PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA FINS FLORESTAIS

AS062 (semestral)

Disciplina ministrada no Curso de Graduação em Engenharia Florestal da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Prof. Julio Eduardo Arce

Curitiba-PR, BRASIL

Março de 2015

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Caro leitor: você está prestes a mergulhar em um dos mais apaixonantes capítulos do conhecimento florestal, o da tomada de decisões otimizadas no planejamento estratégico, tático e operacional. Após ter visto como plantar árvores, inventariá-las, podá-las e desbastá-las, mostrá-las em mapas geo-referenciados, avaliá-las economicamente, colhê-las, utilizá-las, etc., resta apenas a tarefa de combinar tudo isso de forma a atender o objetivo do proprietário das mesmas. Pode parecer trivial, mas a simples alteração do desbaste sistemático da 4ª linha, para a 5ª ou 6ª linhas, pode causar uma diferença no resultado final nada desprezível. Mesmo quando muitos falam que por 1% ou 2% a mais na receita líquida, ou ainda no faturamento, não vale o esforço de planejar utilizando ferramentas matemáticas, eu posso lhe garantir, até mesmo por experiência própria, que quem conseguir implementar estas ferramentas com sucesso em qualquer cenário, do âmbito público ou privado, sempre será lembrado com bons olhos.

Sem sombra de dúvidas, o conhecimento técnico-científico florestal, tal como o vemos atualmente, teve seus primórdios há vários séculos na região central do Continente Europeu, em particular na Alemanha. Neste sentido, Heinrich Cotta, um técnico florestal alemão, mencionou no prefácio de seu livro *Anweisung zum Waldbau* (*Conselhos Silviculturais*), de 1816, traduzido ao inglês por B. E. Fernow em *Forest Quarterly*, traduzido novamente ao espanhol por Daniel et al (1982), e traduzido ainda mais uma vez ao português por mim, os seguintes conceitos:

> *"... Se todos os habitantes da Alemanha abandonassem o país, este se cobriria de florestas em um lapso de um século; em vista de que não haveria ninguém que as utilizasse, o solo se enriqueceria e as florestas não só incrementariam seu tamanho, senão também sua capacidade de produção. Porém, se os habitantes retornassem outra vez e fizessem uma extração de madeira, forragem e pastos igual á de antes, as florestas, inclusive com o melhor ordenamento florestal, não tão só voltariam a reduzir seu tamanho, senão que os solos se tornariam menos férteis.*
>
> *As florestas surgem e se desenvolvem melhor nos lugares onde não há habitantes (e, portanto, tampouco há engenharia florestal), o que justifica àquelas pessoas que dizem que no passado não existia a engenharia florestal e tínhamos suficiente madeira; porém, agora que contamos com a ciência, já não temos madeira.*
>
> *Poder-se-ia dizer, com a mesma justiça: as pessoas que não necessitam de um médico são mais sãs do que aquelas que o necessitam; mas isto não quer dizer que os médicos sejam os culpados das doenças: não existiriam médicos se não existissem as doenças; e não existiria a ciência florestal se não houvesse uma deficiência na quantidade de recursos florestais disponíveis. Esta ciência é somente a filha da necessidade e a necessidade é, por conseguinte, sua causa natural; então a frase deveria ser: agora temos a ciência florestal porque há escassez e carência de madeira.*

Caro leitor, desculpe a interrupção neste belo texto; quero apenas lembrá-lo de que o mesmo foi escrito no início do século XIX, mais precisamente em 1816. Desfrute desta leitura que é de tocar até o mais insensível dos profissionais da área florestal.

> *A engenharia florestal, no entanto, não oferece milagres e nada pode fazer contra o curso da natureza. O célebre médico Verdey disse: "o bom médico é aquele que deixa a gente morrer; o ruim é o que as mata". Com o mesmo direito pode ser dito que o bom técnico florestal é o que permite que as florestas mais perfeitas deixem de sê-lo; o ruim as arruína. Ou seja, assim como o médico não pode evitar que os homens morram, porque*

esse é o recurso da natureza, tampouco o melhor técnico florestal pode evitar que as florestas, que a ele chegaram a modo de uma herança, se deteriorem a partir do momento em que as começa a utilizar.

Faz muito tempo Alemanha tinha imensas florestas perfeitas e muito férteis, mas estas grandes florestas tornaram-se pequenas, e as férteis, quase estéreis; cada geração de homens viu uma menor geração de florestas. Aqui e ali, ainda é possível admirar os "oaks" e "firs" gigantescos, que cresceram sem nenhum cuidado; enquanto isso, nós percebemos com clareza de que nunca conseguiremos nesse mesmo lugar, mediante nenhuma arte ou ciência, reproduzir árvores semelhantes. Os netos dessas árvores mostram todos os sintomas da morte próxima antes que seu volume seja de um quarto do que as árvores antigas têm; e nenhuma arte ou ciência pode produzir, sobre os solos florestais empobrecidos na atualidade, florestas como aquelas que, todavia, estão sendo derrubadas aqui e ali.

O bom técnico florestal também permite que a floresta se deteriore, mas somente nos casos em que não as pode auxiliar; o técnico ruim, pelo contrário, sempre as arruína.

Na ausência de utilização, o solo florestal melhora constantemente; se as florestas são utilizadas de maneira ordenada, as mesmas permanecem dentro de sue equilíbrio natural; no entanto, se são utilizadas de forma irracional, elas se empobrecem. O bom técnico florestal obtém os maiores rendimentos florestais da floresta sem deteriorar o solo; já o ruim não pode obter estes rendimentos nem preservar a fertilidade do solo.

Apenas pode conceber-se em que medida pode beneficiar-se ou danificar-se uma floresta segundo o tipo de manipulação que sobre ela se exerce; portanto, a verdadeira engenharia florestal contém muito mais do que pensam aqueles que só conhecem suas generalidades.

Há trinta anos, vangloriava-me de conhecer bem a ciência florestal; mas se não havia crescido com ela, e ademais a havia aprendido nas universidades!. Desde então não desperdiço oportunidade alguma que me permita aumentar meus conhecimentos em todas as direções, mas durante este longo período cheguei a ver, com muita clareza, o pouco que sei a respeito das profundidades desta ciência e aprendi que ela não chegou, de nenhuma maneira, até o ponto que muitas pessoas crêem haver atingido.

Tal vez muitas pessoas encontrem-se nas mesmas condições nas que me encontrava há trinta anos; mas já se curarão de sua vaidade!. A engenharia florestal baseia-se no conhecimento mesmo da natureza; quanto mais se penetra dentro de seus segredos, maior é a profundidade que se abre diante da gente. Muitas vezes se presta demasiada atenção ao que a luz de uma lâmpada de azeite pode tornar visível, quando podem ser vistas muitíssimas mais coisas à luz de uma tocha e se tornam evidentes mais coisas ainda desconhecidas; se alguém considera que o sabe todo, isto com certeza é um sinal de superficialidade.

Os técnicos florestais podem ser divididos em científicos e empíricos; muito raras vezes se combinam as duas qualidades.

O que o primeiro considera suficiente para o ordenamento de uma floresta pode aprender-se com facilidade e os conhecimentos sistematicamente ensinados do outro podem ser memorizados com rapidez; mas na prática, a arte do primeiro é à ciência florestal o que a medicina tribal à verdadeira farmacopéia; e é muito freqüente que o outro não conheça as florestas nem pelo grande número de árvores: as coisas, dentro da floresta real vêm-se muito diferentes de como se vêm nos livros; assim sendo, o homem que sabe confia no seu conhecimento, mas não toma a imprudente decisão do empírico.

Existem três causas principais pelas quais a engenharia florestal ainda está atrasada: primeiro, o prolongado período necessário para o desenvolvimento das florestas; segundo, a grande variedade de sítios sobre os que as florestas crescem; terceiro, o fato de que o técnico que pratica muito escreve pouco, e o que escreve quase nem pratica.

O longo período de desenvolvimento ocasiona que muitas vezes se considere como bom algo que não o é, e se prescreva como tal durante certo tempo, após o qual a prescrição se torna negativa para o manejo da floresta. O segundo fato ocasiona que o que alguns técnicos consideram bom ou ruim resulte bom ou ruim somente em certos lugares. O terceiro fato permite ver que as melhores experiências morrem junto com a pessoa que as realizou e que muitas experiências totalmente unilaterais são copiadas literalmente pelo engenheiro florestal com tanta freqüência que, finalmente, chegam a constituir verdadeiros dogmas de fé que ninguém se atreve a contradizer, sem importar o unilaterais ou errôneas que possam ser ...”

Pois bem, mesmo após a reflexiva leitura dos parágrafos anteriores, escritos em 1816, resta ainda o pensamento de que nunca estaremos isentos de ter que tomar decisões. E é neste processo de tomada de decisões que se encaixa o objetivo da disciplina Programação Linear para Fins Florestais do Curso de Graduação em Engenharia Florestal.

DEFINIÇÕES E CONCEITOS

Como em qualquer área do conhecimento, sempre é bom definir claramente os termos a serem utilizados ao longo do programa. Neste sentido, inicialmente é conveniente definir as três palavras que compõem o nome da disciplina.

Modelo: Em um rápido olhar em um dicionário aparecem umas 18 definições distintas para esta palavra (Aurélio, 1999). No entanto, aos efeitos da presente disciplina, adotaremos a definição de modelo como sendo uma representação abstrata da realidade. Ou seja, os modelos objeto de estudo serão abstrações, sendo que a maior ou menor semelhança entre os mesmos e a realidade dependerá da habilidade do modelador.

Matemática: Esta ciência, certamente conhecida por você, caro leitor, será utilizada no contexto da modelagem matemática, usufruindo de duas de suas vantagens principais: 1) a matemática diferencia-se da estatística por não admitir o termo correspondente ao erro (*e*); e 2) a matemática diferencia-se da economia por ser a primeira uma ciência exata, enquanto que a segunda é uma ciência social-aplicada. Esta última diferença é fundamental para o estudo que pretendemos iniciar. Em matemática, por exemplo, 100 + 100 obviamente é igual a 200; já em economia, 100 + 100 não é igual a 200, mesmo que o gerente das Lojas XYZ afirme isso.

Otimização: Este termo relaciona-se com a busca do ótimo, que representa ou constitui o máximo (ou mínimo) que certa grandeza ou quantidade variável pode atingir em determinadas condições. Do ponto de vista da presente disciplina, um comentário que não pode deixar de ser feito é que a otimização é extremamente gulosa, agressiva, despiedosa, dentre outros tantos adjetivos, quando se trata de buscar o máximo (ou mínimo) de determinado atributo. Ou seja, uma vez que o modelo matemático foi informado de que há interesse em encontrar seu ponto mais alto (ou mais baixo), serão empregados todos os meios em uma sorte de busca maquiavélica pela resposta ótima. Portanto, daqui em diante termo otimização será relacionado apenas com duas alternativas: <u>maximização</u> ou <u>minimização</u>.

Mas agora voltando à Programação Linear, nem sempre as respostas geradas pelos mesmos são satisfatórias. Muitas vezes estes modelos são severamente criticados por não atender tal ou qual requisito, elementar do ponto de vista técnico operacional do problema que está sendo abordado, mas inalcançável pelo modelo por uma razão muito simples: sequer foi informado ao mesmo que esse requisito deveria ser considerado. Deve ficar bem claro que se as respostas dadas pelos modelos forem absurdas, ou impraticáveis, o culpado sempre será o modelador e nunca o modelo. Portanto, grande ênfase será dada à modelagem na presente disciplina.

ROTEIRO DA DISCIPLINA

A disciplina Programação Linear para Fins Florestais pretende ser uma introdução ao estudo sistêmico de ferramentas de auxílio à tomada de decisão. Dentre estas ferramentas, a Programação Linear (PL) será a mais explorada, devido ao fato de ser praticamente a primeira ferramenta desenvolvida para resolver problemas de tomada de decisão sob uma base matemática. Grande ênfase será dada à formulação matemática de problemas, bem como à resolução e interpretação dos mesmos. Exemplos de planejamento estratégico otimizado de florestas serão exaustivamente apresentados, formulados e discutidos, focando tanto a máxima produção possível de madeira quanto a máxima receita financeira gerada, sendo que a busca de cada um destes máximos pode levar, na vida real, a soluções ótimas distintas.

GLOSSÁRIO

FO	Função objetivo
HP	Horizonte de planejamento
IMA	Incremento médio anual
PL	Programação linear
PD	Programação dinâmica
PO	Pesquisa operacional
sa	Sujeito a
Solver	Programa informatizado (*software*) utilizado para resolver problemas de PO

1 - FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS FLORESTAIS

O QUE É UM PROBLEMA?

Certamente você, caro leitor, já teve que não somente enfrentar, senão resolver, diversos tipos de problemas ao longo da sua vida, tanto nas esferas pessoal e individual, quanto familiar, empresarial, profissional, etc. Pode ter certeza que eu também tive, tenho, e continuarei tendo que resolver problemas, mas se começarmos a intercambiar nossos problemas talvez seja até melhor deixar esta modalidade de ensino à distância para nos sentar à mesa de uma boa cervejaria.

Mas deixando as brincadeiras de lado, a abordagem que será dada no contexto da presente disciplina ao termo <u>problema</u> é aquela que visa, antes que mais nada, elucidar o mesmo. Ou seja, é fundamental conhecer a questão ou assunto a ser resolvido antes de poder sequer pretender abordá-lo de forma sistêmica. Eu creio firmemente que muitos dos problemas aparentemente "sem solução", na verdade teriam uma, ou até mesmo várias soluções, caso fossem claramente identificados. E é por isso que esta disciplina está sendo direcionada a você, que com sua experiência profissional deve encontrar-se cercado de problemas claramente identificados, mas cuja abordagem torna-se tediosa, laboriosa, e por vezes extremamente complicada.

A seguir, é apresentada uma lista de cinco pontos para a abordagem sistêmica da análise e resolução de problemas.

1. Enunciado.
2. Formulação.
3. Resolução.
4. Interpretação.
5. Relatórios.

Cada um destes cinco pontos será detalhado nas seguintes seções desta aula.

Enunciado

O **enunciado** é a exposição clara e concisa das questões que precisam ser resolvidas. O enunciado é feito geralmente em **linguagem coloquial**, podendo ser escrito, verbal ou alguma combinação de ambos. Como exemplos, podem-se mencionar os seguintes:

- *Quais as áreas florestais que devem ser plantadas, desbastadas e cortadas de modo a abastecer a unidade industrial com custo mínimo?*
- *Quantas unidades de cada tipo de produto devem ser enviadas de cada origem a cada destino, de modo a minimizar o custo global de transporte?*
- *Como deve ser feita a alocação de pessoas e equipamentos para a colheita florestal, visando reduzir a ociosidade das máquinas e o deslocamento das pessoas?*

Enfim, são inúmeros os exemplos de enunciados de problemas que podem ser sugeridos nesta seção, e certamente você, caro leitor, tenha neste momento um *case* específico em mente. Grande parte dos problemas sem solução ou insolúveis, geralmente possuem alguma falha no seu enunciado, o que os torna impossíveis de serem abordados de forma matemática, como estaremos começando a ver nesta disciplina de Programação Linear para Fins Florestais.

Formulação

O segundo ponto da abordagem sistêmica apresentada nesta aula é a **formulação**, e o leitor já deve ter percebido sua importância ao ser até utilizada como o título desta aula (Formulação de Problemas Florestais). A formulação trata basicamente da **tradução** da **linguagem coloquial** para a **linguagem matemática**. É por meio da formulação que conseguiremos adaptar o problema para que ele possa ser resolvido por meio de ferramentas matemáticas. Como exemplo de problemas já formulados, o leitor com certeza deve-se lembrar da expressão:

$$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$$

Apenas para refrescar a memória, a formulação acima corresponde ao enunciado "*...Quais as raízes de um polinômio de segundo grau, ou seja as coordenadas em que a curva resultante cruza o eixo das abscissas...?*". Esta dupla enunciado-formulação já foi exaustivamente vista ao longo de nossas vidas acadêmicas, e por isso fica fácil entender o que ela quer dizer. Porém, ninguém pode ser ingênuo e pensar que seu autor, o matemático indiano Báskara, simplesmente sentou um dia e escreveu a mesma do começo ao fim. Foram muitas jornadas de pesquisa que o levaram a concluir, de forma brilhante, a formulação do problema exposto vários séculos antes de Cristo.

O objetivo principal desta aula consiste em obter a formulação matemática de novos problemas, sendo que não há regras universais para esta tarefa. A própria Pesquisa Operacional, que pode ser definida como um conjunto de ferramentas matemáticas de auxílio à tomada de decisão, é na verdade uma *ciência* e uma *arte*, sendo que a componente artística é justamente a formulação matemática de problemas. E por falar em arte, há pessoas que nascem com o dom de tocar de ouvido algum instrumento musical; já há outras, a maioria, que estudam, ensaiam e treinam para chegar ao mesmo resultado. A disciplina Programação Linear para Fins Florestais pode ser vista essencialmente como um treinamento em formulação de problemas de otimização.

Resolução

A **resolução** é a fase onde os problemas previamente formulados são resolvidos, e é realizada exclusivamente em **linguagem matemática**. No entanto, o leitor não precisa ficar constrangido, pois é justamente nesta fase onde foram focados os principais esforços de pesquisa científica e tecnológica dos últimos cinqüenta anos. Nas próximas aulas serão abordadas duas das ferramentas matemáticas desenvolvidas para a resolução de problemas: o <u>Método Gráfico</u> e o <u>Algoritmo Simplex</u>. Por enquanto, basta saber que há ferramental disponível para a resolução de problemas, sendo que oportunamente o leitor receberá instruções sobre formas de obter software para a resolução de problemas matemáticos de otimização, bem como dicas para sua utilização.

Interpretação

Uma vez que um problema foi resolvido, o mesmo deve ser novamente traduzido para a linguagem coloquial. A informação, por exemplo, de que x_1 é igual a 4, nada nos diz a respeito da solução, exceto para quem sabe que esta resposta corresponde, por exemplo, à fórmula de

Báskara. Assim, a **interpretação** é a fase onde é feita a **tradução** da **linguagem matemática** para a **linguagem coloquial**.

A etapa da interpretação é de vital importância para o correto entendimento do problema resolvido. A pessoa mais indicada para a realização com sucesso da interpretação do problema é justamente aquela que fez a formulação do mesmo. Como uma sorte de criptografia de alto nível, o conjunto formulação-interpretação é a chave que permite a comunicação entre dois mundos: o mundo real onde os problemas surgem e devem ser resolvidos, e o mundo matemático, onde a abstração é tão grande que apenas regras numéricas são analisadas.

Uma interpretação mal feita, ou uma falha na mesma, pode conduzir à tomada de decisões equivocadas, podendo ser até mesmo pior do que se o problema sequer tivesse sido estudado.

Relatórios

A última fase da abordagem sistêmica de um problema é a resposta clara e concisa, de preferência na mesma linguagem em que problema foi enunciado, das questões resolvidas. A geração de **relatórios** obviamente deve ser feita na **linguagem coloquial**, e o leitor já deve estar familiarizado com a forma e conteúdo dos mesmos devido à sua experiência profissional. Não há muito a ser acrescentado nesta fase; apenas lembrar as clássicas frases "*...um gráfico ou figura vale por mil palavras...*". Eu teria ainda o atrevimento de afirmar que um gráfico bem feito vale por mil palavras, enquanto que um gráfico mal feito não vale absolutamente nada.

Para facilitar o entendimento da relação existente entre um enunciado e a correspondente formulação, são apresentados a seguir alguns exemplos adaptados do livro de Buongiorno & Giless (1987) bem como outros tirados de material didático utilizado em sala de aula nas minhas disciplinas correlatas nos cursos de graduação e pós-graduação em engenharia florestal da UFPR.

A ARTE DE FORMULAR PROBLEMAS

Como foi dito anteriormente, a formulação de problemas possui uma forte componente artística. Existem formulações eficientes, porém pouco elegantes; outras são muito vistosas, chiques, mas totalmente ineficientes. E a pior notícia que tenho para dar a você neste momento é que não há uma maneira "padrão" de formular problemas. Do mesmo modo que um pintor diferencia-se de outro basicamente pelo estilo, embora utilizem a mesma técnica, a formulação de problemas caracteriza-se por levar implícita certa marca ou filigrana do autor.

Apenas como conselhos ou dicas de formulação, e sem pretender que as mesmas se transformem em regras e muito menos em regras universais, seguem alguns aspectos que, se considerados de forma objetiva, podem auxiliar na formulação de problemas.

O **primeiro conselho** é o de **entender o problema** antes de tentar formulá-lo. Isto até parece óbvio, mas com não pouca freqüência a gente se envolve em um labirinto de contas, equações, rotinas de computador, etc., e a resposta que está procurando pode ser obtida com uma simples regra de três.

O **segundo conselho** consiste em verificar, no meio de um enunciado que geralmente chega a nós de forma confusa e fragmentada, se há **fatores variáveis** que possam ser alterados ou "mexidos" no problema. Como exemplo, enunciados ou ordens de tipo "militar" não precisam ser formulados; apenas devem ser cumpridos. Mas o que se desprende deste conselho é o ato de identificar, no meio do corpo do enunciado, se há coisas que podem ser alteradas, dentro de certos limites, é claro. Pois bem, a identificação destes fatores variáveis é o primeiro grande passo que deve ser dado na formulação de problemas. No próximo capítulo desta aula serão abordados exemplos de enunciados e suas formulações, de modo que haverá oportunidade de sobra de explanar mais este aspecto. Por enquanto, basta saber que, por exemplo, a velocidade com que dirigimos um carro é um fator variável que pode nos levar a gastar mais ou menos combustível, bem como demorar mais ou menos tempo em percorrer determinado trajeto. No entanto, mesmo sendo variável, esta velocidade deve permanecer dentro de certos limites legais estabelecidos pela sinalização de velocidades máxima e mínima vigentes para a rodovia onde estamos trafegando. E isto nos leva ao próximo conselho para a formulação de problemas.

O **terceiro conselho** consiste em identificar, para cada fator variável detectado no enunciado do problema, seus limites mínimo e máximo. Estes limites irão representar, na formulação do problema, **restrições** à amplitude de variação dos fatores variáveis. Como exemplo, a velocidade máxima que consta nas placas de sinalização das rodovias brasileiras jamais permite que a mesma seja superior aos 110 km/h, exceto em algumas rodovias do estado de São Paulo. No entanto, os fabricantes de automóveis teimam em destacar a velocidade máxima de tal ou qual modelo como um fator diferencial do seu produto. Estas restrições, que na vida real podem ser facilmente dribladas – quem disser que nunca dirigiu a mais de 110 km/h está mentindo –, até mesmo porque a legislação prevê multas e outras penalidades para quem violar estas restrições, possui uma conotação totalmente diferentes na hora de resolver nossos problemas segundo uma abordagem matemática. Em matemática não há tolerância; 110 é 110 e somente 110. O entendimento deste aspecto deve ficar claramente enraizado na mente da pessoa que for formular um problema, para evitar confusões posteriores.

O **quarto** e último **conselho** consiste em discernir, no meio do enunciado, qual o **objetivo** principal a ser atingido pelo modelo de otimização. Este objetivo geralmente é definido pelo proprietário do recurso que está sendo otimizado, adota a forma de uma **Função Objetivo** no modelo matemático, e somente poderá ser levado em consideração se todas as restrições são respeitadas. Ou seja, em outras palavras e voltando ao nosso exemplo do parágrafo anterior, o menor tempo de viagem entre duas cidades distantes 110 km entre si nunca poderá ser menor que uma hora, por mais que o carro consiga atingir 250 km nos testes do fabricante.

Os seguintes exemplos de enunciados e suas correspondentes formulações são caracterizados por serem enunciados de problemas relativamente simples, extraídos de literatura acadêmica, que os tornam mais fáceis de serem entendidos por quem se depara pela primeira vez na vida com este tipo de abordagem matemática. No entanto, para quem for se dedicar a fundo a este tipo de desafios, os problemas apresentados na seqüência servem de base para encarar os grandes e complexos enunciados da vida real.

Por ser a formulação de problemas uma arte, a habilidade de associar problemas da vida real a exercícios práticos depende, em boa parte, da intensidade quali-quantitativa do treinamento recebido. Portanto, ao longo da disciplina serão repassados a você, caro leitor, diversos enunciados para serem formulados, resolvidos, interpretados e, principalmente, entendidos e discutidos nos fóruns específicos para esta finalidade.

EXEMPLO 1: O PROBLEMA DO POETA

O exemplo apresentado a seguir descreve a situação de um poeta que mora há dez anos numa floresta de sua propriedade. Além de escrever poesia, o poeta também maneja sua floresta para obter uma receita adicional para sobreviver. A floresta se divide da seguinte maneira:

- 40 hectares de plantações de *Pinus taeda*;
- 50 hectares de floresta nativa.

Em suas anotações, recopiladas meticulosamente ao longo dos últimos dez anos, constam as seguintes informações:

- 800 dias foram utilizados no manejo das plantações de *Pinus taeda*, gerando uma receita total acumulada de R$ 36.000,00;
- 1.500 dias foram utilizados no manejo da floresta nativa, gerando uma receita total acumulada de R$ 60.000,00.

O poeta quer encontrar uma forma de obter a máxima receita possível a partir da floresta, sem utilizar mais do que a metade do seu tempo, equivalente a 180 dias por ano, no manejo da mesma. Para atingir este objetivo, o poeta deve saber quantos hectares devem ser manejados anualmente de cada tipo de floresta.

Variáveis de decisão

Para poder formular seu problema, o poeta-florestal precisa selecionar as variáveis que irão simbolizar suas decisões. A seleção das variáveis apropriadas é uma etapa crítica na construção de um modelo. Algumas destas escolhas podem tornar o modelo muito mais simples e fácil de resolver do que outras. Infelizmente, não há regras padronizadas para a seleção das variáveis adequadas; a única maneira de aprender esta "arte de modelar" é por meio da prática.

Como foi mencionado, o desejo do poeta é maximizar a receita advinda da sua propriedade florestal. Mas isto somente faz sentido se os recursos são finitos, ou seja, o que deve ser maximizado é a receita por unidade de tempo como, por exemplo, por ano, levando em consideração a média dos dez anos de manejo florestal que se passaram na propriedade. Formalmente, pode-se começar a escrever o objetivo do problema como segue:

Maximize Z = R$ de receita por ano

A receita simbolizada por Z pode ser proveniente da floresta de *Pinus*, ou da floresta nativa, ou de ambas. Portanto, uma opção natural para as variáveis é:

X_1 = número de hectares de floresta de *Pinus* a serem manejados
X_2 = número de hectares de floresta nativa a serem manejados

Estas são as incógnitas. Devem ser examinados os valores possíveis de X_1 e X_2 para tornar o valor de Z o maior possível.

Função objetivo

A função objetivo deve expressar a relação existente entre Z, que é a receita gerada pela floresta, e as variáveis de decisão X_1 e X_2. Para obter esta função, é preciso ter uma noção das receitas anuais de cada tipo de floresta. Como o poeta recebeu R\$ 36.000,00 dos seus 40 ha de floresta de *Pinus* e R\$ 60.000,00 dos seus 50 ha de floresta nativa durante os últimos 10 anos, a receita anual media foi de R\$ 90 por hectare (R\$ 90/ha/ano) para a floresta de *Pinus*, e de R\$ 120/ha/ano para a floresta nativa. Utilizando estes valores como medida da receita esperada pelo poeta para os próximos anos, a função objetivo pode-se ser escrita como segue:

$$\max \underset{(\text{R\$/ano})}{Z} = \underset{(\text{R\$/ha/ano})}{90} \underset{(\text{ha})}{X_1} + \underset{(\text{R\$/ha/ano})}{120} \underset{(\text{ha})}{X_2}$$

onde as unidades de medida de cada variável e constante aparecem entre parênteses. Uma boa prática de modelagem de problemas é verificar minuciosamente a coerência de todas as expressões algébricas com respeito a suas unidades de medida. Na função objetivo, Z é expressa em reais por ano, de modo que as operações à direita do sinal de igualdade da função objetivo devem resultar em reais por ano também, como pode ser verificado.

Para completar o modelo, deve-se ainda determinar quais restrições limitam as ações do poeta de modo a ajudar ele a escrever as mesmas em termos matemáticos referentes às variáveis de decisão X_1 e X_2.

Restrições de área

As restrições que talvez sejam as mais simples de entender dizem respeito das áreas a serem utilizadas de cada tipo de floresta. Estas áreas não podem ser maiores do que as disponíveis. Deste modo, tem-se:

$X_1 \leq 40$ ha de floresta de *Pinus*
$X_2 \leq 50$ ha de floresta nativa

Nas restrições de área pode ser verificado que as unidades nas quais se expressa o lado direito das mesmas (ha) são as mesmas que as do lado esquerdo (definição das variáveis X_1 e X_2).

Restrição de tempo

Quando o poeta manifestou seu desejo de não trabalhar mais do que metade do seu tempo na floresta, o que representa grosseiramente 180 dias/ano, deve-se pensar em mais uma restrição. Para escrever esta restrição em função das variáveis de decisão, devemos observar que o poeta utilizou, nos últimos 10 anos, 800 dias para manejar os 40 ha de floresta de *Pinus*, o que resulta em uma dedicação média de 2 dias por hectare por ano (2 dias/ha/ano). De maneira similar, 3 dias/ha/ano foi a dedicação média de tempo na floresta nativa, onde ao longo dos últimos 10 anos foram utilizados 1.500 dias para manejar os 50 ha de floresta nativa.

Em termos das variáveis de decisão X_1 e X_2, a expressão que representa o tempo necessário para manejar floresta é:

$$\underset{(\text{dias/ha/ano})}{2}\ \underset{(\text{ha})}{X_1} + \underset{(\text{dias/ha/ano})}{3}\ \underset{(\text{ha})}{X_2}$$

e a expressão que limita este tempo para um valor máximo de 180 dias/ano é:

$$\underset{(\text{dias/ha/ano})}{2}\ \underset{(\text{ha})}{X_1} + \underset{(\text{dias/ha/ano})}{3}\ \underset{(\text{ha})}{X_2} \leq \underset{(\text{dias/ano})}{180}$$

Condição de não-negatividade

A última restrição necessária para completar a formulação do problema estabelece que nenhuma das variáveis pode ser negativa, uma vez que elas referem-se a áreas sob manejo. Deste modo, tem-se a seguinte expressão, denominada de condição de não-negatividade:

$X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Modelo final

A combinação das expressões da função objetivo e das restrições gera o modelo final completo para o problema do poeta como sendo: Encontre as variáveis X_1 e X_2, que medem as áreas a serem manejadas, respectivamente, de floresta de *Pinus* e nativa, de modo que:

$$\begin{array}{rrlll}
\max Z = & 90\ X_1 & + 120\ X_2 & & \\
\text{sa} & & & & \\
1) & X_1 & & \leq 40 & \text{ha de floresta de } \textit{Pinus} \\
2) & & X_2 & \leq 50 & \text{ha de floresta nativa} \\
3) & 2\ X_1 & + \quad 3\ X_2 & \leq 180 & \text{dias/ano disponíveis para manejo florestal} \\
 & & X_1;\ X_2 & \geq 0 &
\end{array}$$

Observe que a floresta nativa é manejada com regime de cortes seletivos de proteção, o que consume mais tempo por unidade de área devido à marcação individual das árvores. No entanto, a receita do manejo da floresta nativa é maior, conforme mostram os coeficientes da função objetivo. Portanto, a escolha da melhor estratégia de manejo não é óbvia.

Nas próximas aulas será mostrado como resolver este problema, mas por enquanto é bom continuar formulando outros problemas. Nas seguintes seções desta aula serão formulados ainda mais três problemas.

EXEMPLO 2: O PROBLEMA DOS FERTILIZANTES

Neste segundo exemplo, o problema consiste em gerenciar uma fábrica de fertilizantes que produz dois tipos de adubo: o superfosfato e o fosfato. Na fabricação destes adubos são utilizados três tipos de matéria-prima, denominados genericamente de A, B e C. A seguinte tabela mostra a matriz insumo-produto que caracteriza a produção destes adubos.

Tipo de insumo	Superfosfato	Fosfato
	[t insumo/t produto]	
A	2	1
B	1	1
C	1	0

A receita líquida do superfosfato é de R$ 15,00 por tonelada, e a do fosfato é de R$ 10,00 por tonelada. A disponibilidade mensal dos insumos é 1.500 t de A, 1.200 t de B e 500 t de C.

Supondo que a empresa vende tudo o que fabrica, quanto deve fabricar mensalmente de cada produto de modo a maximizar sua receita líquida?

Variáveis de decisão

O objetivo é maximizar a receita líquida advinda da venda dos dois adubos, e uma opção lógica para a escolha destas variáveis é:

X_1 = número de t de superfosfato a serem produzidas mensalmente
X_2 = número de t de fosfato a serem produzidas mensalmente

Estas são as incógnitas, cujos valores devem ser examinados para encontrar a solução ótima.

Função objetivo

A função objetivo expressa a relação existente entre Z, que é a receita líquida total mensal gerada pela produção dos adubos, e as variáveis de decisão X_1 e X_2. Os coeficientes das variáveis X_1 e X_2 devem refletir as contribuições individuais unitárias à receita líquida. Neste exemplo, levando em consideração as informações do enunciado do problema, a função objetivo, com as unidades de medida entre parênteses, pode ser escrita como segue:

$$\max \underset{(\text{R\$/mês})}{Z} = \underset{(\text{R\$/t})}{15}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_1} + \underset{(\text{R\$/t})}{10}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_2}$$

O modelo deve ainda levar em consideração as restrições que limitam as quantidades de cada tipo de adubo a serem produzidas em função da disponibilidade dos insumos, e escrever as mesmas em termos matemáticos vinculando as variáveis de decisão X_1 e X_2.

