \leq u(x,t) \leq e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x), \forall (x,t) \in Q_T$.
   Lời giải. Xét $v_1(x,t) = 0, v_2(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ đều là nghiệm của bài toán

   $$w_t = w_{xx} \text{ trong } Q_T, w(0,t) = w(1,t) = 0.$$

   Ngoài ra

   $$v_1(x,0) = 0 \leq \sin^2(\pi x) = u(x,0) \leq \sin(\pi x) = v_2(x,0), \forall x \in [0,\pi]$$

   nên theo nguyên lý so sánh ta có đpcm.

2. Giả sử $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$ là nghiệm bị chặn của phương trình truyền nhiệt

   $$u_t = K u_{xx} \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,T].$$

Chứng minh rằng

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} u(y,0) \le u(x,t) \le \sup_{y\in\mathbb{R}} u(y,0), \forall x \in \mathbb{R}, 0 < t \le T.$$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Đặt $M = \sup_{\mathbb{R}\times[0,T]} u, N = \sup_{\mathbb{R}} u(y,0)$. Ta cố định $x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in (0,T]$. Ta sẽ chứng minh

$$u(x_0,t_0) \le N.$$

Lấy $\epsilon > 0$ bất kỳ, xét hàm

$$u_\epsilon(x,t) = u(x,t) - \epsilon(2K(t-t_0) + (x-x_0)^2).$$

Không khó để thấy u_ϵ cũng thỏa mãn phương trình truyền nhiệt đang xét. Ta có

$$u_\epsilon(x_0 \pm R, t) = u(x,t) - \epsilon(2K(t-t_0) + R^2) \le M - \epsilon(-2Kt_0 + R^2), \forall t \in [0,T]$$

nên với $R > 0$ đủ lớn ta có $u_\epsilon(x_0 \pm R, t) \le N, \forall t \in [0,T]$. Lại có

$$u_\epsilon(x,0) = u(x,0) + \epsilon(2Kt_0 - (x-x_0)^2) \le N + \epsilon 2Kt_0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta sử dụng nguyên lý cực đại cho u_ϵ trong $Q_T(x_0 - R, x_0 + R)$ ta có

$$u(x_0,t_0) = u_\epsilon(x_0,t_0) \le N + \epsilon 2Kt_0.$$

Điều này đúng với mọi $\epsilon > 0$ nên $u(x_0,t_0) \le N$. Như vậy ta chứng minh được

$$u(x_0,t_0) \le \sup_{y\in\mathbb{R}} u(y,0), \forall x_0 \in \mathbb{R}, 0 < t_0 \le T.$$

Phần còn lại ta xét $-u$ và áp dụng cách làm trên cho $-u$.

3. Cho $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T \setminus [0,L]\times\{0\}) \cap C(\bar{Q}_T)$ là nghiệm của phương trình truyền nhiệt (1) với điều kiện biên Neumann (8). Chứng minh rằng

$$\min_{y\in[0,L]} u(y,0) \le u(x,t) \le \max_{y\in[0,L]} u(y,0), \forall (x,t) \in Q_T.$$

2.3 Bài tập thực hành

1. Xét bài toán biên - ban đầu (1)-(3) với điều kiện biên là một trong các trường hợp sau:

   (a) $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = \mu(t), t \ge 0.$

   (b) $u(0,t) = u_x(0,t), u(L,t) = \nu(t), t \ge 0.$

   (c) $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = -u_x(L,t), t \ge 0.$

   (d) $u_x(0,t) = u(0,t), u(L,t) = -u_x(L,t).$

   (e) $u(0,t) = u(L,t), u_x(0,t) = u_x(L,t), t \ge 0.$

   Phát biểu và chứng minh nguyên lý cực đại cho từng trường hợp trên.

2. Giả sử $u \in C^{2,1}[0,\infty) \times (0,T]) \cap C([0,\infty) \times [0,T])$ là nghiệm bị chặn của phương trình truyền nhiệt
$$u_t = Ku_{xx} \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,T].$$
Phát biểu và chứng minh nguyên lý cực đại khi u thỏa mãn điều kiện biên là một trong các tình huống sau:

   (a) $u(0,t) = \mu(t), t \geq 0.$

   (b) $u_x(0,t) = 0, t \geq 0.$

3. Cho $T > 0$ và các hàm $a, b, c \in C(Q_T)$ thỏa mãn
$$a(x,t) \geq 0, c(x,t) \leq 0, \forall (x,t) \in Q_T.$$

   (a) Giả sử $w \in C^{2,1}(Q_T)$ thỏa mãn
$$w_t(x,t) - a(x,t)w_{xx}(x,t) - b(x,t)w_x(x,t) - c(x,t)w(x,t) < 0, \forall (x,t) \in Q_T.$$
   Chứng minh rằng w không có cực đại địa phương dương trong Q_T.

   (b) Giả sử $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ thỏa mãn
$$u_t(x,t) - a(x,t)u_{xx}(x,t) - b(x,t)u_x(x,t) - c(x,t)u(x,t) \leq 0, \forall (x,t) \in Q_T$$
   và $u \leq 0$ trên $\partial_p Q_T$. Chứng minh rằng $u \leq 0$ trong Q_T.

   (c) Giả sử $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ thỏa mãn
$$u_t(x,t) - a(x,t)u_{xx}(x,t) - b(x,t)u_x(x,t) - c(x,t)u(x,t) = 0, \forall (x,t) \in Q_T.$$
   Chứng minh rằng nếu u có GTLN không âm trong $\bar{Q}_T$ thì GTLN này đạt được trên $\partial_p Q_T$. Một cách tương tự hãy phát biểu và chứng minh cho GTNN.

   (d) Cho $F \in C(Q_T)$ và $|F| \leq N$ trong Q_T. Giả sử $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ thỏa mãn
$$u_t(x,t) - a(x,t)u_{xx}(x,t) - b(x,t)u_x(x,t) - c(x,t)u(x,t) = F(x,t), \forall (x,t) \in Q_T.$$
   Chứng minh rằng $|u(x,t)| \leq M + NT, \forall (x,t) \in Q_T$, với $M = \max_{\partial_p Q_T} u$.

4. Xét bài toán biên - ban đầu sau
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} & = 1, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) & = 0, t \geq 0, \\ u(x,0) & = 0, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Tìm nghiệm dừng của bài toán đang xét.

