概率期望小讲

前言

> 在信息学领域中，往往不涉及一些奇异的集合，也不涉及某些连续的随机问题，而且有些在信息学中的用法或定义在严格意义上是有歧义的，因此以下文章仅讲解信息学中的概率期望问题.

基础概念

样本空间，事件

> ***样本空间***S是一个集合，它的元素称为***基本事件***. 样本空间的一个子集被称为***事件***，所有的***事件集合***为F.
>
> 根据定义，所有基本事件互斥.

概率

> ***概率(概率测度)***就是事件集合F到实数域R的映射$P(X)$，满足:
>
> > 1. 对于事件$A, 0 \le P(A) \le 1$
> > 2. $P(S) = 1$
> > 3. 若$A \cap B = \emptyset$，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
>
> 称$P(A)$为事件A的概率.
>
> 骰子点数集的概率为$P(A) = \frac{|A|}{6}$

概率空间

> 对于任意一个满足条件的三元组(S, F, P)都称为***概率空间***.
>
> ***概率空间的划分***是一个事件组$B_1, B_2, \cdots, B_n$，满足:
>
> 1. $\forall i, j, i \ne j$有$B_i \cap B_j = \emptyset$
> 2. $\forall i$有$P(B_i) > 0$
> 3. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

随机变量

> 对于S中的任意事件A，都有***唯一的实数***$X(A)$于之对应，则称$X = X(A)$，为S上的***随机变量***.
>
> 也可以说，随机变量是F到实数域R的一个映射.
>
> 其中***离散型随机变量***与***连续型随机变量***比较常见.
>
> 比如说我们可以设一个随机变量X表示抛骰子的点数.

离散型随机变量和概率分布:

> 取值范围为有限或无限**可数**个实数的随机变量称为***离散型随机变量***.
>
> 设随机变量X取值为x_i时的概率为p_i，则称X的所有取值以及其对应概率为X的**概率分布**.
>
> 可以将概率分布表现成一个散列表(或直方图)的形式.
>
> 记作$P(X = x_i) = p_i$，常见的有**两点分布，二项分布**.

连续型随机变量和概率分布:

> 嘛，现在做不到这样的题的啦，$pass$.

随机变量的独立性:

> 对于两个随机变量X_1, X_2，和实数$x_1 \in X_1(S), x_2 \in X_2(S)$.
>
> 若有$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2)$，则称$X_1, X_2$互相独立.

期望

> 以下期望均为**离散型数学期望**.

数学定义:

> 设随机变量X的概率分布为$P(X = x_i) = p_i$，若$\sum\limits_{i=1} x_i p_i$存在，则称$\sum\limits_{i=1} x_i p_i$为$X$的***数学期望***，简称***期望***，记作$E(X)$.

Example

> 抛骰子的样本空间为$\{1,2,3,4,5,6\}$，奇数点朝上的事件为$\{1,3,5\}$.

> 抛骰子奇数朝上的概率为$P(A) = \frac{|A|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

> 例如求骰子点数的期望，我们先列出$P-X$的散列表:
>
> | P | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
> | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
X	1	2	3	4	5	6

此时$E(X)=\sum_{i=1} x_i p_i=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3.5$