Restrições de disponibilidade de insumos

Como foi mencionado no enunciado, os três insumos que podem ser utilizados (A, B e C) possuem, respectivamente, quantidades mensais disponíveis limitadas a 1.500t, 1.200t e 500t. Em termos das variáveis de decisão X_1 e X_2, estas restrições podem ser escritas como segue:

Insumo A: $$\underset{(\text{t/t})}{2}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_1} + \underset{(\text{t/t})}{1}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_2} \leq \underset{(\text{t/mês})}{1500}$$

Insumo B: $$\underset{(\text{t/t})}{1}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_1} + \underset{(\text{t/t})}{1}\ \underset{(\text{t/mês})}{X_2} \leq \underset{(\text{t/mês})}{1200}$$

Insumo C: $\underset{(t/t)}{1}\ \underset{(t/mês)}{X_1} \leq \underset{(t/mês)}{500}$

Condição de não-negatividade

Como já foi mencionado na formulação do exemplo anterior, nenhuma das variáveis pode ser negativa, uma vez que elas referem-se a quantidades mensais a serem produzidas de cada tipo de adubo. Isto não é o mesmo que dizer que elas devem ser positivas, como se fosse uma condição de "positividade", pois em termos matemáticos o zero (0) não é positivo nem negativo; é apenas zero. Deste modo, tem-se a condição de não-negatividade:

$X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Modelo final

Combinando as expressões da função objetivo e das três restrições obtém-se o modelo final completo para o problema da fábrica de fertilizantes.

$$
\begin{array}{rrlrlcrl}
\max Z = & 15 & X_1 & + \ 10 & X_2 & & & \\
\text{sa} & & & & & & & \\
1) & 2 & X_1 & + \ 1 & X_2 & \leq & 1.500 & \text{t/mês do insumo A} \\
2) & 1 & X_1 & + \ 1 & X_2 & \leq & 1.200 & \text{t/mês do insumo B} \\
3) & 1 & X_1 & & & \leq & 500 & \text{t/mês do insumo C} \\
 & & & X_1; X_2 & & \geq & 0 &
\end{array}
$$

EXEMPLO 3: A FÁBRICA DE PASTA CELULÓSICA

No terceiro exemplo, uma fábrica de pasta celulósica localizada em una pequena cidade foi interditada devido ao nível excessivo de poluição despejada em pequeno rio das proximidades. A cooperativa local formada pelos empregados da fábrica decidiu comprá-la, e agora seus novos diretores devem planejar a produção de pasta celulósica atendendo ao problema da redução da poluição.

A fábrica possui duas linhas de produção, uma para pasta mecânica e outra para pasta química, cujas características são apresentadas na seguinte tabela:

	Preço de venda	Poluição	Requerimento de mão-de-obra	Capacidade instalada
	[R$/t]	[DBO*/t]	[homem-dia/t]	[t/dia]
Pasta mecânica	100,00	1	1	300
Pasta química	200,00	1,5	1	200

* DBO: demanda biológica por oxigênio (unidade utilizada para medir a poluição)

Sendo a cooperativa una empresa com responsabilidade social, os diretores desejam manter pelo menos 300 empregados. Além disso, devido a questões financeiras, é necessária a geração de uma receita bruta diária de pelo menos R$ 40.000,00 para honrar os compromissos assumidos com a instituição que financiou a compra da fábrica. Os diretores desejam determinar os níveis diários de produção de cada tipo de pasta celulósica, atendendo às questões ambientais, ou seja, minimizando a poluição.

Variáveis de decisão

O objetivo do problema é minimizar a poluição gerada pela produção dos dois tipos de pasta celulósica. Na escolha destas variáveis pode-se pensar nas seguintes duas variáveis de decisão:

X_1 = número de t/dia de pasta mecânica a serem produzidas
X_2 = número de t/dia de pasta química a serem produzidas

Os valores destas incógnitas devem ser examinados visando encontrar a solução ótima.

Função objetivo

A função objetivo expressa a relação existente entre a poluição Z e as variáveis de decisão X_1 e X_2. Os coeficientes destas variáveis X_1 e X_2 devem expressar as poluições unitárias das pastas celulósicas mecânica e química. A função objetivo, com as unidades de medida entre parênteses, pode-se ser escrita como segue:

$$\min \underset{(\text{DBO/dia})}{Z} = \underset{(\text{DBO/t})}{1} \underset{(\text{t/dia})}{X_1} + \underset{(\text{DBO/t})}{1{,}5} \underset{(\text{t/dia})}{X_2}$$

No enunciado ficam claras duas condições necessárias para que fábrica possa funcionar: o número de funcionários a serem mantidos na fábrica deve ser pelo menos 300, e a receita diária gerada deve ser de pelo menos R$ 40.000,00 para honrar compromissos financeiros.

O modelo deve ainda levar em consideração as restrições que limitam as quantidades de pasta celulósica a serem produzidas em função da capacidade instalada.

Restrição de mão-de-obra

Em termos das variáveis de decisão X_1 e X_2, deve-se levar em consideração que a produção de pasta celulósica requer de 1 homem-dia por tonelada produzida, independentemente do tipo de pasta celulósica. Esta restrição, que visa garantir o emprego de 300 funcionários, pode ser escrita como segue:

$$\underset{(\text{homem-dia/t})}{1} \underset{(\text{t/dia})}{X_1} + \underset{(\text{homem-dia/t})}{1} \underset{(\text{t/dia})}{X_2} \geq \underset{(\text{homem-dia/dia})}{300}$$

O lado direito da inequação que expressa o requerimento mínimo de mão-de-obra, possui unidades um tanto complicadas de serem interpretadas. Porém, é fácil deduzir que a restrição deve garantir o emprego de 300 homens. Observe o fato de que esta restrição é do tipo maior-ou-igual, necessária em problemas onde a função objetivo é de minimização. Obviamente, se não houver restrições do tipo maior-ou-igual, todo problema de minimização teria uma resposta ótima nula, com todas suas variáveis zeradas.

Restrição de receita bruta diária

O enunciado deixa bem claro que a fábrica de pasta celulósica somente poderá entrar em operação se for garantida a geração de uma receita bruta diária de R$ 40.000,00. Em termos das variáveis de decisão X_1 e X_2, devem ser levados em consideração os preços de venda da pasta celulósica produzida, os quais dependem do tipo de pasta e são, respectivamente, R$100,00/t e R$200,00/t para as pastas mecânica e química. Esta restrição é a seguinte:

$$\underset{(\text{R\$/t})}{100}\ \underset{(\text{t/dia})}{X_1} + \underset{(\text{R\$/t})}{200}\ \underset{(\text{t/dia})}{X_2} \geq \underset{(\text{R\$/dia})}{40.000}$$

A restrição garante, deste modo, a geração de R$ 40.000,00/dia de receita bruta. Obviamente ainda não se sabe se este requerimento vai ser atendido pelo modelo, mas se houver solução viável para ele, esta receita será garantida.

Restrições de capacidade instalada

Embora seja um problema de minimização, a capacidade instalada das linhas de produção da fábrica deve ser incluída no modelo. Caso não for, a resposta pode requerer, por exemplo, uma produção exagerada de pasta mecânica, devido ao fato de poluir menos. Mas antes mesmo de entrar no escabroso caminho da resolução, deve-se ressaltar que restrições como capacidade instalada, área coberta por florestas, quantidade de material em estoque, dentre outras, sempre devem ser incluídas no modelo. Neste caso, as restrições que limitam a produção pela capacidade instalada são as seguintes:

Pasta mecânica: $\underset{(\text{t/dia})}{X_1} \leq \underset{(\text{t/dia})}{300}$

Pasta química: $\underset{(\text{t/dia})}{X_2} \leq \underset{(\text{t/dia})}{200}$

Condição de não-negatividade

A necessidade de incluir a condição de não-negatividade na formulação do modelo já foi explicada nos exemplos anteriores, de modo que segue a expressão matemática.

$X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Modelo final

O modelo final para a formulação do problema da fábrica de pasta celulósica é o seguinte:

min Z =	1	X_1	+ 1,5	X_2				
sa								
1)		X_1	+	X_2	$\geq$	300	empregados trabalhando na fábrica
2)	100	X_1	+ 200	X_2	$\geq$	40.000	R$/dia de receita bruta ou faturamento
3)		X_1			$\leq$	300	t/dia de pasta mecânica (cap. instalada)
4)				X_2	$\leq$	200	t/dia de pasta química (cap. instalada)
			X_1; X_2		$\geq$	0	

EXEMPLO 4: ALOCAÇÃO DE EQUIPAMENTOS DE COLHEITA FLORESTAL

Neste quarto e último exemplo, um empreiteiro responsável pela colheita de madeira de uma determinada comarca florestal deve repartir suas máquinas em duas frentes de corte (FC) diferentes, buscando maximizar sua receita diária. A experiência anterior em colheita indica que na FC1 a receita é de 1,90 R$/m³, e na FC2 de 2,10 R$/m³.

O equipamento disponível é composto por 2 skidders, 1 desgalhador e 1 caminhão, os quais podem ser utilizados por até 9 horas ao dia cada um, sendo que este tempo pode ser distribuído em ambas as FC sem considerar os tempos de traslado entre elas (assumem-se como sendo 0 hs). As informações sobre rendimento por tipo de equipamento constam na seguinte tabela.

Frente de corte	Tempo utilizado por metro cúbico processado [hs/m³]		
	Skidder	Desgalhador	Caminhão
FC1	0,30	0,30	0,17
FC2	0,40	0,15	0,17

Variáveis de decisão

Neste quarto e último exemplo, o objetivo do problema é maximizar a receita diária alocando equipamentos de colheita em duas frentes de corte. Na escolha destas variáveis pode-se pensar em várias abordagens diferentes.

Uma forma de escolher as variáveis de decisão é, por exemplo, combinar os três equipamentos nos dois locais de colheita. Deste modo, tem-se as seguintes seis variáveis de decisão:

X_{Skid1} = número de t/dia processadas pelo skidder na frente de corte 1
X_{Skid2} = número de t/dia processadas pelo skidder na frente de corte 2
X_{Desg1} = número de t/dia processadas pelo desgalhador na frente de corte 1
X_{Desg2} = número de t/dia processadas pelo desgalhador na frente de corte 2
X_{Cam1} = número de t/dia processadas pelo caminhão na frente de corte 1
X_{Cam2} = número de t/dia processadas pelo caminhão na frente de corte 2

No entanto, existe outra forma, tal vez mais simples, de iniciar a formulação com apenas duas variáveis de decisão. Infelizmente, a única maneira de vislumbrar conjuntos alternativos de variáveis de decisão é por meio da prática. As duas variáveis de decisão desta segunda opção de formulação são as seguintes:

X_1 = número de t/dia de madeira a serem processadas na frente de corte 1
X_2 = número de t/dia de madeira a serem processadas na frente de corte 2

Ambas as alternativas de variáveis de decisão apresentadas são válidas, geram a necessidade de elaborar conjuntos diferentes de restrições, mas conduzem à mesma solução ótima. Por uma questão de simplicidade será adotada a opção com apenas duas variáveis.

Função objetivo

A receita diária Z a ser maximizada depende das variáveis X_1 e X_2, sendo a receita unitária obtida em cada frente de corte o nexo entre elas. A função objetivo, com as unidades de medida entre parênteses, pode-se ser escrita como segue:

$$\max \underset{(\text{R\$/dia})}{Z} = \underset{(\text{R\$/m}^3)}{1{,}9} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_1} + \underset{(\text{R\$/m}^3)}{2{,}1} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_2}$$

O enunciado deste problema indicou a disponibilidade diária de cada equipamento, sendo que as restrições deverão basear-se nesta disponibilidade.

Restrição de disponibilidade de skidder

As variáveis de decisão X_1 e X_2 representam a produção em m³ de madeira em cada frente de corte. Cada equipamento de colheita requer determinado tempo para processar esta madeira, sendo que o skidder requer 0,3 horas para processar 1 m³ na frente de corte 1 (18 minutos), e 0,4 horas para processar 1 m³ na frente de corte 2 (24 minutos). Deste modo, a expressão que limita a utilização do skidder é:

$$\underset{(\text{h/m}^3)}{0{,}3} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_1} + \underset{(\text{h/m}^3)}{0{,}4} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_2} \leq \underset{(\text{h/dia})}{9}$$

A expressão apresentada não leva em consideração a disponibilidade de dois skidders conforme menciona o enunciado. Esta consideração pode ser feita com uma restrição única considerando, ao todo, a disponibilidade de 18 h/dia. Deste modo, tem-se, para dois skidders, a seguinte restrição de disponibilidade de tempo:

$$\underset{(\text{h/m}^3)}{0{,}3} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_1} + \underset{(\text{h/m}^3)}{0{,}4} \underset{(\text{m}^3/\text{dia})}{X_2} \leq \underset{(\text{h/dia})}{18}$$

Restrição de disponibilidade de desgalhador e caminhão

Como foi mencionado para o caso do skidder, cada equipamento de colheita requer determinado tempo para processar esta madeira. O desgalhador requer 0,3 horas para processar 1 m³ na frente de corte 1 (18 minutos), e 0,15 horas para processar 1 m³ na frente de corte 2 (9 minutos). Já o caminhão requer 0,17 horas para transportar 1 m³ das frentes de corte 1 e 2 (10,2 minutos, ou 10 minutos e 12 segundos). É obvio que o caminhão não ficará transportando cada m³ individualmente e fará cada viagem com a carga plena, mas os coeficientes representam o tempo unitário para efeitos de comparação com os demais equipamentos. Neste tempo de caminhão não está sendo considerada a viagem vazia de retorno, bem como os tempos de carga e descarga.

Deste modo, as expressões que limitam a utilização do desgalhador e do caminhão são:

Desgalhador: $\underset{(h/m^3)}{0{,}3}\ \underset{(m^3/dia)}{X_1} + \underset{(h/m^3)}{0{,}15}\ \underset{(m^3/dia)}{X_2} \leq \underset{(h/dia)}{9}$

Caminhão: $\underset{(h/m^3)}{0{,}17}\ \underset{(m^3/dia)}{X_1} + \underset{(h/m^3)}{0{,}17}\ \underset{(m^3/dia)}{X_2} \leq \underset{(h/dia)}{9}$

Condição de não-negatividade

Poupando palavras, a condição de não-negatividade é: $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$

Modelo final

A combinação das expressões da função objetivo e das restrições gera o modelo final completo para o problema:

$$
\begin{array}{rllll}
\max Z = & 1{,}9\ X_1 + 2{,}1\ X_2 & & & \\
\text{sa} & & & & \\
1) & 0{,}30\ X_1 + 0{,}40\ X_2 & \leq & 18 & \text{h/dia de skidder (2 skidders com 8 h cada)} \\
2) & 0{,}30\ X_1 + 0{,}15\ X_2 & \leq & 9 & \text{h/dia de desgalhador} \\
3) & 0{,}17\ X_1 + 0{,}17\ X_2 & \leq & 9 & \text{h/dia de caminhão} \\
 & X_1;\ X_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pois é, caro leitor. Chegamos ao término de mais uma aula. Peço de forma encarecida que, mesmo tendo achado a formulação de problemas um tédio, não desista antes de chegar até o fim da resolução, interpretação e relatórios, temas que serão abordados nas próximas duas aulas.

Após as próximas duas aulas é difícil desistir porque a curiosidade o fará querer chegar até o fim. Neste momento estamos na fase da discussão conjugal onde mal sabemos o que o cônjuge ou parceiro(a) tem em mente, de modo que desistir é a maneira mais fácil e covarde de resolver um problema. Tal vez a psicologia moderna deva prestar atenção à formulação de problemas para resolver os tantos e tantos casos de famílias dizimadas pela simples aparição de um problema que sequer foi devidamente compreendido.

Mas sem pretender entrar em conflito com outras áreas do conhecimento científico, e muito menos com órgãos de classe como o conselho profissional de psicologia, tenho a dizer apenas que nas próximas aulas serão abordadas técnicas específicas para a resolução de problemas, e serão mostrados mais e mais exemplos de formulação de problemas inteiros e de restrições específicas. Até lá...

2 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: O MÉTODO GRÁFICO

O MÉTODO GRÁFICO

Neste ponto, caro leitor, você já está preparado para iniciar a fase de resolução de problemas. Se chegou até aqui, é porque não desistiu na aula anterior. Na presente aula será apresentado o Método Gráfico, que possui características que o tornam especialmente indicado para o processo de aprendizagem em modelagem e resolução de problemas de programação linear.

O Método Gráfico possui limitações quanto ao número de variáveis dos problemas que podem ser resolvidos com ele: somente problemas com duas variáveis são passiveis de resolução pelo método gráfico. No entanto, este método serve para fixar definições e ilustrar conceitos importantes do método analítico que será abordado na próxima aula: o Algoritmo Simplex.

A seguir, serão apresentadas algumas das características e propriedades do Método Gráfico. Para melhor entendê-las é bom que você refresque alguns dos seus conhecimentos elementares de geometria, tais como reta, semi-reta, plano, semi-plano, segmento de reta, vértice, aresta, quadrante, polígono, eixos cartesianos, coordenadas, dentre outros. Não se preocupe que ainda não chegaremos a mencionar conceitos mais complicados, como icosaedro, toro, apótema, espaço riemanniano, etc.

A idéia básica do Método Gráfico é associar a cada uma das duas variáveis uma das duas dimensões de um plano bidimensional. Em outras palavras, as variáveis X_1 e X_2 têm liberdade para variar ao longo de dois eixos cartesianos ortogonais, isto é formando um ângulo reto (90º). Por convenção, a variável X_1 é associada ao eixo das abscissas, comumente chamado de eixo X, e a variável X_2 é associada ao eixo das ordenadas, comumente chamado de eixo Y. Deste modo, nosso sistema de eixos ortogonais X_1 e X_2 pode ser visualizado na **FIGURA 1**.

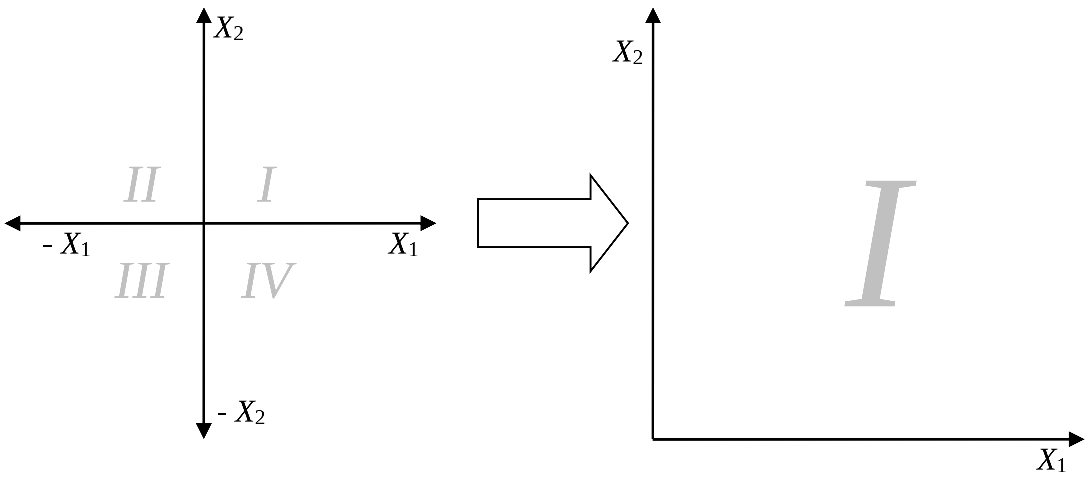


FIGURA 1. Plano de busca da solução destacando o primeiro quadrante.

Percebe-se no lado direito da **FIGURA 1** que na verdade não estamos na presença de um plano propriamente dito, uma vez que apenas foi selecionado um dos quadrantes deste plano, o quadrante *I*, correspondente à interseção dos dois semi-planos delimitados pela condição de não-negatividade $X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$. Pois bem, a solução ótima, caso exista, estará localizada em algum lugar deste quadrante *I*, uma vez que a condição de não-negatividade deve estar sempre presente nos problemas formulados.

As restrições, por sua vez, devem ser inseridas no gráfico como retas, sendo que para tanto os sinais do tipo menor-ou-igual (≤) e maior-ou-igual (≥) devem ser substituídos por uma igualdade (=). Deste modo, uma igualdade envolvendo apenas duas variáveis passa a ser uma equação de uma reta em um plano. É claro que de cada uma destas retas, que representam as restrições, interessa aquela porção que fica no quadrante *I*, uma vez que neste quadrante ambas as variáveis são não-negativas.

Para desenhar as retas no gráfico devem ser relembrados conceitos próprios das geometrias analítica e descritiva. A expressão clássica da reta por todos lembrada certamente é $Y = a + bX$, onde ***a*** representa o ponto onde a reta cruza o eixo das ordenadas e ***b*** representa a tangente do ângulo de inclinação da reta. Esta expressão pode ser aplicada às retas com variáveis X_1 e X_2.

Um aspecto importante a ser levado em consideração é o fato de que as retas que representam restrições provêm geralmente de inequações, ou desigualdades, as quais tiveram seus sinais alterados para igualdades. Deste modo, para não descaracterizar o significado real das restrições, precisamos saber que as retas representam limites infranqueáveis, separando o plano em dois semi-planos, um dos quais é útil para a busca da solução e o outro não serve para tal fim. Na **FIGURA 2**, por exemplo, temos três retas (R_1, R_2 e R_3), cada uma das quais divide o plano em dois semi-planos. A reta R_1, por exemplo, indica que todos os pontos abaixo da mesma, incluídos os pontos sob a reta, são úteis para a busca da solução. Já os pontos que ficam acima da reta R_1 não são úteis para a solução. De maneira análoga, a reta R_2 viabiliza a inclusão dos pontos que ficam à esquerda da mesma, por ser uma reta vertical, eliminando os pontos que ficam à direita. A pequena seta colocada em cada uma das retas permite identificar qual conjunto de pontos, ou semi-plano, deve ser considerado e qual deve ser descartado.

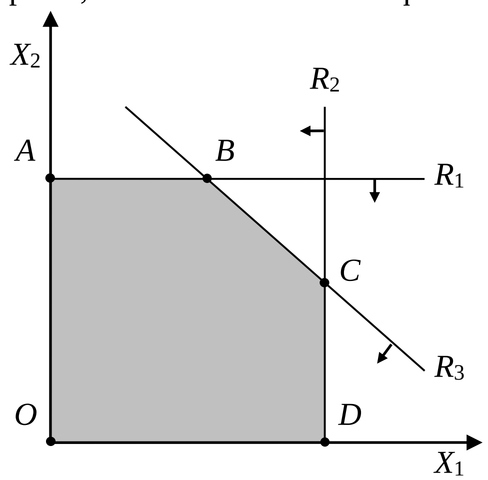


FIGURA 2. Exemplo com três restrições. A região factível é formada pelo polígono *OABCD*.

Após desenhar todas as restrições da formulação como retas no gráfico, surge o conceito de **região factível**. A região factível pode ser definida como o conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições. Em outras palavras, são pontos que não violam absolutamente nenhuma das restrições. Na **FIGURA 2** a região factível aparece hachurada, representada pelo polígono formado pelos cinco **vértices** gerados com a interseção das três restrições e os dois eixos X_1 e X_2. O vértice *O* é a interseção dos eixos X_1 e X_2; o vértice *A* é a interseção do eixo X_2 e a restrição R_1; o vértice *B* é a interseção das restrições R_1 e R_3; e assim por diante.

Os segmentos de reta formados pela porção de cada restrição compreendida entre dois vértices representam os lados do polígono da região factível. Estes lados, que são **arestas**, representam limites retilíneos da região factível.

Deve-se salientar que a região factível pode, eventualmente, ser inexistente. Isto ocorre quando há um conflito entre duas ou mais restrições. Na **FIGURA 3a** é ilustrada esta situação onde a restrição R_3, que possui sinal maior-ou-igual (≥), elimina todos os pontos que satisfazem as restrições R_1 e R_2, não sobrando, portanto, nenhum ponto que atenda a todas as restrições simultaneamente. Na prática, se em uma rodovia aparecerem duas placas de velocidade, uma delas indicando que a velocidade mínima é de 55 km/h e outra indicando que devido a obras no acostamento a velocidade máxima é de 40 km/h, não há velocidade que atenda de forma simultânea ambas as restrições de velocidade. Neste caso específico, sem dispor do bom-senso que nos faria adotar qualquer velocidade abaixo de 40 km/h, uma abordagem puramente matemática retornaria que a solução é infactível, pois não há velocidade que seja, ao mesmo tempo, menor-ou-igual a 40 km/h e maior-ou-igual a 55 km/h.

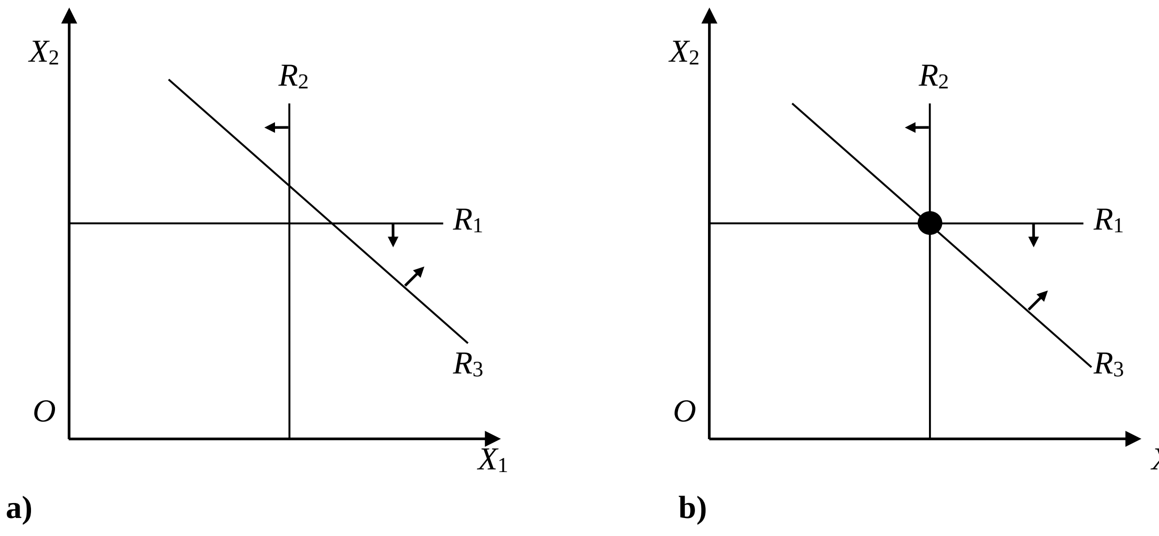


FIGURA 3. Exemplo de a) região factível inexistente e b) região factível formada por um único ponto.

Pode existir ainda o caso de que a região factível seja composta por um único ponto, ou vértice. Neste caso a solução do problema irá se localizar, obviamente, na única alternativa viável. A **FIGURA 3b** ilustra esta situação, onde aparece em destaque o vértice que representa o único ponto que atende todas as restrições.

A última etapa na resolução de problemas pelo método gráfico é encontrar, dentre os pontos da região factível, aquele que faz a função objetivo atingir seu valor máximo, se for maximização, ou mínimo, se for minimização. É claro que com uma região factível como a apresentada na **FIGURA 3b** não há necessidade de procurar esta solução, uma vez que ela se encontra no vértice em destaque. No caso de região factível inexistente tampouco há necessidade de busca da solução, pois a mesma não existe. Mas no caso de regiões factíveis formadas por muitos pontos, literalmente infinitos pontos, como é o caso da **FIGURA 2**, deve-se localizar aquele que melhor reflete o objetivo do problema.

Neste ponto você, caro leitor, pode se fazer as seguintes perguntas:

- Será que a solução ótima vai aparece no meio da região factível?
- Ou será que ela estará localizada em uma das arestas?
- Ou será ainda que ela surgirá em um dos vértices?

O Método Gráfico possui um recurso adicional, denominado de **vetor gradiente de *Z*** ou $\vec{\nabla}Z$ em simbologia matemática, para busca do ponto onde é localizada a solução ótima. Este vetor gradiente de Z é, como seu nome indica, um vetor, o que em geometria analítica é representado por uma semi-reta que partindo da origem das coordenadas (vértice O) vai até um determinado ponto indicado pelo par de coordenadas c_1 e c_2. Estas coordenadas são exatamente os coeficientes das variáveis X_1 e X_2 na função objetivo do problema. Na **FIGURA 4** é apresentado o exemplo da **FIGURA 2**, com algumas simplificações para evitar a poluição do gráfico, acrescido do vetor gradiente Z ($\vec{\nabla}Z$).

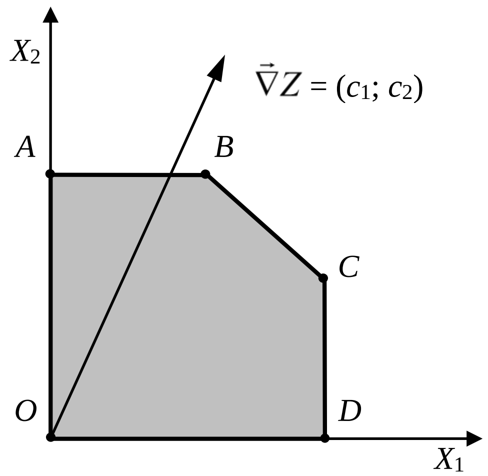


FIGURA 4. Região factível com indicação do vetor gradiente de Z.

O vetor gradiente de Z mostra o rumo do máximo aclive de um plano imaginário que deve ser sobreposto à região factível, representando uma sorte de “telhado de uma água a ser colocado no prédio de base poligonal da região factível”. Deste modo, conhecendo a linha de máximo aclive do telhado, fica fácil encontrar o ponto mais alto dele, aonde se localizará a solução ótima em problemas de maximização. Pelo contrário, em problemas de minimização, a solução ótima se localizará no ponto mais baixo deste telhado.

E agora, meu caro leitor, diante do exposto no parágrafo anterior, você terá plena condição de localizar na **FIGURA 4** o ponto onde está localizada a solução ótima. Provavelmente sua intuição deve tê-lo levado a imaginar linhas perpendiculares ao vetor gradiente de Z, representando curvas de nível, as quais ao serem percorridas no sentido ascendente acabam por mostrar qual o último vértice do telhado que fica localizado na sua parte mais alta.

Na **FIGURA 5** é apresentada a forma de identificar, a partir do vetor gradiente de *Z*, o vértice onde é localizada a solução ótima. Neste caso, as coordenadas do vértice *B* geram o máximo valor possível para a função objetivo, respeitando obviamente todas as restrições. A evolução das linhas de iso-lucro, denominadas genericamente deste modo em problemas de maximização, mostra que o vértice *B* está localizado na parte mais alta do "telhado", deixando para trás os vértices *O, D, A* e *C*.

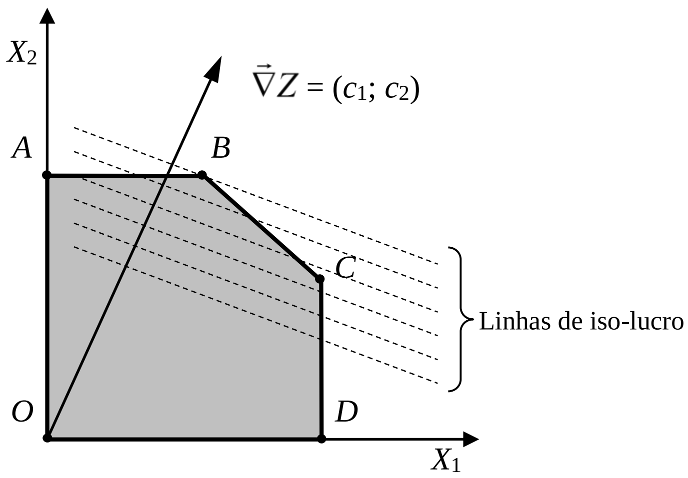


FIGURA 5. Região factível com indicação do vetor gradiente de *Z*.

Como forma de fixar estes conhecimentos, o Método Gráfico será aplicado aos exemplos de formulação de problemas apresentados na aula anterior. É bom que neste ponto você, caro leitor, revise os conceitos básicos da formulação de problemas vistos na aula passada, prestando especial atenção à maneira como são obtidos os coeficientes da função objetivo e das restrições.

EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO GRÁFICO

A seguir serão resolvidos pelo Método Gráfico todos os problemas utilizados como exemplo de formulação na aula anterior. Em todos os casos estes problemas têm duas variáveis, fato que os torna passíveis de serem resolvidos por este método. É recomendável que estas resoluções sejam feitas por você, munido de lápis, papel, régua, esquadro e, eventualmente, borracha, como forma de treinar o Método Gráfico.