   (b) Giả sử $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,\infty)) \cap C([0,1] \times [0,\infty))$ là nghiệm của bài toán đang xét. Chứng minh rằng
$$\frac{(x - x^2)(1 - e^{-8t})}{2} \leq u(x,t) \leq \frac{x - x^2}{2}, \forall 0 \leq x \leq 1, t \geq 0.$$

3 Hàm Green.

3.1 Tóm tắt lý thuyết

Nhắc lại chuỗi nghiệm (6)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L).$$

của bài toán (1)-(2)-(3), trong đó các hệ số được tính bởi

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\pi x/L) dx.$$

Khi đó ta có thể viết lại một cách hình thức

$$u(x,t) = \int_0^L G(x,y,t) f(y) dy \tag{13}$$

với hàm Green được xác định bởi

$$G(x,y,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-K(n\pi/L)^2 t} \sin(n\pi x/L) \sin(n\pi y/L). \tag{14}$$

Với mỗi $\epsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-K(n\pi/L)^2 \epsilon}$$

hội tụ nên chuỗi (14), cũng như chuỗi các đạo hàm riêng mọi cấp theo x, y, t, của nó, hội tụ đều trong $\mathbb{R}^2 \times [\epsilon, \infty)$. Do đó hàm Green khả vi vô hạn theo x, y, t trong $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. Từ đây ta thấy được các tính chất sau của hàm Green $G(x, y, t)$ như sau:

(i) G thỏa mãn phương trình truyền nhiệt theo nghĩa sau:

$$G_t(x,y,t) = KG_{xx}(x,y,t) = KG_{yy}(x,y,t), \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty).$$

(ii) $G(x,y,t) = G(y,x,t), \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$.

(iii) $G(x,y,t)$ tuần hoàn chu kỳ $2L$ theo x với mỗi $(y,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Ngoài ra

$$G(0,y,t) = G(L,y,t) = 0, \forall (y,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Từ đây không khó để thấy, với $f \in C([0,L])$, nghiệm (13) thỏa mãn (1)-(2). Chú ý cách nghiệm (13) thỏa mãn (2) như sau

$$\lim_{x \to 0_+} \int_0^L G(x,y,t) f(y) dy = \lim_{x \to L_-} \int_0^L G(x,y,t) f(y) dy = 0.$$

Chú ý $G(x, y, 0)$ không có nghĩa nên nghiệm (13) thỏa mãn điều kiện ban đầu (3) theo cách

$$\lim_{t \to 0_+} \int_0^L G(x, y, t) f(y) dy = f(x), \forall x \in [0, L]. \tag{15}$$

Nếu f là đa thức lượng giác có dạng

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x/L) \tag{16}$$

ta thấy ngay nghiệm (13) thỏa mãn (3). Thật vậy, với $t > 0, x \in [0, L]$, chuỗi (14) hội tụ đều theo y trên $[0, L]$ và tính trực giao của các hàm riêng $\sin(n\pi y/L), n = 1, 2, \ldots,$ nên

$$\int_0^L G(x, y, t) P_N(y) dy = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \sin(\pi n x/L).$$

Từ đây ta có ngay (15) hay nghiệm (13) thỏa mãn (3).
Với $f \in C([0, L])$ thỏa mãn $f(0) = f(L) = 0$. Theo Weierstrass ta có dãy các đa thức lượng giác $P_N, N \in \mathbb{N}$, dạng (16) sao cho

$$P_N \text{ hội tụ đều đến } f \text{ trên } [0, L].$$

Đặt

$$u_N(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) P_N(y) dy, u(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) f(y) dy.$$

Khi đó u_N, u là nghiệm của phương trình truyền nhiệt (1) và thỏa mãn điều kiện biên (2). Theo trên ta còn có u_N thỏa mãn điều kiện ban đầu (3) theo cách (15). Không khó để thấy

$$\lim_{N \to \infty} u_N(x, t) = u(x, t), \forall x \in [0, L], t > 0. \tag{17}$$

Ngoài ra sử dụng nguyên lý cực đại, với mỗi $T > 0$ ta có

$$\max_{[0,L] \times [0,T]} |u_N - u_M| \leq \max_{[0,L]} |f_N - f_M|.$$

Do đó dãy $u_N, N \in \mathbb{N}$, hội tụ đều trên $[0, L] \times [0, T]$. Từ đây kết hợp với (17) và u_N thỏa mãn (15) ta có u thỏa mãn (15).

3.2 Ví dụ thực hành

1. Xây dựng hàm Green $G_N(x, y, t)$ cho bài toán (1)-(8)-(3). Phát biểu và chứng minh một số tính chất của hàm Green G_N.

   Lời giải. Bài toán (1)-(8)-(3) có chuỗi nghiệm (10) như sau:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t} \cos(n\pi x/L)$$

với các hệ số được tính từ điều kiện ban đầu (3) bởi

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)dx \quad (n \neq 0).$$

Khi đó ta có thể viết lại nghiệm (10) dưới dạng

$$u(x,t) = \int_0^L G_N(x,y,t)f(y)dy \tag{18}$$

với hàm Green cho bài toán (1)-(8)-(3)

$$G_N(x,y,t) = \frac{1}{L}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-K(n\pi/L)^2 t}\cos(n\pi x/L)\cos(n\pi y/L)\right). \tag{19}$$

Cũng như hàm Green cho bài toán (1)-(2)-(3), xuất phát từ việc với mỗi $\epsilon > 0, m \in \mathbb{Z}_+$ ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m e^{-K(n\pi/L)^2\epsilon}$$

hội tụ nên chuỗi (19), cũng như chuỗi các đạo hàm riêng mọi cấp theo x, y, t, của nó, hội tụ đều trong $\mathbb{R}^2 \times [\epsilon, \infty)$. Do đó hàm Green khả vi vô hạn theo x, y, t trong $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. Từ đây ta thấy được các tính chất sau của hàm Green $G_N(x,y,t)$ như sau:

(i) G thỏa mãn phương trình truyền nhiệt theo nghĩa sau:

$$G_{Nt}(x,y,t) = KG_{Nxx}(x,y,t) = KG_{Nyy}(x,y,t), \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty).$$

(ii) $G_N(x,y,t) = G_N(y,x,t), \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$.

(iii) $G_N(x,y,t)$ tuần hoàn chu kỳ $2L$ theo x với mỗi $(y,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Ngoài ra

$$G_{Nx}(0,y,t) = G_{Ny}(L,y,t) = 0, \forall (y,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Khác với hàm Green cho bài toán (1)-(2)-(3), hàm Green G_N có thêm các tính chất sau:

$$G_N(x,y,t) > 0, \forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \text{ và } \int_0^L G_N(x,y,t)dy = 1, \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

3.3 Bài tập thực hành

1. Chứng minh một số tính chất sau của hàm Green đối với bài toán (1)-(2)-(3).

   (a) Với mọi $f \in C([0,L])$ thỏa mãn $f(0) = f(L) = 0$ và $f \geq 0$ trong $[0,L]$ thì

   $$\int_0^L G(x,y,t)f(y)dy \geq 0, \forall t > 0, x \in (0,L).$$

   Nếu thêm giả thiết $f \not\equiv 0$ thì ta có thể bỏ dấu " = " trong bất đẳng thức trên. Từ đó ta dẫn đến

   $$G(x,y,t) > 0, \forall t > 0, (x,y) \in (0,L) \times (0,L).$$

(b) Với mọi $f \in C([0,L])$ thỏa mãn $f(0) = f(L) = 0$ và $f \le 1$ trong $[0,L]$ thì

$$\int_0^L G(x,y,t)f(y)dy < 1, \forall t > 0, x \in (0,L).$$

Từ đó dẫn đến $\int_0^L G(x,y,t)dy \le 1, \forall t > 0, x \in (0,L)$.

