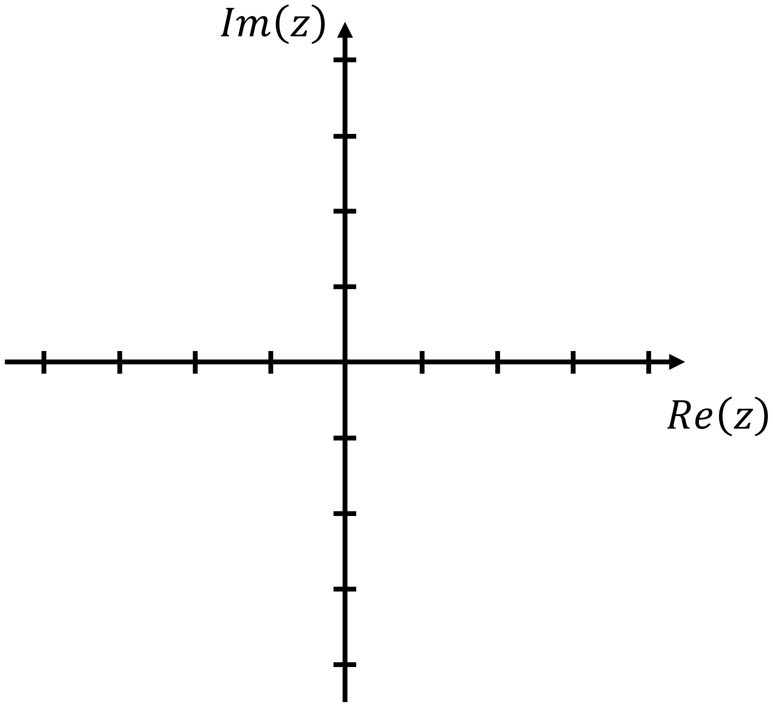
NumProg WS 20/21 : Tutorübung 05

1. Wiederholung Komplexe Zahlen
2. Frequenzanalyse
3. DFT: Diskrete Fourier-Transformation
4. FFT: Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation

Komplexe Zahlen

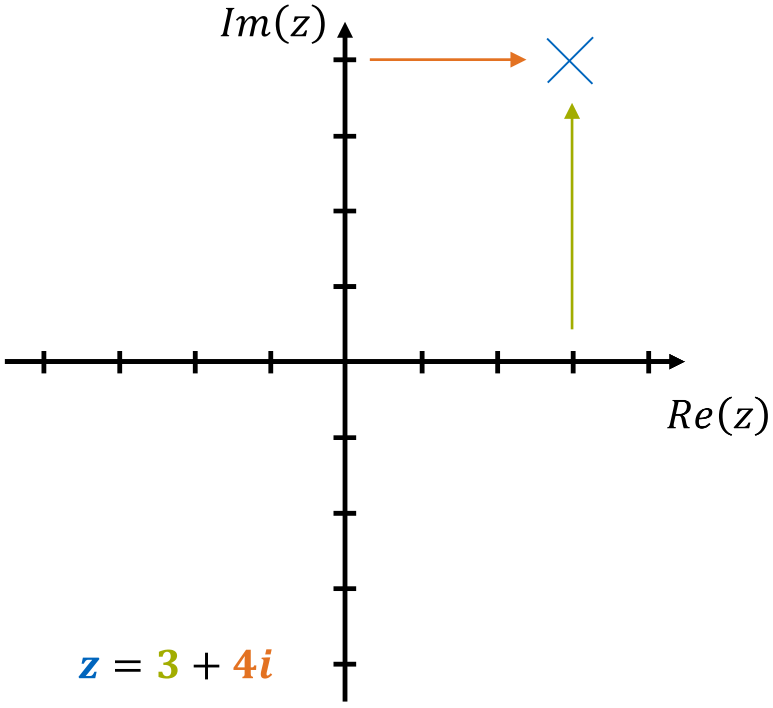
Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:



Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

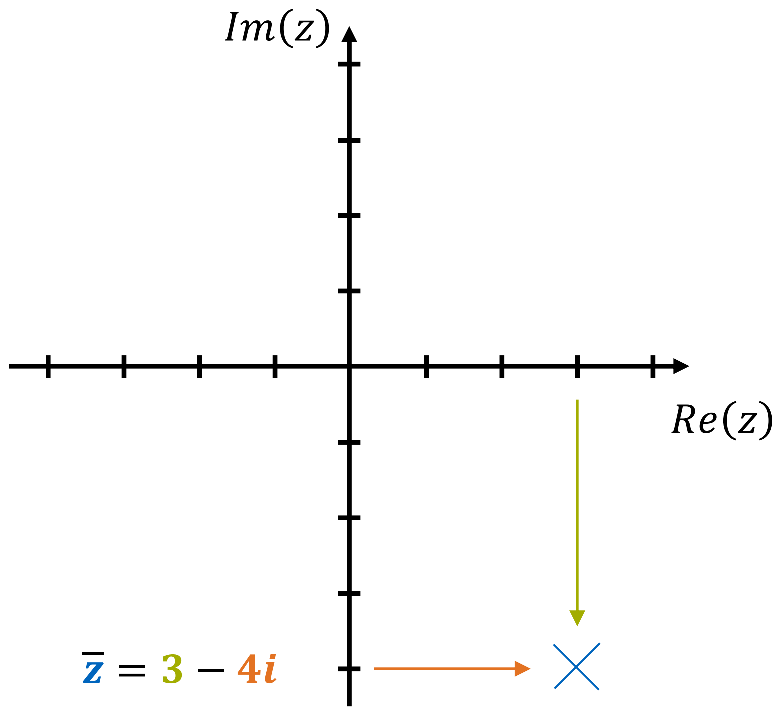
- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$



Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ z, w \in \mathbb{C};\ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

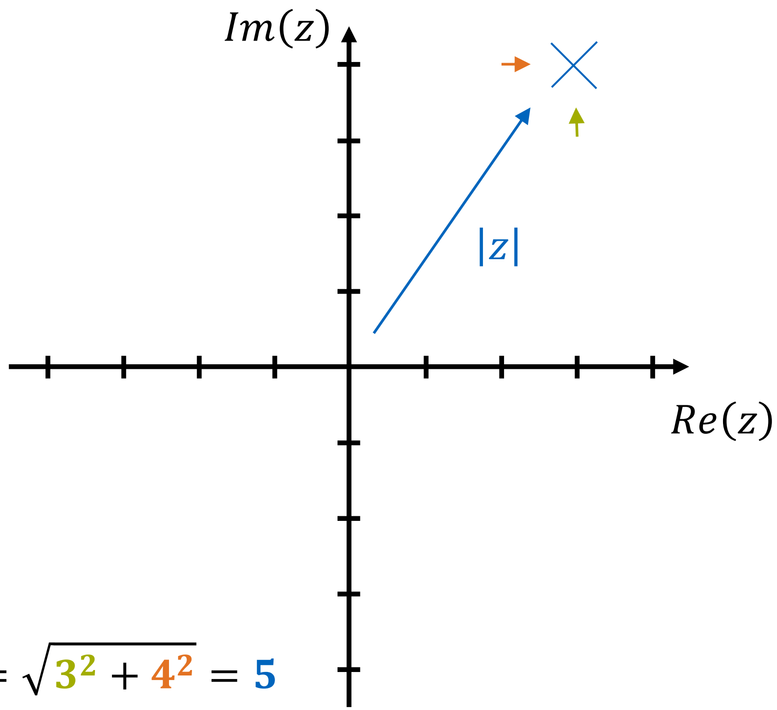
- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$
- $\overline{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$



Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$
- $\bar{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