进阶知识

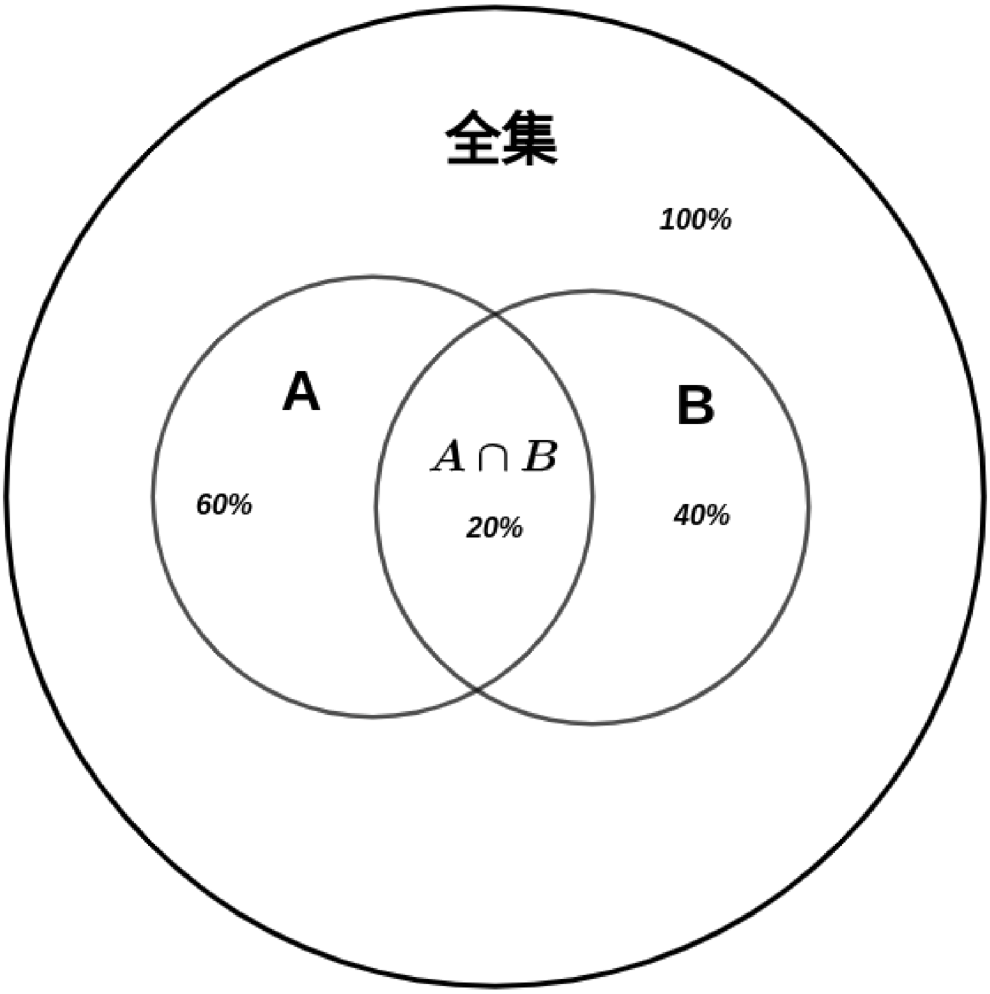
条件概率

将在已知事件B发生的条件下，事件A发生的概率称为***条件概率***，记作$P(A\mid B)$.

~~事件B与事件A并没有固定的先后关系.~~

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

此时我们相当于将B看作新的样本空间，而此时的概率是**条件概率**，条件概率公式本质上揭示了**两个样本空间上概率的关系**.



概率中的$P(A,B)=20\%$是针对于**全集**的，而$P(A\mid B)=25\%$是针对于被B限制了的全集(缩减了)，相当于**另一个样本空间**(但描述的都是$A\cap B$).

也就是说，非条件的所有描述都是针对整个全集的，而条件的描述仅针对全集中一个子集，就算其描述的是同一个事件.

全概率公式

如果$B_1,B_2,\cdots,B_n$是概率空间的一个划分，那么有

$$P(A)=\sum_i P(A\mid B_i)P(B_i)$$

Bayes公式

由等式$P(A\mid B)P(B)=P(AB)=P(B\mid A)P(A)$可推出"***Bayes*公式**"

$$P(A \mid B)=\frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

这个公式用于计算***逆向概率***十分有效.

同时我们可以结合全排列公式，对概率空间的一个划分$B_1, B_2, \cdots, B_n$，已知条件——概率$P(A \mid B_i)$可得

$$P(B_k \mid A)=\frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

我们来分析这么一个问题，若有三扇门，只有一扇有奖励，你先随机选了一扇，而另一扇没有奖励的门被打开了，求是否换门选择得到奖励的概率.

不换的概率是$\frac{1}{3}$，而换的概率为$\frac{2}{3}$.

我们考虑只有在第一次选的是奖励门时不换才能拿到奖励，否则换就会拿到奖励.

我们用公式来表示，设事件A表示选中奖励门，事件B表示打开的是空门.

$$P(A \mid B)=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{1}=\frac{1}{3}$$

取反就是换得到奖励门的概率.

条件期望

在已知随机变量$X_2=x_2$时，随机变量$X_1=x_1$的期望称之为***条件期望***，记作$E(X_1 \mid X_2=x_2)$.