1. O problema do poeta

Este problema, formulado na aula anterior, chegou até a seguinte formulação padrão:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\max Z = & 90\ X_1 & + 120\ X_2 & & & \\
\text{sa} & & & & & \\
1) & X_1 & & \leq & 40 & \text{ha de floresta de } \textit{Pinus} \\
2) & & X_2 & \leq & 50 & \text{ha de floresta nativa} \\
3) & 2\ X_1 & +\ 3\ X_2 & \leq & 180 & \text{dias/ano disponíveis para manejo florestal} \\
 & X_1; X_2 & & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Segundo os conceitos do Método Gráfico vistos nesta aula, as restrições devem ser convertidas em retas a serem desenhadas no quadrante *I* no sistema de eixos X_1 e X_2. Deste modo, precisamos desenhar as seguintes retas:

- $X_1 = 40$
- $X_2 = 50$
- $2\ X_1 + 3\ X_2 = 180$

Para quem não lembrar como se desenha uma reta em um plano, sugiro revise material de geometria analítica e descritiva. Após esta revisão, fica fácil entender que a reta correspondente à primeira restrição é uma reta vertical que cruza o eixo X_1 no valor 40, indicando que o limite máximo para manejo de floresta de *Pinus* e de 40 ha. Deste modo, a **FIGURA 6a** ilustra a inclusão desta restrição de manejo de floresta de *Pinus*.

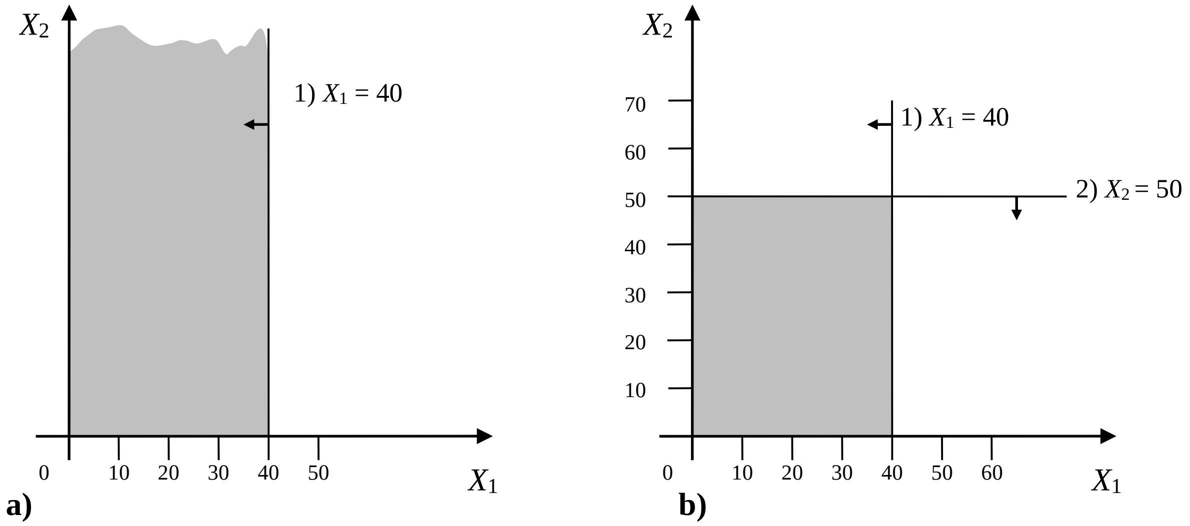


FIGURA 6. Restrições de área de floresta de *Pinus* e floresta nativa no problema do poeta.

A **FIGURA 6b** mostra a inclusão das duas restrições de área do problema do poeta, limitando a área de busca da solução ótima a valores de até 40 ha de floresta de *Pinus* ($X_1 \leq 40$) e de até 50 ha de floresta nativa ($X_2 \leq 50$). Embora já foram desenhadas duas restrições do problema, a busca pela solução ótima somente pode começar após terem sido desenhadas todas as restrições. Se isto não for respeitado, poder-se-ia interpretar, observando a **FIGURA 6b**, que a solução ótima consiste em manejar a totalidade das áreas de floresta de *Pinus* (40 ha) e nativa (50 ha), quando na verdade isto não possível pois consome mais do que os 180 dias de trabalho que o poeta dispõe para dedicar-se ao manejo de suas florestas.

A terceira restrição é então inserida no gráfico. A reta que deve ser desenhada é dada pela expressão $2\ X_1 + 3\ X_2 = 180$, conforme mostrado na **FIGURA 7**. Uma forma simples de desenhar qualquer reta que represente restrições contendo ambas as variáveis (X_1 e X_2) é encontrar os dois pontos onde a mesma cruza os eixos X_1 e X_2. Para tanto, basta anular uma variável de cada vez e resolver a equação da reta. Ou seja, quando é anulada a variável X_1 o resultado fica $3\ X_2 = 180$, o que é equivalente a $X_2 = 60$. Em outras palavras, estamos diante da constatação de que, se não houver manejo de floresta de *Pinus* ($X_1 = 0$), com os 180 dias disponíveis para trabalho poderiam ser manejados até 60 ha de floresta nativa ($X_2 = 60$). Estas considerações foram ressaltadas no gráfico por meio do ponto de coordenadas (0; 60), um dos pontos por onde deve passar a reta da restrição 3. De maneira análoga foi obtido o segundo ponto destacado na **FIGURA 7**, de coordenadas (90; 0), o qual indica que com 180 dias disponíveis poderiam ser manejados até 90 ha de floresta de *Pinus* se for anulada a variável X_2. Deve-se frisar que estes 90 ha de floresta de *Pinus* que poderiam ser manejados dependem única e exclusivamente dos 180 dias de tempo disponível, ignorando o fato de que a área disponível de floresta de *Pinus* é de 40 ha. Obviamente, para que a solução ótima seja factível, isto é, esteja localizada dentro da região factível, é necessário que sejam contemplados apenas os pontos que satisfazem simultaneamente todas as restrições.

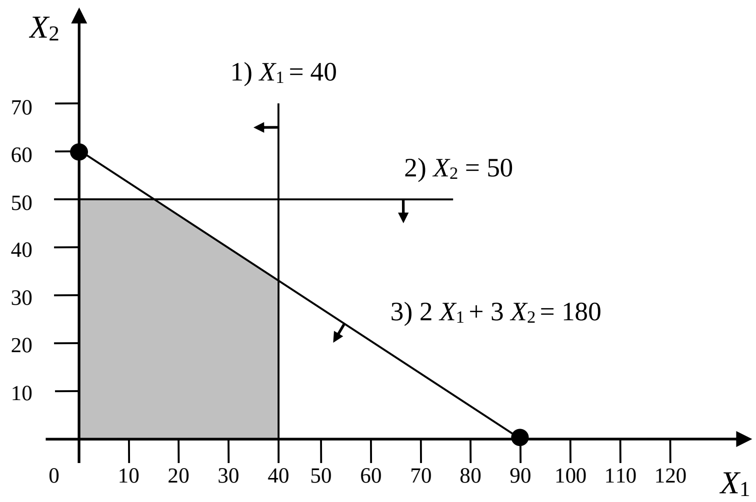


FIGURA 7. Restrições de áreas de floresta e tempo disponível no problema do poeta.

Agora resta somente incluir no gráfico o vetor gradiente de *Z*. Como foi mencionado, este vetor é uma semi-reta que começa na origem das coordenadas (0; 0) e passa pelo ponto indicado pelos coeficientes das variáveis X_1 e X_2 na função objetivo. Ou seja, o vetor gradiente de *Z* deve passar pelo ponto (90; 120), o que em simbologia matemática é indicado pela expressão $\vec{\nabla} z = (90; 120)$. A **FIGURA 8** mostra o gráfico final, com a região factível, os vértices, o vetor gradiente de *Z* e a perpendicular a este vetor que indica a localização do vértice que contém a solução ótima. Deste modo, o vértice *C* é, dentre o conjunto infinito de pontos contidos na região factível, aquele que maximiza o retorno financeiro do poeta conforme sua função objetivo.

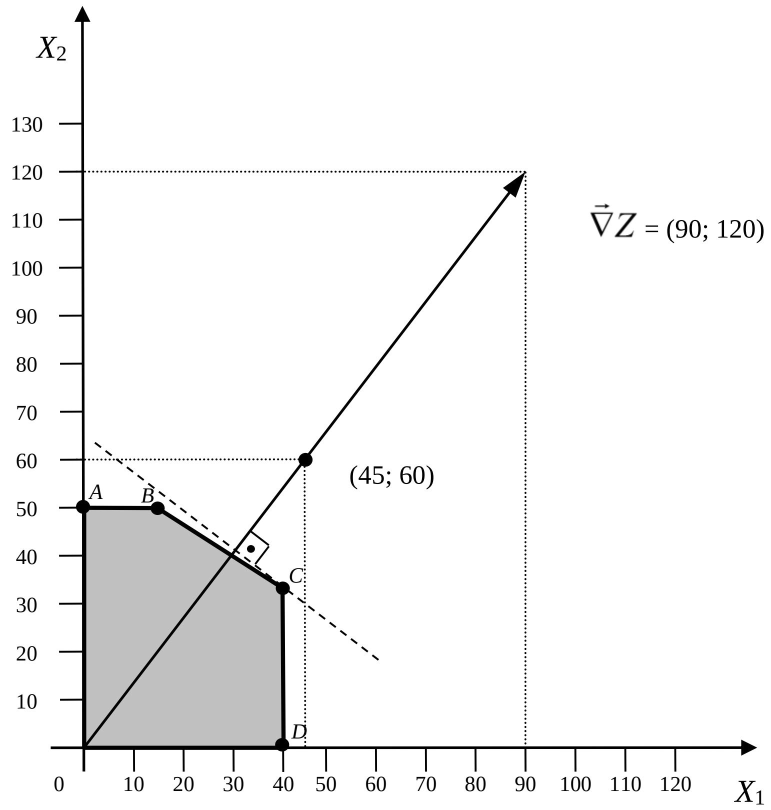


FIGURA 8. Restrições de áreas de floresta e tempo disponível no problema do poeta.

É claro que o que mais interessa do vetor gradiente é seu rumo, mais do que especificamente o ponto de término dele. Portanto, se for conveniente, as coordenadas podem ser alteradas mantendo a devida proporção, dividindo elas por 2, 3, ou qualquer outro número que favoreça o desenho do mesmo no gráfico. No caso de dividir por 2, tem-se $\vec{\nabla}Z$ = (45; 60); no caso de dividir por 3, $\vec{\nabla}Z$ = (30; 40); e assim por diante. Pode-se observar na **FIGURA 8** que o ponto (45; 60) pertence à mesma linha que vai do vértice (0; 0) ao término do vetor (90; 120).

Por último, deve-se sumarizar ou interpretar a solução ótima encontrada depois de resolvido o problema do poeta pelo Método Gráfico. Esta sumarização consiste em encontrar os valores para as variáveis X_1 e X_2 que maximizam a função objetivo além, é claro, do próprio valor da função objetivo.

As coordenadas do vértice *C* podem ser obtidas diretamente do gráfico, ou então, caso haja dificuldade na visualização exata destes valores, as mesmas podem ser obtidas por cálculo analítico levando em consideração que sempre um vértice é a interseção de duas retas. Pelo gráfico, percebe-se que a variável X_1 assume o valor de 40 ha de floresta de *Pinus*, mas fica pouco claro qual o valor da segunda variável X_2. Por cálculo analítico pode-se chegar neste valor. Sabendo-se que o vértice *C* representa a interseção das restrições 1 e 3, ou seja que a variável X_1 deve valer 40 ha pois o vértice encontra-se sob a reta da restrição 1, pode-se obter o valor da variável X_2 substituindo o valor de X_1 na equação da restrição 3. Deste modo, pela restrição 3 tem-se que $2\ X_1 + 3\ X_2 = 180$, o que nos leva a concluir que no vértice *C* o valor de X_2 é igual a $(180 – 2\ X_1) / 3$, ou seja $(180 – 80) / 3 = 33{,}33$ ha.

De posse dos valores das variáveis X_1 e X_2 no vértice da solução ótima, basta substituir os mesmos na expressão da função objetivo, cuja expressão é $Z = 90\ X_1 + 120\ X_2$. Deste modo, o valor da função objetivo é de R$ 7.600,00, obtidos a partir do manejo de 40 ha de floresta de *Pinus* e 33,33 ha de floresta nativa, conforme indicado na seguinte expressão:

$$Z = 90\frac{\text{R\$}}{\text{ha}}\cdot 40\text{ha} + 120\frac{\text{R\$}}{\text{ha}}\cdot 33{,}33\text{ha} = \text{R\$}7.600{,}00$$

A forma correta de indicar a solução ótima encontrada, que seguindo a notação matemática exige que seja colocado um asterisco sobrescrito ao lado das variáveis e da função objetivo, é a seguinte: $X_1^* = 40$; $X_2^* = 33{,}33$; e $Z^* = 7.600$. A interpretação desta solução indica que para atingir a máxima receita possível, que é de R$ 7.600,00, o poeta deve manejar 40 ha de floresta de *Pinus* e 33,33 ha de floresta nativa. A etapa final é apresentar estes resultados ao poeta na forma de relatórios, tabelas, gráficos, etc.

2. O problema dos fertilizantes

Este problema, oportunamente formulado na aula anterior, gerou a seguinte formulação resumida:

$$\begin{array}{rrlcrlcrl}
\max Z = & 15 & X_1 & + & 10 & X_2 & & & \\
\text{sa} & & & & & & & & \\
1) & 2 & X_1 & + & 1 & X_2 & \leq & 1.500 & \text{t / mês do insumo A} \\
2) & 1 & X_1 & + & 1 & X_2 & \leq & 1.200 & \text{t / mês do insumo B} \\
3) & 1 & X_1 & & & & \leq & 500 & \text{t / mês do insumo C} \\
 & & & & X_1; & X_2 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Inicialmente as restrições devem ser transformadas nas seguintes retas:

- $2\ X_1 + X_2 = 1.500$
- $X_1 + X_2 = 1.200$
- $X_1 = 500$

Estas retas representam a situação limite de cada um dos insumos disponíveis, não querendo por isto dizer que eles serão exauridos. Poderão ficar recursos ociosos se a combinação ótima dos mesmos não conseguir sua utilização total. Na **FIGURA 9** são apresentadas as três restrições na forma de retas, bem como a região factível (área hachurada).

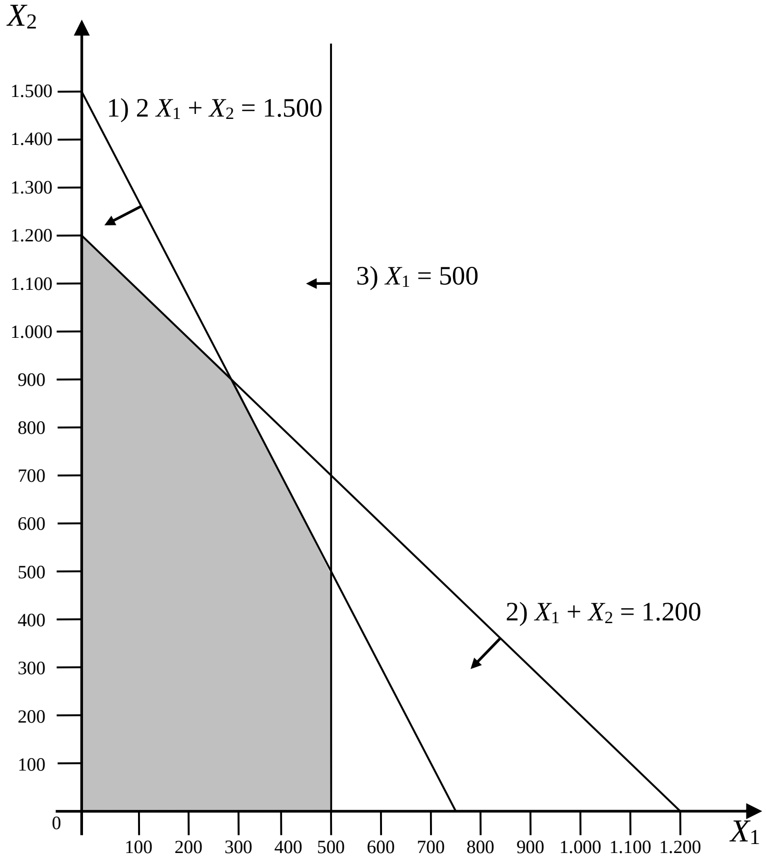


FIGURA 9. Apresentação gráfica das três restrições e da região factível do problema dos fertilizantes.

Pode-se perceber na **FIGURA 9** que a região factível é formada pelo polígono de 5 lados que surge da interseção das três restrições e dos dois eixos X_1 e X_2.

Mesmo sendo um problema muito pequeno, fica difícil adivinhar em qual dos 5 vértices da região factível se localiza a solução ótima. Provavelmente o vértice (0; 0) não seja o da solução ótima, mas para os outros quatro vértices seria necessário realizar alguns cálculos para encontrar esta solução. No entanto, o vetor gradiente de Z tem por finalidade justamente mostrar rumo em que a receita líquida mais cresce. Este vetor, que parte da origem (0; 0) e passa pelo ponto formado pelos coeficientes das duas variáveis X_1 e X_2 na função objetivo, é apresentado na **FIGURA 10**, juntamente com a região factível e um detalhamento dos 5 vértices da mesma. Por uma questão prática de visualização, as coordenadas do vetor gradiente de Z foram multiplicadas por 60. Deste modo, o vetor gradiente de Z começa na origem (0; 0) e passa pelo ponto (900; 600).

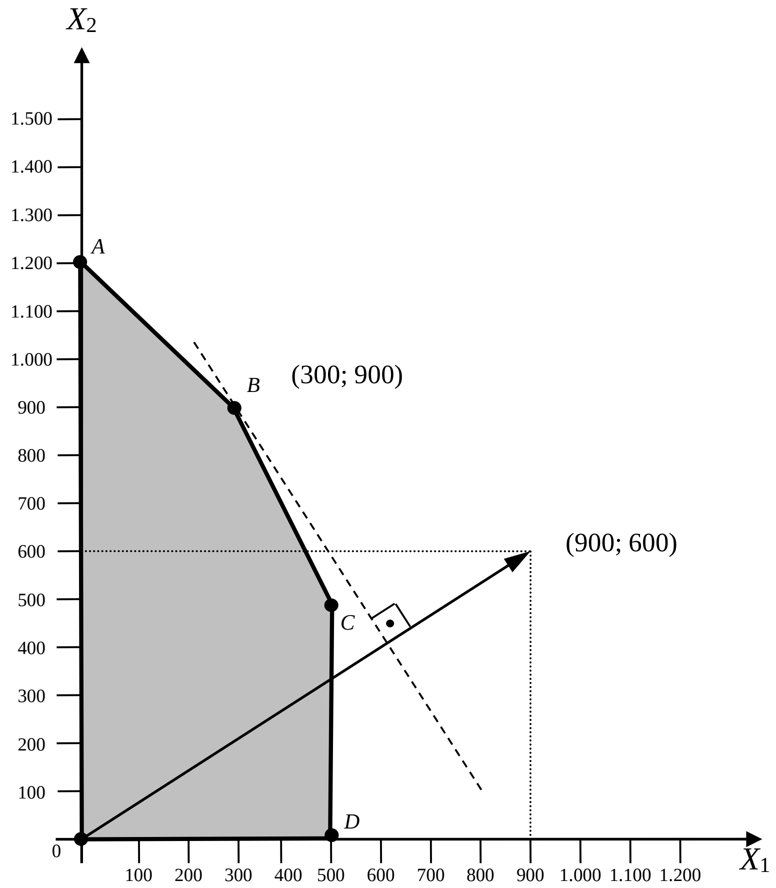


FIGURA 10. Resolução do problema dos fertilizantes pelo método gráfico.

Por se tratar de um problema de maximização, a solução ótima aparece ao localizar, dentre todas as possíveis retas perpendiculares ao vetor gradiente de *Z*, aquela que mais se afasta da origem (0; 0) sem sair completamente da região factível. Esta perpendicular, apresentada com linha tracejada na **FIGURA 10**, indica o vértice B como sendo aquele onde a receita líquida do fabricante de fertilizantes é máxima.

As coordenadas do vértice *B* que são, respectivamente, 300 e 900, indicam que para maximizar a receita líquida devem ser produzidas 300 t/mês de superfosfato (X_1 = 300) e 900 t/mês de fosfato (X_2 = 900). A receita líquida total obtida deste modo surge da seguinte expressão:

$$Z = 15\frac{\text{R\$}}{\text{t}} \cdot 300\text{t} + 10\frac{\text{R\$}}{\text{t}} \cdot 900\text{t} = \text{R\$}13.500{,}00$$

Pela notação matemática, a solução ótima encontrada para o problema dos fertilizantes é a seguinte: $X_1^* = 300$; $X_2^* = 900$; e $Z^* = 13.500$. Interpretando esta solução pode-se deduzir que para atingir a máxima receita líquida possível, que é de R$ 13.500,00, devem ser produzidas mensalmente 300 t de superfosfato e 900 t de fosfato. Relatórios, tabelas, gráficos, etc. podem ainda ser gerados visando facilitar o entendimento desta estratégia de produção.

3. A fábrica de pasta celulósica

Como já foi mostrado para a resolução de problemas precedentes, este problema teve a seguinte formulação padrão gerada na aula anterior:

min $Z =$	$1\ X_1 + 1{,}5\ X_2$				
sa					
1)	$X_1 + X_2$	$\geq$	300	empregados trabalhando na fábrica
2)	$100\ X_1 + 200\ X_2$	$\geq$	40.000	R$ / dia de receita bruta ou faturamento
3)	X_1	$\leq$	300	t / dia de pasta mecânica (cap. instalada)
4)	X_2	$\leq$	200	t / dia de pasta química (cap. instalada)
	$X_1; X_2$	$\geq$	0	

Como foi mostrado nas formulações anteriores, a primeira tarefa consiste em transformar as restrições nas seguintes retas:

- $X_1 + X_2 = 300$
- $100\ X_1 + 200\ X_2 = 40.000$
- $X_1 = 300$
- $X_2 = 200$

As duas primeiras destas retas aparecem desenhadas na **FIGURA 11a**, e as quatro restrições juntas constam na **FIGURA 11b**.

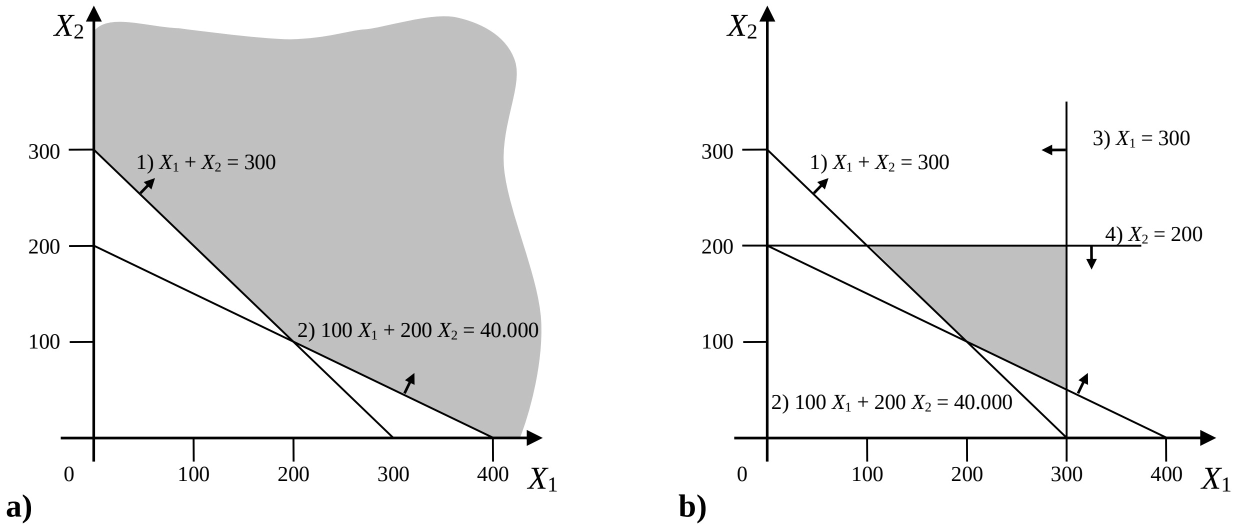


FIGURA 11. Resolução do problema da fábrica de pasta celulósica: a) contemplando parcialmente as restrições de mão-de-obra e receita bruta; b) após inserção de todas as quatro restrições.

Pode-se observar que se forem consideradas apenas as primeiras duas restrições, a região factível possui característica ilimitada abrangendo praticamente a totalidade do quadrante *I* (**FIGURA 11a**). No entanto isto não representa nenhum tipo de inconsistência, primeiro porque ainda faltam acrescentar as restrições 3 e 4 (**FIGURA 11b**), e além disso a função objetivo é uma minimização, de modo que sempre procurará vértices nas porções mais próximas do vértice *O* da região factível, com coordenadas (0; 0).

Na **FIGURA 11** observa-se ainda que as restrições que possuem operador tipo maior-ou-igual (≥) filtram os pontos válidos para a região superior das retas resultantes. Ou seja, são validos quaisquer pontos que ficarem acima destas retas, uma vez que estabelecem patamares mínimos de mão-de-obra (1) e receita bruta (2).

A função objetivo do problema é min $Z = 1\ X_1 + 1{,}5\ X_2$, gerando as coordenadas (1; 1,5) para o vetor gradiente de *Z*. Mas neste caso, e mesmo desafiando o rigor matemático, este vetor gradiente de *Z* será desenhado em sentido inverso, ou seja direcionado ao ponto (0; 0), apenas com a finalidade de mostrar que trata-se de um problema de minimização. Outra alteração que necessariamente deve ser feita neste exemplo é multiplicar as coordenadas do vetor gradiente de *Z* por, digamos 100 ou 200, para permitir que ele seja visualizado no gráfico cuja escala dos eixos X_1 e X_2 é da ordem das centenas. Deste modo, as coordenadas do vetor gradiente de *Z* que é utilizado para localização do vértice que contém a solução ótima são (200; 300). A **FIGURA 12** ilustra a resolução do problema da fábrica de pasta celulósica pelo Método Gráfico.

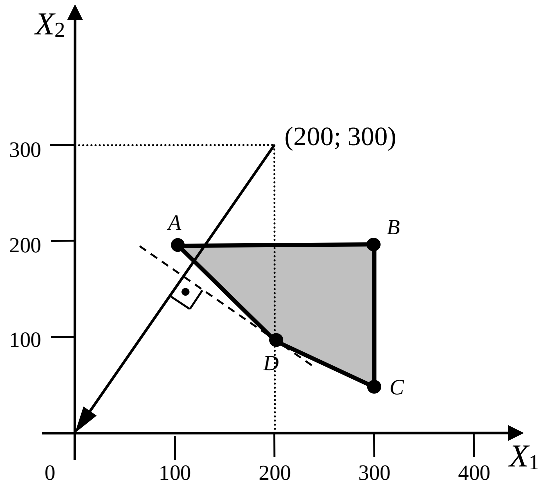


FIGURA 12. Gráfico completo da resolução do problema da fábrica de pasta celulósica.

Pode-se observar na **FIGURA 12** que o vértice *D* representa o menor valor possível para a função objetivo, sem obviamente cair fora da região factível. Ao percorrer o vetor gradiente de *Z* com suas perpendiculares em sentido decrescente, isto é rumo ao vértice (0; 0), a última perpendicular que ainda passa pela região factível é a que está desenhada com linha tracejada.

As coordenadas do vértice *D* na **FIGURA 12** podem ser obtidas, neste caso, visualmente. Os valores $X_1 = 200$ e $X_2 = 100$ podem até mesmo ser obtidos por cálculo analítico, procedendo-se à igualação das restrições 1 e 2 do problema. Como treinamento prático, seria bom que o leitor verifique o cálculo destas coordenadas do vértice *D* por via analítica.

A interpretação desta solução ótima é a seguinte: para conseguir um nível de poluição que seja mínimo, respeitando as restrições da mão-de-obra e receita bruta que exigem, respectivamente, a manutenção de 300 empregos e a geração de R$ 40.000,00 por dia, devem ser produzidas diariamente 200t de pasta celulósica mecânica e 100t de pasta celulósica química. A mínima poluição total gerada com esta estratégia de produção é obtida pela expressão:

$$Z = 1\frac{\text{DBO}}{\text{t}} \cdot 200\text{t} + 1{,}5\frac{\text{DBO}}{\text{t}} \cdot 100\text{t} = 350\text{DBO}$$

Seguindo a notação matemática, a solução ótima encontrada para o problema da fábrica de pasta celulósica é a seguinte: $X_1^* = 200$; $X_2^* = 100$; e $Z^* = 350$. A interpretação desta solução indica que para atingir a mínima poluição possível, que é de 350 DBO, os administradores da fábrica devem produzir diariamente 200 t de pasta mecânica e 100 t de pasta química. Estes resultados podem ser apresentados ainda na forma de relatórios, tabelas, gráficos, etc.

4. Alocação de equipamentos de colheita florestal

O último exemplo, tanto de formulação na aula passada como de resolução pelo método gráfico na presente aula, trata da alocação ótima de maquinário de colheita florestal em duas possíveis frentes de corte. A formulação padrão é resumida no seguinte quadro:

max Z =	1,9	X_1	+	2,1	X_2				
sa									
1)	0,30	X_1	+	0,40	X_2	$\leq$	18	h / dia de skidder (2 skidders com 8 h cada)
2)	0,30	X_1	+	0,15	X_2	$\leq$	9	h / dia de desgalhador
3)	0,17	X_1	+	0,17	X_2	$\leq$	9	t / dia de caminhão
				X_1; X_2		$\geq$	0	

Como foi mostrado nas formulações anteriores, a primeira tarefa consiste em transformar as restrições do problema em retas. A seguir é mostrada esta transformação:

- $0{,}30\ X_1 + 0{,}40\ X_2 = 18$
- $0{,}30\ X_1 + 0{,}15\ X_2 = 9$
- $0{,}17\ X_1 + 0{,}17\ X_2 = 9$

Na **FIGURA 13** são apresentadas estas três restrições em um gráfico, bem como é mostrada em destaque a região factível formada pelas interseções das mesmas entre si e com os eixos X_1 e X_2. Pode-se perceber que a terceira restrição, correspondente à disponibilidade diária do caminhão, fica totalmente fora da região factível, indicando que em hipótese alguma são utilizadas todas as horas disponíveis deste equipamento. Em termos de resolução de problemas, pode-se dizer que esta restrição é desnecessária; no entanto, para garantir que ela seja respeitada, opta-se por mantê-la no modelo.

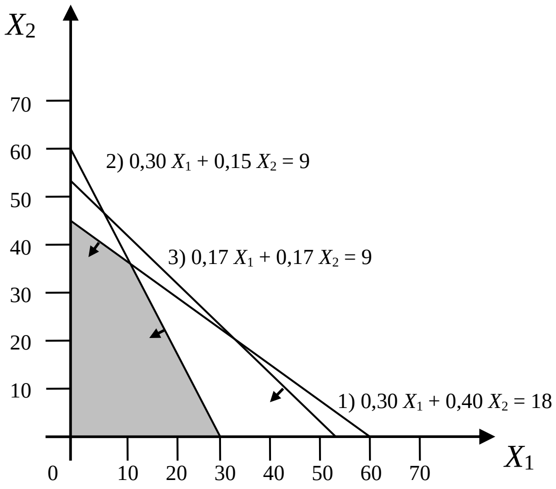


FIGURA 13. Restrições de disponibilidade de equipamento.

A próxima etapa para encontrar a solução ótima do problema é acrescentar ao gráfico o vetor gradiente de Z e deslizar, sobre ele, retas perpendiculares visando detectar qual vértice da região factível é atingido pela última destas retas perpendiculares (**FIGURA 14**).

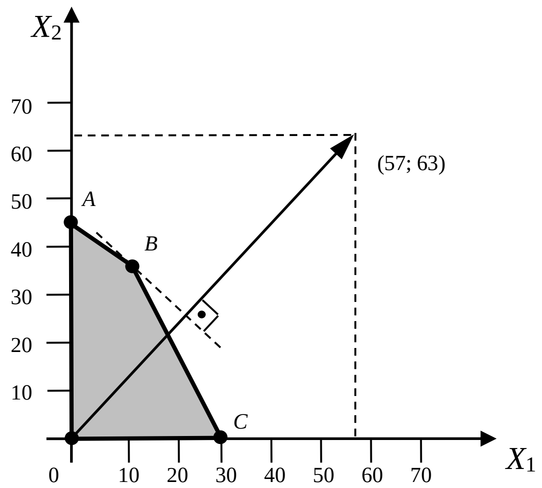


FIGURA 14. Restrições de disponibilidade de equipamento.

Para facilitar a inserção do vetor gradiente de Z no gráfico, as coordenadas originais (1,9; 2,1) foram multiplicadas por 30, gerando um novo ponto com coordenadas (57; 63). Este procedimento pode ser visualizado na **FIGURA 14**, onde percebe-se no vértice B a solução ótima. As coordenadas deste vértice, obtidas por cálculo analítico, são $X_1 = 12$ e $X_2 = 36$, indicando que ao todo devem ser colhidos 12 m³ da frente de corte 1 e 36 m³ da frente de corte 2. A receita diária total obtida com esta alocação de maquinário é de R$ 98,40.

