

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 3. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit unterschiedlichen Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekannten Funktion f sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie für die folgenden Basisfunktionen jeweils

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion G ,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

an.

a) Die Polynom-Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$

b) Die trigonometrischen Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

c) Die Tchebycheff-Polynombasis:

$$g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

d) die Lagrange-Polynombasis l_0, l_1, l_2 für x_0, x_1, x_2 (berechnen Sie diese zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i=0; i \neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie die Antworten zu a), c) und d).

Lösung: Für Stützpunkte x_0, \dots, x_n und Basisfunktionen g_0, \dots, g_n , sieht das lineare Gleichungssystem für die Interpolation so aus:

$$\begin{pmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

a) Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

b) "trigonometrische" Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x),$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Tchebycheff-Polynom-Basisfunktionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = (2x^2 - 1) - 5x + 4 = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

d) Lagrange-Basispolynome

$$l_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-2)(0-1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$l_1 = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-2)(1-0)} = \frac{x(x-2)}{-1}$$

$$l_2 = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\text{Lösungsvektor } c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$G(x) = 3 \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2x^2 - 5x + 3$$

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

Vergleich von a), c) und d): **Interpolationspolynom** ist eindeutig!

2) Polynominterpolation nach Newton

Die Newtonschen dividierten Differenzen bieten eine effiziente Möglichkeit, ein Interpolationspolynom $p(x)$ analytisch zu beschreiben (d.h. seine Koeffizienten zu berechnen). Mit zu interpolierenden Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$ gelten die folgenden Formeln aus der Vorlesung:

$$c_{i,0} = f(x_i) = y_i \quad (6)$$

$$c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}. \quad (7)$$

Man ordnet die dividierten Differenzen in ein Dreiecksschema:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	...
x_0	0	$c_{0,0} = y_0$	$\rightarrow c_{0,1}$	$\rightarrow c_{0,2}$	$\rightarrow \dots$
			\nearrow	\nearrow	
x_1	1	$c_{1,0} = y_1$	$\rightarrow c_{1,1}$	$\rightarrow \vdots$	
			\nearrow		
x_2	2	$c_{2,0} = y_2$	$\rightarrow \vdots$		
\vdots	\vdots	\vdots			

Damit kann man in der ersten Zeile direkt die Koeffizienten $c_{0,k}$ des Interpolationspolynoms $p(x)$ in der folgenden Gestalt ablesen:

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \dots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \quad (8)$$

In dieser Aufgabe soll zu den Punkten aus Aufgabe 1)

$$P_0 = (0, 3), \quad P_1 = (1, 0) \quad \text{und} \quad P_2 = (2, 1)$$

ein Interpolationspolynom bestimmt werden.

- Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den Gleichungen (6) - (7). Stellen Sie dazu auch das Dreiecksschema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (8)!
- Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Dreiecksschema aus Teilaufgabe b) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (8) an!

Lösung:

- Für die Newtonschen dividierten Differenzen ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_{0,0} &= f(x_0) = 3 \\ c_{1,0} &= f(x_1) = 0 \\ c_{2,0} &= f(x_2) = 1 \\ c_{0,1} &= \frac{c_{1,0} - c_{0,0}}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 3}{1 - 0} = -3 \\ c_{1,1} &= \frac{c_{2,0} - c_{1,0}}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1 \\ c_{2,0} &= \frac{c_{1,1} - c_{0,1}}{x_2 - x_0} = \frac{1 - (-3)}{2 - 0} = 2 \end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
0	0	$f(x_0) = \boxed{3}$	$\rightarrow \boxed{-3}$	$\rightarrow \boxed{2}$
1	1	$f(x_1) = 0$	$\rightarrow 1$	
2	2	$f(x_2) = 1$		

Nützen wir nun die Werte $c_{0,k}$ aus der obersten Zeile des Dreiecks als Koeffizienten des Polynoms in der Darstellung (4), so erhalten wir das Interpolationspolynom $p(x)$ zu

$$\begin{aligned}
 p(x) &= c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \dots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \\
 &= \boxed{3} + \boxed{-3}(x - 0) + \boxed{2}(x - 0)(x - 1) = \boxed{2x^2 - 5x + 3}.
 \end{aligned}$$