此时有

$$E(X_1 \mid X_2=x_2)=\sum_{x_1} x_1 P(X_1=x_1 \mid X_2=x_2)=\sum_{x_1} x_1 \frac{P(X_1=x_1, X_2=x_2)}{P(X_2=x_2)}$$

随机变量X_2可能没有固定取值，此时的条件期望$E(X_1 \mid X_2)$是一个随机变量.

全期望公式

我们容易得知$E(E(X_1 \mid X_2))=E(X_1)$，证明如下

$$\begin{aligned}
E(E(X_1 \mid X_2)) &= \sum_{x_2} E(X_1 \mid X_2=x_2)P(X_2=x_2) \\
&= \sum_{x_2}\sum_{x_1} x_1 P(X_1=x_1 \mid X_2=x_2)P(X_2=x_2) \\
&= \sum_{x_2}\sum_{x_1} x_1 P(X_1=x_1, X_2=x_2) \\
&= \sum_{x_1} x_1 \sum_{x_2} P(X_1=x_1, X_2=x_2) \\
&= \sum_{x_1} x_1 P(X_1=x_1) \\
&= E(X_1)
\end{aligned}$$

期望的线性性质

1. $\forall X_1, a \neq 0$有$E(aX_1) = aE(X_1)$

$$\begin{aligned} E(aX_1) &= \sum_x xP(aX_1 = x) \\ &= \sum_{x=ax'} ax'P(aX_1 = ax') \\ &= a\sum_{x=ax'} x'P(X_1 = x') \\ &= aE(X_1) \end{aligned}$$

2. $\forall X_1, X_2$有$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

$$\begin{aligned} E(X_1) + E(X_2) &= \sum_{x_1} x_1P(X_1 = x_1) + \sum_{x_2} x_2P(X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1,x_2}(x_1 + x_2)P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1+x_2}(x_1 + x_2)P(X_1 + X_2 = x_1 + x_2) \\ &= E(X_1 + X_2) \end{aligned}$$

3. $\forall X_1, X_2, a, b$有$E(aX_1 + bX_2) = aE(X_1) + bE(X_2)$

$$\begin{aligned} E(aX_1 + bX_2) &= E(aX_1) + E(bX_2) \\ &= aE(X_1) + bE(X_2) \end{aligned}$$

4. $\forall X_1, X_2$互相独立，有$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$

$$\begin{aligned} E(X_1)E(X_2) &= \sum_{x_1} x_1P(X_1 = x_1)\sum_{x_2} x_2P(X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1,x_2} x_1x_2P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1,x_2} x_1x_2P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1,x_2} x_1x_2P(X_1X_2 = x_1x_2) \\ &= E(X_1X_2) \end{aligned}$$

方差

有随机变量X，定义其方差为

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X)) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(E(X)) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

条件方差

同理，有随机变量X_1, X_2，定义其$X_2 = x_2$时的条件方差为

> $$\begin{aligned} V(X_1 \mid X_2 = x_2) &= E((X_1 - E(X_1 \mid X_2 = x_2))^2 \mid X_2 = x_2) \\ &= E(X_1^2 \mid X_2 = x_2) - E^2(X_1 \mid X_2 = x_2) \end{aligned}$$
>
> 定义其对于X_2的方差为
>
> $$\begin{aligned} V(X_1 \mid X_2) &= E((X_1 - E(X_1 \mid X_2))^2 \mid X_2) \\ &= E(X_1^2 \mid X_2) - E^2(X_1 \mid X_2) \end{aligned}$$