Por último, a notação matemática para a solução ótima encontrada é $X_1^* = 12$, $X_2^* = 36$ e $Z^* = 98,4$. Interpretando esta solução percebe-se que para atingir a máxima receita possível, que é de R$ 98,40, o responsável pela colheita deve alocar o maquinário de modo a colher 12 m³/dia na frente de corte 1 e 36 m³/dia na frente de corte 2. Como complemento, ainda podem ser gerados relatórios, tabelas, gráficos, etc. para ilustrar a solução ótima encontrada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste ponto, caro leitor, você já tem noção da abordagem pelo Método Gráfico para resolução de problemas de programação linear com duas variáveis. Embora problemas da vida real sempre tenham mais do que apenas duas variáveis, conceitos como vértices, arestas, região factível, dentre outros, são importantes para as próximas aulas. Até lá ...

3 - RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
O ALGORITMO SIMPLEX

Na presente aula serão apresentadas as principais características do método analítico mais conhecido para resolução de problemas de programação linear, o método ou algoritmo Simplex, ou apenas **simplex**. Será também feita oportunamente menção ao método alternativo, de desenvolvimento mais recente, denominado de método de Ponto Interior. Por último, será abordada ainda a utilização de ferramentas informatizadas (*software*) de resolução de problemas de programação linear, tais como o LINDO, o QM for Windows, e a própria planilha Excel.

O simplex surgiu como mais uma das mais extraordinárias ferramentas desenvolvidas ao longo da segunda guerra mundial, junto ao controle de qualidade e de processos, ao radar, e isso somente por mencionar algumas das tantas invenções que o ser humano teve que desenvolver. Pois bem, em 1949 George B. Dantzig, falecido recentemente em13 de maio de 2005, desenvolveu um método capaz de localizar, com muita eficiência, a solução ótima em problemas com inúmeras soluções factíveis. Este método é o simplex, e seria conveniente neste ponto, para facilitar a compreensão, revisar os conceitos vistos na aula anterior, que trata do método gráfico de resolução de problemas de PL.

Como foi feito a partir da primeira aula, especial ênfase deve ser dada ao significado dos termos utilizados. Neste sentido, a palavra **algoritmo** representa um "*...processo de cálculo, ou de resolução de um grupo de problemas semelhantes, em que se estipulam, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção do resultado, ou da solução do problema...*" (Aurélio, 1999). Em outras palavras, algoritmo é uma seqüência lógica e ordenada de operações ou passos que devem ser dados visando atingir determinado objetivo. A simples preparação de um cafezinho, por exemplo, segue geralmente uma seqüência lógica de tarefas, quais sejam:

1. Pôr água na chaleira, acender o fogão, e iniciar o aquecimento da água;
2. Localizar o pó de café, o filtro, e o bule onde o café será preparado e passado;
3. Preparar os utensílios onde o café será servido, tais como xícara, pires, colher e açúcar.

Na seqüência apresentada, percebe-se que o bom senso nos faz iniciar as atividades pela que mais demora, e que deve estar necessariamente concluída antes de poder iniciar as seguintes. Não é possível, por exemplo, passar o café antes de aquecer a água; e não faz sentido preparar tudo antes de aquecer a água, pois ficaríamos mais tempo ociosos, com tudo preparado, enquanto aguardamos a água da chaleira ferver. Pedindo desculpas ao perfeccionistas, esta seqüência poderia ser denominada de "algoritmo do cafezinho", que qualquer dona de casa sabe de cor e corrido por tê-la aprendido já de criança pelos ensinamentos de sua mãe, avó, ou outro parente que obviamente gostasse e preparasse café.

De forma até perigosamente resumida, pode-se dizer que o simplex visa encontrar soluções em sistemas de equações retangulares com mais incógnitas que equações, ou seja, sistemas indeterminados. Isto não quer dizer que o Simplex resolve a indeterminação, senão que ele consegue, no meio das inúmeras ou infinitas soluções factíveis, localizar aquela que melhor atende a determinado critério de otimização. Como foi visto na aula anterior no método gráfico, o simplex irá localizar com eficiência o vértice que maximiza, ou minimiza, determinada função chamada de função objetivo (FO).

O ALGORITMO SIMPLEX

O método gráfico utilizado para resolver os exemplos da aula anterior é limitado a situações aonde há, no máximo, duas variáveis de decisão no modelo. Para problemas maiores devem ser utilizados métodos analíticos. O simplex é um procedimento algébrico que, quando implementado em um programa de computador – *software* – pode resolver problemas com milhares de variáveis e restrições de forma rápida e eficiente.

Na presente aula será realizada somente uma breve introdução ao simplex. O objetivo é apresentar os princípios envolvidos, ao invés de mergulhar nos laboriosos cálculos aritméticos. Enquanto os princípios do simplex são simples e elegantes, sua aritmética é extenuante e propensa a ser deixada para um computador.

Variáveis de folga

Por ser o simplex um método baseado em sistemas de equações (igualdades), e a maioria dos problemas da vida real estabelecem restrições formuladas como inequações (desigualdades), o primeiro passo do simplex é transformar as inequações (≤ e ≥) do modelo de PL em equações (=). Isto é feito devido ao fato das equações serem tratadas, em termos matemáticos, mais facilmente como sistemas lineares do que as inequações. Para entender melhor esta colocação, existem inúmeras opções factíveis quando o assunto é respeitar a velocidade máxima de 110 km/h como, por exemplo 80 km/h, 85 km/h, ou até mesmo 92,142578 km/h. No entanto, se esta velocidade for tratada com igualdade, a única opção é, obviamente, 110 km /h. E neste ponto é fácil perceber a absurda complicação que os motoristas enfrentariam se velocidade nas rodovias tivesse que ser igual (=) a 110 km/h, ao invés de ser menor-ou-igual (≤) a 100 km/h.

Como exemplo, revisemos novamente a formulação do problema do poeta apresentada na aula anterior, onde a questão chave é encontrar as áreas de floresta de *Pinus* X_1 e floresta nativa X_2 a serem manejadas de modo a maximizar a receita. Esta formulação é novamente apresentada no seguinte quadro:

$$
\begin{array}{rrlrl}
\max Z = & 90\ X_1 & +\ 120\ X_2 & & \\
\text{sa} & & & & \\
1) & X_1 & & \leq\ 40 & \text{ha de floresta de } \textit{Pinus} \\
2) & & X_2 & \leq\ 50 & \text{ha de floresta nativa} \\
3) & 2\ X_1 & +\ \ 3\ X_2 & \leq 180 & \text{dias / ano disponíveis para manejo florestal} \\
 & & X_1;\ X_2 & \geq\ \ 0 &
\end{array}
$$

A transformação de desigualdades em igualdades é feita acrescentando, em cada restrição, uma variável adicional denominada variável de folga. Estas novas variáveis devem ser definidas seguindo os conceitos vistos na aula de formulação. Para a primeira restrição, referente a área disponível de floresta de *Pinus*, tem-se:

$$X_1 + F_1 = 40, \text{ e } F_1 \geq 0$$

A variável F_1 simplesmente mede a área não utilizada ou área ociosa da floresta de *Pinus*, em hectares. De maneira análoga, deve-se proceder com cada uma das restrições até obter o modelo transformado, que visa encontrar o valor das variáveis X_1, X_2, F_1, F_2 e F_3 de modo que:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\max Z = & 90\,X_1 & + & 120\,X_2 & & & & & & \\
\text{sa} & & & & & & & & & \\
1) & X_1 & & & + & F_1 & & & = & 40 \text{ ha} \\
2) & & & X_2 & & & + & F_2 & = & 50 \text{ ha} \\
3) & 2\,X_1 & + & 3\,X_2 & & & & + F_3 & = & 180 \text{ dias} \\
 & \multicolumn{8}{l}{X_1;\, X_2;\, F_1;\, F_2;\, F_3 \geq 0} & \\
\end{array}
$$

Na formulação acima, F_2 representa a variável de folga que expressa a área não utilizada de floresta nativa. Por sua vez, F_3 é a variável de folga que expressa o tempo disponível do poeta não utilizado para manejo, medido em dias.

Solução Básica Factível

Na **FIGURA 15** é novamente apresentada, de forma esquemática, uma das etapas de resolução do método gráfico visto na aula anterior. Percebe-se a região factível formada pelo polígono *OABCD*, em destaque com hachura. Esta região contém o conjunto de inúmeras soluções factíveis que atendem simultaneamente a todas as restrições. As equações que limitam esta área são também mostradas na figura.

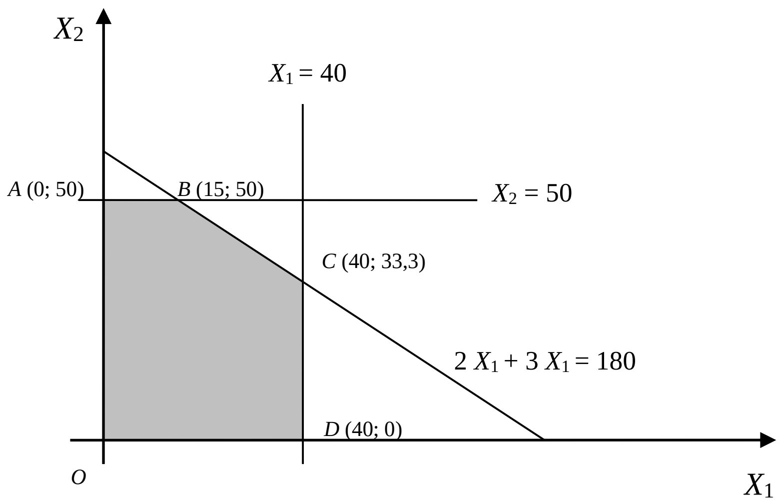


FIGURA 15. Pontos extremos e soluções básicas factíveis do problema do poeta.

Cada um dos pontos extremos ou vértices do polígono *OABCD* é denominado de *Solução Básica Factível*. O vértice *O*, por exemplo, corresponde à seguinte solução básica factível:

$$(X_1; X_2; S_1; S_2; S_3) = (0; 0; 40; 50; 180)$$

Como no vértice O as variáveis X_1 e X_2 são iguais a zero ($X_1 = X_2 = 0$), tem-se a partir das restrições que $F_1 = 40$, $F_2 = 50$ e $F_3 = 180$. De maneira análoga, os pontos extremos ou vértices *A*, *B*, *C* e *D* correspondem, respectivamente, às seguintes soluções básicas factíveis:

- Vértice *A*: (X_1; X_2; S_1; S_2; S_3) = (0; 50; 40; 0; 30)
- Vértice *B*: (X_1; X_2; S_1; S_2; S_3) = (15; 50; 25; 0; 0)
- Vértice *C*: (X_1; X_2; S_1; S_2; S_3) = (40; 33,3; 0; 16,7; 0)
- Vértice *D*: (X_1; X_2; S_1; S_2; S_3) = (40; 0; 0; 50; 100)

Neste ponto é interessante observar que em cada solução básica factível há tantas variáveis positivas quantas restrições o modelo tem. Estas variáveis positivas são denominadas de variáveis *básicas*, enquanto que as varáveis zeradas são chamadas de variáveis *não-básicas*. No nosso exemplo do problema do poeta com três restrições, para cada vértice da região factível há três variáveis básicas e duas variáveis não-básicas.

A propriedade das soluções básicas factíveis é geral. Em problemas lineares com *n* variáveis e *m* restrições independentes, uma solução básica factível terá *m* variáveis básicas e *n-m* variáveis não-básicas. Uma restrição é dita ser independente se não pode ser expressa como combinação linear de outra(s) restrição(ões). Em outras palavras, nenhuma restrição pode ser conseqüência direta de outras restrições; caso for, a mesma é desnecessária e pode ser eliminada do modelo sem comprometer o resultado.

Teorema da Programação Linear

O teorema fundamental da programação linear, apresentado nesta aula sem provas específicas, estabelece que, se existem soluções melhores, uma delas será uma solução básica factível.

Este teorema carrega implícito o fato de que em um modelo de programação linear pode haver uma, várias ou nenhuma solução. Este teorema é fundamental porque significa que para resolver um problema de programação linear é preciso considerar somente um número *finito* de soluções: as soluções básicas factíveis correspondentes aos vértices da região factível.

A partir do momento em que a solução ótima de um problema de programação linear é uma solução básica factível, ela tem exatamente tantas variáveis positivas quantas restrições independentes há no modelo. Se um problema possui 10 restrições independentes e 10.000 variáveis, somente 10 variáveis na solução ótima terão valores positivos, e todas as demais 9.990 variáveis terão valor zero.

Eventualmente poderá haver menos variáveis positivas na solução ótima se alguma das restrições não for independente. Suponha que em um problema de programação linear há 10 restrições e são obtidas somente 8 variáveis positivas na solução ótima; neste caso duas das restrições são redundantes, ou seja, resultam necessariamente das outras restrições, e podem ser omitidas do modelo sem alteração dos resultados.

Algoritmo de solução

A partir do teorema da programação linear, um possível procedimento de solução, isto é, um *algoritmo*, pode ser calcular todas as soluções básicas factíveis e selecionar aquela que maximiza ou minimiza a função objetivo. Mas isto é pouco prático para problemas grandes, pois o número de soluções básicas factíveis pode ser muito elevado para o exame de todas elas, mesmo com computadores potentes.

O método simplex utiliza, ao invés de um procedimento de busca exaustiva de vértices, um algoritmo ascendente passo-a-passo, que consiste em se deslocar de um vértice da região factível para outro vértice adjacente na direção em que mais melhora a função objetivo. Este processo pode ser visualizado da seguinte maneira: Pense na região factível como uma montanha, cujo topo corresponde à solução ótima. Um escalador está perdido na neblina e mal consegue enxergar seu próprio pé. Para atingir o topo, ele procede de forma cautelosa, mas com segurança. Mantendo um dos seus pés fixo em um ponto, ele move o outro pé à sua volta buscando a direção do próximo passo a ser dado de modo a levá-lo mais rapidamente ao topo da montanha. Ao encontrar este rumo, ele se desloca para lá e começa novamente a busca. Quando nenhum passo em nenhuma direção levar o escalador a uma altura maior, é porque ele chegou ao topo da montanha. O fluxograma apresentado na **FIGURA 16** sumariza os vários passos do algoritmo simplex.

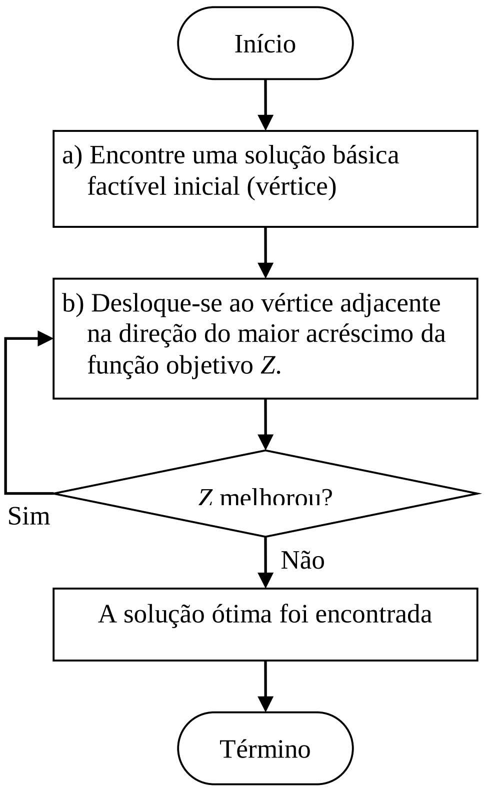


FIGURA 16. Fluxograma do algoritmo Simplex.

O primeiro passo (a) do simplex (**FIGURA 16**) consiste em encontrar uma solução básica factível inicial. No passo seguinte (b) é feito o deslocamento do vértice atual ao vértice adjacente na direção em que mais aumenta a função objetivo *Z*. Se o passo (b) conseguiu melhorar a função objetivo, mesmo deve ser repetido. Este processo iterativo prossegue até que não ocorre mais nenhuma melhora no valor da função objetivo *Z*, indicando que a solução ótima foi obtida na penúltima iteração.

Exemplo

Para ilustrar os princípios do simplex, o problema do poeta vai ser resolvido utilizando os passos recentemente descritos (**FIGURA 17**).

Passo a – Encontrar uma solução básica factível inicial. A mais simples destas soluções corresponde ao vértice *O* na **FIGURA 17**, que representa a solução:

- Variáveis não-básicas: $X_1 = 0$; $X_2 = 0$
- Variáveis básicas: $F_1 = 40$; $F_2 = 50$; $F_3 = 180$
- Função objetivo: $Z_O = 0$

As três variáveis de folga são variáveis básicas nesta solução.

Passo b1 – O coeficiente da variável X_1 na função objetivo é de 90 R$/ha, enquanto que o coeficiente de X_2 é 120 R$/ha. Deste modo, a função objetivo aumenta mais quando é feito o deslocamento na direção OX_2. O vértice *A* encontrado é a nova solução básica factíve, onde tem-sel:

- Variáveis não-básicas: $F_2 = 0$; $X_1 = 0$
- Variáveis básicas: $X_2 = 50$; $F_1 = 40$; $F_3 = 30$
- Função objetivo: $Z_A = 6.000{,}00$ R$/ano

No deslocamento do vértice *O* até o vértice *A*, a variável X_2 que era não-básica transformou-se em variável básica, e a variável de folga F_2 que era básica ficou não-básica. Isto pode ser generalizado; a álgebra equivalente entre dois vértices adjacentes é uma solução básica factível com apenas uma variável básica de diferença. A iteração mais íngreme seleciona a nova variável básica como aquela que mais incrementa a função objetivo. Como o valor da função objetivo desta nova solução básica factível é maior do que o da solução anterior deve-se tentar mais uma iteração.

Passo b2 – A partir do vértice *A* o deslocamento agora deve ser feito na direção OX_1, uma vez que é a única alternativa possível para incrementar a função objetivo. O vértice adjacente é *B*, e a solução básica factível encontrada é a seguinte:

- Variáveis não-básicas: $F_2 = 0$; $F_3 = 0$
- Variáveis básicas: $X_1 = 15$; $X_2 = 50$; $F_1 = 25$
- Função objetivo: $Z_B = 7.350{,}00$ R$/ano

No deslocamento do vértice *A* ao vértice *B*, o valor da função objetivo aumentou, de modo que deve-se tentar mais uma iteração.

Passo b3 – A partir do vértice *B*, a única maneira de incrementar o valor da função objetivo é indo para o vértice adjacente *C*, onde a solução básica factível encontrada é a seguinte:

- Variáveis não-básicas: $F_1 = 0$; $F_3 = 0$
- Variáveis básicas: $X_1 = 40$; $X_2 = 33{,}3$; $F_2 = 16{,}7$
- Função objetivo: $Z_C = 7.600{,}00$ R$/ano

Como a função objetivo novamente aumentou, deve-se tentar mais uma iteração.

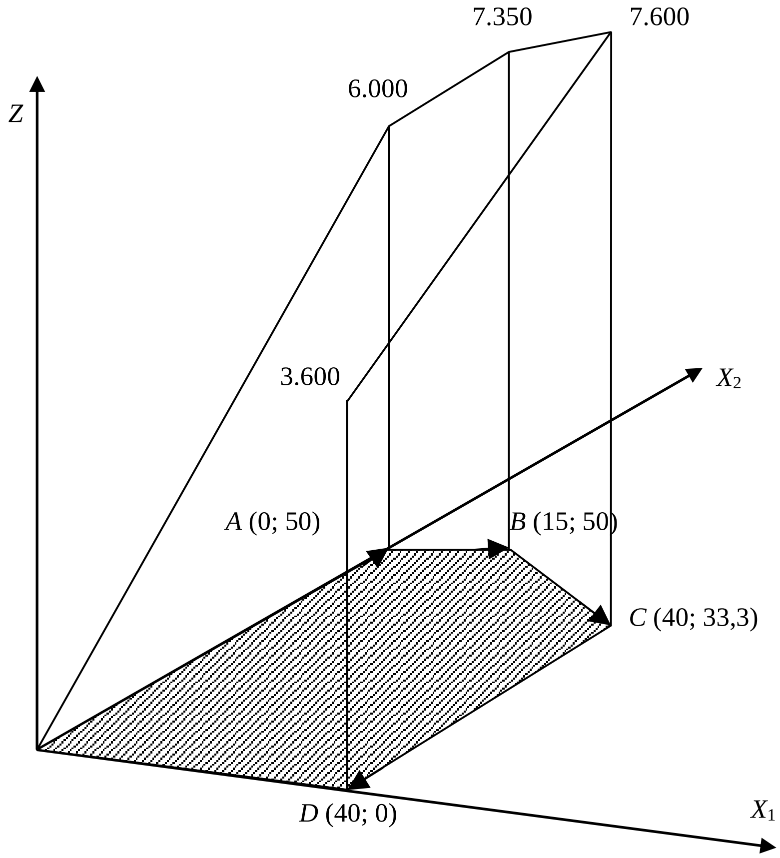


FIGURA 17.Iterações do algoritmo Simplex.

Passo b4 – A partir do vértice *C*, o próximo vértice adjacente é o *D*, com a seguinte solução:

- Variáveis não-básicas: $F_1 = 0$; $X_2 = 0$
- Variáveis básicas: $X_1 = 40$; $F_2 = 50$; $F_3 = 100$
- Função objetivo: $Z_D = 3.600,00$ R$/ano

Esta última iteração diminuiu o valor da função objetivo; por tanto, a solução ótima é a solução básica factível correspondente ao vértice *C*, atingido na iteração anterior.

INCONVENIENTES QUE PODEM SURGIR NA RESOLUÇÃO

Embora tanto o método gráfico quanto o simplex aparentem ser procedimentos relativamente simples de serem implementados, podem surgir problemas dos mais variados tipos quando esta implementação é realizada. Alguns destes problemas serão mencionados nos seguintes tópicos, bem como algumas alternativas para contorná-los.

Situações de empate

No método gráfico não fica muito difícil entender como podem surgir situações de empate. Basta ter um ângulo de 90º formado entre uma restrição e o vetor gradiente de *Z* para que um empate entre dois vértices ocorra.

Embora causem dúvidas, os empates não representam nenhum obstáculo na busca da solução ótima. Na verdade, diante de um empate têm-se múltiplas soluções, todas igualmente ótimas, e a escolha de uma delas é puramente arbitrária. Como diz o jargão popular, um empate é o mesmo que *trocar seis por meia dúzia*.

No mundo real é muito difícil a aparição de situações de verdadeiro empate. Normalmente elas ocorrem em estudos acadêmicos.

Problemas numéricos de arredondamento

Até mesmo trabalhando com a máxima precisão aceitável por programas de computador, nunca haverá espaço suficiente em memória como para armazenar todas as casas decimais decorrentes de dividir, por exemplo, 10 por 3. A resposta desta divisão, que obviamente é 3,333... , ao ser multiplicada novamente por 3 resulta em 9,999..., e nunca em 10. Alguns aplicativos conseguem prever esta situação armazenando tanto numerador quanto denominador em memória, mas não é difícil imaginar situações em que estes problemas se tornam gigantescos.

O tratamento destes problemas numéricos com certeza exige até mais esforço do que a própria rotina de otimização em si, e é neste ponto que deve ser feita a recomendação de, diante problemas de grande porte, não re-inventar a roda e utilizar algum dos tantos aplicativos disponíveis no mercado. Na parte final da presente aula serão abordados alguns dos aplicativos prontos para resolução de problemas de programação linear.

SOFTWARE DE OTIMIZAÇÃO

A utilização de programas para resolução de problemas de programação linear é desejável, pois libera tempo ao analista para dedicar-se ao que é mais difícil em otimização e que nenhum software jamais conseguiria fazer: a formulação correta dos problemas.

QM for Windows 2.0

O software QM (*Quantitative Methods*) for Windows possui características especiais que o tornam muito útil do ponto de vista didático. Desenvolvido por Howard J. Weiss, uma versão de demonstração (*demo version*) por ser obtida no site http://www.prenhall.com/weiss bem como atualizações, o manual *online*, dentre outros. Uma das vantagens do QM for Windows é a entrada de dados que praticamente não exige nenhuma experiência prévia do usuário.

A modo de exemplo, a **FIGURA 18** mostra a tela principal do QM for Windows, onde podem ser percebidas as diferentes janelas com a formulação do problema (janela inferior direita), sua resolução pelo método gráfico (janela superior esquerda), formulação com variáveis de folga para o simplex (janela inferior esquerda), e detalhamento de variáveis básicas e não-básicas (janela superior direita).

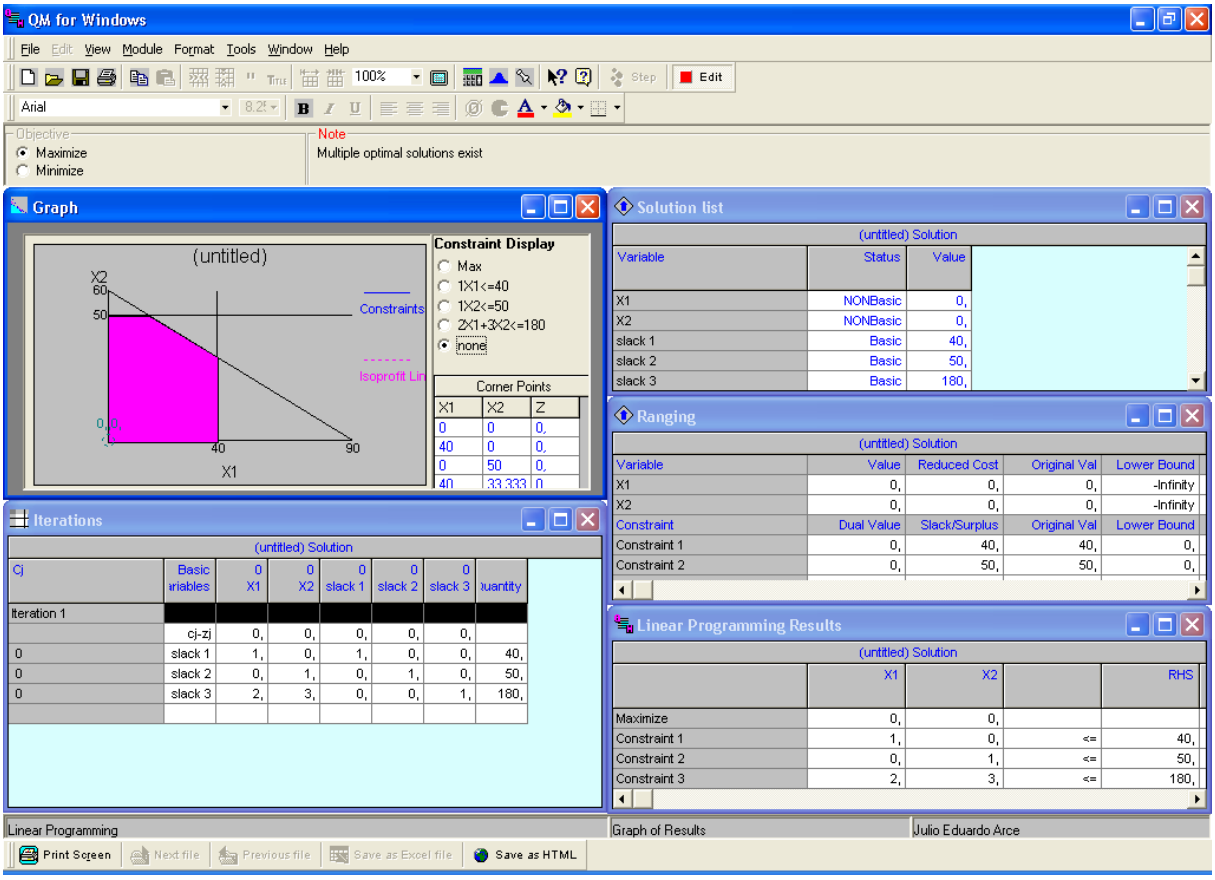


FIGURA 18. Exemplo do software QM for Windows aplicado ao problema do poeta.

LINDO 6.1

O software LINDO (*Linear*, *Integer and Discrete Optimizer*) for Windows pode ser considerado um bom exemplo dos programas que exigem um pouco de experiência prévia do usuário na sintaxe específica de modelos de programação linear. A **FIGURA 19** ilustra este fato, mostrando na janela do lado esquerdo a forma correta de ingressar com a formulação do problema do poeta, a qual é semelhante à vista nas aulas de formulação e resolução. No entanto, as pequenas e sutis diferenças podem levar ao desespero o usuário pouco experiente e, principalmente, pouco persistente ou impaciente.

Desenvolvido pela LINDO Systems, uma versão de demonstração por ser obtida no site http://www.lindo.com seguindo as instruções para *download of free trial version*. O próprio

LINDO possui na sua ajuda exemplos de sintaxe de problemas, os quais podem ser acessados pelo menu de ajuda (*help*). Exemplos de problemas formulados podem ser encontrados na pasta **C:\LINDO61\Samples** que será criada durante a instalação da versão demo do LINDO.

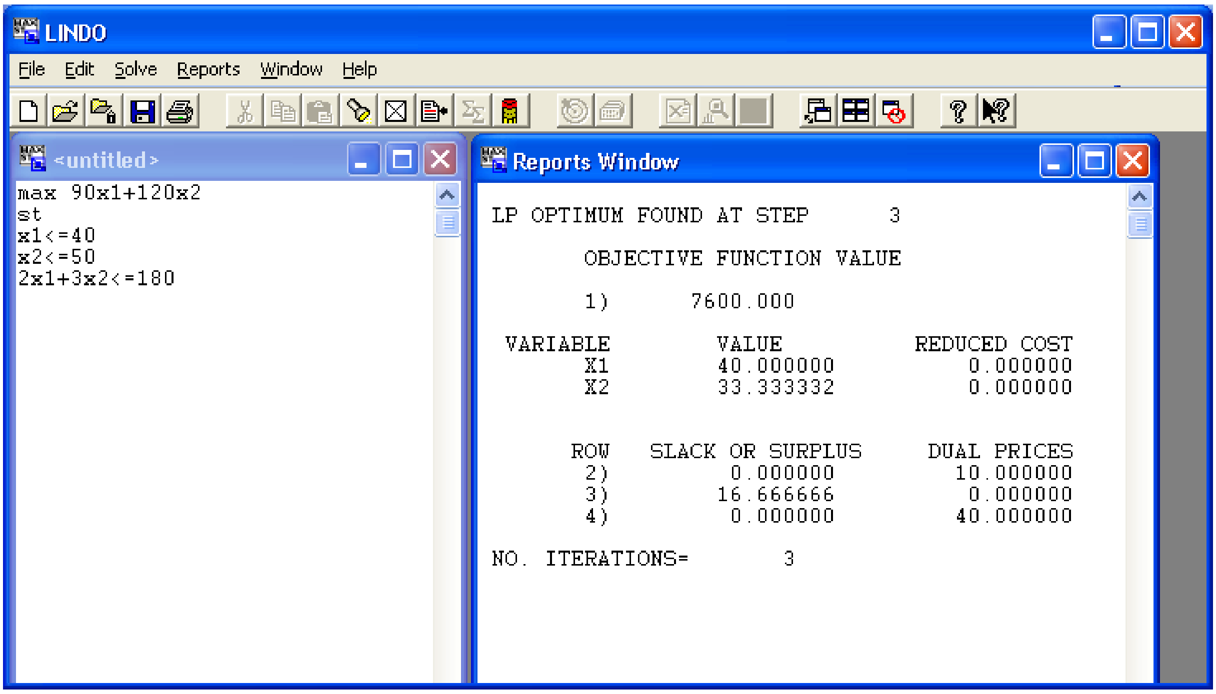


FIGURA 19.Exemplo do software LINDO 6.1 aplicado ao problema do poeta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro leitor, agora sim se pode dizer que você está, ou pelo menos deveria estar, com a faca e o queijo na mão. Como exercício, além das listas de exercícios comuns a todos, sugiro que você tente formular e resolver algum problema do seu dia-a-dia por meio de um modelo de PL. Conte comigo para o que for preciso e, ... boa sorte!!!

4 - PLANEJAMENTO FLORESTAL OTIMIZADO: MODELO TIPO I

O planejamento da seqüência futura de colheitas em uma floresta é apenas uma das tantas incumbências próprias do administrador de recursos florestais. No entanto, ele é essencial para florestas comerciais, e muito importante para florestas de uso múltiplo em geral. Os gestores destes recursos florestais devem ter conhecimento das diversas maneiras de abordar, de forma sistêmica, a regulação otimizada dos mesmos.

O administrador de recursos florestais possui uma vantagem com respeito ao administrador de outras culturas anuais, principalmente na área agrícola, que é o fato de que o momento ideal para colheita da floresta pode ser sutilmente alterado sem grande perda da viabilidade econômica do projeto. No complexo produtivo da soja, por exemplo, existe uma janela de tempo de cerca de 60 dias para realizar a colheita; se qualquer imprevisto climático (excesso de chuvas) ou mercadológico (queda de preços, barreira fitossanitária, etc.) ocorrer nessa janela de tempo, a perda pode chegar a ser total. Este mesmo fenômeno pode ser observado em outras culturas agrícolas, tais como feijão, trigo, arroz, e hortifrutigranjeiros em geral.

A floresta possui um momento ótimo para sua colheita, definido por critérios biométricos (ICA e IMA) e econômicos (maturidade financeira), dentre outros. No entanto, se a colheita não for realizada dentro do prazo ótimo, a perda devida à não adoção de soluções ótimas não será tão expressiva quanto em culturas agrícolas.