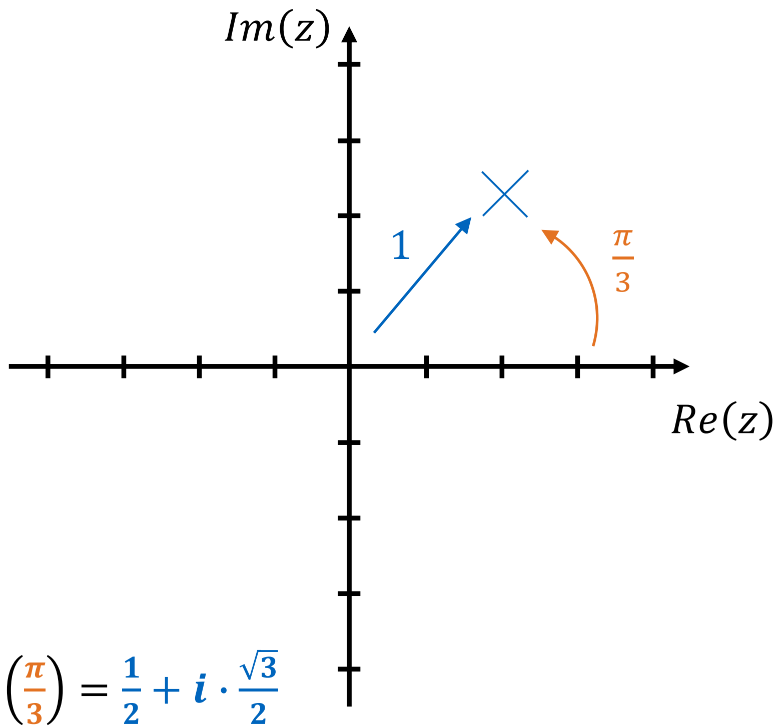


$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\;\; z, w \in \mathbb{C};\;\; x, y \in \mathbb{R}\right)$:

- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\; y = Im(z)$
- $\overline{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ (Eulerformel)



$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

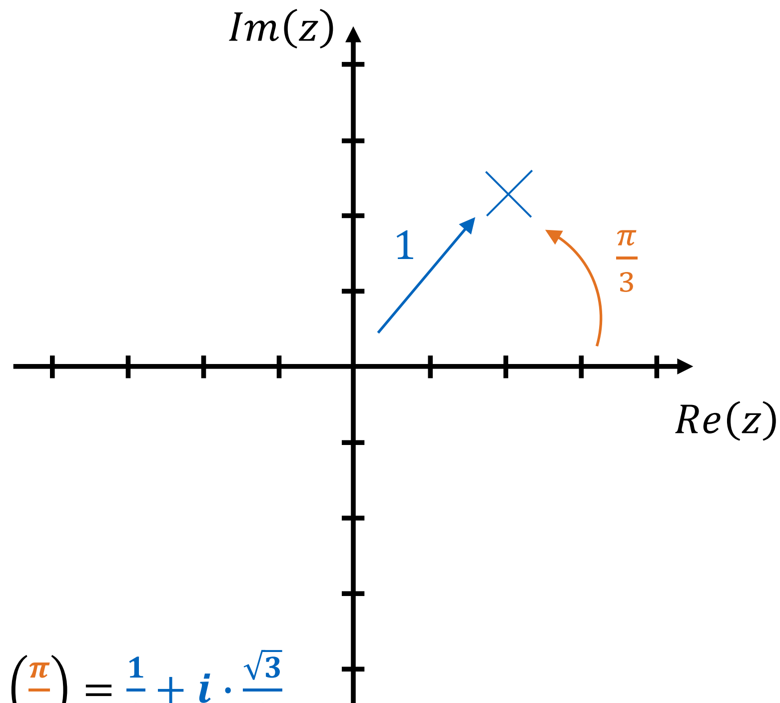
Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$
- $\overline{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $e^{it} = \cos(t) + i sin(t)$ (Eulerformel)
- $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i sin(y)\right)$