条件方差的性质

> 1. $\forall X_1, X_2$相互独立，有$V(X_1 \mid X_2) = V(X_1)$
> 2. $\forall X_1, X_2$有$V(X_1) = V(E(X_1 \mid X_2)) + E(V(X_1 \mid X_2))$
>
> $$\begin{aligned} V(E(X_1 \mid X_2)) &= E(E^2(X_1 \mid X_2)) - E^2(E(X_1 \mid X_2)) \\ &= E(E^2(X_1 \mid X_2)) - E^2(X_1) \end{aligned} \tag{1}$$
>
> $$\begin{aligned} E(V(X_1 \mid X_2)) &= E(E(X_1^2 \mid X_2) - E^2(X_1 \mid X_2)) \\ &= E(E(X_1^2 \mid X_2)) - E(E^2(X_1 \mid X_2)) \\ &= E(X_1^2) - E(E^2(X_1 \mid X_2)) \end{aligned} \tag{2}$$
>
> $$\begin{aligned} (1) + (2) &= V(E(X_1 \mid X_2)) + E(V(X_1 \mid X_2)) \\ &= E(E^2(X_1 \mid X_2)) - E^2(X_1) + E(X_1^2) - E(E^2(X_1 \mid X_2)) \\ &= E(X_1^2) - E^2(X_1) \\ &= V(X_1) \end{aligned}$$
>
> 3. $\forall X_1, X_2$互相独立，有$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$
>
> $$\begin{aligned} V(X_1 + X_2) &= E((X_1 + X_2)^2) - E^2(X_1 + X_2) \\ &= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - (E(X_1) + E(X_2))^2 \\ &= E(X_1^2) + 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2) - (E^2(X_1) + 2E(X_1)E(X_2) + E^2(X_2)) \\ &= E(X_1^2) - E^2(X_1) + E(X_2^2) - E^2(X_2) \\ &= V(X_1) + V(V_2) \end{aligned}$$
>
> 4. $\forall X, a$，有$V(aX) = a^2 V(X)$
>
> $$\begin{aligned} V(aX) &= E(a^2X^2) - E^2(aX) \\ &= a^2E(X^2) - a^2E^2(X) \\ &= a^2(E(X^2) - E^2(X)) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

概率分布

两点分布:

> 伯努利实验：实验有两个可能结果$1, 0$，前者发生的概率为p，后者发生的概率为$1 - p$.

这个实验结果的概率分布为***两点分布***.

P	p	$1-p$
X	1	0

此时$P(X)=p,E(X)=p,V(X)=p(1-p)$.

二项分布:

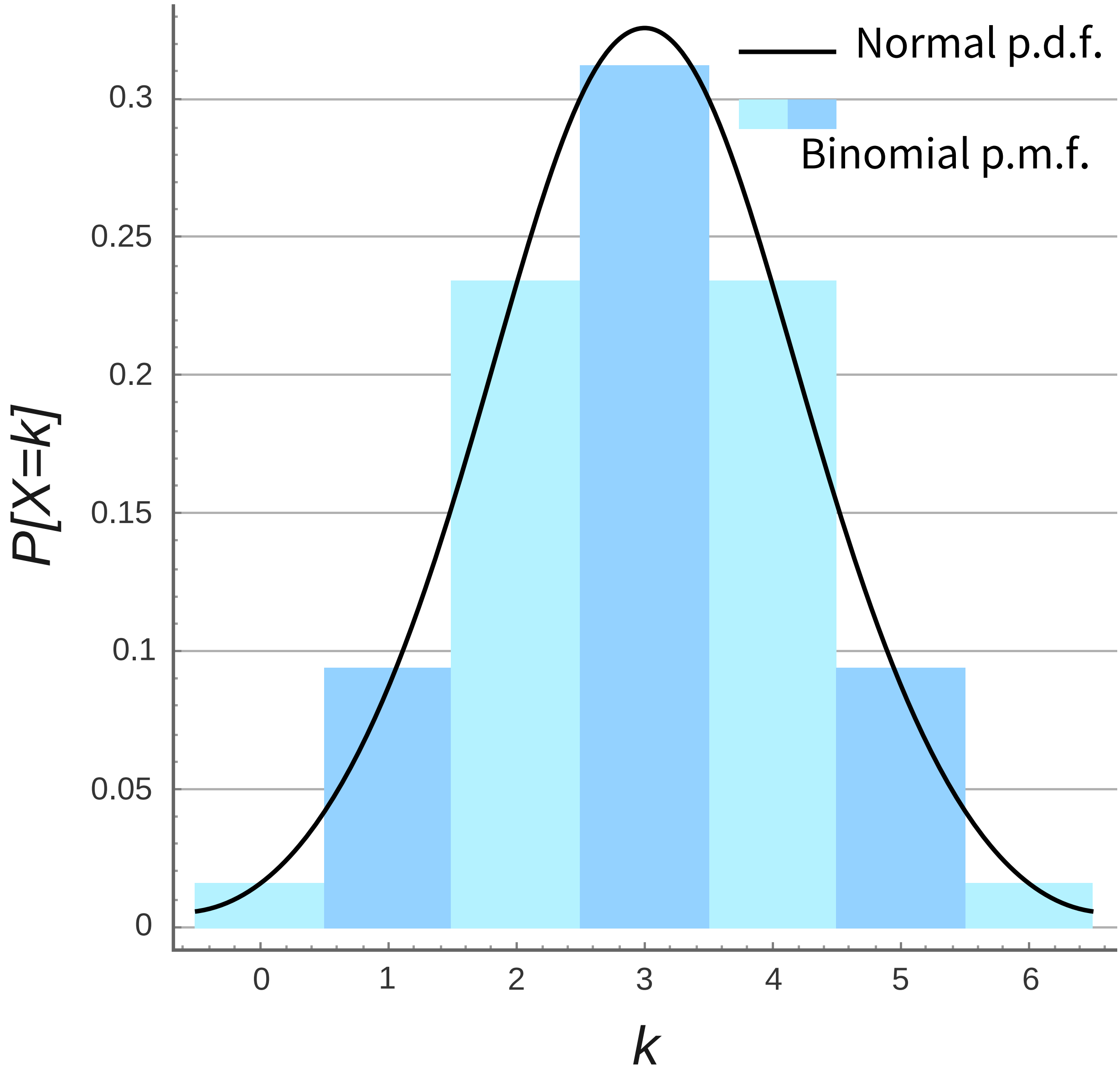
进行n次独立的伯努利实验的和，若随机变量X满足二项分布，则记$X \sim B(n,p)$.