(c) Đặt $H(t) = \max_{x \in [0,L]} \int_0^L G(x,y,t)dy, t > 0$. Chứng minh rằng $H(t)$ là hàm giảm chặt trên $(0,\infty)$ và

$$\lim_{t \to 0_+} H(t) = 1.$$

2. Xây dựng hàm Green cho bài toán (1)-(3) với điều kiện biên là một trong các trường hợp sau.

   (a) $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t \ge 0$.

   (b) $u(0,t) = u_x(0,t), u(L,t) = 0, t \ge 0$.

   (c) $u_x(0,t) = 0, u(L,t) = -u_x(L,t), t \ge 0$.

   (d) $u_x(0,t) = u(0,t), u(L,t) = -u_x(L,t)$.

   (e) $u(0,t) = u(L,t), u_x(0,t) = u_x(L,t), t \ge 0$.

   Phát biểu và chứng minh một số tính chất của hàm Green cho từng trường hợp trên.

4 Bài toán không thuần nhất.

4.1 Tóm tắt lý thuyết

Xét bài toán biên Dirichlet đối với phương trình không thuần nhất

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t) + F(x,t), 0 < x < L, t > 0, \tag{20}$$

với điều kiện biên không thuần nhất

$$u(0,t) = \mu(t), u(L,t) = \nu(t), \tag{21}$$

với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), 0 \le x \le L. \tag{22}$$

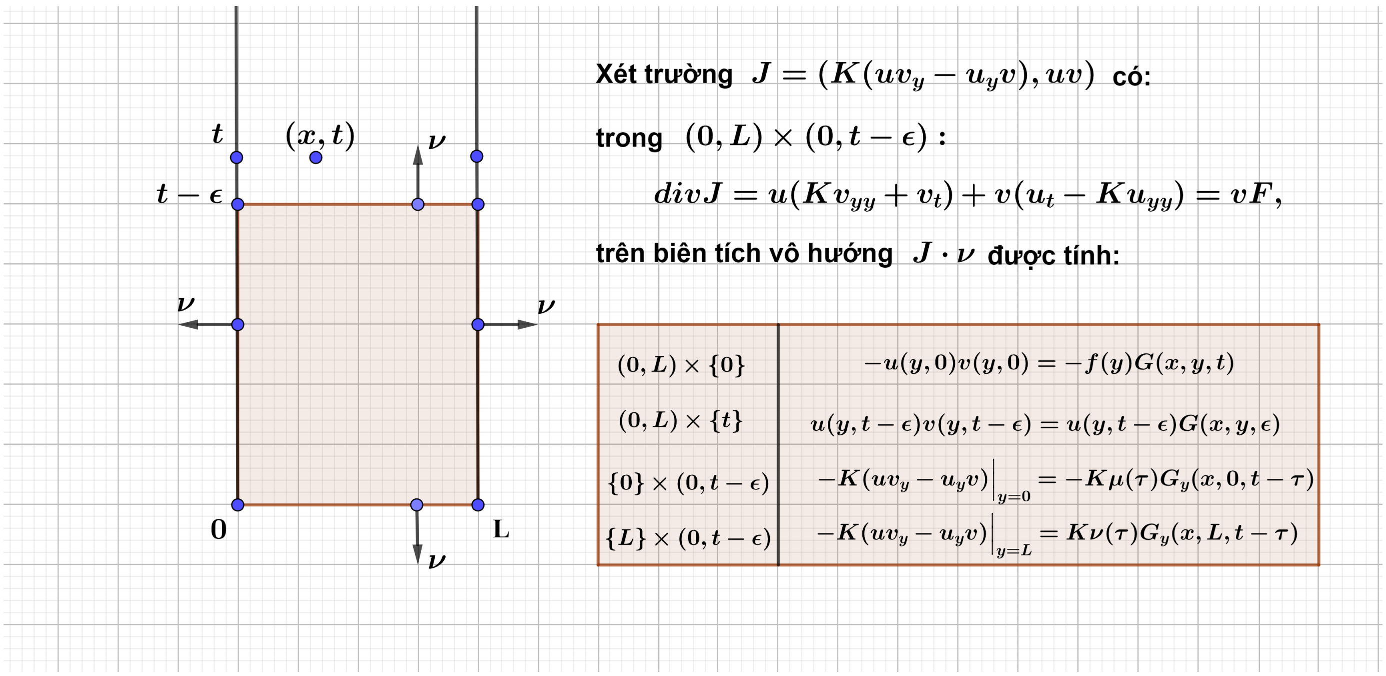
Nhắc lại hàm Green (14) cho bài toán (1)-(2)-(3) như sau

$$G(x,y,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-K(n\pi/)^2 t} \sin(n\pi x/L)\sin(n\pi y/L).$$

Cố định điểm $(x,t), x \in (0,L), t > 0$. Khi đó $v(y,\tau) = G(x,y,t-\tau)$ thỏa mãn phương trình

$$v_\tau + Kv_{yy} = 0 \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,t). \tag{23}$$

và điều kiện biên
$$v(0,\tau)=v(L,\tau)=0,\tau\in[0,t). \tag{24}$$
Áp dụng công thức dạng DIV cho trường $J=(K(uv_y-u_yv),uv)$ trong hình $(0,L)\times(0,t-\epsilon)$ với $\epsilon\in(0,t)$, với chú ý $u(y,\tau)$ là nghiệm của bài toán (20)-(21)-(22) và v thỏa mãn (23)-(24) ta có
$$\iint_{(0,L)\times(0,t-\epsilon)} v(y,\tau)F(y,\tau)dyd\tau = -\int_0^L v(y,0)f(y)dy+\int_0^L u(y,t-\epsilon)v(y,t-\epsilon)dy$$
$$+\int_0^{t-\epsilon} K(v_y(L,\tau)\nu(\tau)-v_y(0,\tau)\mu(\tau))d\tau.$$



$(0,L)\times\{0\}$	$-u(y,0)v(y,0)=-f(y)G(x,y,t)$
$(0,L)\times\{t\}$	$u(y,t-\epsilon)v(y,t-\epsilon)=u(y,t-\epsilon)G(x,y,\epsilon)$
$\{0\}\times(0,t-\epsilon)$	$-K(uv_y-u_yv)\Big\vert_{y=0}=-K\mu(\tau)G_y(x,0,t-\tau)$
$\{L\}\times(0,t-\epsilon)$	$-K(uv_y-u_yv)\Big\vert_{y=L}=K\nu(\tau)G_y(x,L,t-\tau)$

Hình 6: Tính toán công thức dạng DIV.