MANEJO DE FLORESTAS EQUIÂNEAS

O manejo de florestas equiâneas refere-se ao gerenciamento de florestas compostas por talhões equiâneos, onde todas as árvores possuem como característica comum o fato de terem surgido no mesmo momento ao longo do tempo, seja por plantio ou por regeneração natural após algum tipo de distúrbio. Além disso, existe um momento específico ao longo do tempo onde todas as árvores remanescentes serão colhidas, denominado de corte raso, o qual geralmente é seguido de um novo plantio ou condução da rebrota, caso esta última seja viável como, por exemplo, em plantios de eucaliptos ou de álamos.

Uma floresta equiânea consiste em um mosaico de talhões equiâneos de diferentes idades, também denominados de "unidades de manejo" ou "compartimentos". Cada uma destas unidades deve ser grande o suficiente para viabilizar operacional e economicamente o manejo, mas os tamanhos variam amplamente dependendo dos objetivos do manejo, das características do terreno, dentre outros fatores.

O manejo de florestas equiâneas é amplamente utilizado no mundo inteiro. Muitas das espécies florestais comerciais crescem melhor em condições de céu aberto. Adicionalmente, o manejo de florestas equiâneas apresenta muitas vantagens econômicas. O preparo do solo e o plantio são mais econômicos em áreas grandes passíveis de mecanização. O plantio permite aos silvicultores controlar a qualidade das árvores plantadas, bem como selecionar as melhores por características desejáveis. Na medida em que as árvores crescem, elas têm aproximadamente as mesmas dimensões em cada talhão. Esta padronização de produtos florestais facilita a colheita mecanizada e simplifica o processamento posterior nas serrarias, fábricas de pasta celulósica, etc.. Os custos unitários de colheita em operações de corte raso são menores do que em cortes seletivos, pois a colheita mecanizada é mais rápida e a área necessária para obter o mesmo volume de madeira é menor.

O manejo de florestas equiâneas apresenta algumas desvantagens. As terras submetidas a corte raso são mal vistas provocando, em não poucas ocasiões, oposição de determinados setores da sociedade. O problema estético pode ser mitigado realizando o corte raso em pequenas áreas intercaladas com faixas de árvores adultas, as quais são removidas mais tarde após as novas árvores do plantio atingirem um tamanho desejável.

Na presente aula, bem como na aula seguinte, será mostrada a forma de reduzir alguns dos aspectos negativos do manejo de florestas equiâneas por meio de restrições de colheita apropriadas em modelos de planejamento florestal otimizado.

PLANEJAMENTO FLORESTAL

O modelo de planejamento florestal que será apresentado na presente aula trata de uma floresta que não está regulada, composta por 4 talhões de eucalipto plantados com material genético de procedência desconhecida com áreas e idades diferentes, totalizando 70 ha. Os 4 talhões (T1 a T4) possuem, respectivamente, idades de 2, 3, 5 e 7 anos e áreas de 10, 22, 8 e 30 ha (**FIGURA 2a**).

A intenção do proprietário da floresta é a conversão de toda a área florestal em uma nova floresta de alta produtividade, obtida com mudas geneticamente melhoradas propagadas de forma clonal. Para tanto, foi estabelecido um horizonte de planejamento (HP) de 7 anos, sendo que a nova floresta de eucalipto deve ficar regulada para uma rotação de 7 anos. Em outras palavras, a nova floresta deve estar composta por 7 talhões (T1 a T7), igualmente representados em termos de superfície, ou seja, cada um com 10 ha, com idades variando de 1 a 7 anos (**FIGURA 2b**). Não há necessidade de que as classes de idade da nova floresta estejam distribuídas de forma contígua (observe os talhões T4 e T5, por exemplo).

O objetivo principal do proprietário da floresta é maximizar o volume colhido ao longo do HP respeitando a restrição de deixar a nova floresta regulada. Obviamente, as restrições de área de cada talhão existente devem ser respeitadas.

No esquema ilustrativo apresentado na **FIGURA 2**, os valores de superfície informados para cada talhão constam no interior deles, não necessariamente coincidindo com as áreas do desenho. No entanto, o mais importante é perceber a grande vantagem de se dispor de uma floresta regulada, conforme a parte **b)** da figura, onde é possível de imediato auferir uma receita regulada e constante por meio do corte raso, a cada ano, do talhão que no momento estiver com 7 anos de idade.

Por estar a floresta atual plantada com material genético de procedência desconhecida, não há uma única tabela de produção. A prognose de produção para os 4 talhões ao longo dos próximos 7 anos, conforme imposto pelo HP, é apresentada na **TABELA 1**. Estes valores de produção não devem ser utilizados para a nova floresta, uma vez que o material genético será diferente. Além disso, não é preciso calcular volumes nesta nova floresta uma vez que não será permitido o corte dos novos talhões durante o HP.

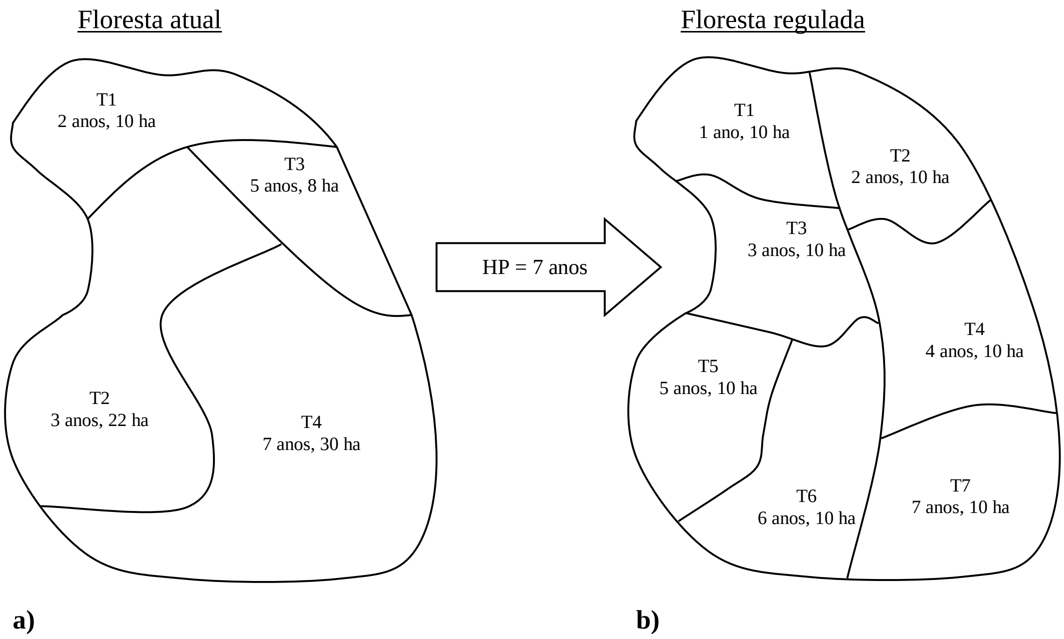


FIGURA 20. Floresta inicial (a) desregulada com quatro talhões de idades diferentes convertida em um plantio regulado de eucalipto (b) com sete talhões.

TABELA 1. Produção estimada para os 4 talhões nos próximos 7 anos do HP

Talhão	Produção esperada por ano do HP (m³/ha)						
	1	2	3	4	5	6	7
T1	15	34	79	140	230	306	364
T2	34	79	140	230	306	364	405
T3	140	230	306	364	405	436	461
T4	306	364	405	436	461	487	502

Este exemplo, que é uma situação extremamente simplificada do mundo real onde existem inúmeros outros fatores que não foram considerados (distância à fábrica, custos de operação, preços, etc.), serve para efeitos acadêmicos de ilustração da formulação pelo modelo tipo I.

FORMULAÇÃO DO MODELO TIPO I

Enunciado

Até este ponto, caro leitor, você já deve ter uma noção ao menos aproximada do problema a ser formulado, resolvido e interpretado. A questão básica consiste em responder *quando*, *onde* e *quanto* volume deve ser cortado na floresta atual, de modo a deixar a nova floresta regulada em sete talhões de igual superfície maximizando o volume retirado ao longo do HP de 7 anos. Estas mesmas três perguntas podem ser associadas à área a ser plantada, desbastada, podada, cortada, etc..

Como foi mencionado na aula que tratou da formulação de problemas, não existem regras únicas para esta tarefa. As três perguntas básicas que todo responsável pelo planejamento florestal se repete uma e outra vez ao longo da sua vida profissional, as quais podem ser resumidas como *QOQ* (Quando? Onde? Quanto?), deve nortear a escolha das variáveis, a correta expressão das restrições, e a montagem da função objetivo.

Variáveis de decisão

A escolha para as variáveis de decisão deve considerar exatamente todos aqueles fatores que são variáveis. Se no enunciado alguns requisitos tiverem a aparência de serem rígidos, inflexíveis, provavelmente eles devam ser considerados como restrições mais que como variáveis. Em momento algum do enunciado foi mencionado o seqüenciamento com que os talhões deveriam ser cortados ao longo do HP, de modo que já temos um importante fator variável a ser avaliado.

O *quando* refere-se ao ano do HP em que ocorrerão os cortes, sendo que neste caso temos 7 possibilidades: ano 1, ano 2,... , ano 6 e ano 7.

Já o *onde* refere-se aos 4 talhões existentes, que mesmo desaparecendo após a conversão da floresta existem no início do planejamento pois estamos no ano 0 (zero) do HP. Deste modo, temos 4 opções: talhão T1, talhão T2, talhão T3 e talhão T4.

Finalmente, o *quanto* deve ser respondido com a área, ou mais especificamente com o número de hectares a serem cortados em cada talhão (*onde*) em cada ano do HP (*quando*).

Pelo fato de estarmos diante de um problema de manejo de florestas equiâneas, as decisões podem ser expressas em área cortada seguida de imediato plantio com material genético clonal melhorado. Mais especificamente, seja a variável X_{ij} a área em hectares do talhão i a ser cortada e imediatamente plantada no ano j, onde i e j são subscritos inteiros variando, respectivamente, de 1 a 4 e de 1 a 7. Deste modo, por meio da combinação de talhões e anos do HP, temos ao todo 4 x 7 = 28 variáveis. A listagem completa destas variáveis pode ser obtida como segue:

X_{11} = número de hectares do talhão T1 a serem cortados/plantados no ano 1;
X_{12} = número de hectares do talhão T1 a serem cortados/plantados no ano 2;
X_{13} = número de hectares do talhão T1 a serem cortados/plantados no ano 3;
...
X_{21} = número de hectares do talhão T2 a serem cortados/plantados no ano 1;
X_{22} = número de hectares do talhão T2 a serem cortados/plantados no ano 2;
...
X_{46} = número de hectares do talhão T4 a serem cortados/plantados no ano 6;
X_{47} = número de hectares do talhão T4 a serem cortados/plantados no ano 7;

As 28 variáveis deste problema, que devem ser positivas ou zero, são:

- X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{16}, X_{17} para o talhão T1;
- X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{26}, X_{27} para o talhão T2;
- X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}, X_{35}, X_{36}, X_{37} para o talhão T3;
- X_{41}, X_{42}, X_{43}, X_{44}, X_{45}, X_{46}, X_{47} para o talhão T4;

Restrições

Uma das restrições deve expressar a necessidade de cortar, somente uma vez, independentemente do momento e do local, a totalidade da floresta atual durante o HP. Este corte é necessário e suficiente para converter toda a floresta atual em novos plantios. Deste modo, para o primeiro talhão (T1) temos a seguinte restrição:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} = 10 \text{ ha}$$

De maneira análoga, para os talhões T2, T3 e T4, têm-se:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27} = 22 \text{ ha}$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{37} = 8 \text{ ha}$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} + X_{47} = 30 \text{ ha}$$

O conjunto de 4 restrições apresentado garante que cada talhão será inteiramente cortado por meio de uma ou mais intervenções ao longo dos 7 anos do HP.

Um segundo conjunto de restrições estabelece a condição de que a seqüência de cortes deve ser tal que gere uma nova floresta regulada em superfície. Em outras palavras, a cada ano dos 7 que compõem o HP deve ser cortado um sétimo da superfície da floresta atual, equivalente a 10 ha. Esta regulação é atingida por meio do seguinte conjunto de 7 restrições:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{47} = 10 \text{ ha}$$

Um resumo das restrições formuladas até este ponto é apresentado na **TABELA 2**.

TABELA 2. Resumo das restrições de área disponível por talhão e das restrições de área a cortar em cada ano do HP

Talhão	Ano do horizonte de planejamento (HP)							Área [ha]
	1	2	3	4	5	6	7	
T1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	= 10
T2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	= 22
T3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	X_{37}	= 8
T4	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}	X_{47}	= 30
Área [ha]	= 10	= 10	= 10	= 10	= 10	= 10	= 10	= 70

Este exemplo, que é uma situação extremamente simplificada do mundo real onde existem diversos outros fatores que devem ser levados em consideração, serve para efeitos didáticos para ilustrar a formulação de problemas de planejamento florestal. Dentre estes fatores, podem-se mencionar a disponibilidade de outros insumos como mudas, mão-de-obra, combustível, horas-máquina de equipamentos, bem como o abastecimento anual de uma eventual fábrica com determinados tipos de produtos florestais (toras) ao longo dos anos do HP. Certamente você, caro leitor, deve ter em mente pelo menos uma dúzia de outras considerações que deveriam ser inseridas no modelo, sendo que todas elas, de uma forma ou de outra, fatalmente deverão ser formuladas para poderem ser consideradas na otimização.

A condição de não-negatividade, obrigatória em problemas de PL, pode ser assim resumida:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i; \forall j$$

onde o símbolo ∀ significa "para todo".

Função objetivo

O objetivo principal do proprietário da floresta é maximizar o volume de madeira a ser retirado ao longo do HP. A primeira vista, observando atentamente a **TABELA 1**, percebe-se que a melhor forma de maximizar o volume e deixar tudo para cortar no sétimo ano do HP, pois a produção florestal dos 4 talhões existentes aumenta a cada ano. No entanto, se isto for feito a nova floresta não ficará regulada. O segundo conjunto de restrições da seção anterior obriga a cortar, todo ano, uma superfície de 10 ha, evitando assim a opção "gulosa" de deixar tudo para cortar quando o volume for máximo.

A função objetivo deve detectar, dentre o conjunto das 28 variáveis e suas respectivas produções, a combinação ótima que maximiza o volume a ser colhido ao longo do HP. A seguinte expressão, obtida como combinação linear de variáveis (**TABELA 2**) e coeficientes de produção (**TABELA 1**), reflete esta busca:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & 15\,X_{11} + 34\,X_{12} + 79\,X_{13} + 140\,X_{14} + 230\,X_{15} + 306\,X_{16} + 364\,X_{17} + \\ & 34\,X_{21} + 79\,X_{22} + 140\,X_{23} + 230\,X_{24} + 306\,X_{25} + 364\,X_{26} + 405\,X_{27} + \\ & 140\,X_{31} + 230\,X_{32} + 306\,X_{33} + 364\,X_{34} + 405\,X_{35} + 436\,X_{36} + 461\,X_{37} + \\ & 306\,X_{41} + 364\,X_{42} + 405\,X_{43} + 436\,X_{44} + 461\,X_{45} + 487\,X_{46} + 502\,X_{47} \end{aligned}$$

Modelo completo

Sumarizando as expressões matemáticas da FO e das restrições, tem-se o modelo completo:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = {} & 15\,X_{11} + 34\,X_{12} + 79\,X_{13} + 140\,X_{14} + 230\,X_{15} + 306\,X_{16} + 364\,X_{17} + \\ & 34\,X_{21} + 79\,X_{22} + 140\,X_{23} + 230\,X_{24} + 306\,X_{25} + 364\,X_{26} + 405\,X_{27} + \\ & 140\,X_{31} + 230\,X_{32} + 306\,X_{33} + 364\,X_{34} + 405\,X_{35} + 436\,X_{36} + 461\,X_{37} + \\ & 306\,X_{41} + 364\,X_{42} + 405\,X_{43} + 436\,X_{44} + 461\,X_{45} + 487\,X_{46} + 502\,X_{47} \end{aligned}$$

sa

1) $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} = 10$ ha
2) $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} + X_{27} = 22$ ha
3) $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} + X_{37} = 8$ ha
4) $X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} + X_{47} = 30$ ha
5) $X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 10$ ha
6) $X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 10$ ha
7) $X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 10$ ha
8) $X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 10$ ha
9) $X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} = 10$ ha
10) $X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} = 10$ ha
11) $X_{17} + X_{27} + X_{37} + X_{47} = 10$ ha

$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i; \forall j$

Este modelo, quando corretamente digitado em um solver, gera a solução ótima descrita na seguinte seção.

SOLUÇÃO ÓTIMA

Para resolução do problema descrito como exemplo na presente aula, sugiro a você, caro leitor, que abra o Demo LINDO/PC 6.1 e repita os passos que seguem:

1. Digitar a formulação do problema na janela que o LINDO abre na inicialização, conforme mostra a janela esquerda da tela capturada que é apresentada na **FIGURA 21**;
2. Acionar o solver clicando no menu *Solve/Solve*, ou digitando o atalho CTRL+S, ou ainda clicando no botão que aparece como um tiro ao alvo  na barra de botões;
3. Responder não (*No*) à pergunta *Do range (sensitivity) analysis?*, que aparece após ter concluído a resolução. Esta análise de sensibilidade não é imprescindível para obter a solução ótima do problema; ela apenas refere-se à amplitude de valores dos coeficientes para a qual a solução ótima obtida é válida;
4. Fechar a janela com título *Lindo Solver Status*, onde é apresentado um resumo do processo de resolução.

A resposta ótima aparece em uma janela denominada de *Reports Window*, a qual pode ser deixada lado a lado com a janela da formulação por meio da opção, clássica em ambiente Windows, de dividir a tela em janelas (no LINDO, clicar no menu *Window/Tile/Vertical*).

Na janela que aparece no lado direito da tela apresentada na **FIGURA 21** pode-se observar a solução ótima. Percebe-se que boa parte das variáveis de decisão são nulas, situação que geralmente ocorre neste tipo de problemas de planejamento. Em outras palavras, para cada talhão da floresta original foram dadas, neste exemplo, 7 opções para corte raso, sendo que no máximo foi necessário acionar 3 delas para o talhão T4. As variáveis X_{41}, X_{42} e X_{43} indicam que o talhão T4 deve ser cortado em três momentos diferentes, ou seja nos anos 1, 2 e 3 do HP. Em cada uma destas intervenções deve ser feito o corte raso e replantio de 10 ha.

Se forem observadas com atenção as restrições do problema sob análise conforme apresentadas no modelo completo, percebe-se que ao longo do HP devem ser cortados anualmente 10 ha, fato que obriga a subdividir aqueles talhões de superfície maior a 10 ha em porções menores. Isto ocorre com os talhões T2 e T4, com 22 ha e 30 ha respectivamente. Já o talhão T1, com 10 ha, e o talhão T3 com 8 ha, não precisaram ser subdivididos na solução ótima.

O valor da FO de 24.570 m³ indica o máximo volume que pode ser obtido da floresta original, ao longo dos 7 anos do HP, respeitando a premissa de deixá-la regulada. Não há maneira de obter um volume maior do que esse; quem tiver dúvidas disto está convidado a encontrar uma solução ótima ainda melhor.

A partir da obtenção da solução ótima abre-se um leque de possibilidades de análise. Neste ponto, que envolve a geração de relatórios, tabelas e gráficos, a personalização inerente a cada tipo de trabalho, empresa, e pessoa leva à criação das mais variadas formas de análise.

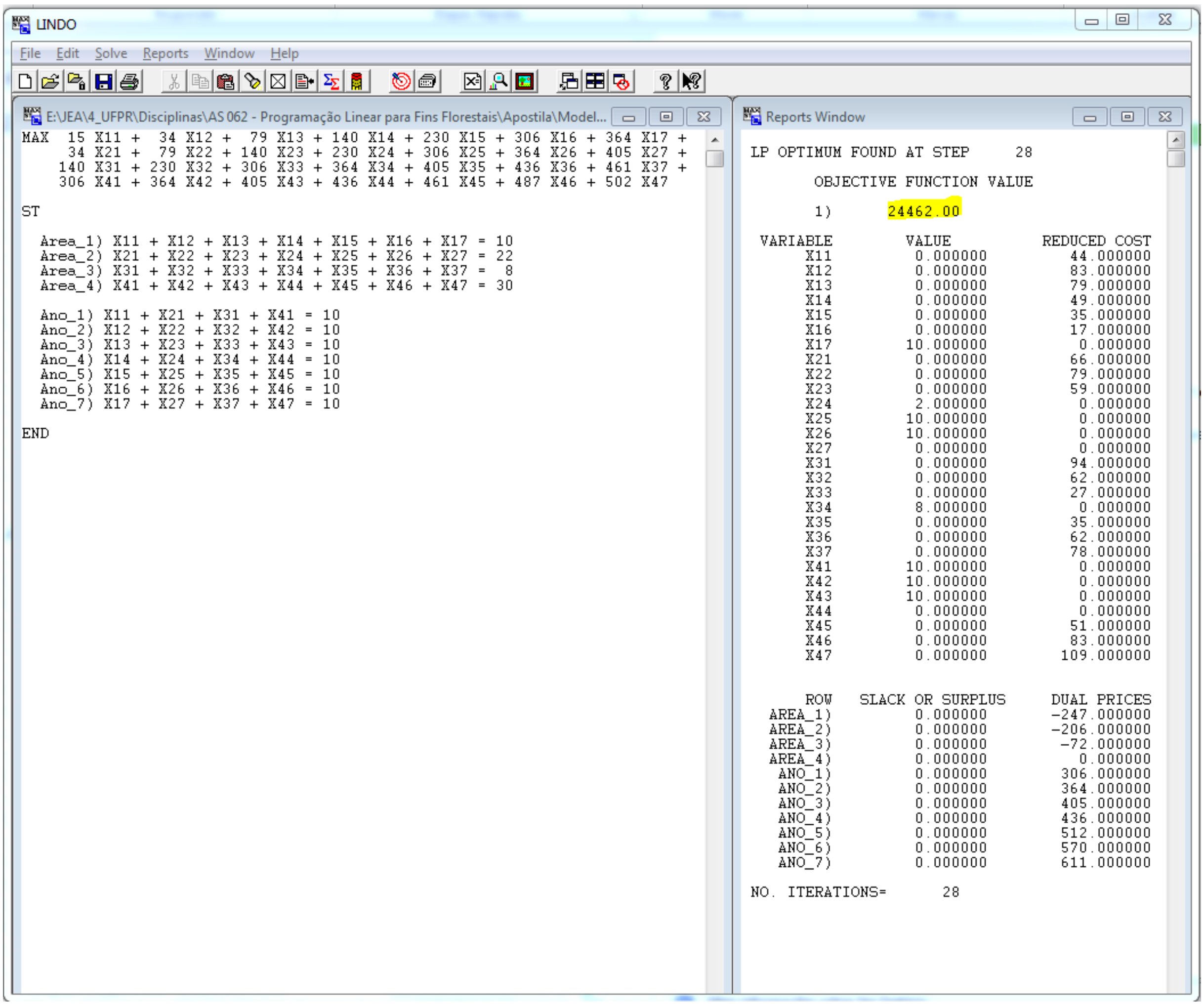


FIGURA 21. Resolução do problema de planejamento florestal otimizado com o LINDO.

Sem pretender ser exaustivo com a apresentação gráfica dos resultados ótimos alcançados, a evolução dos volumes colhidos por ano ao longo do HP é uma informação importante de ser mostrada. A **FIGURA 22** foi confeccionada a partir da resposta ótima gerada pelo LINDO. Nela percebe-se que os volumes não apresentam um equilíbrio ao longo dos anos, havendo basicamente dois picos de produção nos anos 3 e 6, os quais, se não forem detectados previamente, podem levar a problemas de operação (mão-de-obra, equipamento, etc.).

Após uma breve análise visual da **FIGURA 22**, surge de imediato a dúvida sobre a possibilidade, ou impossibilidade, de equilibrar os volumes colhidos ao longo dos anos do HP. A única maneira de incorporar estas considerações no modelo de PL é por meio de restrições específicas. Obviamente, para cada nova restrição o valor da FO somente pode piorar ou, na melhor das hipóteses, manter-se igual.

As restrições para equilibrar os volumes retirados da floresta original em anos consecutivos podem ser formuladas a partir da premissa de que $V_1 = V_2$ para os primeiros dois anos do HP, sendo que V_1 é o volume total colhido da floresta no ano 1 e V_2 é o volume total colhido da floresta no ano 2.

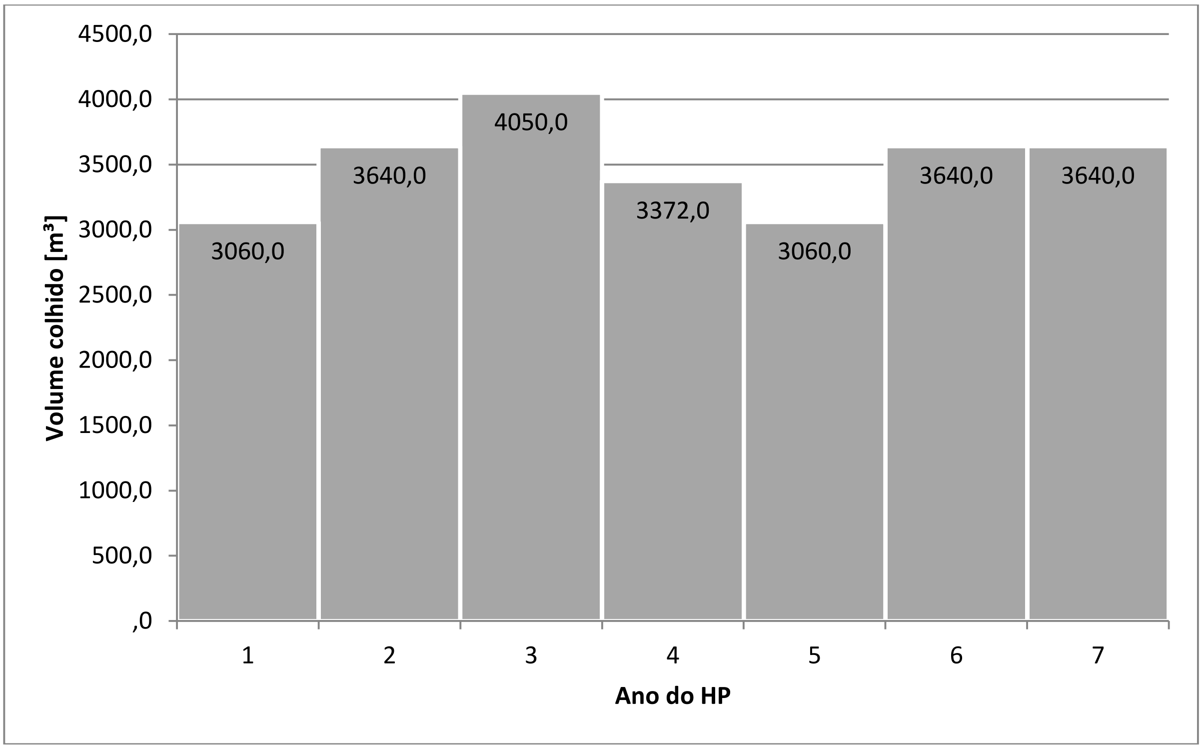


FIGURA 22. Volume colhido por ano ao longo do HP de 7 anos.

Considerando então que o volume V_1 é a soma dos volumes retirados em cada um dos 4 talhões no ano 1, chega-se à expressão $V_1 = 15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41}$. Prosseguindo com este raciocínio, chega-se à primeira restrição de equilíbrio de colheita entre os anos 1 e 2, como segue:

$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 34\,X_{12} + 79\,X_{22} + 230\,X_{32} + 364\,X_{42}$$

Analogamente, as restrições para equilibrar os volumes colhidos ao longo dos demais anos do HP são obtidas por meio do mesmo procedimento, ficando como mostrado a seguir:

$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 79\,X_{13} + 140\,X_{23} + 306\,X_{33} + 405\,X_{43}$$
$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 140\,X_{14} + 230\,X_{24} + 364\,X_{34} + 436\,X_{44}$$
$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 230\,X_{15} + 306\,X_{25} + 405\,X_{35} + 461\,X_{45}$$
$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 306\,X_{16} + 364\,X_{26} + 438\,X_{36} + 487\,X_{46}$$
$$15\,X_{11} + 34\,X_{21} + 140\,X_{31} + 306\,X_{41} = 364\,X_{17} + 405\,X_{27} + 461\,X_{37} + 502\,X_{47}$$

Neste exemplo, as restrições de equilíbrio de colheita foram baseadas na comparação tomando por base o ano 1, ou seja $V_1 = V_2$, $V_1 = V_{3,\ldots,}$ $V_1 = V_7$. Outra maneira de formular estas restrições é forçando os volumes de anos sucessivos a serem iguais, ou seja $V_1 = V_2$, $V_2 = V_3$, $V_3 = V_4$, $V_4 = V_5$, $V_5 = V_6$ e $V_6 = V_7$. O resultado deve ser idêntico.

Ao formular este novo problema com as restrições de equilíbrio de colheita ao longo dos anos do HP, chega-se a uma situação de infactibilidade. Ou seja, não é possível realizar o corte raso anual de 10 ha mantendo o volume constante. O que fazer? Pode-se propor, por exemplo, que o volume anual colhido ao longo do HP não seja decrescente. Em outras palavras, o volume colhido em cada período do HP deve ser igual ou maior do que o volume colhido no período anterior. Isto pode ser formulado a partir das relações $V_2 \geq V_1$, $V_3 \geq V_2$, $V_4 \geq V_3$, $V_5 \geq V_4$, $V_6 \geq V_5$ e $V_7 \geq V_6$.

Para expressar estas restrições no LINDO devem ser sempre posicionadas as variáveis no lado esquerdo da inequação, mantendo no lado direito somente as constantes. Este novo problema gera uma solução factível quando resolvido pelo LINDO (**FIGURA 23**), com um valor da função objetivo algo inferior do que o obtido para o problema original.

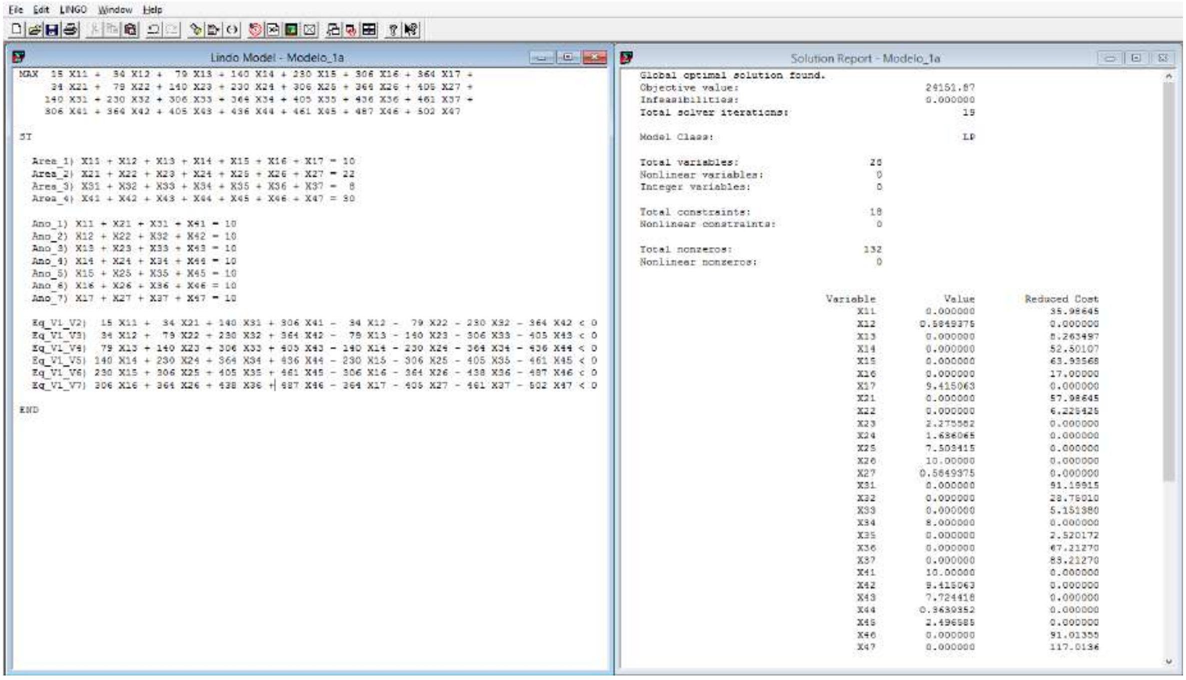


FIGURA 23.Resolução do problema com restrições de colheita não-decrescente.

A evolução dos volumes colhidos por ano, nesta nova solução ótima, é apresentada na **FIGURA 24**. Pode-se perceber que o "custo" de restringir o fluxo de madeira colhida de modo a não permitir decréscimos ao longo do HP é de 310,13 m³. Este "custo" é obtido como a diferença entre os valores das funções objetivo dos problemas com e sem restrições de volumes colhidos por ano, como 24.462,00 – 24.151,87 = 310,13. Esta resposta, embora gere um volume menor do que a apresentada graficamente na **FIGURA 22**, é mais conveniente do ponto de vista operacional, uma vez que permite planejar as atividades de campo com oscilações menores, sendo que nunca haverá decréscimo na produção volumétrica.