此时$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-k)^{n-k}$

$E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=nE(X_i)=np$

$V(X)=V(\sum_{i=1}^n X_1)=nV(X_i)=np(1-p)$

我们将$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-k)^{n-k}$ 反应到直方图上



当$p=0.5$时，其概率分布与正态分布相同.

> 当$p \neq 0.5$时，其概率分布有左偏(右偏)的趋势，但在n极大时，其概率分布可以近似看做正态分布，一般将这个近似界设成$5 \leq np, 5 \leq n(1-p)$.

正态分布:

> 有常数μ, σ^2，正态分布的概率测量表示为$P(X=x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
>
> 有随机变量X满足正态分布，我们记作X~$N(\mu, \sigma^2)$.
>
> 正态分布的概率分布图像呈**钟形**，且以$x=\mu$为界左右对称，其图像与x轴的闭合面积恒为1.
>
> $E(X)=\mu, V(X)=\sigma^2$.
>
> **标准正态分布**是X~$N(0,1)$的一种特殊情况(了解一下就好了).

Example

1. > 男生A单独搬砖需要4小时，而女生B有$\frac{2}{5}$的概率来帮忙，两人只需要3小时便能搬完所有砖，求搬完所有砖的期望时间.

   设X_2为完成这项工作的人数，X_1为完成这项工作的期望时间，则

   $$E(X_1)=E(E(X_1 \mid X_2))=\sum_{x_2} P(X_2=x_2)E(X_1 \mid X_2=x_2)$$

   此时X_2共有两种取值，带入得

   $$\begin{aligned}E(X_1)&=P(X_2=1)E(X_1 \mid X_2=1)+P(X_2=2)E(X_1 \mid X_2=2)\\&=(1-0.4)\cdot 4+0.4\cdot 3\\&=3.6\end{aligned}$$

   答案:$E(X_1)=4$，$\frac{2}{5}$是不存在的!!!

2. > A竞赛有99%是男生，B竞赛有99%是女生.
   >
   > 若A,B竞赛人数相同，求选出一个人是男生的概率.
   >
   > 在选出的人是A竞赛的条件下，求选出一个人是男生的概率.

   设选出的人是A竞赛这个事件为U_1，B竞赛为U_2，选出的人为男生的事件为S_1，女生为S_2.
   由全期望公式得

   $$\begin{aligned}P(S_1)&=\sum_i P(S_1 \mid U_i)P(U_i)\\&=P(S_1 \mid U_1)P(U_1)+P(S_1 \mid U_2)P(U_2)\\&=99\%\cdot 50\%+1\%\cdot 50\%\\&=50\%\end{aligned}$$

   由条件期望公式得

   $$\begin{aligned}P(S_1 \mid U_1)&=\frac{P(S_1,U_1)}{P(U_1)}\\&=\frac{50\%\cdot 99\%}{50\%}\\&=99\%\end{aligned}$$

   嘛，反正A竞赛依旧全是男生...