- b) Ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ lässt sich (unabhängig von seiner x -Position) einfach unten an das Newton-Schema anhängen. Man muss nur die noch fehlenden dividierten Differenzen berechnen:

$$\begin{aligned}
 c_{3,0} &= f(x_3) = 0 \\
 c_{2,1} &= \frac{c_{3,0} - c_{2,0}}{x_3 - x_2} = \frac{0 - 1}{1.5 - 2} = 2 \\
 c_{1,2} &= \frac{c_{2,1} - c_{1,1}}{x_3 - x_1} = \frac{2 - 1}{1.5 - 1} = 2 \\
 c_{0,3} &= \frac{c_{1,2} - c_{0,2}}{x_3 - x_0} = \frac{2 - 2}{1.5 - 0} = \boxed{0}.
 \end{aligned}$$

Im Dreiecksschema sieht das folgendermaßen aus:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
0	0	$f(x_0) = 3$	$\rightarrow -3$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow \boxed{0}$
1	1	$f(x_1) = 0$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 2$	
2	2	$f(x_2) = 1$	$\rightarrow 2$		
1.5	3	$f(x_3) = 0$			

Der zusätzliche Term für $q(x)$ besteht dann aus

$$c_{0,3} \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Dass dieser Anteil verschwindet, ist nötig, da der Zusatzpunkt $(1.5, 0)$ auch schon auf dem ersten Interpolationspolynom $p(x)$ liegt! Deswegen muss aufgrund der Eindeutigkeit der Polynominterpolation $p(x) = q(x)$ gelten.

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Das Aitken-Neville Verfahren gibt uns eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu den Punkten $P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, \dots, n$ **direkt an einer Stelle x auszuwerten**, ohne die tatsächliche Koeffizienten des Polynomes zu berechnen:

```

0   for i=0:n; p[i,0]:=f_x[i]; end
    for k=1:n
        for i=0:n-k
            p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
        end
5   end

```

Die sukzessive Berechnung der $p[i, k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann wieder mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	...
x_0	0	$p[0,0] = y_0$	$\rightarrow p[0,1]$	$\rightarrow p[0,2]$	$\rightarrow \dots$
			\nearrow	\nearrow	
x_1	1	$p[1,0] = y_1$	$\rightarrow p[1,1]$	$\rightarrow \vdots$	
			\nearrow		
x_2	2	$p[2,0] = y_2$	$\rightarrow \vdots$		
\vdots	\vdots	\vdots			

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle x steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0, n]$.

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

Lösung: Die zu interpolierenden Punkte (**hier für alle vier Punkte**) sind:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0, & f(x_0) &= 3 \\
 x_1 &= 1, & f(x_1) &= 0 \\
 x_2 &= 2, & f(x_2) &= 1 \\
 x_3 &= 1.5, & f(x_3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Auswertung des Algorithmus ($p[i, 0] = f(x_i)$ ist ja klar):

$k = 1$:

$$\begin{aligned}
 p[0, 1] &= p[0, 0] + \frac{x - x[0]}{x[1] - x[0]} (p[1, 0] - p[0, 0]) = 3 + \frac{0.5 - 0}{1 - 0} (0 - 3) = 1.5 \\
 p[1, 1] &= p[1, 0] + \frac{x - x[1]}{x[2] - x[1]} (p[2, 0] - p[1, 0]) = 0 + \frac{0.5 - 1}{2 - 1} (1 - 0) = -0.5 \\
 p[2, 1] &= p[2, 0] + \frac{x - x[2]}{x[3] - x[2]} (p[3, 0] - p[2, 0]) = 1 + \frac{0.5 - 2}{1.5 - 2} (0 - 1) = -2
 \end{aligned}$$

$k = 2$:

$$p[0, 2] = p[0, 1] + \frac{x - x[0]}{x[2] - x[0]} (p[1, 1] - p[0, 1]) = 1.5 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0} (-0.5 - 1.5) = 1$$

$$p[1, 2] = p[1, 1] + \frac{x - x[1]}{x[3] - x[1]} (p[2, 1] - p[1, 1]) = -0.5 + \frac{0.5 - 1}{1.5 - 1} (-2 - (-0.5)) = 1$$

$k = 3$:

$$p[0, 3] = p[0, 2] + \frac{x - x[0]}{x[3] - x[0]} (p[1, 2] - p[0, 2]) = 1 + \frac{0.5 - 0}{2 - 0} (1 - 1) = \boxed{1}$$