  (e^{it} läuft in Einheitskreis gegen Uhrzeigersinn,

  startet in $(0,1)$ und eine „Umdrehung" $= 2\pi$)



$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

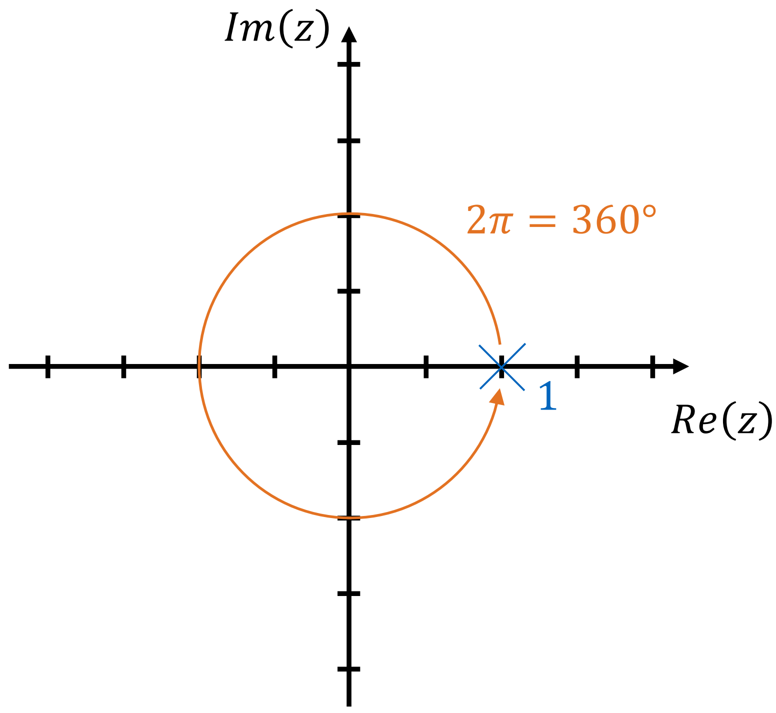
Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$
- $\overline{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ (Eulerformel)
- $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)$

  (e^{it} läuft in Einheitskreis gegen Uhrzeigersinn, startet in $(0{,}1)$ und eine „Umdrehung“ $= 2\pi$)

  $\rightarrow e^{i \cdot 0} = e^{i \cdot 2k\pi} = 1 \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$



Komplexe Zahlen

Wichtigste Eigenschaften komplexer Zahlen $\left(i = \sqrt{-1};\ \ z, w \in \mathbb{C};\ \ x, y \in \mathbb{R}\right)$:

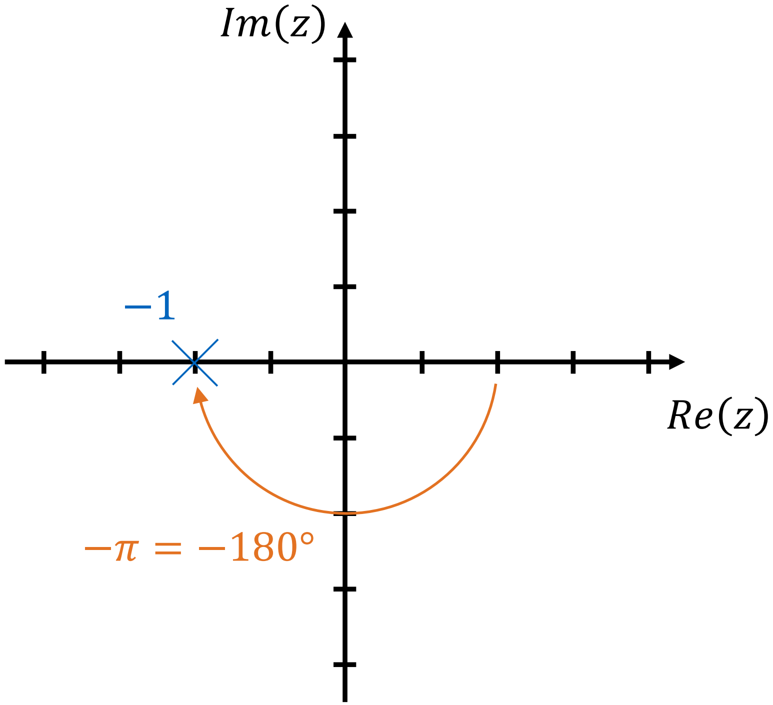
- $z = x + iy, \quad x = Re(z),\ y = Im(z)$
- $\overline{z} = x - iy$ (konjugiert Komplexes), $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ (Eulerformel)
- $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)$