简单题

NewItemShop [1]

> 题意
>
> > 你有$swords$把剑，有n个人，第i个人多个三元组(T_i, C_i, P_i)表示在T_i时刻有$P_i\%$几率尝试(在之前都没有尝试)用C_i的单价购买一把剑，你可以拒绝或接受，一个人的$\sum_i P_i \le 1$.
> >
> > 每个人最多尝试购买一次，T_i仅出现一次，求最优策略下的期望.
>
> 数据范围
>
> > $\forall x \in [1, 24]$
>
> 分析
>
> > 首先我们发现，$P_i\%$是第i个人在T_i尝试，**且**之前都没有尝试的概率，即为$P(AB)$.
> >
> > 而我们DP转移时，用的是$p_i = P(A_i \mid B_i)$，此时$P(A_j \mid B_j) = \frac{P(A_jB_j)}{1-\sum_{i=1}^{j-1} P(A_iB_i)}$.
> >
> > pos_i表示在T_i点尝试购买的人，若此人只尝试了这一次，$tim_i = -1$，若没有人尝试$tim_i = -2$.
> >
> > $f_{i,j,sta}$表示时间到i，还有j把剑，到过的人状态为sta.
> >
> > $$f_{i,j,sta} \begin{cases} 0 & i = 25 \\ f_{i+1,j,sta} & tim_i = -2 \\ f_{i+1,j,sta} & pos_i \in sta \\ p_{pos_i} \cdot max\{f_{i+1,j-1,sta} + C_{pos_i}, f_{i+1,j,sta}\} + (1-p_{pos_i}) \cdot f_{i+1,j,sta} & tim_i = -1 \\ p_{pos_i} \cdot max\{f_{i+1,j-1,sta+pos_i} + C_{pos_i}, f_{i+1,j,sta+pos_i}\} + (1-p_{pos_i}) \cdot f_{i+1,j,sta} & others \end{cases}$$
> >
> > 最终答案为$f_{0,swords,0}$，记忆化搜索即可.

Maze [2]

> 题意
>
> > 有一棵树，从根节点S出发，到一个随机叶子节点T结束，求DFS的期望步数
> >
> > ```
> > DFS(x)
> >     if x == exit vertex then
> >         finish search
> >     flag[x] <- TRUE
> >     random shuffle the vertices' order in V(x) // here all permutations have equal probability to be chosen
> >     for i <- 1 to length[V] do
> >         if flag[V[i]] = FALSE then
> >             count++;
> >             DFS(y);
> >     count++;
> > ```

> **注意，弹栈也算一步.**

数据范围

> $n \in [1, 1e5]$

分析

> 我们考虑题意可以转化为求$\sum_e E(X_e)$，X_e表示每条边被走过的期望步数.
>
> 我们将边分为两种，必须经过与不必须经过.
>
> 考虑必须经过的边，我们容易发现这种边经过的期望步数是1.
>
> 再考虑不必须经过边，发现这种边要么经过0次，要么经过2次.
>
> 我们设不必须经过边离必须经过边最近的点为u，通过v走到不必须经过边，通过w达到T点.
>
> 易知$v \neq w$，且一旦往v走，就要将v这个子树的边走两遍，一旦往w走，就不再会走到v这个子树.
>
> 所以一条不必须经过边被走过的情况由u, w的先后顺序决定.
>
> 而在输出序列中(全排列)，u, w的先后顺序概率分别为$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
>
> 因此，不必须经过边的期望步数为$0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.
>
> 我们惊奇的发现不管那种边，走过的期望步数都为1，因此，答案恒为$n-1$.

小结

> 将大的期望转化成小的期望的(路径的期望－＞边的期望)是常用手段.
>
> 对情况分讨可以更快的得出结论(公式).

聪聪与可可 ^{3}

题意

> 有一张无向图，玩家A在S点，玩家B在T点，每一秒玩家A会向相邻的点或当前点**等概率**移动，
>
> 玩家B能向离A最近的相邻的点移动1步(若有多个点，取标号最小的)，如果没有遇到A，再走一步.
>
> 求玩家B与玩家A在同一个点的期望时间，玩家B先行.