Chú ý $v(y,\tau)=G(x,y,t-\tau)$ và hàm Green G thỏa mãn (15) nên ta cho $\epsilon\to 0_+$ cả hai vế đẳng thức trên ta được nghiệm của bài toán (20)-(21)-(22) được cho bởi:
$$u(x,t)=\iint_{(0,L)\times(0,t)} G(x,y,t-\tau)F(y,\tau)dyd\tau+\int_0^L G(x,y,t)f(y)dy$$
$$-\int_0^t K\Big(G_y(x,L,t-\tau)\nu(\tau)-G_y(x,0,t-\tau)\mu(\tau)\Big)d\tau. \tag{25}$$
Lưu ý về việc sử dụng (15):

- $u(0,t-\epsilon),u(L,t-\epsilon)$ nói chung khác 0;
- $u(y,t-\epsilon)$ phụ thuộc ϵ.

Để giải quyết chỗ này ta cần đến $G(x, y, t) > 0$ khi $(x, y, t) \in (0, L) \times (0, L) \times (0, \infty)$ và

$$\int_0^L G(x, y, t)dy \leq C, \forall (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty).$$

4.2 Ví dụ thực hành

1. Giải bài toán (20)-(21)-(22) với dữ liệu là một trong các trường hợp sau:

   (i) $K = 1, L = \pi, \mu = \nu = 0$ và $F(x, t) = 1, f(x) = 0$.

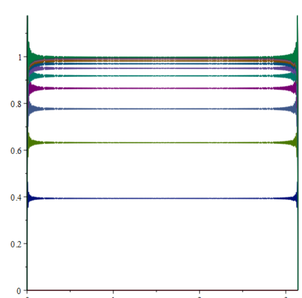
   (ii) $K = 1, L = \pi, F = 0, f = 0$ và $\mu = T_1, \nu = T_2$, với T_1, T_2 là các hằng số.

   $\boxed{\textit{Lời giải.}}$ (i) Sử dụng công thức nghiệm (25) ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2(t-\tau)} \sin(nx) \sin(ny) dy d\tau \\ &= \sum_{n=1}^\infty T_n(t) \sin(nx) \end{aligned} \tag{26}$$

   trong đó

$$T_n(t) = \int_0^\pi \sin(ny)dy \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} d\tau = \frac{2(1-(-1)^n)(1-e^{-n^2 t})}{n^3 \pi}.$$



Hình 7: Nghiệm câu 1 (i).

   Ta có hai cách nhìn nghiệm (26) như sau:

   - Nghiệm (26) là sự biến thiên từ nghiệm (6) của bài toán thuần nhất tương ứng (1)-(2)-(3). Thay nghiệm (26) vào (20) ta được phương trình với mỗi $n \in \mathbb{N}$ như sau:

$$T_n'(t) + n^2 T_n(t) = F_n(t), t > 0,$$

     trong đó $F_n(t)$ là hệ số của nguồn nhiệt $F(x, t) = 1$, trong khai triển theo hệ các hàm riêng, được xác định bởi

$$F_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x, t) \sin(nx) dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Thay tiếp nghiệm (26) vào (22) ta có $T_n(0) = f_n$, với f_n là hệ số của nhiệt độ ban đầu $f(x) = 0$, trong khai triển theo chuỗi các hàm riêng, được xác định bởi

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

- Nghiệm (26) thu được từ nguyên lý Duhamel, nghĩa là

$$u(x,t) = \int_0^t U(x, t-s, s)ds$$

với $U(x,t,s)$ là nghiệm của bài toán (20)-(21)-(22) với dữ liệu là

$$K = 1, L = \pi, \mu = \nu = 0, F = 0 \text{ và } f(x) = F(x,s).$$

(ii) Sử dụng công thức nghiệm (25) ta có

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^t \sum_{n=1}^\infty n(T_1 - (-1)^n T_2)e^{-n^2(t-\tau)}\sin(nx)d\tau \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{2(T_1 - (-1)^n T_2)}{n\pi}\sin(nx) - \sum_{n=1}^\infty \frac{2(T_1 - (-1)^n T_2)}{n\pi}e^{-n^2 t}\sin(nx) \end{aligned} \tag{27}$$

Để ý rằng số hạng đầu tiên trong (27) là khai triển của hàm $v(x) = (T_2 - T_1)x/\pi + T_1$ qua hệ các hàm riêng, và hàm $v(x)$ thỏa mãn

$$v(0) = T_1 = u(0,t), v(\pi) = T_1 = u(\pi, t).$$

Từ đây ta có thể thiết lập nghiệm (27) bằng cách sau:

- Khử điều kiện biên của bài toán (20)-(21)-(22), nghĩa là đặt $w = u - v$. Khi đó w thỏa mãn bài toán (20)-(21)-(22) với dữ liệu

$$K = 1, L = \pi, \mu = \nu = 0, F = 0 \text{ và } f(x) = -v(x).$$

- Giải w là hàm dạng chuỗi

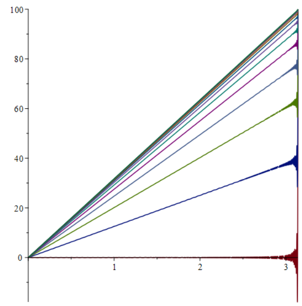
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^\infty T_n(t)\sin(nx)$$

với $T_n(t)$ là nghiệm của phương trình

$$T_n'(t) + n^2 T_n(t) = F_n(t) = 0, t > 0,$$

với điều kiện ban đầu $T_n(0)$ chính là hệ số của $f(x) = -v(x)$ trong khai triển qua hệ hàm riêng, được xác định bởi

$$T_n(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(x)\sin(nx)dx = \frac{2(T_1 - (-1)^n T_2)}{n\pi}.$$



Hình 8: Nghiệm câu 1 (ii).

2. Xét bài toán biên Neumann đối với phương trình không thuần nhất (20) với điều kiện ban đầu (22) và điều kiện biên không thuần nhất

$$u_x(0,t) = \mu(t), u_x(L,t) = \nu(t). \tag{28}$$

   (i) Sử dụng hàm Green G_N để giải bài toán (20)-(28)-(22).

   (ii) Giải bài toán (20)-(28)-(22) với dữ liệu

$$K = 2, L = 1, \mu = \nu = 0, f = 0 \text{ và } F(x,t) = e^{-t}\cos^2(\pi x).$$

Lời giải.

4.3 Bài tập thực hành

1. Giải bài toán (20)-(21)-(22) với dữ liệu là một trong các tình huống sau.

   (i)

2. Giải bài toán (20)-(28)-(22) với dữ liệu là một trong các tình huống sau.

   (i)

3. Xét bài toán biên đối với phương trình không thuần nhất (20) với điều kiện ban đầu (22) và điều kiện biên không thuần nhất

$$u_x(0,t) = \mu(t), u(L,t) = \nu(t). \tag{29}$$

   (i) Sử dụng hàm Green để giải bài toán (20)-(29)-(22).