  (e^{it} läuft in Einheitskreis gegen Uhrzeigersinn,

  startet in $(0,1)$ und eine „Umdrehung“ $= 2\pi$)

  $\rightarrow e^{i\cdot 0} = e^{i\cdot 2k\pi} = 1 \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{Z}$

  $\rightarrow e^{-i\cdot\pi} = -1 \in \mathbb{R}$

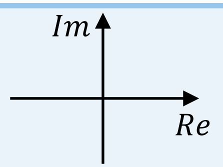
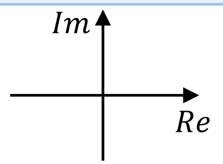
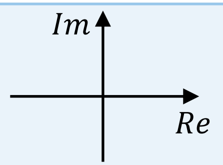


Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

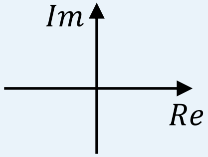
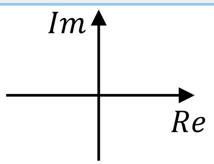
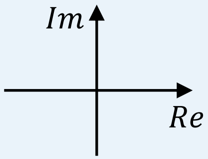
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1				
z_2				
z_3				

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

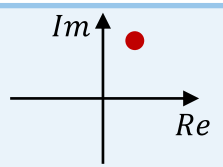
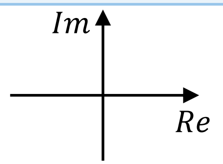
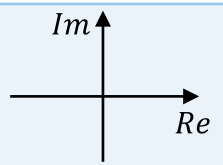
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2				
z_3				

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

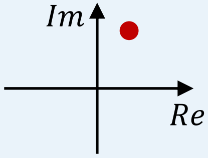
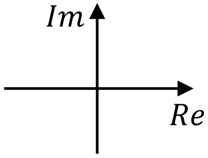
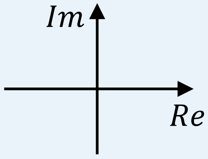
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2				
z_3				

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

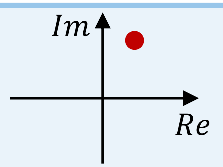
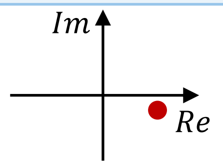
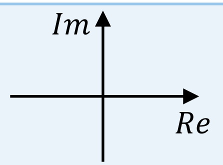
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2	$9 - 2i$	$9 + 2i$	$\sqrt{85}$	
z_3				

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

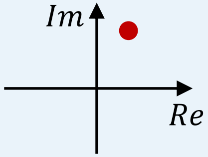
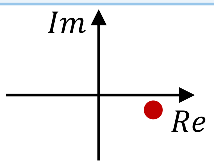
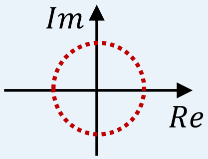
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2	$9 - 2i$	$9 + 2i$	$\sqrt{85}$	
z_3				

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

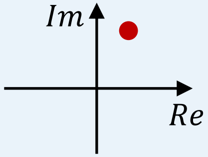
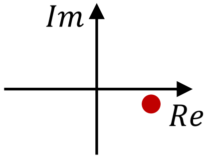
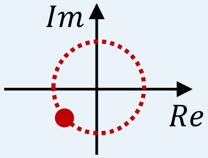
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2	$9 - 2i$	$9 + 2i$	$\sqrt{85}$	
z_3			1	