数据范围

> $n \in [1, 1000]$

分析

> 首先我们考虑，B的移动方式在已知A位置时是已知的.
>
> 因此先处理出$next_{i,j}$表示$A \in j, B \in i$时B的下一步.
>
> d_i表示点i的度数，$f_{i,j}$表示$A \in j, B \in i$，B追到A的期望时间.

> 已知$f_{i,i}=0$，若$next_{i,j}=j$或$next_{next_{i,j}}=j$，$f_{i,j}=1$，易列出方程
>
> $$f_{i,j}=\begin{cases}\frac{\sum_{k=1}^{d_j}f_{next_{next_{i,j}},v_k}+f_{next_{next_{i,j}},j}}{d_j+1} & \\ 0 & i=j \\ 1 & next_{i,j}=j,next_{next_{i,j}}=j\end{cases}$$
>
> 利用记忆化搜索即可得出答案.

小结

> DP或记忆化搜索是解决概率期望问题很好的一种方法，也是最常见的(以后就不是了).
>
> 但无论如何，式子还是要推的.

Platonic Dice [4]

题意

> 抛1个4面骰子，记点数为A，
>
> 抛A个6面骰子，记总点数为B，
>
> 抛B个8面骰子，记总点数为C，
>
> 抛C个12面骰子，记总点数为D，
>
> 抛D个20面骰子，记总点数为E，
>
> 求E的方差.

分析

> 考虑抛A个b面骰子，记点数为B.
>
> 此时$V(B)=V(E(B\mid A))+E(V(B\mid A))$.
>
> 我们可以推出
>
> $$E(B\mid A)=E(\sum_{i=1}^{A}b_i)=E(b_i)A=E(b)A \tag{1}$$
>
> $$V(B\mid A)=V(\sum_{i=1}^{A}b_i)=V(b_i)A=V(b)A \tag{2}$$
>
> 将(1),(2)带入得
>
> $$\begin{aligned}V(B)&=V(E(B\mid A))+E(V(B\mid A))\\&=V(E(b)A)+E(V(b)A)\\&=E^2(b)V(A)+V(b)E(A)\end{aligned}$$
>
> 此时$V(B)$与$V(A),E(A),V(b),E(b)$有关
>
> $$E(B)=E(E(B\mid A))=E(E(b)A)=E(b)E(A)$$

$$E(b)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b}i=\frac{b+1}{2}$$

$$V(b)=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b}(i-\frac{b+1}{2})^2=\frac{b^2-1}{12}$$

递推得

$$\begin{aligned}E(A)&=E(a)=\frac{5}{2}\\E(B)&=E(A)E(b)=\frac{35}{4}\\E(C)&=E(B)E(c)=\frac{315}{8}\\E(D)&=E(C)E(d)=\frac{4095}{16}\\E(E)&=E(D)E(e)=\frac{85995}{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&V(A)=V(a)=\frac{5}{4}\\&V(B)=V(A)E^2(b)+E(A)V(b)\\&V(C)=V(B)E^2(c)+E(B)V(c)\\&V(D)=V(C)E^2(d)+E(C)V(d)\\&V(E)=V(D)E^2(e)+E(D)V(e)\\&=\frac{2464129395}{1024}=2406376.3623\end{aligned}$$

小结

> 十分全面的推式子~~(暴算)~~，基本把能用的公式全用了一遍．．．
>
> 考不到的~~(除非我出题)~~，反正就是背背公式，感性理解以下．

$RedIsGood$ [5]

题意

> 有A张红桃，B张黑桃，打乱盖在桌上，按顺序翻牌．
>
> 翻到红牌得一美元，翻到黑牌去一美元，可随时停止翻牌．
>
> 求在最优策略下，得到美元的期望．

数据范围

> $A,B\in[0,8000]$

分析

> 我们考虑$f_{i,j}$表示还剩i张红桃，j张黑桃的期望得到美元数，易列出式子
>
> $$f_{i,j}=\begin{cases}0 & i=0\\ f_{i-1,j} & i>0,j=0\\ max\{0,\frac{i}{i+j}\cdot f_{i-1,j}+\frac{j}{i+j}\cdot f_{i,j-1}\} & i>0,j>0\end{cases}$$
>
> 当取当前牌后的期望为负时，还不如及时停止．

> 小结
>
> > 对于带决策的期望题，往往要满足最优子结构.
> >
> > 此时一般使用DP并用期望表示状态，因为期望的值同时也表示了子结构的优劣.

