

EXEMPLO 1: O PROBLEMA DO POETA

O exemplo apresentado a seguir descreve a situação de um poeta que mora há dez anos numa floresta de sua propriedade. Além de escrever poesia, o poeta também maneja sua floresta para obter uma receita adicional para sobreviver. A floresta se divide da seguinte maneira:

- 40 hectares de plantações de *Pinus taeda*;
- 50 hectares de floresta nativa.

Em suas anotações, recopiladas meticulosamente ao longo dos últimos dez anos, constam as seguintes informações:

- 800 dias foram utilizados no manejo das plantações de *Pinus taeda*, gerando uma receita total acumulada de R\$ 36.000,00;
- 1.500 dias foram utilizados no manejo da floresta nativa, gerando uma receita total acumulada de R\$ 60.000,00.

O poeta quer encontrar uma forma de obter a máxima receita possível a partir da floresta, sem utilizar mais do que a metade do seu tempo, equivalente a 180 dias por ano, no manejo da mesma. Para atingir este objetivo, o poeta deve saber quantos hectares devem ser manejados anualmente de cada tipo de floresta.

Variáveis de decisão

Para poder formular seu problema, o poeta-florestal precisa selecionar as variáveis que irão simbolizar suas decisões. A seleção das variáveis apropriadas é uma etapa crítica na construção de um modelo. Algumas destas escolhas podem tornar o modelo muito mais simples e fácil de resolver do que outras. Infelizmente, não há regras padronizadas para a seleção das variáveis adequadas; a única maneira de aprender esta “arte de modelar” é por meio da prática.

Como foi mencionado, o desejo do poeta é maximizar a receita advinda da sua propriedade florestal. Mas isto somente faz sentido se os recursos são finitos, ou seja, o que deve ser maximizado é a receita por unidade de tempo como, por exemplo, por ano, levando em consideração a média dos dez anos de manejo florestal que se passaram na propriedade. Formalmente, pode-se começar a escrever o objetivo do problema como segue:

Maximize $Z = \text{R\$ de receita por ano}$

A receita simbolizada por Z pode ser proveniente da floresta de *Pinus*, ou da floresta nativa, ou de ambas. Portanto, uma opção natural para as variáveis é:

X_1 = número de hectares de floresta de *Pinus* a serem manejados

X_2 = número de hectares de floresta nativa a serem manejados

Estas são as incógnitas. Devem ser examinados os valores possíveis de X_1 e X_2 para tornar o valor de Z o maior possível.

Função objetivo

A função objetivo deve expressar a relação existente entre Z , que é a receita gerada pela floresta, e as variáveis de decisão X_1 e X_2 . Para obter esta função, é preciso ter uma noção das receitas anuais de cada tipo de floresta. Como o poeta recebeu R\$ 36.000,00 dos seus 40 ha de floresta de *Pinus* e R\$ 60.000,00 dos seus 50 ha de floresta nativa durante os últimos 10 anos, a receita anual média foi de R\$ 90 por hectare (R\$ 90/ha/ano) para a floresta de *Pinus*, e de R\$ 120/ha/ano para a floresta nativa. Utilizando estes valores como medida da receita esperada pelo poeta para os próximos anos, a função objetivo pode-se ser escrita como segue:

$$\max_{\substack{Z \\ (\text{R\$}/\text{ano})}} Z = 90 \underset{(\text{R\$}/\text{ha}/\text{ano})}{X_1} + 120 \underset{(\text{R\$}/\text{ha}/\text{ano})}{X_2}$$

onde as unidades de medida de cada variável e constante aparecem entre parênteses. Uma boa prática de modelagem de problemas é verificar minuciosamente a coerência de todas as expressões algébricas com respeito a suas unidades de medida. Na função objetivo, Z é expressa em reais por ano, de modo que as operações à direita do sinal de igualdade da função objetivo devem resultar em reais por ano também, como pode ser verificado.