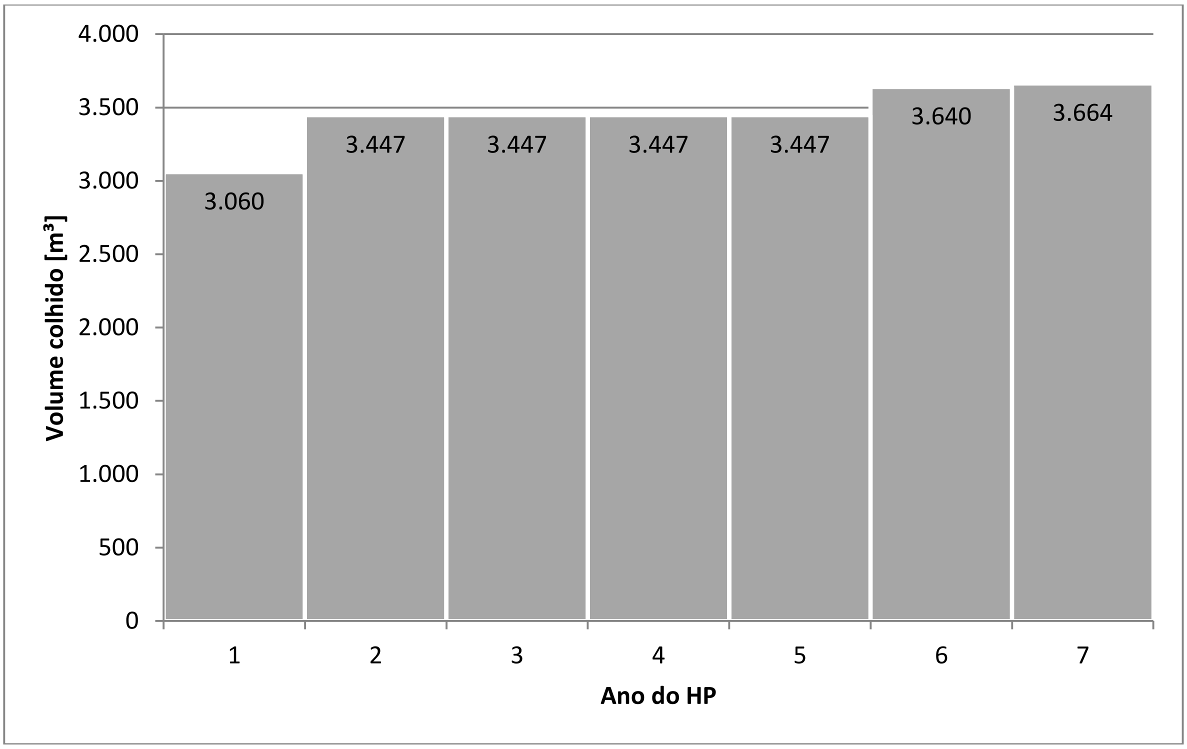


FIGURA 24.Evolução do volume por ano com restrições de colheita não-decrescente.

MAXIMIZAÇÃO DO VALOR PRESENTE

Até agora os volumes colhidos nos anos do HP foram comparados entre si sem qualquer distinção com respeito ao ano em que os mesmos ocorrem. No entanto, na vida real não é o mesmo 100 m³ no ano 1 do que 100 m³ no ano 2, 3, ou 7. A inclusão de critérios econômicos é fundamental na busca de soluções para planejamento florestal otimizado.

Neste ponto, caro leitor, é altamente recomendável que você faça uma revisão dos conceitos financeiros vistos no módulo específico de economia florestal, com especial ênfase àqueles que envolvem cálculos de matemática financeira com taxa de juros (valor presente, valor futuro, séries periódicas e perpétuas de pagamentos, fluxo de caixa, taxa de retorno, etc.).

A partir do mesmo problema que está sendo avaliado, e considerando, por exemplo, um preço para a madeira de 80,00 R$/m³ e uma taxa anual de juros de 8%, deve-se proceder a calcular, para cada variável da FO, seu valor presente.

A equação que relaciona o valor corrente, ou seja no momento em que ele ocorre, com o valor presente, que é a translação do tempo desse valor até o momento atual (ano zero do HP), é a seguinte:

$$VP = \frac{VC}{(1+i)^n}$$

onde *VP* é o valor presente, *VC* é o valor corrente, por vezes chamado de valor futuro, *i* é a taxa anual de juros e *n* é o ano em que o valor corrente ocorre.

Uma consideração a ser feita é a de que em problemas de planejamento florestal, a unidade de tempo geralmente é o ano, e os valores que ocorrem ao longo de um ano devem ser associados ao mesmo sem distinção do mês ou do dia exato de ocorrência. Ou seja, deve-se adotar um critério com respeito ao momento, dentro de cada ano, em que os valores irão ocorrer. Alguns autores sugerem considerar o início do ano; outros o final. Mas uma das maneiras tal vez mais justas de resolver isto é supor que todo valor, seja custo ou receita, ocorre exatamente na metade do ano. Independentemente de se a metade do ano ocorre no meio dia do dia 2 de julho (para anos não-bissextos) ou na meia noite do dia 1 de julho (para anos bissextos), podem ser adotados valores fracionários na equação do valor presente. A equação para cálculo do valor presente seguindo este critério fica como segue:

$$VP = \frac{VC}{(1+i)^{(n-0,5)}}$$

Tomando como exemplo a variável X_{11}, que representa o número de ha do talhão T1 a serem cortados no ano 1, tem-se que durante o ano 1 do HP seriam retirados 3 m³/ha, os quais gerariam uma receita corrente, ou seja no momento da venda da madeira, de 240 R$/ha. Esta receita, obtida multiplicando o volume de 3 m³/ha pelo preço de 80 R$/m³, ocorre na metade do ano 1, ou seja entre o ano 0 e o ano 1, mais precisamente no ano 0,5. Deste modo, o valor presente desta receita é obtido pela seguinte expressão:

$$VP_{11} = \frac{VC_{11}}{(1+0,08)^{0,5}} = \frac{1.200}{1,03923} \Rightarrow VP_{11} = 1.154,70$$

Considerando, por exemplo, a variável X_{35}, que representa o número de hectares do talhão T3 a serem cortados no ano 5, seu valor presente é obtido pela seguinte expressão:

$$VP_{35} = \frac{417 \cdot 80}{(1,08)^{4,5}} = \frac{32.400}{1,4138616} \Rightarrow VP_{35} = 22.915,96$$

Procedendo de maneira análoga com as demais variáveis, obtêm-se todos os coeficientes da nova função objetivo que considera critérios financeiros (TABELA 3).

TABELA 3. Receitas presentes estimadas para os 4 talhões nos próximos 7 anos do HP

Talhão	Valor presente por talhão e ano do HP (R$/ha)						
	1	2	3	4	5	6	7
T1	1.154,70	2.423,45	5.213,84	8.555,29	13.014,00	16.031,74	17.657,81
T2	2.617,32	5.630,95	9.239,72	14.055,12	17.314,28	19.070,44	19.646,74
T3	10.777,21	16.393,90	20.195,38	22.243,76	22.915,96	22.842,62	22.363,33
T4	23.555,89	25.945,12	26.729,18	26.643,63	26.084,59	25.514,57	24.352,26

A partir dos coeficientes da FO apresentados na **TABELA 3** podem ser feitas inúmeras constatações. O talhão T4, por exemplo, apresenta cifras crescentes de valor presente até o ano 4, e decrescentes do ano 5 até o final do HP. Isto mostra que, embora a floresta continue crescendo, como pode ser visualizado na **TABELA 1**, a taxa de crescimento é inferior à taxa de juros adotada para o cálculo do valor presente, que é do 8% ao ano.

A nova função objetivo, que deve ser inserida no LINDO para poder resolver o problema sob critérios financeiros, é a seguinte:

Max Z = 1.154.70 X_{11} + 2423,45 X_{12} + 5.213,84 X_{13} + 8.555,29 X_{14} + 13.014,00 X_{15} + 16.031,74 X_{16} + 17.657,81 X_{17} + 2.617,32X_{21} + 5.630,95X_{22} + 9.239,72 X_{23} + 14.055,12 X_{24} + 17.314,28 X_{25} + 19.070,44 X_{26} + 19.646,74 X_{27} + 10.777,21 X_{31} + 16.393,90 X_{32} + 20.195,96 X_{33} + 22.243,76 X_{34} + 22.915,96 X_{35} + 22.842,62 X_{36} + 22.363,33 X_{37} + 23.555,89 X_{41} + 25.945,12 X_{42} + 26.729,18 X_{43} + 26.643,63 X_{44} + 26.084,59 X_{45} + 25.514,57 X_{46} + 24.352,26 X_{47}

O modelo resolvido com a nova função objetivo pode ser visualizado na **FIGURA 25**. Percebe-se no lado direito da janela a fragmentação dos 4 talhões que compõem a floresta original. O valor da FO já não pode ser diretamente comparado com os das outras soluções ótimas, que visavam maximizar a produção física. No entanto, uma análise mais detalhada desta solução ótima indica uma produção física total de 24.203,61 m³, inferior aos 24.570 m³ obtidos sem restrições de equilíbrio de colheita (**FIGURA 21**) e aos 24.227,51 m³ obtidos com restrições de colheita não-decrescente (**FIGURA 23**).

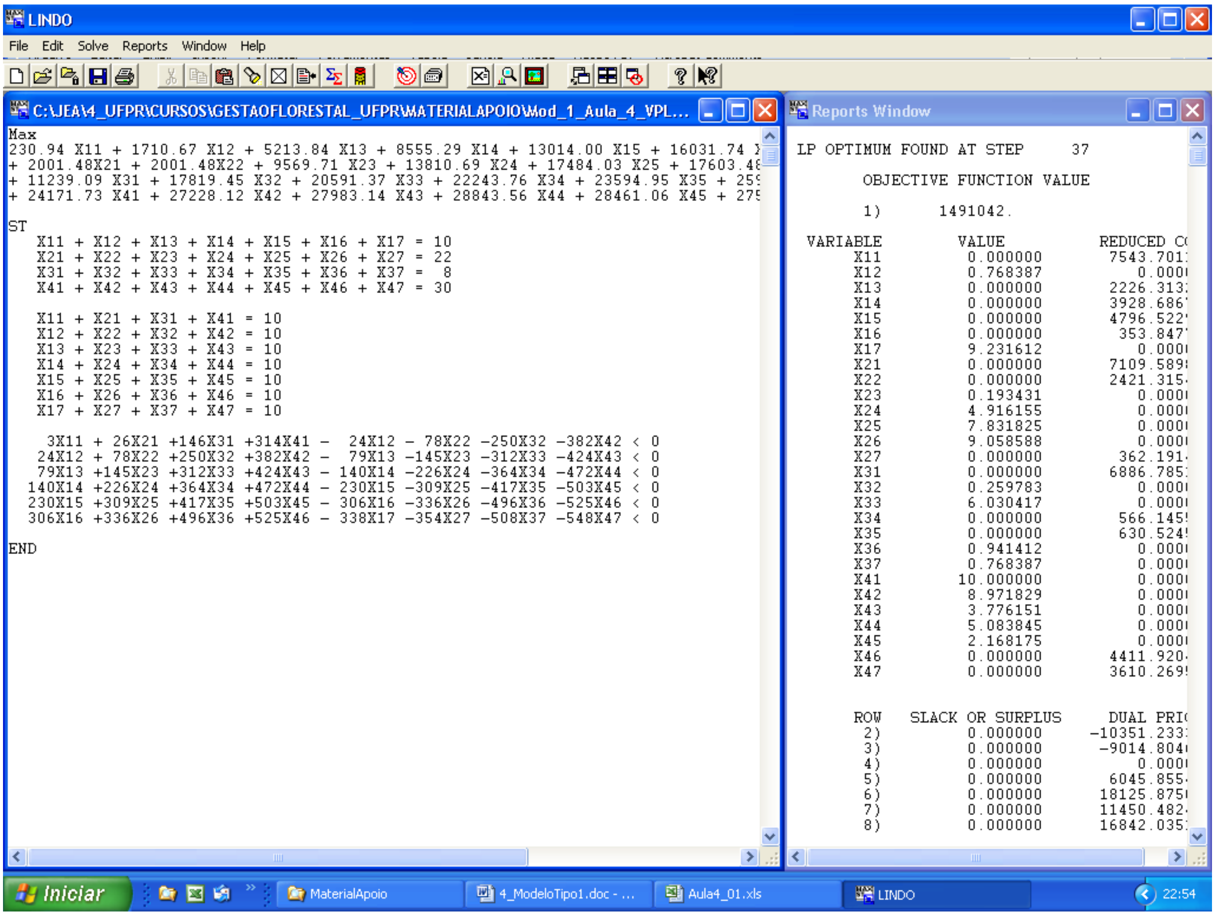


FIGURA 25. Resolução do problema com restrições de colheita não-decrescente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mais uma aula concluiu e espero que agora você, caro leitor, já se sinta bem à vontade com temas das aulas passadas, como formulação, resolução e interpretação de problemas de planejamento florestal.

Na próxima aula será apresentado outro modelo de planejamento florestal, muito utilizado para florestas equiâneas, que complementa os ensinamentos da presente aula.

5 - PLANEJAMENTO FLORESTAL OTIMIZADO: MODELO TIPO II

Na aula anterior foram vistos conceitos relativos ao manejo de florestas equiâneas, bem como um primeiro modelo genérico para o planejamento otimizado delas. Nesta aula, que é uma continuação da anterior, será apresentado um segundo modelo genérico para o planejamento otimizado de florestas equiâneas baseado em conceitos diferentes dos utilizados no modelo anterior.

Pode-se dizer que foi graças ao trabalho genial de Johnson e Scheurmann, publicado como monografia florestal na conceituada revista Forest Science em 1977, que hoje são conhecidos estes dois modelos genéricos para o planejamento florestal otimizado. Na verdade, o primeiro modelo de planejamento florestal otimizado surgiu em 1964, proposto por Ware e Clutter. Posteriormente, diversos outros "novos" modelos foram sendo propostos, cada um com o intuito de ser uma nova abordagem no planejamento florestal. Pois bem, foram os pesquisadores Johnson e Scheurmann os responsáveis por fazer uma recopilação completa destes vários modelos que foram surgindo entre 1964 e 1977, e chegaram à conclusão de que todos os modelos seriam variantes de dois modelos genéricos, denominados por eles de modelo tipo I e tipo II.

MODELO TIPO I vs. MODELO TIPO II

Embora ambos os modelos de planejamento florestal otimizado, conhecidos atualmente como modelos tipo I e II, tenham a mesma finalidade, ou seja, a de realizar o planejamento da floresta visando atender a determinado objetivo do proprietário dela, existem algumas diferenças que os tornam bem diferentes entre si, pelo menos do ponto de vista conceitual. Enquanto o modelo tipo I mantém a identidade dos talhões ao longo de todo o horizonte de planejamento, o modelo tipo II vai mesclando e recombinando as áreas cortadas em novos talhões, não necessariamente adjacentes, agrupados pela sua idade. Em outras palavras, a diferença fundamental entre ambos os modelos são as variáveis de decisão, as quais são descritas a seguir:

<u>Variável de decisão principal do modelo tipo I</u>:

X_{ij} = número de hectares do talhão *i* a serem cortados e plantados no ano *j*,

<u>Variável de decisão principal do modelo tipo II</u>:

X_{ij} = número de hectares da idade *j* a serem cortados e plantados no ano *i*,

onde *i* e *j* são subscritos inteiros variando entre 1 e o número máximo de talhões, idades, ou anos do horizonte de planejamento, dependendo do caso.

A primeira vista, até parece que houve um erro de digitação na definição das variáveis, mas as sutis alterações podem fazer uma grande diferença quando estes modelos são aplicados a cenários reais, com grandes superfícies de floresta. Para entender melhor esta diferença, imagine, por exemplo, uma floresta composta por 15.000 talhões de *Pinus taeda* plantados em diferentes anos que possuem, atualmente, idades variando entre 1 e 30 anos. Em uma formulação segundo o modelo tipo I, para um horizonte de planejamento de 30 anos, têm-se 450.00 variáveis. É isto mesmo, são 450 mil variáveis de decisão, senda cada uma delas correspondente à decisão de cortar o talhão *i* no ano *j*, com *i* variando de 1 a 15.000 e *j* variando de 1 a 30 (15.000 x 30 = 450.000). Por outro lado, se for utilizado o modelo tipo II, para o mesmo horizonte de planejamento de 30 anos têm se 900 variáveis, correspondendo à decisão de cortar florestas com idade *j* no ano *i* (30 x 30 = 900).

A diferença considerável entre os modelos I e II com respeito ao número de variáveis para problemas grandes é apenas um dos aspectos que deve ser ponderado na hora de escolher o modelo mais apropriado para resolver cada cenário. O leitor deve estar-se perguntando: Para que é então apresentado ainda o modelo I, se o modelo II é muito mais "econômico" em termos do número de variáveis? No entanto, um dos modelos mais empregados atualmente no Brasil é o modelo I, e a razão para esta escolha será descrita de forma detalhada a seguir.

O modelo I mantém a identidade geográfica dos talhões. Isto quer dizer que pode ser associada uma tabela de produção individualmente a cada talhão, em função do material genético com que ele foi plantado. Por sinal, a simples identificação de classes de sítio diferentes para os talhões gera a necessidade de utilizar o modelo I, uma vez que para aproveitar as potencialidades do modelo II é necessária a utilização de uma única tabela de produção. A aparente vantagem da redução do número de variáveis conseguida com o advento do modelo II, lá pela década de '70, hoje não é tão significativa, pois o avanço da informática permite na atualidade resolver problemas com algumas centenas de milhar de variáveis em questão de minutos, ou até mesmo segundos.

Para ilustrar a formulação de um problema de planejamento florestal otimizado pelo modelo II será utilizado o mesmo exemplo apresentada na aula anterior. Embora as 28 variáveis geradas com a formulação pelo modelo I possam parecer numerosas se comparadas às apenas 2 variáveis do problema do poeta, elas ainda representam um número insignificante de variáveis quando comparadas às dezenas ou centenas de milhar de variáveis de problemas da vida real.

EXEMPLO

O modelo de planejamento florestal apresentado na aula anterior trata de uma floresta que não está regulada, composta por 4 talhões de eucalipto plantados com material genético de procedência desconhecida com áreas e idades diferentes, totalizando 70 ha. Os 4 talhões (T1 a T4) possuem, respectivamente, idades de 2, 3, 5 e 7 anos e áreas de 10, 22, 8 e 30 ha (**FIGURA 2a**).

Como foi dito anteriormente, o proprietário da floresta deseja regular a mesma para uma rotação de 7 anos, em um horizonte de planejamento (HP) de 7 anos. Ou seja, a nova floresta deve ter 7 talhões (T1 a T7) com 10 ha cada, e idades variando de 1 a 7 anos (**FIGURA 2b**). Não há necessidade de que as áreas com mesma idade da nova floresta estejam distribuídas de forma contígua (observe os talhões T4 e T5, por exemplo), e pode até mesmo ocorrer que a fragmentação dos talhões gere mais do que 7 talhões na nova floresta.

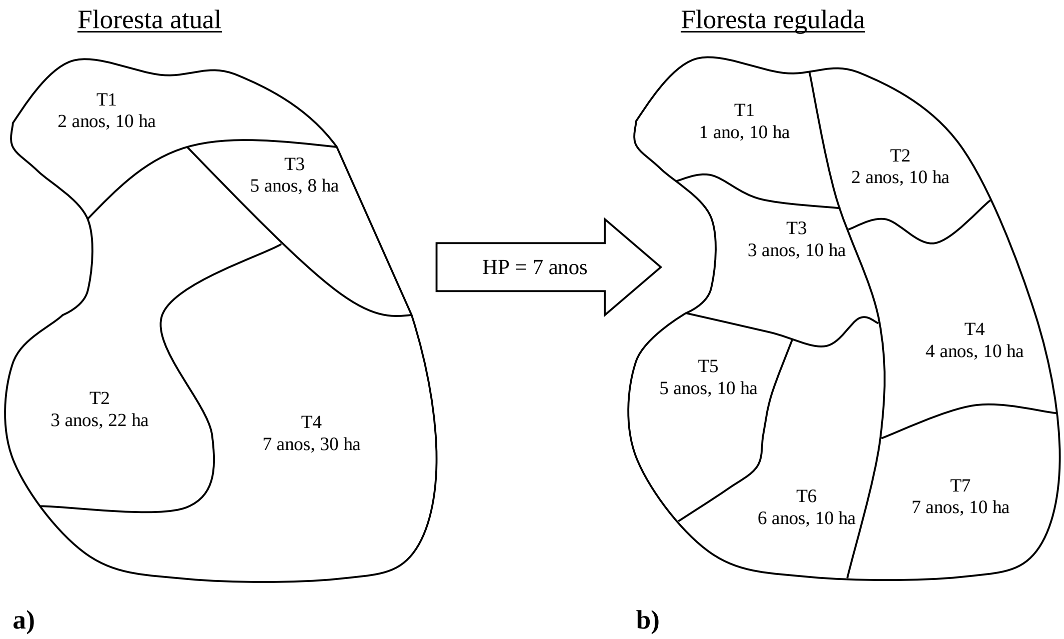


FIGURA 26. Floresta inicial (a) desregulada com quatro talhões de idades diferentes convertida em um plantio regulado de eucalipto (b) com sete talhões.

O objetivo do proprietário da floresta é maximizar o volume colhido ao longo do HP respeitando a restrição de deixar a nova floresta regulada. Obviamente, as restrições de área de cada talhão existente devem ser respeitadas.

A superfície informada para cada talhão na **FIGURA 2** não necessariamente coincide com a área do desenho. No entanto, a grande vantagem de dispor de uma floresta regulada, conforme a parte **b)** da figura, é a possibilidade de dispor de uma receita regulada e constante por meio do corte raso, a cada ano, da área que no momento estiver com 7 anos de idade.

Na **TABELA 4** constam os valores de produção para a floresta, tanto atual quanto nova.

TABELA 4. Produção estimada para a floresta de eucalipto do exemplo

Idade	Produção m³/ha	IMA m³/ha/ano	Idade	Produção m³/ha	IMA m³/ha/ano
1	2	2,00	9	405	45,00
2	15	7,50	10	436	43,60
3	34	11,33	11	461	41,91
4	79	19,75	12	487	40,58
5	140	28,00	13	502	38,62
6	230	38,33	14	513	36,64
7	306	43,71	15	520	34,66
8	364	45,50	16	527	32,94

A **FIGURA 27** apresenta os valores da tabela de produção (**TABELA 4**) na clássica forma de curva sigmóide de produção. Percebe-se nesta figura

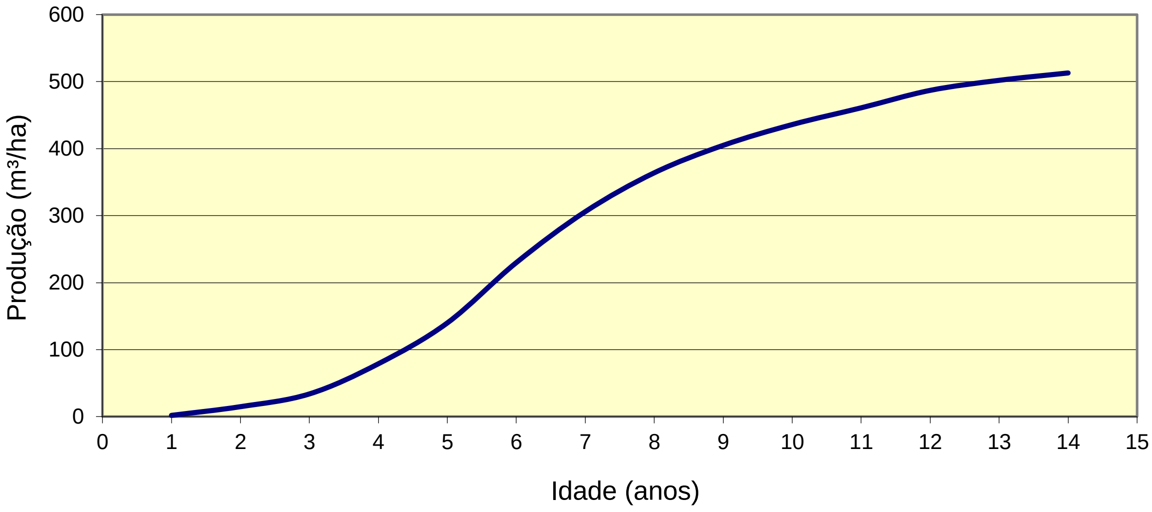


FIGURA 27. Curva da função de produção para a floresta de eucalipto do exemplo.

FORMULAÇÃO DO MODELO TIPO II

O planejamento florestal pode-se resumir na questão de responder a três perguntas relativamente simples: *quando*, *onde* e *quanto* deve ser cortado e plantado da floresta de modo a maximizar o volume colhido, ou a receita obtida, em um horizonte de planejamento pré-determinado. No caso do exemplo de formulação do modelo II, a resposta à pergunta *onde* não tem a mesma conotação geográfica que no modelo I. Neste caso o modelo de planejamento deve indicar as áreas a serem cortadas em função da sua idade, e não da sua localização geográfica. Este aspecto é crucial na hora de escolher o melhor modelo para formular o planejamento específico de tal ou qual floresta.

Como foi oportunamente mencionado na aula que tratou da formulação de problemas, não existem regras únicas para a formulação de problemas de planejamento florestal otimizado.

Variáveis de decisão

Na comparação dos modelos I e II já foram apresentadas de forma resumida as variáveis de decisão do modelo II, as quais podem ser expressas como:

X_{ij} = número de hectares da idade j a serem cortados e plantados no ano i,

Neste caso a variável X_{ij} representa a área em hectares de floresta com idade j a ser cortada e plantada no ano i, onde i e j são subscritos inteiros. Neste caso, o fato de estarmos dividindo a floresta pela idade conduz a outra grande diferença entre os modelos I e II. A cada ano, a floresta original, dividida em 4 áreas com 2, 3, 5 e 7 anos de idade, pode vir a ter uma nova área de idade 1 formada pela superfície cortada e plantada no ano anterior. Ou seja, após um ano, existe a possibilidade de ter florestas com cinco idades diferentes, quais sejam 1, 3, 4, 6 e 8 anos, advindas do crescimento das áreas originais com 2, 3, 5 e 7 anos de idade, além da nova área com 1 ano de idade. É claro que não é necessário que isto ocorra, mas será o simplex quem decida com respeito a quais idades devem compor a floresta a cada ano do HP, sendo que ao final do mesmo deverá haver sete idades diferentes. É bom lembrar que se não houver variáveis de decisão, ou seja, se for obrigatório cortar sempre apenas as florestas com 7 anos de idade, a mesma nunca ficará regulada.

Pelo exposto até este ponto, chega-se à **TABELA 5**, que têm por finalidade mostrar a composição das diferentes alternativas de corte e plantio no modelo II para a floresta do exemplo. Na tabela, as linhas representam os anos do horizonte de planejamento, com as informações do estoque (E) disponível e das variáveis de corte (C) para cada ano e idade da floresta. Já as colunas representam a idade da floresta. Podem-se observar, na primeira linha da tabela (Ano 1, E), os valores 10, 22, 8 e 30 correspondentes ao estoque (E) em hectares existente no ano 1 de florestas com 2, 3, 5 e 7 anos de idade respectivamente. As variáveis associadas a estes estoques, que indicam o número de hectares que podem ser cortados no ano 1 (i = 1), são aquelas que aparecem na segunda linha (Ano 1, C), ou seja, X_{12}, X_{13}, X_{15} e X_{17}. Estas variáveis podem assumir quaisquer valores contínuos entre 0 (zero) e a área disponível em cada classe de idade.

Após o primeiro ano, a situação da floresta é diferente da situação inicial, O simplex poderá optar por cortar tudo ou parte das áreas disponíveis. No entanto, o que não for cortado passa, após um ano, para a idade seguinte. Na **TABELA 5** esta transição pode ser observada seguindo as diagonais descendentes à direita a partir dos 4 talhões iniciais. Os 30 ha de floresta com idade 7 anos, por exemplo, que podem eventualmente ter uma porção cortada e re-plantada já no ano 1 por meio da variável X_{17}, avançam para a célula localizada abaixo e à direita, mais precisamente na linha onde aparece o estoque (E) de floresta no ano 2, com 8 anos de idade. Pode-se observar que nesta célula consta a expressão 30–X_{17}, indicando que o possível estoque será a fração dos 30 ha remanescente após o corte representado pela variável X_{17}. De forma análoga, e sempre seguindo a diagonal descendente à direita, localizam-se as variáveis X_{28}, X_{39}, X_{410}, X_{511}, X_{612} e X_{713}. Os eventuais estoques remanescentes, após cada uma destas variáveis entrar em cena, são $30–X_{17}–X_{28}$, $30–X_{17}–X_{28}–X_{39}$, e assim sucessivamente até o estoque de florestas com 14 anos de idade, representado por $30–X_{17}–X_{28}–X_{39}–X_{410}–X_{511}–X_{612}–X_{713}$. Obviamente, somente irá aparecer alguma área com florestas com 14 anos de idade após um período de 7 anos, e isto a partir das florestas que têm 7 anos no início do horizonte de planejamento.

Uma análise análoga à descrita pode ser feita com as demais diagonais descendentes à direita que começam com as áreas que inicialmente têm 2, 3 e 5 anos de idade. Estas áreas possuem, respectivamente, 10, 22 e 8 hectares.

Percebe-se na **TABELA 5** que o problema de planejamento florestal otimizado, formulado segundo o modelo genérico tipo II, possui ao todo 49 variáveis de decisão. Este valor, se confrontado com o número de variáveis do mesmo problema de planejamento formulado na aula anterior (modelo tipo I), mostra um aumento no número de variáveis. No entanto, em problemas grandes da vida real onde pode haver dezenas ou até centenas de talhões com a mesma idade separados geograficamente, a situação se inverte.

TABELA 5. Evolução dinâmica das áreas submetidas a corte e plantio no modelo II, mostrando a disponibilidade em estoque (E) e as variáveis de corte (C).