时间流逝[^6]

> 题意
>
> > 每一天你有P的概率会失去最小能量的能量圈，否则你将等概率随机得到一个能量圈，其能量小于你现有的能量圈.
> >
> > 求你的能量总和大于阀值T的期望天数.
> >
> > 特别的，若你没有能量圈，你将无法失去能量圈.
>
> 数据范围
>
> > $P \in [0.1, 0.9], T, N \in [1, 50]$
>
> 分析
>
> > 设当前拥有能量圈的状态为s，失去能量圈时的状态为f_s(f_s唯一)，得到能量圈的状态为$v_{s,i}$，$v_{s,i}$有m种取值.
> >
> > 易得出期望转移方程
> >
> > $$E_s = 1 + p \cdot E_{f_s} + (1-p) \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_{v_{s,i}}$$
> >
> > 但是，我们发现$v_{s,i}, s, f_s$由能量的大小组成了一种树型结构，因此可以使用树型期望的一种**套路**，将E_s表现成$k_s E_{f_s} + b_s$，这里的k_s, b_s都是未知参数.
> >
> > 利用$g = (1-p)\frac{1}{m}, sk = \sum_{i=1}^{m} k_{v_{s,i}}, sb = \sum_{i=1}^{m} b_{v_{s,i}}$简化转移方程
> >
> > $$\begin{aligned} E_s &= 1 + p \cdot E_{f_s} + (1-p) \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} k_{v_{s,i}} E_s + b_{v_{s,i}} \\ E_s &= 1 + p \cdot E_{f_s} + g(sk \cdot E_s + sb) \\ (1 - g \cdot sk) E_s &= p \cdot E_{f_s} + 1 + g \cdot sb \\ E_s &= \frac{p}{1 - g \cdot sk} E_{f_s} + \frac{1 + g \cdot sb}{1 - g \cdot sk} \end{aligned}$$
> >
> > 由此得$k_s = \frac{p}{1-g \cdot sk}, b_s = \frac{1+g \cdot sb}{1-g \cdot sk}$.
> >
> > 此时$s=0$为根节点，s的值超过T的点为叶子节点且$E_s = 0, k_s = 0, b_s = 0$，这样我们就能从叶子往上推了.
>
> 小结
>
> > 对于树型结构的转移我们常用$val_u = k_u \cdot val_{f_u} + b_u$，并用数学归纳法求出$k_u, b_u$的转移式来求解.

刷题列表

> 1. Codeforces 1060 F Shrinking Tree
> 2. UNR#3 百鸽笼

扩展知识

建立线性方程组

> 有些时候，u状态的转移式中有v，而v状态的转移式中又会牵扯到u，对于这样的转移式，我们是不能记忆化搜索(因为会搜出环)也不能DP的，此时的转移就需要用**建立线性方程组**来解决.
>
> 我们将每个点的转移式看做一条方程，则我们可以列出有关n个变量，含有n条式子的方程组，此时只需要**高斯消元**一下就可以得出答案了.
>
> 当然，方程组也会有线性相关等无解或多解现象，此时要在具体题目中分析这种现象意味这什么.
>
> 当然，一个状态的无解或多解并不会影响目标状态的唯一解性的话就不要管了，如
>
> $$\begin{cases} a = 1 & \text{有解} \\ b = b + 1 & \text{无解} \\ c = c & \text{无数解} \end{cases}$$
>
> a的唯一解性并没有变，如果a是目标状态，那么a状态还是有答案的.

概率转移网络

Markov不等式

Chebyshev不等式

扩展题

总结

> 这是一个没做完的课件，等做完了再作总结．．．

---

1. Topcoder-SRM-515-div1↩
2. https://codeforces.com/contest/123/problem/E↩
3. https://www.luogu.org/problemnew/show/P4206↩
4. https://projecteuler.net/problem=389↩
5. Topcoder-SRM-420-div↩