   (ii) Giải bài toán (20)-(29)-(22) với dữ liệu

$$K = 2, L = 1, \mu = \nu = 0, f = 0 \text{ và } F(x,t) = e^{-t}\cos^2(\pi x).$$

4. Xét bài toán biên đối với phương trình không thuần nhất (20) với điều kiện ban đầu (22) và điều kiện biên không thuần nhất

$$u(0,t) - u_x(0,t) = \mu(t), u(L,t) = \nu(t). \tag{30}$$

(i) Sử dụng hàm Green để giải bài toán (20)-(30)-(22).

(ii) Giải bài toán (20)-(30)-(22) với dữ liệu

$$K = 2, L = 1, \mu = \nu = 0, f = 0 \text{ và } F(x,t) = e^{-t}\cos^2(\pi x).$$

5. Xét bài toán biên đối với phương trình không thuần nhất (20) với điều kiện ban đầu (22) và điều kiện biên không thuần nhất

$$u_x(0,t) = \mu(t), u(L,t) + u_x(L,t) = \nu(t). \tag{31}$$

(i) Sử dụng hàm Green để giải bài toán (20)-(31)-(22).

(ii) Giải bài toán (20)-(31)-(22) với dữ liệu

$$K = 2, L = 1, \mu = \nu = 0, f = 0 \text{ và } F(x,t) = e^{-t}\cos^2(\pi x).$$

6. Xét bài toán biên Robin đối với phương trình không thuần nhất (20) với điều kiện ban đầu (22) và điều kiện biên không thuần nhất

$$u(0,t) - u_x(0,t) = \mu(t), u(L,t) + u_x(L,t) = \nu(t). \tag{32}$$

(i) Sử dụng hàm Green để giải bài toán (20)-(32)-(22).

(ii) Giải bài toán (20)-(32)-(22) với dữ liệu

$$K = 2, L = 1, \mu = \nu = 0, f = 0 \text{ và } F(x,t) = e^{-t}\cos^2(\pi x).$$

5 Một số dạng khác

5.1 Tóm tắt lý thuyết

Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình truyền nhiệt trong đoạn hữu hạn:

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t) + Au_x(x,t) + Bu(x,t), 0 < x < L, t > 0, \tag{33}$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{34}$$

với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), 0 \le x \le L. \tag{35}$$

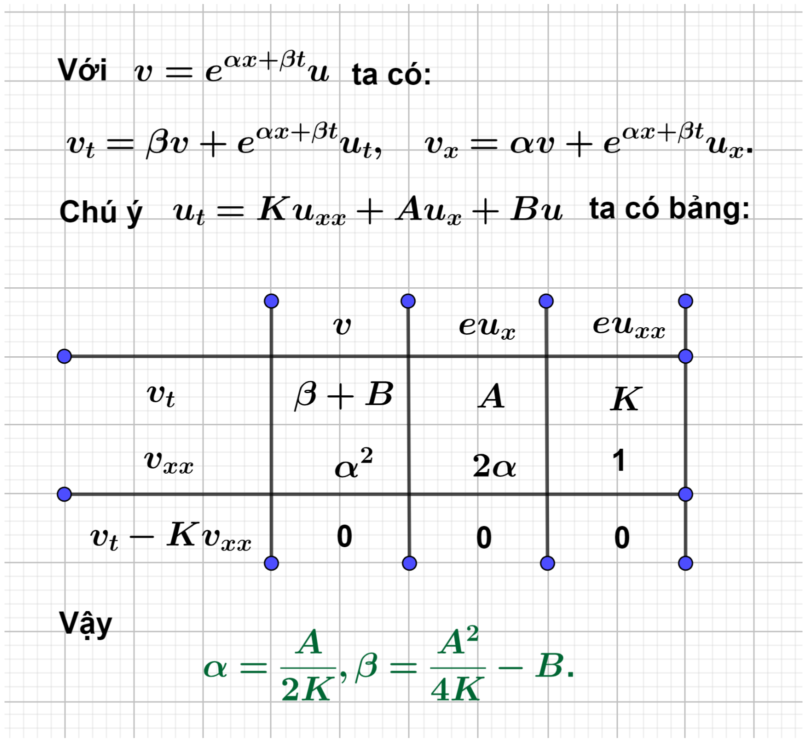
Bằng cách xét $v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}u(x,t)$ với α, β thích hợp ta có thể chuyển bài toán (33)-(34)-(35) cho hàm u thành bài toán (1)-(2)-(3) cho hàm v. Khi đó nghiệm của bài toán (33)-(34)-(35) là

$$u(x,t) = e^{-\alpha x - \beta t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-K(n\pi/L)^2 t}\sin(n\pi x/L) \tag{36}$$

với các hệ số được tính bởi

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L e^{\alpha x} f(x)\sin(n\pi x/L)dx. \tag{37}$$

Tính toán cụ thể các hệ số α, β như sau:



Hình 9: Tính toán các đạo hàm riêng v_t, v_{xx}.

5.2 Ví dụ thực hành

1. Giải bài toán (33)-(34)-(35) với dữ liệu là một trong các trường hợp sau:

   (i) $K = 1, L = \pi, A = 0, B = -1$ và $f(x) = x$.

   (ii) $K = 1, L = \pi, A = -1, B = 0$ và $f(x) = 1$.

   Bằng cách xét tích phân năng lượng $I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$, chứng minh rằng các trường hợp trên bài toán (33)-(34)-(35) có duy nhất nghiệm.

   Lời giải. (i) Xét $v(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$. Với $K = 1, A = 0, B = -1$ ta có $\alpha = 0, \beta = 1$. Khi đó $v = e^t u$ thỏa mãn bài toán (1)-(2)-(3) với dữ liệu

$$K = 1, L = \pi, f(x) = x.$$

Khi đó ta có

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

với các hệ số

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos(nx)}{-n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)dx\right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho:

$$u(x,t) = -2e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2t}\sin(nx).$$