Ano		Idade da floresta 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	E	-	10	22	-	8	-	30	-	-	-	-	-	-	-
	C	-	X_{12}	X_{13}	-	X_{15}	-	X_{17}	-	-	-	-	-	-	-
2	E	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}$	-	$10-X_{12}$	$22-X_{13}$	-	$8-X_{15}$	-	$30-X_{17}$	-	-	-	-	-	-
	C	X_{21}	-	X_{23}	X_{24}	-	X_{26}	-	X_{28}	-	-	-	-	-	-
3	E	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}$	-	$10-X_{12}-X_{23}$	$22-X_{13}-X_{24}$	-	$8-X_{15}-X_{26}$	-	$30-X_{17}-X_{28}$	-	-	-	-	-
	C	X_{31}	X_{32}	-	X_{34}	X_{35}	-	X_{37}	-	X_{39}	-	-	-	-	-
4	E	$X_{31}+X_{32}+X_{34}+X_{35}+X_{37}+X_{39}$	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}-X_{31}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}-X_{32}$	-	$10-X_{12}-X_{23}-X_{34}$	$22-X_{13}-X_{24}-X_{35}$	-	$8-X_{15}-X_{26}-X_{37}$	-	$30-X_{17}-X_{28}-X_{39}$	-	-	-	-
	C	X_{41}	X_{42}	X_{43}	-	X_{45}	X_{46}	-	X_{48}	-	X_{410}	-	-	-	-
5	E	$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{45}+X_{46}+X_{48}+X_{410}$	$X_{31}+X_{32}+X_{34}+X_{35}+X_{37}+X_{39}-X_{41}$	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}-X_{31}-X_{42}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}-X_{32}-X_{43}$	-	$10-X_{12}-X_{23}-X_{34}-X_{45}$	$22-X_{13}-X_{24}-X_{35}-X_{46}$	-	$8-X_{15}-X_{26}-X_{37}-X_{48}$	-	$30-X_{17}-X_{28}-X_{39}-X_{410}$	-	-	-
	C	X_{51}	X_{52}	X_{53}	X_{54}	-	X_{56}	X_{57}	-	X_{59}	-	X_{511}	-	-	-
6	E	$X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{56}+X_{57}+X_{59}+X_{511}$	$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{45}+X_{46}+X_{48}+X_{410}-X_{51}$	$X_{31}+X_{32}+X_{34}+X_{35}+X_{37}+X_{39}-X_{41}-X_{52}$	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}-X_{31}-X_{42}-X_{53}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}-X_{32}-X_{43}-X_{54}$	-	$10-X_{12}-X_{23}-X_{34}-X_{45}-X_{56}$	$22-X_{13}-X_{24}-X_{35}-X_{46}-X_{57}$	-	$8-X_{15}-X_{26}-X_{37}-X_{48}-X_{59}$	-	$30-X_{17}-X_{28}-X_{39}-X_{410}-X_{511}$	-	-
	C	X_{61}	X_{62}	X_{63}	X_{64}	X_{65}	-	X_{67}	X_{68}	-	X_{610}	-	X_{612}	-	-
7	E	$X_{61}+X_{62}+X_{63}+X_{64}+X_{65}+X_{67}+X_{68}+X_{610}+X_{612}$	$X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{56}+X_{57}+X_{59}+X_{511}-X_{61}$	$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{45}+X_{46}+X_{48}+X_{410}-X_{51}-X_{62}$	$X_{31}+X_{32}+X_{34}+X_{35}+X_{37}+X_{39}-X_{41}-X_{52}-X_{63}$	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}-X_{31}-X_{42}-X_{53}-X_{64}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}-X_{32}-X_{43}-X_{54}-X_{65}$	-	$10-X_{12}-X_{23}-X_{34}-X_{45}-X_{56}-X_{67}$	$22-X_{13}-X_{24}-X_{35}-X_{46}-X_{57}-X_{68}$	-	$8-X_{15}-X_{26}-X_{37}-X_{48}-X_{59}-X_{610}$	-	$30-X_{17}-X_{28}-X_{39}-X_{410}-X_{511}-X_{612}$	-
	C	X_{71}	X_{72}	X_{73}	X_{74}	X_{75}	X_{76}	-	X_{78}	X_{79}	-	X_{711}	-	X_{713}	-
8	E	$X_{71}+X_{72}+X_{73}+X_{74}+X_{75}+X_{76}+X_{78}+X_{79}+X_{711}+X_{713}$	$X_{61}+X_{62}+X_{63}+X_{64}+X_{65}+X_{67}+X_{68}+X_{610}+X_{612}-X_{71}$	$X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}+X_{56}+X_{57}+X_{59}+X_{511}-X_{61}-X_{72}$	$X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{45}+X_{46}+X_{48}+X_{410}-X_{51}-X_{62}-X_{73}$	$X_{31}+X_{32}+X_{34}+X_{35}+X_{37}+X_{39}-X_{41}-X_{52}-X_{63}-X_{74}$	$X_{21}+X_{23}+X_{24}+X_{26}+X_{28}-X_{31}-X_{42}-X_{53}-X_{64}-X_{75}$	$X_{12}+X_{13}+X_{15}+X_{17}-X_{21}-X_{32}-X_{43}-X_{54}-X_{65}-X_{76}$	-	$10-X_{12}-X_{23}-X_{34}-X_{45}-X_{56}-X_{67}-X_{78}$	$22-X_{13}-X_{24}-X_{35}-X_{46}-X_{57}-X_{68}-X_{79}$	-	$8-X_{15}-X_{26}-X_{37}-X_{48}-X_{59}-X_{610}-X_{711}$	-	$30-X_{17}-X_{28}-X_{39}-X_{410}-X_{511}-X_{612}-X_{713}$

Das 49 variáveis de decisão que surgem na **TABELA 5**, apenas 4 envolvem decisões concernentes ao ano 1 do horizonte de planejamento. Estas variáveis são as seguintes:

X_{12} = número de hectares da idade 2 a serem cortados e plantados no ano 1;
X_{13} = número de hectares da idade 3 a serem cortados e plantados no ano 1;
X_{15} = número de hectares da idade 5 a serem cortados e plantados no ano 1;
X_{17} = número de hectares da idade 7 a serem cortados e plantados no ano 1;

As 5 variáveis que se referem a decisões do ano 2, por sua vez, são

X_{21} = número de hectares da idade 1 a serem cortados e plantados no ano 2;
X_{23} = número de hectares da idade 3 a serem cortados e plantados no ano 2;
X_{24} = número de hectares da idade 4 a serem cortados e plantados no ano 2;
X_{26} = número de hectares da idade 6 a serem cortados e plantados no ano 2;
X_{28} = número de hectares da idade 8 a serem cortados e plantados no ano 2;

Prosseguindo com este raciocínio, e omitindo a lista explícita das variáveis de decisão dos anos 3, 4, 5 e 6, têm-se finalmente as 10 variáveis de decisão do ano 7, as quais são:

X_{71} = número de hectares da idade 1 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{72} = número de hectares da idade 2 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{73} = número de hectares da idade 3 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{74} = número de hectares da idade 4 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{75} = número de hectares da idade 5 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{76} = número de hectares da idade 6 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{78} = número de hectares da idade 8 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{79} = número de hectares da idade 9 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{711} = número de hectares da idade 11 a serem cortados e plantados no ano 7;
X_{713} = número de hectares da idade 13 a serem cortados e plantados no ano 7;

Para cada ano do HP, há variáveis que representam cortes de floresta com idade maior do que esse ano. No 7º ano do HP, por exemplo, as variáveis X_{78}, X_{79}, X_{711} e X_{713} representam, respectivamente, o corte de áreas com 8, 9, 11 e 13 anos de idade. Isto somente é possível porque já no início do HP há florestas com 2, 3, 5 e 7 anos de idade, respectivamente. Igualmente pode-se verificar que para cada ano do HP, exceto para o primeiro, há uma ou mais variáveis que representam cortes de florestas com idade inferior a esse ano. Seguindo com o exemplo do 7º ano do HP, tem-se as variáveis X_{71}, X_{72}, X_{73}, X_{74}, X_{75} e X_{76} que representam, respectivamente, o corte de áreas com 1, 2, 3, 4, 5 e 6 anos de idade. Estas são florestas novas que vão surgindo ao longo do HP na medida em que os cortes seguidos de plantio vão ocorrendo.

Restrições

Devido ao fato do modelo II não preservar a identidade geográfica das áreas que compõem a floresta original, não há necessidade de formular as restrições de área conforme apresentadas no modelo I da aula anterior. No entanto, devem-se estabelecer restrições para atingir a regulação das áreas da nova floresta. Na medida em que forem transcorrendo os anos do horizonte de planejamento, sempre e quando ocorra o corte raso de áreas seguido de plantio de florestas novas, irão surgindo novas áreas recém plantadas com 1 ano de idade. Com o passar dos anos, estas novas áreas irão passando para as idades 2, 3, 4, e assim sucessivamente. Estas novas florestas aparecem em destaque na área sombreada no canto inferior esquerdo da **TABELA 6**. Já a floresta original, cuja idade vai aumentando na medida em que transcorrem os anos do horizonte de planejamento do mesmo modo que com qualquer mortal do nosso planeta, aparece na porção central do corpo da **TABELA 6** que está sem sombrear. No exemplo, a floresta original não é completa, isto é, não está formada por talhões repartidos em todas as idades. Somente as idades 2, 3, 5 e 7 estão inicialmente representadas nesta floresta original. A área sombreada no canto superior direito mostra as florestas que, para o caso do exemplo que está senda analisado, não existem nem existirão.

TABELA 6. Evolução da floresta atual e das novas florestas no modelo II.

Ano		**Idade da floresta**													
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
		Produção (m³/ha)													
		2	**15**	**34**	**79**	**140**	**230**	**306**	**364**	**405**	**436**	**461**	**487**	**502**	**513**
1	**E** **C**														
2	**E** **C**														
3	**E** **C**												**Floresta inexistente**		
4	**E** **C**							**Floresta original**							
5	**E** **C**			**Floresta nova**											
6	**E** **C**														
7	**E** **C**														
8	**E**	10	10	10	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0	0

Prosseguindo com a formulação deste problema de planejamento florestal, é necessário formular as restrições de estoque final para que a floresta fique regulada. Para tanto, basta observar a divisão das áreas na última linha da **TABELA 6**, onde aparecem 7 talhões de 10 ha cada. Em outras palavras, a floresta regulada, cuja superfície total é de 70 ha, deverá ficar dividida em 7 talhões de 10 ha cada com idades variando de 1 a 7 anos. Idades superiores aos 7 anos são indesejáveis, fato que é ilustrado com os valores nulos adicionais na última linha da **TABELA 6**, correspondentes às idades de 8 a 14 anos.

A necessidade de dispor de uma superfície de 10 ha com 1 ano de idade ao término do HP pode ser atendida com uma restrição que exija que o estoque no início do ano 8 seja igual a 10 ha. Isto é expresso da seguinte forma:

$$X_{71} + X_{72} + X_{73} + X_{74} + X_{75} + X_{76} + X_{78} + X_{79} + X_{711} + X_{713} = 10 \text{ ha de idade } 1$$

De maneira análoga, a exigência de dispor de 10 ha de florestas com idades variando de 2 a 7 pode ser satisfeita, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64} + X_{65} + X_{67} + X_{68} + X_{610} + X_{612} - X_{71} = 10 \text{ ha de idade } 2$$

$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{56} + X_{57} + X_{59} + X_{511} - X_{61} - X_{72} = 10 \text{ ha de idade } 3$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{45} + X_{46} + X_{48} + X_{410} - X_{51} - X_{62} - X_{73} = 10 \text{ ha de idade } 4$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{34} + X_{35} + X_{37} + X_{39} - X_{41} - X_{52} - X_{63} - X_{74} = 10 \text{ ha de idade } 5$$
$$X_{21} + X_{23} + X_{24} + X_{26} + X_{28} - X_{31} - X_{42} - X_{53} - X_{64} - X_{75} = 10 \text{ ha de idade } 6$$
$$X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{17} - X_{21} - X_{32} - X_{43} - X_{54} - X_{65} - X_{76} = 10 \text{ ha de idade } 7$$

Existe ainda a necessidade de eliminar toda possibilidade de ter, ao término do horizonte de planejamento, áreas de floresta com idades superiores aos 7 anos. Isto é feito obrigando que os 4 talhões existentes na floresta original sejam completamente cortados e renovados ao longo do HP. As seguintes expressões garantem isto:

$$X_{12} + X_{23} + X_{34} + X_{45} + X_{56} + X_{67} + X_{78} = 10 \text{ ha}$$
$$X_{13} + X_{24} + X_{35} + X_{46} + X_{57} + X_{68} + X_{79} = 22 \text{ ha}$$
$$X_{15} + X_{26} + X_{37} + X_{48} + X_{59} + X_{610} + X_{711} = 8 \text{ ha}$$
$$X_{17} + X_{28} + X_{39} + X_{410} + X_{511} + X_{612} + X_{713} = 30 \text{ ha}$$

O conjunto de 4 restrições apresentado garante que cada talhão da floresta original seja integralmente cortado por meio de uma ou mais intervenções ao longo dos 7 anos do HP.

Por último, a condição obrigatória de não-negatividade pode ser resumida da seguinte forma:

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall i;\ \forall j$$

onde o símbolo ∀ significa "para todo".

Função objetivo

Como já foi oportunamente mencionado na apresentação deste exemplo na aula anterior, o objetivo do proprietário da floresta é maximizar o volume de madeira retirada ao longo do HP. Deste modo, levando em consideração as 49 variáveis geradas na **TABELA 5** e as respectivas produções da **TABELA 4**, as quais foram novamente inseridas no topo da **TABELA 6**, tem-se a seguinte expressão como função objetivo:

max Z =

	$15X_{12}$	$+34X_{13}$		$+140X_{15}$		$+306X_{17}$						
$+2X_{21}$		$+34X_{23}$	$+79X_{24}$		$+230X_{26}$		$+364X_{28}$					
$+2X_{31}$	$+15X_{32}$		$+79X_{34}$	$+140X_{35}$		$+306X_{37}$		$+405X_{39}$				
$+2X_{41}$	$+15X_{42}$	$+34X_{43}$		$+140X_{45}$	$+230X_{46}$		$+364X_{48}$		$+436X_{410}$			
$+2X_{51}$	$+15X_{52}$	$+34X_{53}$	$+79X_{54}$		$+230X_{56}$	$+306X_{57}$		$+405X_{59}$		$+461X_{511}$		
$+2X_{61}$	$+15X_{62}$	$+34X_{63}$	$+79X_{64}$	$+140X_{65}$		$+306X_{67}$	$+364X_{68}$		$+436X_{610}$		$+487X_{612}$	
$+2X_{71}$	$+15X_{72}$	$+34X_{73}$	$+79X_{74}$	$+140X_{75}$	$+230X_{76}$		$+364X_{78}$	$+405X_{79}$		$+461X_{711}$		$+502X_{713}$

Modelo completo

Sumarizando as expressões matemáticas da FO e das restrições, tem-se o modelo completo apresentado a seguir:

$$
\begin{array}{l}
\max Z = \\
\quad 15X_{12} + 34X_{13} + 140X_{15} + 306X_{17} \\
+2X_{21} + 34X_{23} + 79X_{24} + 230X_{26} + 364X_{28} \\
+2X_{31} + 15X_{32} + 79X_{34} + 140X_{35} + 306X_{37} + 405X_{39} \\
+2X_{41} + 15X_{42} + 34X_{43} + 140X_{45} + 230X_{46} + 364X_{48} + 436X_{410} \\
+2X_{51} + 15X_{52} + 34X_{53} + 79X_{54} + 230X_{56} + 306X_{57} + 405X_{59} + 461X_{511} \\
+2X_{61} + 15X_{62} + 34X_{63} + 79X_{64} + 140X_{65} + 306X_{67} + 364X_{68} + 436X_{610} + 487X_{612} \\
+2X_{71} + 15X_{72} + 34X_{73} + 79X_{74} + 140X_{75} + 230X_{76} + 364X_{78} + 405X_{79} + 461X_{711} + 502X_{713} \\
\text{sa} \\
X_{71} + X_{72} + X_{73} + X_{74} + X_{75} + X_{76} + X_{78} + X_{79} + X_{711} + X_{713} = 10 \\
X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64} + X_{65} + X_{67} + X_{68} + X_{610} + X_{612} - X_{71} = 10 \\
X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{56} + X_{57} + X_{59} + X_{511} - X_{61} - X_{72} = 10 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{45} + X_{46} + X_{48} + X_{410} - X_{51} - X_{62} - X_{73} = 10 \\
X_{31} + X_{32} + X_{34} + X_{35} + X_{37} + X_{39} - X_{41} - X_{52} - X_{63} - X_{74} = 10 \\
X_{21} + X_{23} + X_{24} + X_{26} + X_{28} - X_{31} - X_{42} - X_{53} - X_{64} - X_{75} = 10 \\
X_{12} + X_{13} + X_{15} + X_{17} - X_{21} - X_{32} - X_{43} - X_{54} - X_{65} - X_{76} = 10 \\
X_{12} + X_{23} + X_{34} + X_{45} + X_{56} + X_{67} + X_{78} = 10 \\
X_{13} + X_{24} + X_{35} + X_{46} + X_{57} + X_{68} + X_{79} = 22 \\
X_{15} + X_{26} + X_{37} + X_{48} + X_{59} + X_{610} + X_{711} = 8 \\
X_{17} + X_{28} + X_{39} + X_{410} + X_{511} + X_{612} + X_{713} = 30 \\
X_{ij} \geq 0 \quad \forall i; \forall j
\end{array}
$$

SOLUÇÃO ÓTIMA

Para resolver o problema descrito como exemplo na presente aula, sugiro a você, caro leitor, que abra o Demo LINDO/PC 6.1 e repita os passos já descritos na resolução do modelo I apresentados na aula anterior. Na janela que aparece no lado direito da tela apresentada na **FIGURA 28** pode-se observar a solução ótima.

De imediato surge a curiosidade de comparar a resposta obtida por meio deste modelo II com aquela obtida na aula anterior, quando o mesmo exemplo foi formulado pelo modelo I. Observa-se na **FIGURA 28** que a FO atingiu um volume máximo de 24.462,00 m³.

O valor da FO de 24.462 m³ indica o máximo volume que pode ser obtido da floresta original, ao longo dos 7 anos do HP, respeitando a premissa de deixá-la regulada. Pode-se observar que a maioria das variáveis de decisão são nulas, situação que geralmente ocorre neste tipo de problemas de planejamento. No entanto, quem estiver duvidando da necessidade de dar tantas opções de escolha ao simplex, pode ter certeza de que absolutamente todas estas opções são necessárias. Até mesmo as variáveis que representam cortes de áreas de flores com 1 e 2 anos de idade, opções ridículas do ponto de vista prático, devem ser dadas para evitar que possa vir a ocorrer uma situação de infactibilidade. Obviamente, se o simplex optar por cortar florestas com 1 ou 2 anos de idade, cujas produções são realmente muito pequenas, provavelmente houve alguma inconsistência na formulação.

A **TABELA 7** apresenta a evolução dinâmica das áreas em estoque, cortadas e plantadas por idade ao longo do HP, conforme a solução ótima obtida pelo simplex. Percebe-se nesta tabela que não houve cortes em florestas com 1, 2, 3, 4 ou 5 anos de idade. A maioria dos cortes indicados pela solução ótima concentra-se nas áreas de floresta com 8 anos de idade (38 ha), sendo que aparecem também alguns cortes em áreas com 6, 7 e 9 anos de idade (2, 20 e 10 ha, respectivamente). A explicação disto pode ser encontrada no incremento médio anual (IMA) em volume da tabela de produção (**TABELA 1**).

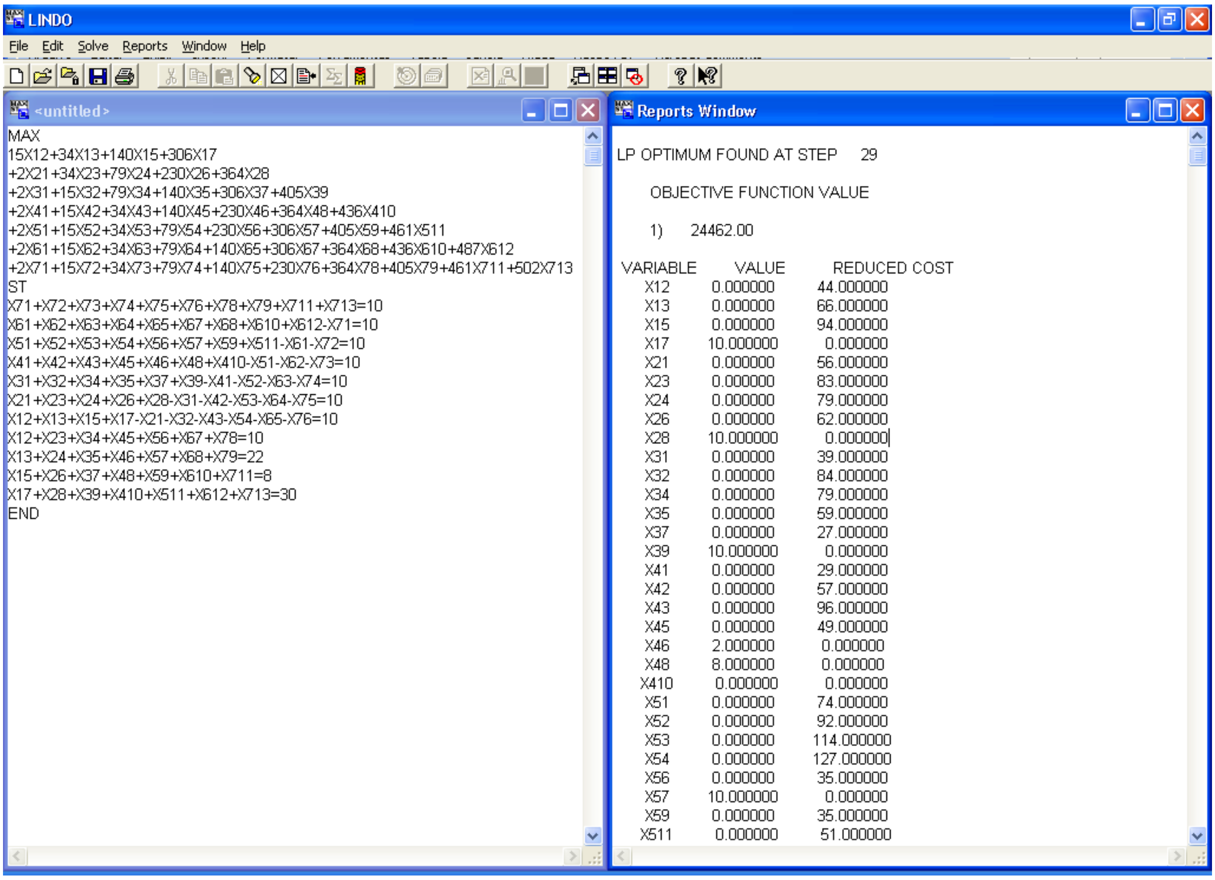


FIGURA 28. Resolução do problema de planejamento florestal otimizado com o LINDO.

O máximo IMA da floresta do exemplo, conforme mostra a **TABELA 4**, ocorre aos 8 anos de idade com 45,5 m³/ha/ano. O algoritmo simplex obviamente percebe isto e tenta por todos os meios ao seu dispor realizar a maior parte dos cortes na floresta quando as áreas atingem os 8 anos de idade.

Para facilitar a análise, na **TABELA 7** foi ressaltada com borda mais espessa a evolução da área de 22 ha que inicialmente tem 3 anos de idade. Esta área não sofre nenhum corte nos primeiros 3 anos do HP, sendo posteriormente cortada por partes ao longo dos anos 4, 5 e 6, com 2, 10 e mais 10 ha, respectivamente. Deste modo, a totalidade dos 22 ha do talhão T2 (**FIGURA 2**) é renovada ao término dos 7 anos do HP.

Pode-se observar ainda na **TABELA 7** que o talhão T4, com 30 ha de floresta com 7 anos de idade, é dividido em 3 blocos de 10 ha cada, os quais são cortados nos anos 1, 2 e 3 do HP. Neste caso, os blocos são cortados, respectivamente, com 7, 8 e 9 anos de idade. A divisão deste talhão em três blocos responde ao fato de que o algoritmo simplex percebe, lá no final do HP, que é necessário deixar a floresta regulada em 7 blocos de 10 ha cada um. As primeiras 7 restrições da formulação (**FIGURA 28**) garantem que esta exigência seja respeitada.

TABELA 7. Evolução dinâmica das áreas submetidas a corte e plantio no modelo II, mostrando a disponibilidade em estoque (E) e as variáveis de corte (C).

Ano		Idade da floresta 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	E	-	10	22	-	8	-	30	-	-	-	-	-	-	-
	C	-	0	0	-	0	-	10	-	-	-	-	-	-	-
2	E	10	-	10	22	-	8	-	20	-	-	-	-	-	-
	C	0	-	0	0	-	0	-	10	-	-	-	-	-	-
3	E	10	10	-	10	22	-	8	-	10	-	-	-	-	-
	C	0	0	-	0	0	-	0	-	10	-	-	-	-	-
4	E	10	10	10	-	10	22	-	8	-	-	-	-	-	-
	C	0	0	0	-	0	2	-	8	-	-	-	-	-	-
5	E	10	10	10	10	-	10	20	-	-	-	-	-	-	-
	C	0	0	0	0	-	0	10	-	-	-	-	-	-	-
6	E	10	10	10	10	10	-	10	10	-	-	-	-	-	-
	C	0	0	0	0	0	-	0	10	-	-	-	-	-	-
7	E	10	10	10	10	10	10	-	10	-	-	-	-	-	-
	C	0	0	0	0	0	0	-	10	-	-	-	-	-	-
8	E	10	10	10	10	10	10	10	-	-	-	-	-	-	-

A **FIGURA 29** mostra a evolução dos volumes colhidos por ano ao longo do HP. Embora estes volumes não sofram grandes oscilações, percebe-se a existência de algumas irregularidades. Enquanto que no ano 3 o volume retirado da floresta é quase 33% superior ao do ano 1, o mesmo volta ao seu valor inicial novamente no ano 5.

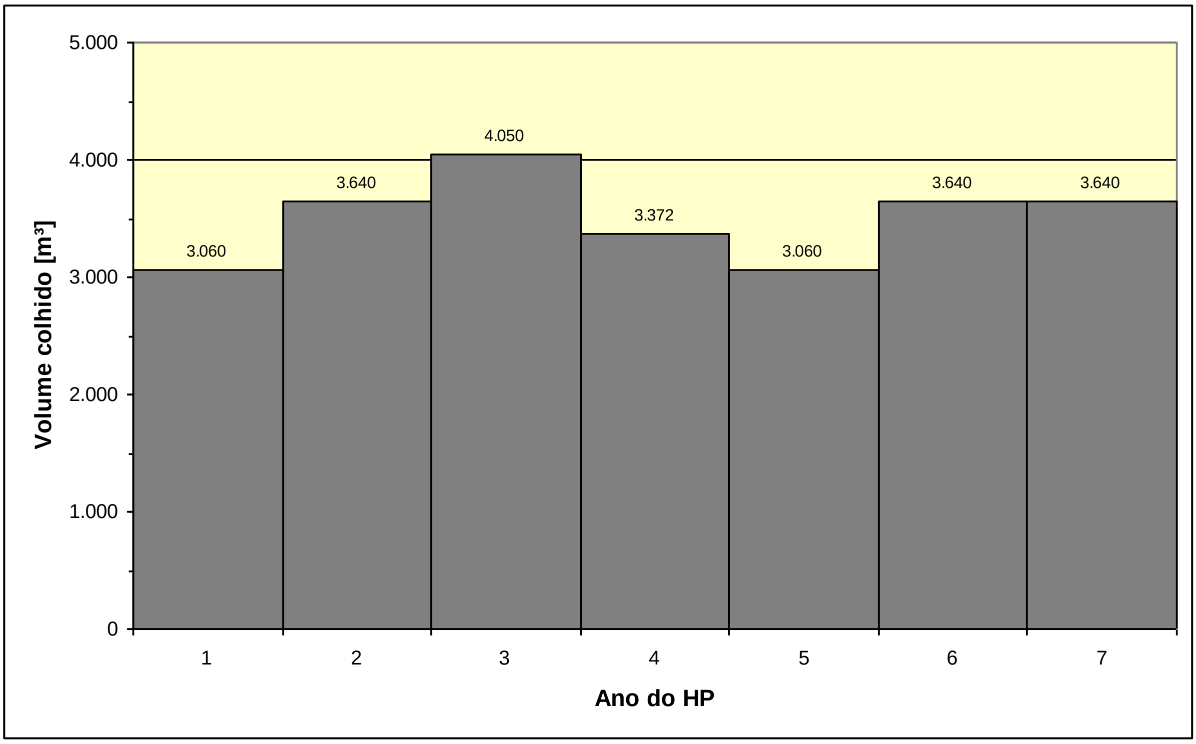


FIGURA 29. Volume colhido por ano ao longo do HP de 7 anos.

Neste momento é bom refletir com respeito a qual será o volume colhido anualmente na nova floresta regulada. Tal como foi feito com o modelo I na aula anterior, este cálculo pode ser realizado considerando que todo ano será cortada uma superfície de 10ha, com uma produção cumulativa de 306 m³/ha. Deste modo, quando a regulação da floresta for alcançada, ou seja, ao término do HP, anualmente poderá ser retirado um volume de 10ha x 306m³/ha = 3.060m³. Na **FIGURA 29** percebe-se que em nenhum dos anos do HP o volume retirado é menor do que 3.060m³, indicando que, pelo menos do ponto de vista do planejador, a situação durante o HP é otimista.

Por pura curiosidade, poder-se-ia pensar em forçar o modelo I de modo a obrigar a retirar, ao longo de todos os anos do HP, exatamente o mesmo volume anual que poderia ser retirado posteriormente da floresta regulada, isto é, 3.060m³/ano. A **FIGURA 30** mostra a nova formulação e resolução do modelo levando em consideração estas 7 novas restrições adicionais. A **TABELA 8** e a **FIGURA 31** apresentam esta nova solução ótima. Observe o sinal de igualdade (=) colocado nas últimas 7 restrições da nova formulação.

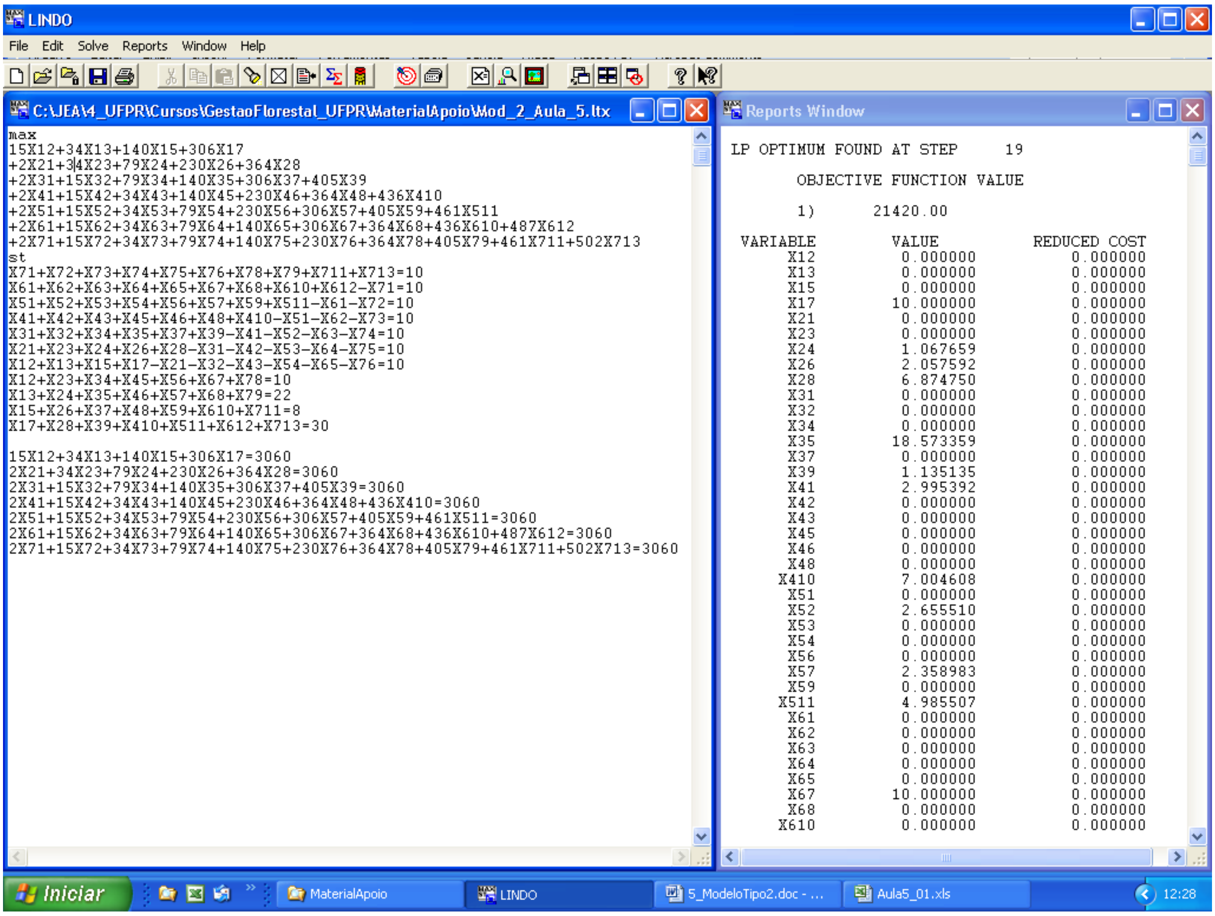


FIGURA 30. Formulação com o LINDO visando manter o volume colhido anualmente no mesmo patamar que a floresta regulada após o HP.

Muitas considerações devem ser feitas a partir da nova resposta ótima gerada. O simplex atendeu à imposição de não retirar mais do que 3.060m³ em nenhum dos anos do HP. A **FIGURA 31** é auto-explicativa; mostra a linha de corte no volume colhido anualmente decorrente das novas 7 restrições impostas ao modelo.

Na **TABELA 8** percebe-se o aumento nas variáveis de decisão não-nulas que houve. Por sinal, até foi necessário lançar mão de determinados cortes absurdos do ponto de vista prático, como, por exemplo, nos anos 4 e 5 do HP, onde foram cortados 3 ha e 2,66 ha de florestas com 1 e 2 anos de idade, respectivamente. O simplex não deve ser culpado por este fato; pode-se dizer, fazendo justiça com o simplex que não entende nada de florestas, que o mesmo foi obrigado a encontrar uma solução que atendesse à obstinada vontade do modelador, e mesmo assim garantisse a retirada do máximo volume possível.

TABELA 8. Evolução dinâmica das áreas submetidas a corte raso e plantio no modelo com restrições que visam manter o volume colhido anualmente no mesmo patamar que a floresta regulada após o HP.