Für das Dreiecksschema erhält man somit:

x_i	$i \setminus k$	0	1	2	3
0	0	$f(x_0) = 3$	\rightarrow 1.5	\rightarrow 1	\rightarrow 1
			\nearrow	\nearrow	\nearrow
1	1	$f(x_1) = 0$	\rightarrow -0.5	\rightarrow 1	
			\nearrow	\nearrow	
2	2	$f(x_2) = 1$	\rightarrow -2		
			\nearrow		
1.5	3	$f(x_3) = 0$			

Der Wert von $p(x = 0.5)$ steht in dem obersten rechten Eintrag ($p[0, 3]$) des Schemas und passt mit dem echten Polynom $p(x) = 2x^3 - 5x + 3$ an der Stelle $x = 0.5$ zusammen.

Wenn man den Aitken-Neville-Algorithmus schnell im Kopf rechnen möchte/muss (z.B. bei der Klausur), dann kann man mit ein wenig Übung direkt das Dreiecksschema nützen; dafür stehen dort auch die x_i mit dabei.

Die Auswertung eines Polynoms mit dem Aitken-Neville-Algorithmus ist dann gut, wenn man nicht sehr viele Werte des Polynoms benötigt. Sonst ist der Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ durch die beiden verschachtelten Schleifen über i und k höher, als wenn man einmal die Polynomkoeffizienten direkt berechnet (z.B. mit Lagrange oder Newton) und dann die Auswertung über das Horner-Schema ($\mathcal{O}(n)$) macht.

4) Runge-Effekt

Bisher haben wir uns mit Polynominterpolation mit gleichverteilten Stützpunkten beschäftigt. Hierfür wurde z.B. das Newtonverfahren verwendet, um ein eindeutiges Polynom $n - 1$. Grades, oder geringer, zu konstruieren, welches durch alle n gegebenen Stützpunkte verläuft.

- a) Überlegen Sie sich wie das Interpolationspolynom von $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (siehe auch Abb. 1) mit wachsender Zahl von Stützstellen aussieht.

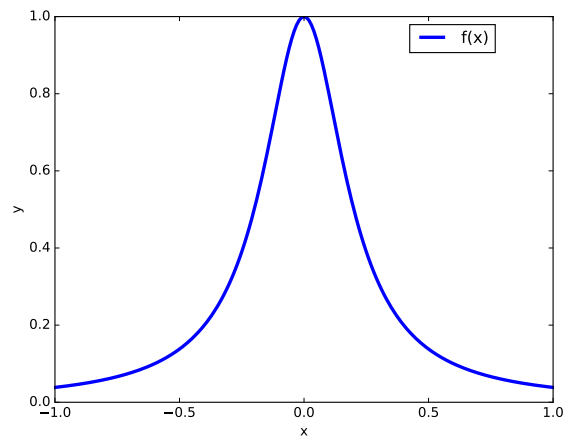


Abbildung 1: Runge Funktion $f(x)$

- b) Was könnte man machen, um das Interpolationsergebnis zu verbessern?
c) Zeichnen Sie das Ergebnis der verbesserten Methoden in die Abbildung 1 ein!

Lösung:

- a) Siehe fig. 2 rote Kurve.
b) Interpolationspunkte besser wählen: z.B. Chebyshev Punkte
Stückweise Interpolation: z.B. stückweise linear (oder auch höhere Ordnungen)
c) Siehe fig. 2 grüne und braune Kurven.

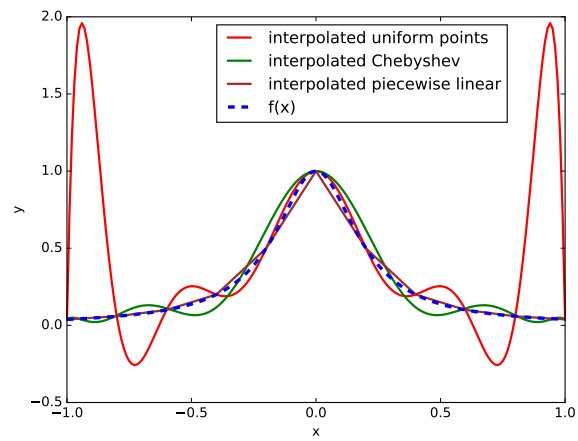


Abbildung 2: Runge Funktion $f(x)$ with different interpolation strategies

5) Zusatzaufgabe: Fehlerabschätzung

Im Abbildung 3 links ist die tatsächliche Funktion f gezeichnet.