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

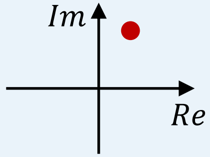
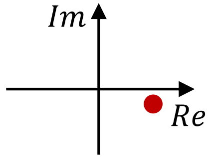
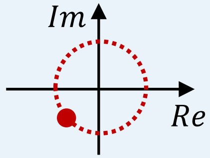
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2	$9 - 2i$	$9 + 2i$	$\sqrt{85}$	
z_3			1	

Komplexe Zahlen: kleine Aufgaben

i) $z_1 = (4 + 2i) + (-2 + i)$

ii) $z_2 = (i) + (9 - 3i)$

iii) $z_3 = e^{\frac{4}{3}\pi \cdot i}$

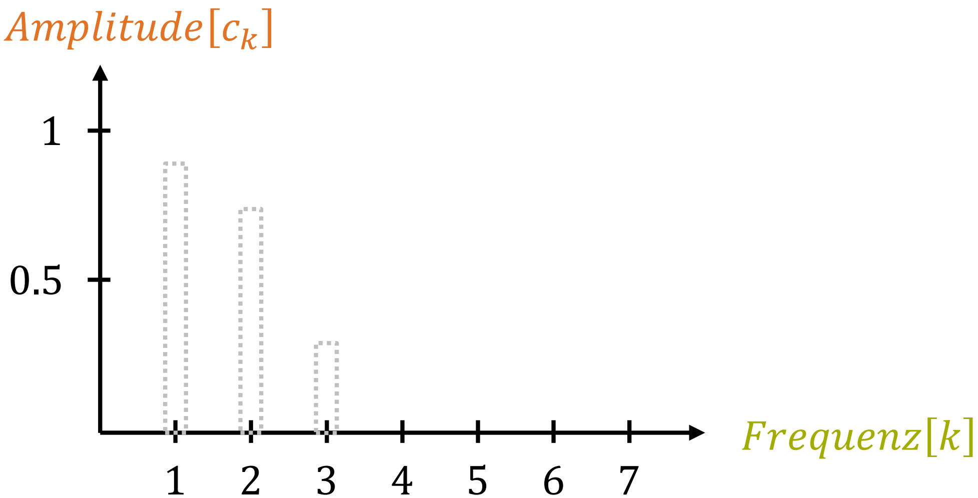
	Algebraische Form	Konjugiert Komplex	Betrag	Koordinatensystem
z_1	$2 + 3i$	$2 - 3i$	$\sqrt{13}$	
z_2	$9 - 2i$	$9 + 2i$	$\sqrt{85}$	
z_3	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	

Frequenzanalyse

Trigonometrische Funktionen $(\text{z. B.} \sin(\text{x}) \text{ und } \cos(\text{x}))$ lassen sich in **Amplitude und Frequenz** aufteilen.

Signale (z.B. für Soundwellen) sind Summen aus trigonometrischen Funktionen.

Diese **Signale** will man nun in ihre **einzelnen Frequenzen** aufteilen, welche anschaulich in einem diskretisierten **„Frequenzspektrum“** dargestellt werden können.



$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot cos(kx)$$

oder

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot sin(kx)$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Mit der DFT wollen wir jetzt ein periodisches, diskretes und komplexes **Eingangssignal** als **Frequenzspektrum ausdrücken**.