Ano		Idade da floresta													
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	**E**	0	10	22	0	8	0	30	0	0	0	0	0	0	0
	C	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0
2	**E**	10	0	10	22	0	8	0	20	0	0	0	0	0	0
	C	0	0	0	1,07	0	2,06	0	6,87	0	0	0	0	0	0
3	**E**	10	10	0	10	20,93	0	5,94	0	13,13	0	0	0	0	0
	C	0	0	0	0	18,57	0	0	0	1,14	0	0	0	0	0
4	**E**	19,71	10	10	0	10	2,36	0	5,94	0	11,99	0	0	0	0
	C	3	0	0	0	0	0		0	0	7	0	0	0	0
5	**E**	10	16,71	10	10	0	10	2,36	0	5,94	0	4,99	0	0	0
	C	0	2,66	0	0	0	0	2,36	0	0	0	4,99	0	0	0
6	**E**	10	10	14,06	10	10	0	10	0	0	5,94	0	0	0	0
	C	0	0	0	0	0	0	10		0	0	0	0	0	0
7	**E**	10	10	10	14,06	10	10	0	0	0	0	5,94	0	0	0
	C	0	0	0	4,06	0	0	0		0	0	5,94	0	0	0
8	**E**	10	10	10	10	10	10	10	0	0	0	0	0	0	0

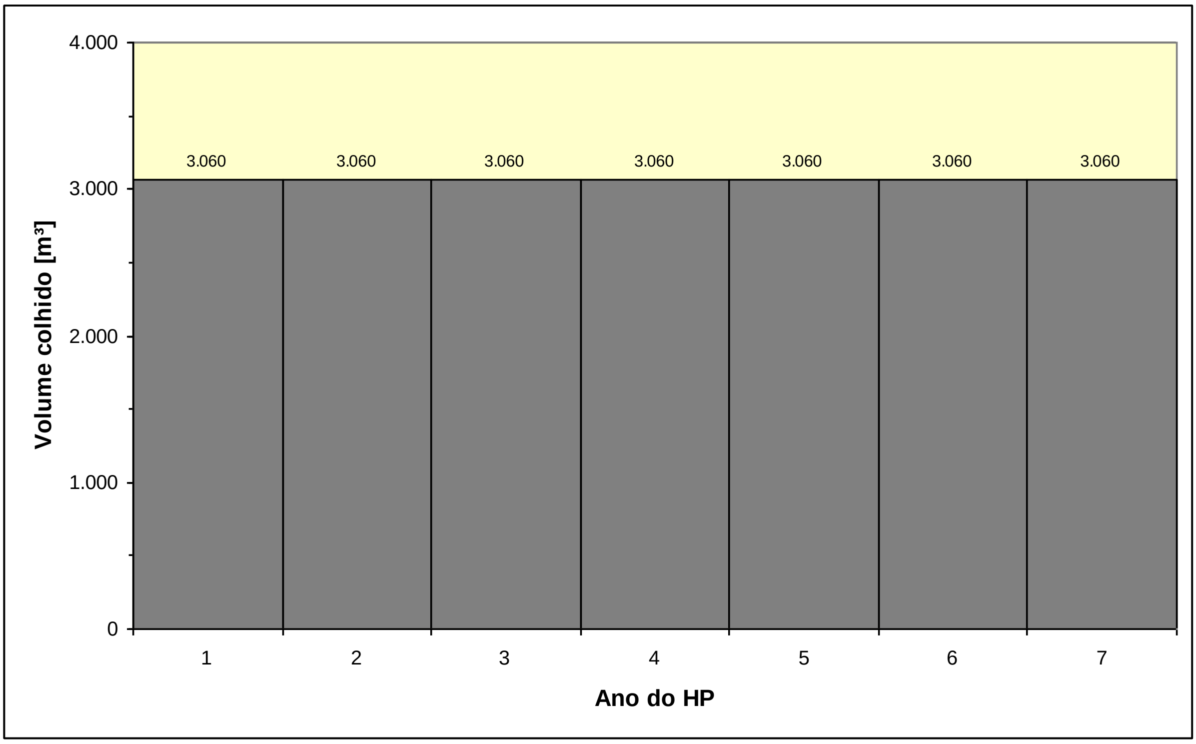


FIGURA 31. Volume colhido por ano ao longo do HP com as restrições de equilíbrio.

O "preço" a ser pago pelo controle excessivo do fluxo de madeira colhido anualmente ao longo do HP é a diferença entre as duas soluções ótimas, expressas cada uma delas pelo valor da FO correspondente. Deste modo, surge o valor de 3.042m³ como sendo o "custo" do novo conjunto de restrições aplicadas ao modelo. Este valor é obtido pela diferença 24.462m³ – 21.420m³ = 3.042m³. O novo valor da FO não poderia ter sido outro do que o obtido, uma vez que foi imposta a cota obrigatória de retirar anualmente um volume de 3.060m³, o que representa, ao término do HP de 7 anos, um volume total de 7 x 3.060m³ = 21.420m³.

Como comentário final, pode-se dizer que foram desperdiçados 3.042m³ de madeira devido ao fato de impor restrições para controlar de forma rígida o volume. Este desperdício pode muito bem ser observado comparando os gráficos apresentados na **FIGURA 29** e na **FIGURA 31**.

ALTERAÇÃO DA ROTAÇÃO

O modelo II objeto da presente aula possui vantagens excepcionais na hora de formular problemas alternativos de planejamento florestal otimizado. A simples alteração da rotação, por exemplo, que segundo o modelo I implicaria em trabalhosas alterações, neste modelo II pode ser feita de forma muito simples. Basta re-escrever as restrições de estoque final das áreas com florestas nas diferentes idades.

Se a nova rotação desejada for, por exemplo, 6 anos, devido a uma eventual incorporação de material genético melhorado, basta deixar a floresta dividida em 6 blocos de 11,66 ha, equivalente a 1/6 da área total. O único cuidado que deve ser levado em consideração é que, devido ao fato do produto de 6 x 11,66 não ser exatamente igual a 70ha (6 x 11,66 = 69,96), pode surgir um erro numérico na hora de processar o modelo no LINDO ou em qualquer outro *software* de otimização. Este problema pode ser contornado fazendo com que 4 talhões tenham 11,67ha de superfície, e os restantes dois talhões tenham 11,66ha de superfície.

Por outro lado, se a nova rotação a ser aplicada na floresta for de 8 anos, conforme sugerido pela função de crescimento de modo realizar o corte raso na idade em que o IMA é máximo, deverá ser acrescentado mais um ano no HP, uma vez que não é possível garantir, após 7 anos de planejamento, uma floresta regulada dividida em 8 blocos com idades variando de 1 a 8 anos. No entanto, o acréscimo de mais um ano no HP não ocasiona grandes transtornos; a maior parte da formulação para um HP de 7 anos, conforme mostrado na **TABELA 5**, permanece inalterada.

Na **TABELA 9** é ilustrada a formulação que visa deixar a nova floresta regulada para uma rotação de 8 anos. Percebe-se o acréscimo de mais uma linha correspondente às variáveis de decisão a serem avaliadas durante o 8º ano do HP, bem como mais uma coluna correspondente às florestas com 15 anos de idade. A produção desta nova idade, obtida a partir da função de produção, é de 520m³/ha (**TABELA 4**).

Sumarizando, a nova floresta ficará regulada se for dividida em 8 blocos de 8,75ha cada. Este valor da simples divisão da área total da floresta em 8 porções (70 / 8 = 8,75). O acréscimo de novas variáveis de decisão é uma conseqüência normal do aumento do HP: quanto mais tempo houver para planejar, mais decisões poderão ser tomadas.

TABELA 9. Evolução da floresta atual e das novas florestas no modelo II, considerando a nova rotação de 8 anos para a floresta regulada.

Ano		**Idade da floresta**														
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
		Produção (m³/ha)														
		2	**15**	**34**	**79**	**140**	**230**	**306**	**364**	**405**	**436**	**461**	**487**	**502**	**513**	**520**
1	**E C**															
2	**E C**															
3	**E C**												**Floresta inexistente**			
4	**E C**							**Floresta original**								
5	**E C**			**Floresta nova**												
6	**E C**															
7	**E C**															
8	**E C**															
9	**E**	8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	0	0	0	0	0	0	0

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mais uma aula concluiu e espero que agora você, caro leitor, se sinta plenamente entrosado neste mundo virtual que é o planejamento florestal otimizado por meio de ferramentas matemáticas. Se você estiver em dúvida de se vale ou não a pena formular este último novo modelo apresentado para deixar a floresta regulada para uma rotação de 8 anos, pode ficar sossegado e preparar lápis, papel e borracha, que muito provavelmente esta tarefa irá ser solicitada como um dos exercícios desta aula.

6 - O MODELO DE TRANSPORTE

Diferentemente das últimas aulas, onde foram vistos dois modelos genéricos de planejamento florestal otimizado, na presente aula será abordado um problema clássico da literatura de otimização. Trata-se do Modelo de Transporte, assim denominado por ter como objetivo minimizar o custo global de transporte em um determinado arranjo produtivo com múltiplas origens e destinos.

Embora passível de ser resolvido pelo algoritmo Simplex, este problema possui um método de resolução próprio, fato que o leva a ser estudado separadamente.

O MODELO DE TRANSPORTE

O Modelo de Transporte (MT) tem a ver com a elaboração de um plano de custo mínimo para transportar uma determinada mercadoria de várias fontes (pontos de produção) a vários destinos (clientes). Para o caso do transporte florestal principal, que envolve basicamente caminhões transportando toras até as indústrias, o MT tem por objetivo determinar o volume total ótimo de madeira, para cada tipo de produto florestal ou tora, que deverá ser transportado entre os talhões que o produzem e os clientes que o demandam, de maneira a minimizar o custo total de transporte. A finalidade de estudar a aplicação desta técnica baseia-se no fato de que ela está suficientemente bem detalhada na literatura, possui algoritmos específicos para sua resolução e produz resultados satisfatórios para o problema.

O MT é basicamente um programa linear que pode ser resolvido através do método simplex regular. Porém, sua estrutura particular, como será visto adiante, torna possível o desenvolvimento de um procedimento de solução, conhecido como Técnica de Transporte, que é mais eficiente em termos de cálculo (TAHA, 1994). Normalmente esta técnica é apresentada na forma elementar, de maneira que pareça totalmente separada do método simplex, mas deve ser destacado que ela segue essencialmente os passos exatos deste método.

Os dados necessários à aplicação da Técnica de Transporte são:

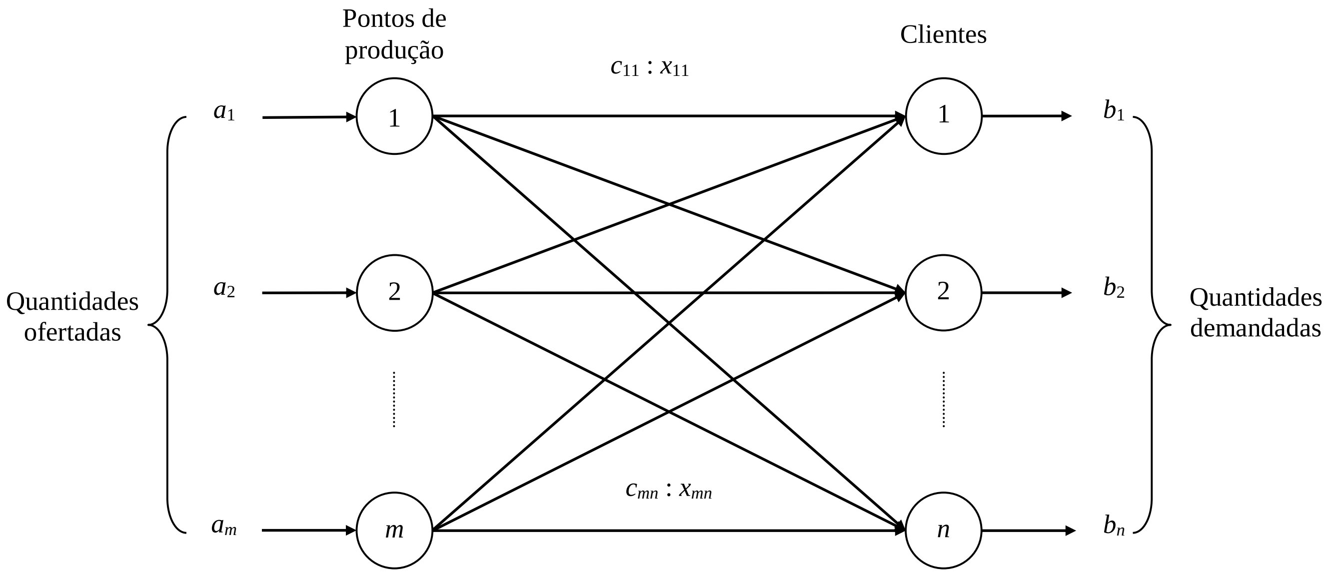
- Quantidade a_{pi} de produto p produzida em cada ponto de produção i;
- Quantidade b_{pj} de produto p requerida para cada cliente j; e,
- Custo c_{ij} de transporte unitário de cada ponto de produção i a cada cliente j.

Como é considerado somente um tipo de produto p por vez, um cliente j pode receber sua quantidade demandada de um ou mais pontos de produção i. O objetivo do modelo é determinar a quantidade ótima que será enviada de cada ponto de produção i a cada cliente j, de maneira que o custo total de transporte seja minimizado.

A suposição básica do MT é que o custo de transporte em uma rota é diretamente proporcional ao número de unidades transportadas. A definição de unidade de transporte varia com o tipo de mercadoria que se transporta, mas no caso do transporte de multiprodutos florestais a unidade empregada pode ser o metro cúbico (m^3), a tonelada (t) ou o estéreo (st).

A **FIGURA 32** apresenta o MT como uma rede com m pontos de produção e n clientes. Um ponto de produção ou um cliente está representado por um **nó**. O **arco** que une um ponto de produção e um cliente representa a rota pela qual pode ser transportado o produto. A quantidade de produto ofertado no ponto de produção i é a_i e a quantidade demandada do mesmo produto no cliente j é b_j. O custo do transporte unitário entre o ponto de produção i e o cliente j é c_{ij}.

FIGURA 32. MODELO DE TRANSPORTE REPRESENTADO COMO UMA REDE COM *m* PONTOS DE PRODUÇÃO E *n* CLIENTES.



Se x_{ij} representa a quantidade de produto transportada do ponto de produção i até o cliente j, então o modelo geral de PL que representa o modelo de transporte é:

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad \forall i,\ \forall j$$

O conjunto de restrições (2) estabelece que a soma dos envios de um ponto de produção não pode ser maior que sua quantidade ofertada; de maneira análoga, o conjunto de restrições (3) estabelece que a soma dos envios a um cliente não pode ser menor que sua quantidade demandada.

O modelo, assim como foi descrito, implica que a quantidade ofertada total $\sum a_i$ deve ser pelo menos igual à quantidade demandada total $\sum b_j$. Quando a quantidade ofertada total é igual à quantidade demandada total ($\sum a_i = \sum b_j$), a formulação resultante recebe o nome de modelo de transporte equilibrado. Este modelo difere do anterior somente pelo fato de que todas as restrições são agora equações, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{5}$$

No mundo real não é necessariamente certo que a soma das quantidades ofertadas seja igual ou maior que a soma das quantidades demandadas. A própria Ciência Econômica, denominada por alguns autores de *Ciência da Escassez*, fundamenta sua existência no fato de que a quantidade ofertada muitas vezes é inferior à demandada e que existe um ponto de equilíbrio ao qual os mercados tendem livremente, pelo menos na teoria. Da mesma maneira, o MT sempre pode ser equilibrado. O equilíbrio, além de sua utilidade na representação de determinadas situações práticas, é importante para o desenvolvimento de um método de resolução que explore completamente a estrutura especial do MT. O equilíbrio, ao menos na modelagem do problema, pode ser atingido adicionando ao modelo um ponto de produção fictício se a quantidade demandada for maior do que a quantidade ofertada, ou um cliente fictício, caso contrário.

SOLUÇÃO DO MODELO DE TRANSPORTE - TÉCNICA DE TRANSPORTE

O método apresentado a seguir, denominado Técnica ou Método de Transporte (*Simplex Transportation Method*), aplica os passos do método simplex na forma dual e difere somente nos detalhes da implementação das condições de otimalidade e factibilidade.

Os passos básicos da Técnica de Transporte são:

Passo 1: Determinar uma solução factível inicial;
Passo 2: Se todas as variáveis satisfazem a condição de otimalidade, parar; caso contrário seguir ao *Passo 3*;
Passo 3: Determinar a variável que entra, que é escolhida dentre as variáveis não básicas;
Passo 4: Determinar a variável que sai dentre as variáveis da solução básica atual; depois obter a nova solução básica e retornar ao *Passo 2*.

Estes passos serão considerados exaustivamente. A **TABELA 10** representa as informações relevantes para a análise. O custo de transporte unitário c_{ij} contido nos retângulos pequenos é expresso em unidades monetárias, e as quantidades ofertadas e demandadas estão dadas em número de unidades do produto.

TABELA 10. Exemplo de uma tabela de transporte.

		Cliente				Quantidade ofertada
		1	2	3	4	
Ponto de produção	1	x_{11} [10]	x_{12} [0]	x_{13} [20]	x_{14} [11]	**15**
	2	x_{21} [12]	x_{22} [7]	x_{23} [9]	x_{24} [20]	**25**
	3	x_{31} [0]	x_{32} [14]	x_{33} [16]	x_{34} [18]	**5**
Quantidade demandada		**5**	**15**	**15**	**10**	

Determinação da solução factível inicial – Regra do canto noroeste

A definição geral do modelo de transporte requer que a quantidade ofertada total seja igual à quantidade demandada total ($\sum a_i = \sum b_j$). Este requisito dá origem a uma equação dependente, o que significa que o modelo de transporte tem somente $m + n - 1$ equações independentes.

Portanto, diferentemente do que ocorre no método simplex, uma solução factível básica inicial deverá incluir $m + n - 1$ variáveis básicas.

Normalmente, se o modelo de transporte fosse formulado como um problema de PL para aplicar o método simplex, seria necessário utilizar variáveis artificiais para garantir uma solução básica inicial. Porém, quando se utiliza a tabela de transporte, uma solução factível básica inicial pode ser obtida de uma maneira fácil e direta. Na seqüência é apresentado para este fim um procedimento denominado *regra do canto noroeste*. Outros procedimentos podem ser encontrados em TAHA (1994)[1].

A regra do canto noroeste começa designando a máxima quantidade possível à variável x_{11} de maneira a satisfazer totalmente a quantidade demandada (coluna) ou exaurir a quantidade ofertada (linha), o que ocorrer primeiro. Como no primeiro caso se satisfaz a quantidade demandada, retira-se a coluna correspondente a esta quantidade demandada e, no segundo caso, como o que se exaure é a quantidade ofertada, retira-se a linha correspondente a esta quantidade ofertada, indicando que as outras variáveis são iguais a zero. Quando são satisfeitas simultaneamente uma linha e uma coluna só se retira uma delas, a linha ou a coluna, garantindo a localização automática de variáveis básicas nulas, caso elas existam.

Depois de ajustar as quantidades ofertadas e demandadas de todas as linhas e colunas não retiradas, a quantidade factível máxima se designa ao primeiro elemento da nova linha, se a quantidade ofertada da linha for menor que a quantidade demandada da coluna, ou da nova coluna, caso contrário. O processo termina quando é deixada sem retirar exatamente uma linha ou uma coluna, ocasião em que o valor da última célula deve deixar ambas zeradas.

O procedimento descrito é aplicado agora às informações contidas na **TABELA 10**.

(1) $x_{11} = 5$. Como se satisfaz a quantidade demandada se retira a coluna 1. A quantidade ofertada remanescente é de 10 unidades na linha 1.
(2) $x_{12} = 10$. Como se exaure a quantidade ofertada se retira a linha 1. Falta satisfazer uma quantidade demandada de 5 unidades da coluna 2.
(3) $x_{22} = 5$. Como se satisfaz a quantidade demandada se retira a coluna 2. A quantidade ofertada remanescente é de 20 unidades na linha 2.
(4) $x_{23} = 15$. Como se satisfaz a quantidade demandada se retira a coluna 3. A quantidade ofertada remanescente é de 5 unidades na linha 2.
(5) $x_{24} = 5$. Como se exaure a quantidade ofertada se retira a linha 2. Falta satisfazer uma quantidade demandada de 5 unidades na coluna 4.
(6) $x_{34} = 5$, como simultaneamente se satisfaz a quantidade demandada e se exaure a quantidade ofertada, só se retira a linha 3 ou a coluna 4. Assim, só um dos dois fica sem retirar e o processo termina.

A solução básica inicial resultante é apresentada na **TABELA 11**. As variáveis básicas são $x_{11} = 5$; $x_{12} = 10$; $x_{22} = 5$; $x_{23} = 15$; $x_{24} = 5$ e $x_{34} = 5$. As variáveis restantes são não-básicas no nível 0. O custo de transporte associado é 5 x 10 + 10 x 0 + 5 x 7 + 15 x 9 + 5 x 20 + 5 x 18 = R$ 410.

[1] O *Método do Custo Mínimo* e o *Método de Aproximação de Vogel*, às vezes, podem produzir soluções iniciais melhores; porém, a *regra do canto noroeste* é mais fácil de ser programada em computador.

TABELA 11. Solução básica inicial obtida com a regra do canto noroeste.

	1	2	3	4	
1	10 **5**	0 **10**	20	11	**15**
2	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
3	0	14	16	18 **5**	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

Determinação da variável que entra – Método dos Multiplicadores

A variável que deve entrar na base é determinada mediante a condição de otimalidade do método simplex. Neste método são associados, respectivamente, os multiplicadores u_i e v_j com a linha i e a coluna j da tabela de transporte (**TABELA 10**). Para cada variável básica x_{ij} da solução atual, os multiplicadores u_i e v_j devem satisfazer a equação que segue:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ para cada variável básica } x_{ij}$$

Deste modo são geradas $m + n - 1$ equações (porque somente existem $m + n - 1$ variáveis básicas) com $m + n$ incógnitas. Devido ao fato de ter uma incógnita a menos do que o número de equações, os valores dos multiplicadores podem ser determinados a partir das equações estabelecendo um valor arbitrário para qualquer um dos multiplicadores (em geral, $u_1 = 0$) e resolvendo as $m + n - 1$ equações dos $m + n - 1$ multiplicadores desconhecidos restantes. Após o cálculo dos u_i e os v_j, os custos de oportunidade das variáveis não básicas x_{pq} são calculados como segue:

$$\bar{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq} \text{ , para cada variável não-básica } x_{pq}$$

Os valores destes multiplicadores serão os mesmos sem importar a seleção arbitrária do valor de u_1. Quem duvidar pode preparar lápis, papel e borracha e começar a fazer as contas.

A variável $\bar{c}_{pq}$ pode ser considerada como o custo relativo ou custo de oportunidade da variável não básica x_{pq}. Após estes cálculos, deve ser selecionada, como variável que entra, a variável não-básica x_{pq} com o custo de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ mais positivo.

Se este procedimento for aplicado às variáveis não-básicas da **TABELA 11** (solução atual), as equações associadas com as variáveis básicas estão dadas como:

x_{11}: $u_1 + v_1 = c_{11} = 10$ x_{12}: $u_1 + v_2 = c_{12} = 0$ x_{22}: $u_2 + v_2 = c_{22} = 7$
x_{23}: $u_2 + v_3 = c_{23} = 9$ x_{24}: $u_2 + v_4 = c_{24} = 20$ x_{34}: $u_3 + v_4 = c_{34} = 18$

Fazendo $u_1 = 0$, os valores dos multiplicadores são obtidos, sucessivamente, como $v_1 = 10$, $v_2 = 0$, $u_2 = 7$, $v_3 = 2$, $v_4 = 13$ e $u_3 = 5$. Os valores dos custos de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ das variáveis não-básicas estão dados da seguinte maneira:

$$x_{13}\text{: } \bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 20 = -18$$
$$x_{14}\text{: } \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2$$
$$x_{21}\text{: } \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5$$
$$x_{31}\text{: } \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = \boxed{15}$$
$$x_{32}\text{: } \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 0 - 14 = -9$$
$$x_{33}\text{: } \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 5 + 2 - 16 = -9$$

A variável x_{31}, por ter o custo de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ mais positivo, é variável que entra.

As equações $u_i + v_j = c_{ij}$, que foram utilizadas para determinar os multiplicadores, têm uma estrutura tão simples que na realidade é desnecessário escrevê-las na forma explícita. De modo geral resulta muito mais fácil determinar os multiplicadores diretamente a partir da tabela de transporte (**TABELA 10**), observando que u_i da linha i e v_j da coluna j se somam a c_{ij} quando a linha i e a coluna j se intersectam em uma célula que contém uma variável básica x_{ij}. Quando se determinam os multiplicadores u_i e v_j, pode-se calcular o custo de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ para toda variável x_{pq} não-básica somando u_p da linha p e v_q da coluna q e subtraindo c_{pq} da célula na interseção da linha p com a coluna q.

Determinação da variável que sai – Construção de um ciclo

Este passo, também denominado Percurso de Avaliação, é equivalente a aplicar a condição de factibilidade do método simplex. Porém, como todos os coeficientes das restrições do modelo original de transporte são zero ou um, as razões da condição de factibilidade terão sempre seu denominador igual a um. Portanto, os valores das variáveis básicas produzirão diretamente as razões associadas.

Com a finalidade de determinar a razão mínima constrói-se um ciclo fechado para a variável atual que entra (x_{31} na iteração atual). O ciclo começa e termina na variável não-básica designada. Este ciclo consta de segmentos sucessivos horizontais e verticais (conectados) cujos pontos extremos devem ser variáveis básicas, à exceção dos pontos extremos associados com a variável que entra. Isto significa que todo elemento de "esquina" do ciclo deve ser uma célula que contenha uma variável básica. A **TABELA 12** ilustra um ciclo para a variável que entra x_{31} dada na solução básica da **TABELA 11**. Este ciclo pode ser definido em termos das variáveis básicas como x_{31} - x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{24} - x_{34} - x_{31}. É irrelevante se o ciclo é construído no sentido horário ou anti-horário. Pode ser observado que, dada uma solução básica, somente um único ciclo pode ser construído para cada variável não-básica.

Pode-se observar na **TABELA 12** que se x_{31} (a variável que entra) é incrementada em uma unidade, então, para manter a factibilidade da solução, as variáveis básicas de "esquina" do ciclo x_{31} devem ser ajustadas como segue: x_{11} deve diminuir em uma unidade, x_{12} deve aumentar em uma unidade, x_{22} deve diminuir em uma unidade, x_{24} deve aumentar em uma unidade e x_{34} deve diminuir em uma unidade. Este processo se resume através dos sinais + e – das "esquinas" sudeste das células da **TABELA 12**. A mudança continuará satisfazendo todas as restrições.

TABELA 12. Ciclo com a variável x_{31} que entra na solução básica da **TABELA 11**.

	1	2	3	4	
1	10 **5** -	0 **10** +	20	11	**15**
2	12	7 **5** -	9 **15**	20 **5** +	**25**
3	0 x_{31} +	14	16	18 **5** -	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

A variável que sai é selecionada dentre as variáveis de "esquina" do ciclo que diminuirão quando a variável que entra x_{31} aumente. Estas situações estão indicadas na **TABELA 12** através das variáveis contidas nas células rotuladas com o sinal (-). Observa-se que x_{11}, x_{22} e x_{34} são as variáveis básicas que diminuirão quando x_{31} aumentar. A variável que sai é aquela que possui o menor valor na solução atual, uma vez que será a primeira a ser zerada e qualquer diminuição adicional a tornaria negativa. Neste exemplo as três variáveis (x_{11}, x_{22} e x_{34}) têm o mesmo valor (5 unidades de produto); portanto, pode-se selecionar qualquer uma delas como sendo a variável que sai. Supondo que x_{34} seja considerada como a variável que sai, valor da variável x_{31} é incrementado em 5 unidades, e os valores das variáveis de esquina (básicas) devem, por sua vez, acompanhar esta alteração. Deste modo, cada variável de "esquina" do ciclo aumenta ou diminui 5 unidades, dependendo do sinal + ou – associado. A nova solução é apresentada na **TABELA 13. Tabela**, e o novo custo de transporte associado a esta solução é 0 x 10 + 15 x 0 + 0 x 7 + 15 x 9 + 10 x 20 + 5 x 0 = R$335. Este custo difere daquele associado com a solução inicial da **TABELA 11** em R$ 410 - R$ 335 = R$ 75, que é o número de unidades designadas a x_{31} multiplicado pelo custo de oportunidade $\bar{c}_{31}$.

TABELA 13. Tabela de transporte após a primeira permuta de variáveis.

	1	2	3	4	
1	10 **0**	0 **15**	20	11	**15**
2	12	7 **0**	9 **15**	20 **10**	**25**
3	0 **5**	14	16	18	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

A solução básica da **TABELA 13. Tabela** é degenerada, já que as variáveis básicas x_{11} e x_{22} são nulas. Porém, a degeneração não requer precauções especiais e as variáveis básicas nulas se consideram como qualquer outra variável básica positiva. Na seqüência, deve ser revisada a otimalidade da nova solução da **TABELA 13. Tabela**, calculando-se os novos multiplicadores como é indicado na **TABELA 14**. Os valores dos custos de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ são dados pelos números do canto sudoeste de cada célula não-básica. A variável não-básica x_{21}, com o maior custo de oportunidade $\bar{c}_{pq}$ positivo, entra na solução. O ciclo fechado associado com x_{21} mostra que x_{11} ou x_{22} podem ser a variável que sai. A variável x_{11} é selecionada arbitrariamente como sendo a variável que sai da solução.

TABELA 14. Revisão da otimalidade após a primeira permuta de variáveis.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; **0**; -	0; **10**; +	20; - 18	11; + 2	**15**
$u_2 = 7$	12; x_{21}; + 5; +	7; **0**; -	9; **15**	20; **10**	**25**
$u_3 = - 10$	0; **5**	14; - 24	16; - 24	18; - 15	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

A **TABELA 15. Tabela** mostra a nova solução básica obtida a partir da **TABELA 14** (x_{21} entra e x_{11} sai). Os valores de u_i, v_j e $\bar{c}_{pq}$ são calculados novamente e a variável que entra e a que sai são x_{14} e x_{24}, respectivamente. Ao efetuar esta troca na **TABELA 15. Tabela**, chega-se à nova solução apresentada na **TABELA 16**, na qual todos os custos relativos $\bar{c}_{pq}$ são não-positivos (negativos ou nulos). Portanto, chegou-se à solução ótima.

TABELA 15. Tabela de transporte após a segunda permuta de variáveis.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; - 5	0; **15**; -	20; - 18	11; x_{14}; + 2; +	**15**
$u_2 = 7$	12; **0**	7; **0**; +	9; **15**	20; **10**; -	**25**
$u_3 = -5$	0; **5**	14; - 19	16; - 19	18; - 10	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

TABELA 16. Solução ótima final para a tabela de transporte.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1 = 0$	10; - 5	0; **5**	20; - 18	11; **10**	**15**
$u_2 = 7$	12; **0**	7; **10**	9; **15**	20; - 2	**25**
$u_3 = -5$	0; **5**	14; - 19	16; - 19	18; - 10	**5**
	5	**15**	**15**	**10**	

A solução ótima para o problema de transporte pode ser resumida como segue. De 1 (o ponto de produção) a 2 (o cliente) devem ser enviadas 5 unidades a um custo de 5 x 0 = R$0; de 1 a 4, 10 unidades a um custo de 10 x 11 = R$110; de 2 a 2, 10 unidades a um custo de 10 x 7 = R$70; de 2 a 3, 15 unidades a um custo de 15 x 9 = R$135; e de 3 a 1, 5 unidades a um custo de 5 x 0 = R$0. O custo total de transporte é de R$315.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalmente chegamos ao término desta disciplina de Programação Linear para Fins Florestais. Infelizmente não posso ver sua cara de felicidade, ou de tristeza (espero), ao estar lendo estas últimas linhas. No entanto, imagino que você, caro leitor, tenha a sensação de que está faltando ainda mais uma porção de conhecimentos relativos à modelagem de problemas de otimização florestal. De fato, é isto o que acontece. Ao longo de todas estas aulas foi vista apenas a ponta do *iceberg*; o resto é difícil de ser conhecido em pouco tempo. Além disso, o *iceberg* é dinâmico, fica se mexendo sem ficar quieto sequer um instante. Ano após ano surgem novos algoritmos, modelos, ferramentas... Como costumo mencionar nas minhas aulas presenciais, "...otimizar e coçar, é só começar..."

7 - BIBLIOGRAFIA DE APOIO

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DE APOIO

BELLMAN, R.E. e DREYFUS, S.E., 1962. **Applied Dynamic Programming.** Princeton University Press, Princeton, NJ. 363 p.

BUONGIORNO, J. e GILLESS, J.K., 1987. **Forest management and economics. A primer in Quantitative Methods.** Macmillan Publishing Co. New York. 285 p.

CLUTTER, J.L.; FORTSON, J.C.; PIENAAR, L.V.; BRISTER, G.H. e BAILEY, R.L., 1983. **Timber management: a quantitative approach**. John Wiley & Sons, USA. 333 p.

CURTIS, F.H. 1962. Linear programming in the management of a forest property. **Journal of Forestry 60(9)**:611-616.

DANIEL, P.W., HELMS, U.E. e BAKER, F.S., 1982. **Principios de silvicultura.** Ed Mc Graw Hill. México. 492 p.

DANTZIG G.B. 1963. **Linear Programming and Extensions**. Princeton University Press, Princeton, NJ. 627 p.

DAVIS, L.S. e JOHNSON, K.N., 1987. **Forest management**. 3rd Ed. McGraw Hill Book Co. USA. 790 p.

DRAPER e SMITH, 1982. **Applied regression analysis**, 2nd edition. McGraw-Hill..

DYKSTRA, D.P., 1984. **Mathematical programming for natural resource management.** McGraw Hill Book Co. New York. 318 p.

GREGERSEN H. e CONTRERAS A. 1980. **Análisis económico de proyectos forestales.** FAO Montes. Roma.

HUSCH, B.C.; MILLER, C.I. e BEERS, T.W., 1982. **Forest Mensuration**. 3ª ed., Wiley, New York

KLEMPERER, W.D.. 1996. **Forest Resource Economics and Finance.** McGraw-Hill, Inc. USA. 551 p.

LEUSCHNER, W.A., 1984. **Introduction to forest resource management.** John Wiley & Sons, Inc. USA. 298 p.

MURTY, K.G., 1985. **Linear and combinatorial programming**. Robert E. Krieger Publishing Co. Malabar, Florida. 567 p.

SPURR, S.H., 1952. **Forest inventory**. The Ronald Press Company. USA. 476 p.

TAHA, H.A., 1994. **Investigación de Operaciones. 5ª ed.** Ed. Alfaomega, México. 960 p.

VANCLAY, J.K., 1984. **Modelling forest growth and yield. Applications to mixed tropical forests**. CAB International. 311 p.

ZIONTS S. 1974. **Linear and Integer Programming**. Prentice-Hall, Inc.USA. 514 p.