(ii) Xét $v(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$. Với $K=1, A=-1, B=0$ ta có $\alpha = -1/2, \beta = 1/4$. Khi đó $v = e^{-x/2+t/4}u$ thỏa mãn bài toán (1)-(2)-(3) với dữ liệu

$$K = 1, L = \pi, f(x) = e^{-x/2}.$$

Khi đó ta có

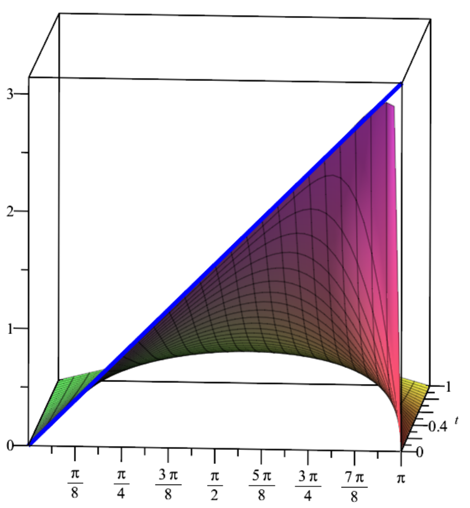
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2t}\sin(nx)$$

với các hệ số

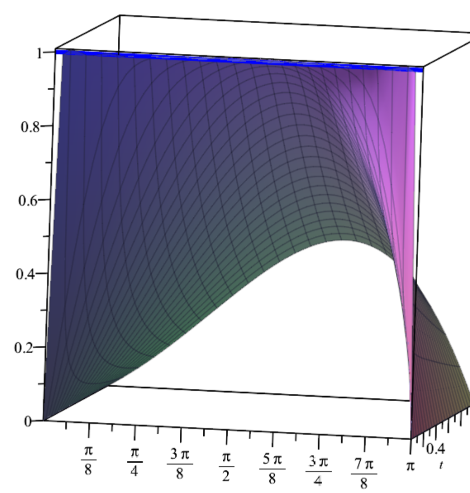
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x/2}\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{-x/2}\cos(nx)}{-n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} e^{-x/2}\cos(nx)dx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n e^{-\pi/2}}{n} - \frac{e^{-x/2}\sin(nx)}{2n^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{4n^2}\int_0^{\pi} e^{-x/2}\sin(nx)dx\right) = \frac{8n(1-(-1)^n e^{-\pi/2})}{\pi(4n^2+1)}.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho:

$$u(x,t) = e^{x/2-t/4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n(1-(-1)^n e^{-\pi/2})}{\pi(4n^2+1)}e^{-n^2t}\sin(nx).$$



(a) Nghiệm câu 1(i)



(b) Nghiệm câu 1(ii)

Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của (33)-(34)-(35) với cùng dữ liệu. Khi đó $u = u_1 - u_2$ là nghiệm của (33)-(34)-(35) với dữ liệu K, L và A, B như vậy, nhưng điều kiện ban đầu $f = 0$. Khi đó ta có

$$I(0) = 0 \text{ vì } u(x,0) = f(x) = 0.$$

Tính toán tiếp với chú ý u thỏa mãn (33)-(34):

$$I'(t) = \int_0^L u_t(x,t)u(x,t)dx = \int_0^L (Ku_{xx}(x,t) + Au_x(x,t) + Bu(x,t))u(x,t)dx$$
$$= Ku_x u\Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{Au^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L (Ku_x^2 - Bu^2)dx = -\int_0^L (Ku_x^2 - Bu^2)dx.$$

Với $A = 0, B = -1$ hay $A = -1, B = 0$ ta đều có $I'(t) \leq 0, \forall t > 0$. Do đó

$$0 \leq I(t) \leq I(0) = 0 \text{ hay } I(t) = 0 \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Như vậy $u \equiv 0$ hay u_1 trùng với u_2.

2. Xét bài toán biên - ban đầu cho phương trình KdV tuyến tính hóa trong đoạn hữu hạn:

$$u_t(x,t) = Ku_{xxx}(x,t), 0 < x < L, t > 0, \tag{38}$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(L,t) = 0, \tag{39}$$

với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L. \tag{40}$$

(i) Bằng cách xét tích phân năng lượng $I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$, chứng minh rằng các trường hợp trên bài toán (38)-(39)-(40) có duy nhất nghiệm.

(ii) Giải bài toán (38)-(39)-(40).

Lời giải. (i) Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm của (38)-(39)-(40) với cùng dữ liệu. Khi đó $u = u_1 - u_2$ là nghiệm của (38)-(39)-(40) với dữ liệu K, L nhưng điều kiện ban đầu $f = 0$. Khi đó ta có

$$I(0) = 0 \text{ vì } u(x,0) = f(x) = 0.$$

Tính toán tiếp với chú ý u là nghiệm của (38):

$$I'(t) = \int_0^L u_t(x,t)u(x,t)dx = \int_0^L Ku_{xxx}(x,t)u(x,t)dx$$
$$= Ku_{xx}u\Big|_{x=0}^{x=L} - \frac{Ku_x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=L}.$$

Do u thỏa mãn điều kiện biên (39) nên $I'(t) = -Ku_x^2(L,t) \leq 0, \forall t > 0$. Do đó

$$0 \leq I(t) \leq I(0) = 0 \text{ hay } I(t) = 0 \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Như vậy $u \equiv 0$ hay u_1 trùng với u_2.
(ii) Ta tìm cơ sở của không gian nghiệm của (38)-(39) gồm các phần tử dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$. Khi đó ta gặp bài toán Sturm-Liouville sau:

$$X'''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < L, X(0) = X'(0) = X(L) = 0.$$

Ta có

$$\lambda \int_0^L X^2(x)dx = \int_0^L X'''(x)X(x)dx = X''X\Big|_0^L - \int_0^L X''(x)X'(x)dx$$
$$= -\frac{[X'(L)]^2}{2}.$$

Do đó $\lambda \leq 0$. Nếu $\lambda = 0$ thì $X(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó từ $X(0) = X'(0)$ ta có $b = c = 0$, và $X(L) = 0$ ta có $a = 0$. Như vậy $\lambda = -k^3, k > 0$. Đến đây ta có

$$X(x) = ae^{-kx} + e^{kx/2}\Big(b\cos(kx\sqrt{3}/2) + c\sin(kx\sqrt{3}/2)\Big).$$

Thay vào $X(0) = X'(0) = 0$ ta có $b = -a, c = a\sqrt{3}$. Thay vào $X(L) = 0$ ta có

$$e^{-3kL/2} = -2\sin(kL\sqrt{3}/2 - \pi/6). \tag{41}$$

Khi đó ta có dãy các giá trị riêng $\lambda_n = -k_n^3, n = 1, 2, \ldots$, với $k_n, n = 1, 2, \ldots$, là dãy tăng các nghiệm dương của (41). Dãy hàm riêng tương ứng

$$X_n(x) = e^{-k_n x} - 2e^{k_n x/2}\sin(k_n x\sqrt{3}/2 - \pi/6).$$

Quay trở lại (38) ta có $T_n(t) = e^{-Kk_n^3 t}$. Do đó cơ sở của không gian nghiệm của (38)-(39) gồm

$$e^{-Kk_n^3 t}\Big[e^{-k_n x} - 2e^{k_n x/2}\sin(k_n x\sqrt{3}/2 - \pi/6)\Big].$$

Như vậy chuỗi nghiệm của bài toán (38)-(39)-(40)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-Kk_n^3 t}\Big[e^{-k_n x} - 2e^{k_n x/2}\sin(k_n x\sqrt{3}/2 - \pi/6)\Big]. \tag{42}$$

Ta còn phải tính các hệ số của chuỗi (42) nhờ điều kiện ban đầu (40):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big[e^{-k_n x} - 2e^{k_n x/2}\sin(k_n x\sqrt{3}/2 - \pi/6)\Big] = f(x).$$

Để tính được a_n ta cần tìm dãy các hàm $Y_n, n = 1, 2, \ldots$, sao cho

$$\int_0^L X_n(x)Y_n(x)dx \neq 0, \int_0^L X_m(x)Y_n(x)dx = 0, \forall m \neq n.$$

Ta tìm Y_n qua bài toán Sturm-Liouville đối ngẫu

$$Y_n'''(x) + \lambda_n Y_n(x) = 0, 0 < x < L, Y_n(0) = Y_n(L) = Y_n'(L) = 0.$$

5.3 Bài tập thực hành

1. Giải bài toán (33)-(34)-(35) với dữ liệu là một trong các trường hợp sau:

   (i) $K = 1, L = \pi, A = -1, B = 0$ và $f(x) = 1$.