Dafür gibt es wieder Matrix- und Vektormultiplikationen, um den **Amplitudenvektor c** bei einem **Stützpunktevektor v** zu berechnen und umgekehrt.

n beschreibt die Größe des Eingabevektors

$$\omega = \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \qquad \overline{\omega} = \exp\left(i \cdot \frac{-2\pi}{n}\right)$$

$$\mathrm{DFT}(v)_k \coloneqq c_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk}$$

$$\mathrm{IDFT}(c)_l \coloneqq v_l = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{kl}$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Zur Erinnerung:

$$\omega_2 = \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \overline{\omega_3}$$

$$\overline{\omega_2} = \exp\left(i \cdot \frac{4\pi}{3}\right) = e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \exp\left(i \cdot \frac{-2\pi}{3}\right) = \omega_3$$

n beschreibt die Größe des Eingabevektors

$$\omega = \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \qquad \overline{\omega} = \exp\left(i \cdot \frac{-2\pi}{n}\right)$$

$$\mathrm{DFT}(v)_k \coloneqq c_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v_j \cdot \overline{\omega}^{jk}$$

$$\mathrm{IDFT}(c)_l \coloneqq v_l = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot \omega^{kl}$$

Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation (FFT)

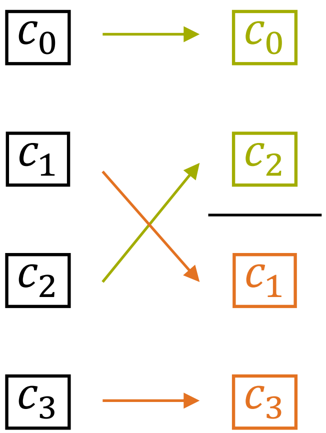
Es gibt eine **schnellere Methode** als IDFT $\left(\mathcal{O}(n^2)\right)$, um die inverse Fourier-Transformation durchzuführen: Die **rekursive IFFT** $\left(\mathcal{O}(n \cdot \log(n))\right)$

Wird in 2 Schritten durchgeführt:

- Sortierphase
- Kombinationsphase mit Butterfly-Operator (BFO)

Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation (FFT)

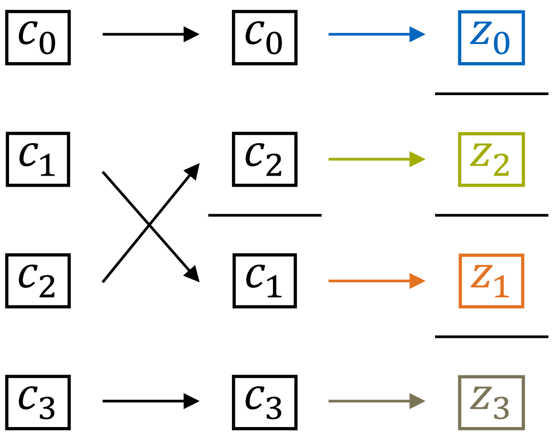
Sortierphase:



- jedes zweite c_i wird nach oben sortiert
- alle anderen c_i werden nach unten sortiert
- zu kombinierender Bereich wird „halbiert“

Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation (FFT)

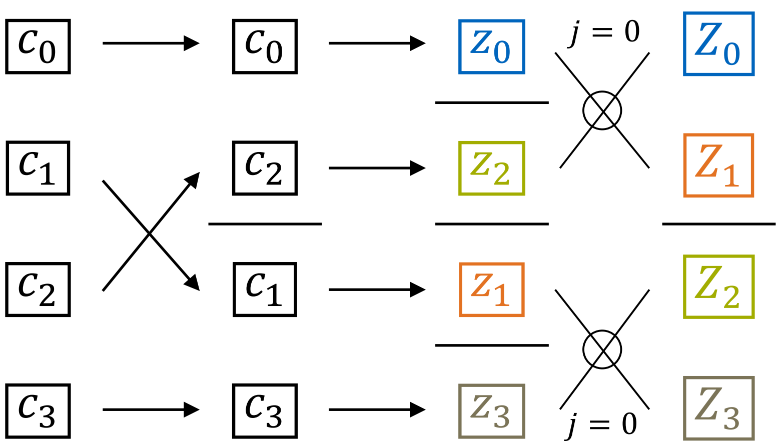
Sortierphase:



- dies wird wiederholt bis jeder Bereich (gekennzeichnet durch horizontale Striche) einen eigenen Wert enthält
- danach kann Kombinationsphase beginnen

Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation (FFT)

Kombinationsphase:



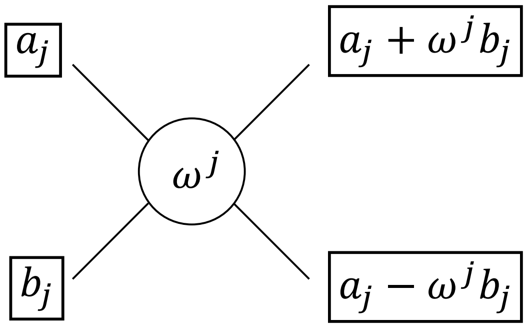
$$\boldsymbol{Z_0} = z_0 + \omega^0 z_2$$

$$\boldsymbol{Z_1} = z_0 - \omega^0 z_2$$

$$\boldsymbol{Z_2} = z_1 + \omega^0 z_3$$

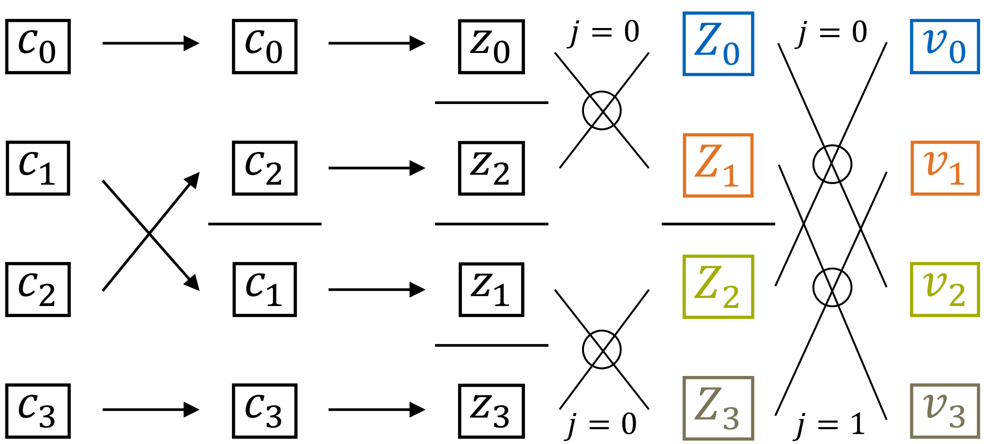
$$\boldsymbol{Z_3} = z_1 - \omega^0 z_3$$

- $(n/2)$ Butterfly-Operationen (nicht überschneidend) für alle Bereiche; Index $j = 0$ für alle Butterflies
- rekursive Rückentwicklung (jeder Schritt Bereichgröße $\mathrm{x}2$)



Schnelle (Inverse) Fourier-Transformation (FFT)

Kombinationsphase:

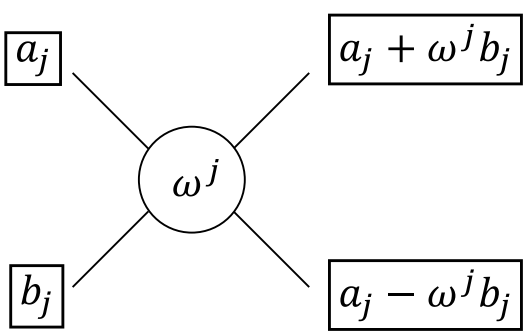


$$\boldsymbol{v_0} = Z_0 + \omega^0 Z_2$$

$$\boldsymbol{v_1} = Z_1 + \omega^1 Z_3$$

$$\boldsymbol{v_2} = Z_0 - \omega^0 Z_2$$

$$\boldsymbol{v_3} = Z_1 - \omega^1 Z_3$$



- in jedem Schritt danach überschneiden sich jeweils 2 Butterflies (Index j wird jeweils gezählt)
- bis sich alle überschneiden (Ergebnis)