Para completar o modelo, deve-se ainda determinar quais restrições limitam as ações do poeta de modo a ajudar ele a escrever as mesmas em termos matemáticos referentes às variáveis de decisão X_1 e X_2 .

Restrições de área

As restrições que talvez sejam as mais simples de entender dizem respeito das áreas a serem utilizadas de cada tipo de floresta. Estas áreas não podem ser maiores do que as disponíveis. Deste modo, tem-se:

$$X_1 \leq 40 \text{ ha de floresta de } Pinus$$

$$X_2 \leq 50 \text{ ha de floresta nativa}$$

Nas restrições de área pode ser verificado que as unidades nas quais se expressa o lado direito das mesmas (ha) são as mesmas que as do lado esquerdo (definição das variáveis X_1 e X_2).

Restrição de tempo

Quando o poeta manifestou seu desejo de não trabalhar mais do que metade do seu tempo na floresta, o que representa grosseiramente 180 dias/ano, deve-se pensar em mais uma restrição. Para escrever esta restrição em função das variáveis de decisão, devemos observar que o poeta utilizou, nos últimos 10 anos, 800 dias para manejar os 40 ha de floresta de *Pinus*, o que resulta em uma dedicação média de 2 dias por hectare por ano (2 dias/ha/ano). De maneira similar, 3 dias/ha/ano foi a dedicação média de tempo na floresta nativa, onde ao longo dos últimos 10 anos foram utilizados 1.500 dias para manejar os 50 ha de floresta nativa.

Em termos das variáveis de decisão X_1 e X_2 , a expressão que representa o tempo necessário para manejar floresta é:

$$\frac{2}{(\text{dias/ha/ano})} X_1 + \frac{3}{(\text{dias/ha/ano})} X_2$$

e a expressão que limita este tempo para um valor máximo de 180 dias/ano é:

$$\frac{2}{(\text{dias/ha/ano})} X_1 + \frac{3}{(\text{dias/ha/ano})} X_2 \leq \frac{180}{(\text{dias/ano})}$$

Condição de não-negatividade

A última restrição necessária para completar a formulação do problema estabelece que nenhuma das variáveis pode ser negativa, uma vez que elas referem-se a áreas sob manejo. Deste modo, tem-se a seguinte expressão, denominada de condição de não-negatividade:

$$X_1 \geq 0 \text{ e } X_2 \geq 0$$

Modelo final

A combinação das expressões da função objetivo e das restrições gera o modelo final completo para o problema do poeta como sendo: Encontre as variáveis X_1 e X_2 , que medem as áreas a serem manejadas, respectivamente, de floresta de *Pinus* e nativa, de modo que:

max Z =	90	X_1	+	120	X_2	
sa						
1)		X_1		\leq	40	ha de floresta de <i>Pinus</i>
2)				$X_2 \leq$	50	ha de floresta nativa
3)	2	X_1	+	3	$X_2 \leq$	180 dias/ano disponíveis para manejo florestal
		$X_1; X_2$		\geq	0	

Observe que a floresta nativa é manejada com regime de cortes seletivos de proteção, o que consome mais tempo por unidade de área devido à marcação individual das árvores. No entanto, a receita do manejo da floresta nativa é maior, conforme mostram os coeficientes da função objetivo. Portanto, a escolha da melhor estratégia de manejo não é óbvia.

Nas próximas aulas será mostrado como resolver este problema, mas por enquanto é bom continuar formulando outros problemas. Nas seguintes seções desta aula serão formulados ainda mais três problemas.

EXEMPLO 2: O PROBLEMA DOS FERTILIZANTES

Neste segundo exemplo, o problema consiste em gerenciar uma fábrica de fertilizantes que produz dois tipos de adubo: o superfosfato e o fosfato. Na fabricação destes adubos são utilizados três tipos de matéria-prima, denominados genericamente de A, B e C. A seguinte tabela mostra a matriz insumo-produto que caracteriza a produção destes adubos.