   (ii) $K = 1, L = \pi, A = 0, B = -1$ và $f(x) = x$.

   Bằng cách xét tích phân năng lượng $I(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$, chứng minh rằng các trường hợp trên bài toán (33)-(34)-(35) có duy nhất nghiệm.

6 Biến đổi Fourier

6.1 Tóm tắt lý thuyết

Xét giá trị ban đầu cho phương trình truyền nhiệt trên toàn trục:

$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{43}$$

với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R}. \tag{44}$$

Dùng biến đổi Fourier ta có bài toán (43)-(44) chuyển thành bài toán Cauchy đối với phương trình

$$\hat{u}_t(\xi,t) + K\xi^2 \hat{u}(\xi,t) = 0, t > 0,$$

và điều kiện Cauchy $\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$ trong đó

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x,t)dx, \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx.$$

Khi đó ta có $\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-K\xi^2 t}$. Do đó ta thu được công thức Poisson:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y, Kt)f(y)dy \tag{45}$$

với nhân nhiệt

$$k(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Một vài tính chất của nhân nhiệt:

- $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ và k dương.
- $k_t(x,t) = k_{xx}(x,t), \forall x \in \mathbb{R}, t > 0.$
- $\int_{\mathbb{R}} k(x,t)dx = 1, \forall t > 0$, và với mọi $\delta > 0$ ta có

$$\lim_{t\to 0_+} \int_{|x|>\delta} k(x,t)dx = 0.$$

Từ các tính chất trên ta có (45) thỏa mãn phương trình truyền nhiệt (43) và điều kiện Cauchy (44) theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = f(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Để tính toán nghiệm từ công thức Poisson ta lưu ý về hàm lỗi $erf(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}dy$ và công thức

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos(\beta x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}. \tag{46}$$

6.2 Ví dụ thực hành

1. Giải bài toán (43)-(44) với dữ liệu là một trong các trường hợp sau:

   (i) $K = 1, f(x) = \cos^2(3x)$.

   (ii) $K = 2, f(x) = e^{-x^2}$.

   $\boxed{\textit{Lời giải.}}$ (i) Sử dụng công thức (45) ta có

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos^2(3y)dy$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cos(6y)dy \right).$$

   Đổi biến $z = x - y$ ta có $dy = -dz$ và các cận $-\infty, \infty$ lần lượt chuyển thành $\infty, -\infty$. Khi đó ta có

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} dz + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \cos(6z)\cos(6x)dz + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{4t}} \sin(6z)\sin(6x)dz \right).$$

   Sử dụng tính chẵn, lẻ ta có số hạng thứ 3 bằng 0. Sử dụng tính chẵn, lẻ và công thức (46) ta có

$$u(x,t) = \frac{1 + e^{-36t}\cos(6x)}{2}.$$

   Việc kiểm tra nghiệm xem như bài tập.
   (ii) Sử dụng công thức (45) ta có

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{8t}} e^{-y^2} dy.$$

   Ta biến đối số mũ

$$-\frac{(x-y)^2}{8t} - y^2 = -\frac{(8t+1)(y - x/(8t+1))^2}{8t} - \frac{x^2}{8t+1}.$$

   Bằng cách đổi biến $z = y - x/(8t+1)$ và dùng công thức (46) ta có

$$u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{8t+1}}}{\sqrt{8t+1}}.$$

   Việc kiểm tra nghiệm xem như bài tập.

2. Xét bài toán biên - ban đầu trên nửa trục sau:

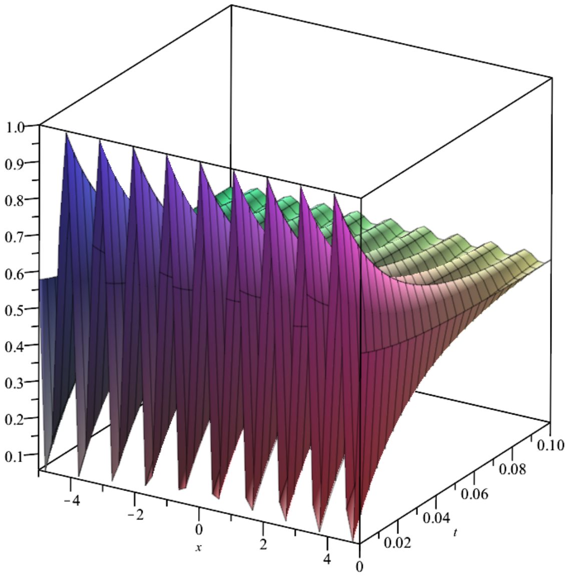
$$u_t(x,t) = Ku_{xx}(x,t), x > 0, t > 0, \tag{47}$$

   với điều kiện biên

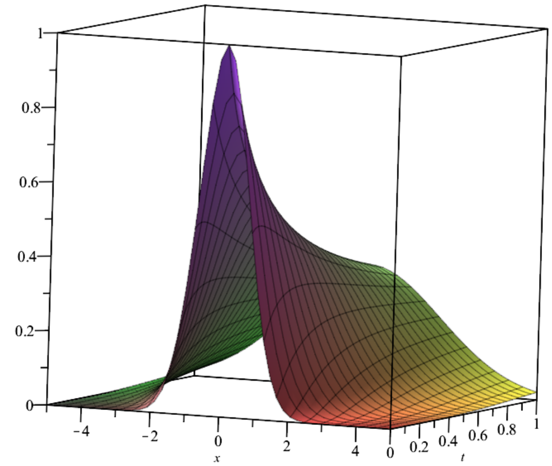
$$u(0,t) = 0, \tag{48}$$

   với điều kiện Cauchy

$$u(x,0) = f(x), x \geq 0. \tag{49}$$



(a) Nghiệm câu 1(i)



(b) Nghiệm câu 1(ii)

(i) Sử dụng thác triển lẻ và công thức Poisson (45) để đưa ra công thức nghiệm của bài toán.

(ii) Giải bài toán khi $K = 2, f(x) = e^{-x}, x > 0$.

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ (i) Ta thác triển lẻ theo biến x các hàm u, f lần lượt thành u^*, f^*. Khi đó u^* là nghiệm của bài toán (43)-(44). Sử dụng công thức (45) ta được

$$\begin{aligned} u(x,t) = u^*(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4K\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} f^*(y)dy, x > 0, t > 0, \\ &= \frac{1}{\sqrt{4K\pi t}}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} f(y)dy - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} f(-y)dy\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4K\pi t}}\int_0^\infty (e^{-\frac{(x-y)^2}{4Kt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4Kt}})f(y)dy. \end{aligned} \tag{50}$$

(ii) Sử dụng công thức (50) ta có

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{(x-y)^2}{8t}} e^{-y}dy - \int_0^\infty e^{-\frac{(x+y)^2}{8t}} e^{-y}dy\right).$$

Biến đổi số mũ

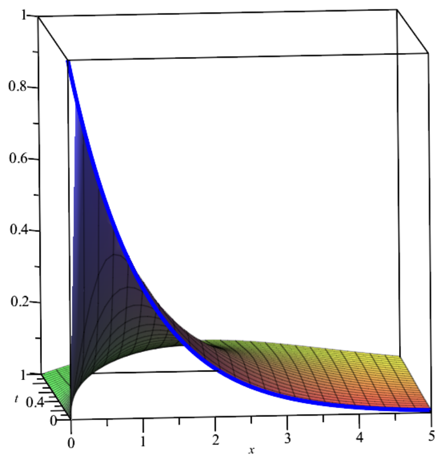
$$-\frac{(y+\alpha x)^2}{8t} - y = -\frac{(y+\alpha x+4t)^2}{8t} + (2t+\alpha x), \alpha \in \{\pm 1\}.$$

Ta đổi biến $z = (y+\alpha x+4t)/\sqrt{8t}$ ta có $dy = \sqrt{8t}dz$ và các cận $0, \infty$ chuyển thành $(\alpha x+4t)/\sqrt{8t}, \infty$. Khi đó

$$\int_0^\infty e^{-\frac{(y+\alpha x)^2}{8t}} e^{-y}dy = e^{2t+\alpha x}\sqrt{8t}\int_{(\alpha x+4t)/\sqrt{8t}}^\infty e^{-z^2}dz = \frac{e^{2t+\alpha x}\sqrt{8\pi t}}{2}(1-erf((\alpha x+4t)/\sqrt{8t})).$$

Vậy nghiệm của bài toán

$$u(x,t) = \frac{e^{2t-x}}{2}\left(1 - erf(\frac{4t-x}{\sqrt{8t}})\right) - \frac{e^{2t+x}}{2}\left(1 - erf(\frac{4t+x}{\sqrt{8t}})\right).$$



Hình 12: Nghiệm câu 2 (ii).

3. Sử dụng biến đổi Fourier giải các bài toán sau:

$$u_t = u_{xx} + xu, \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{51}$$
$$u(x,0) = f(x), \text{ với } f \in C(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}). \tag{52}$$

$\boxed{\textit{Lời giải.}}$ Biến đổi Fourier theo biến x hai vế của (51) ta có phương trình cấp 1 sau:

$$w_t(\xi,t) - iw_\xi(\xi,t) = -\xi^2 w(\xi,t), \xi \in \mathbb{R}, t > 0,$$

với $w(\xi,t) = \hat{u}(\xi,t)$. Phương trình cấp 1 có đường đặc trưng thỏa mãn $\xi'(t) = -i$ nên

$$\xi(t) = -it + \xi_0.$$

Trên đường đặc trưng này ta có $w'(t) = -\xi^2(t)w(t)$. Lại từ điều kiện Cauchy (52) ta có $w(\xi,0) = \hat{f}(\xi)$. Khi đó ta có

$$w(t) = \hat{f}(\xi_0)e^{-\int_0^t \xi^2(s)ds} = \hat{f}(\xi_0)e^{t^3/3 + it^2\xi_0 - t\xi_0^2}.$$

Thay $\xi_0 = \xi + it$ ta có

$$w(\xi,t) = \hat{f}(\xi + it)e^{t^3/3 - i\xi t^2 - \xi^2 t}.$$

Đến đây ta lấy biến đổi Fourier ngược và dùng Fubini (một cách hình thức) ta tính được:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{t^3/3 - i\xi t^2 - \xi^2 t} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-iy(\xi+it)} f(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{t^3/3+yt} f(y)dy \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(x-y-t^2)} e^{-\xi^2 t} d\xi. \end{aligned} \tag{53}$$

Chú ý $e^{-i\xi(x-y-t^2)} = \cos(\xi(x-y-t^2)) + i\sin(\xi(x-y-t^2))$ và tính chẵn lẻ, ta dùng (46) tính được

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(x-y-t^2)} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y-t^2)^2}{4t}}.$$

Thay vào (53) ta có nghiệm

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x,y,t) f(y) dy \tag{54}$$

với hàm Green

$$G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{t^3}{12} + \frac{(x+y)t}{2} - \frac{(x-y)^2}{4t}}. \tag{55}$$

Một vài tính chất của hàm Green $G(x,y,t)$:

- $G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty))$ và G dương, đối xứng $G(x,y,t) = G(y,x,t)$.
- $G_t(x,y,t) = G_{xx}(x,y,t) + xG(x,y,t), \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$ và $y \in \mathbb{R}$.
- $\int_{\mathbb{R}} G(x,y,t)dy = e^{t^3/3+xt}$, và với mọi $\delta > 0$ ta có

$$\lim_{t\to 0_+} \int_{|x|>\delta} G(x,y,t)dy = 0.$$

Từ các tính chất trên ta có (54) thỏa mãn phương trình truyền nhiệt (51) và điều kiện Cauchy (52) theo cách

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ t>0}} u(x,t) = f(x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

6.3 Bài tập thực hành

1. Giải bài toán (43)-(44) với dữ liệu là một trong các trường hợp sau:

   (i) $K = 4, f(x) = \sin^3(x)$.

   (ii) $K = 2, f(x) = e^{-x^2+x}$.

2. Xét bài toán biên - ban đầu trên nửa trục đối với phương trình (47) với điều kiện ban đầu (49) và điều kiện biên

$$u_x(0,t) = 0. \tag{56}$$

   (i) Sử dụng thác triển chẵn và công thức Poisson (45) để đưa ra công thức nghiệm của bài toán.

(ii) Giải bài toán khi $K = 2, f(x) = e^{-x}, x > 0$.

3. Cho $a, b, c : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục thỏa mãn $a(t) \geq a_0 > 0, \forall t \geq 0$. Giải bài toán Cauchy sau:

$$\begin{aligned} u_t &= a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u, \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \text{ với } f \in C(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4. Sử dụng biến đổi Fourier giải các bài toán sau.

(a) Phương trình truyền nhiệt:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + xu_x, \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \text{ với } f \in C(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) Phương trình KdV tuyến tính hóa:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx}, \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \text{ với } f \in C(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(c) Phương trình tiến hóa:

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xxxx} + xu_x, \text{ trong } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \text{ với } f \in C(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$