- Zeichnen Sie das berechnete Interpolationspolynom von 1) dazu. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0.5$?
- Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \dots, x_n\}, \max\{x, x_0, \dots, x_n\}]$. Man wählt ξ in der Regel derart, dass die Fehlerabschätzung maximal wird.

Werten Sie den Fehler an der Stelle $x = 0.5$ aus! Verwenden Sie dazu

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in [0,2]} |D^3 f(\xi)| &= 35.43, \\ \max_{\xi \in [0,2]} |D^4 f(\xi)| &= 107.53. \end{aligned}$$

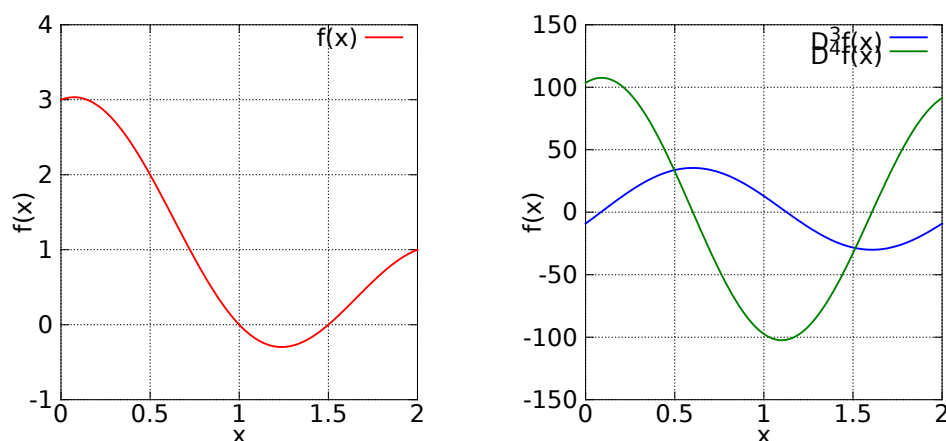


Abbildung 3: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.

Lösung:

- $|f(0.5) - p(0.5)| = |2 - 1| = 1$
- Mit den drei Punkten:

$$\begin{aligned} |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^3 f(\xi)}{3!} \cdot (0.5 - 0)(0.5 - 1)(0.5 - 2) \right| \\ &= \frac{1}{16} \cdot |D^3 f(\xi)| \\ &\leq \frac{1}{16} \cdot \max_{x \in [0,2]} |D^3 f(x)| = \frac{1}{16} 35.43 \approx 2.21 \end{aligned}$$

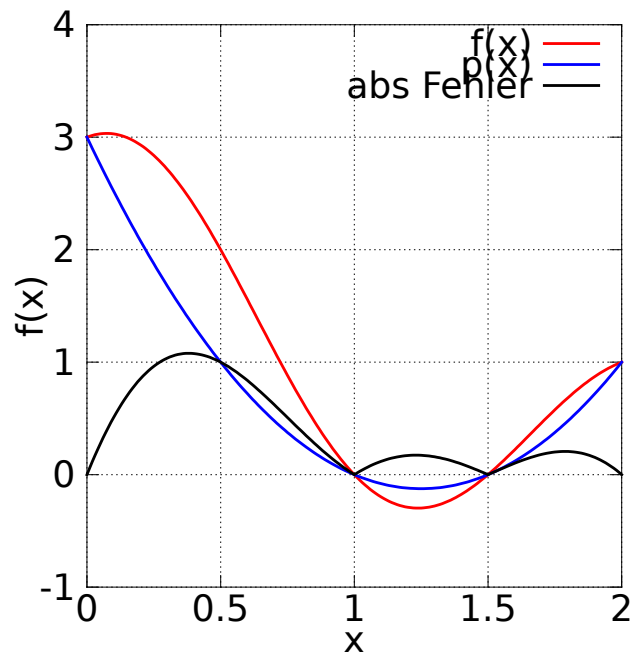


Abbildung 4: Die tatsächliche $f(x)$ und der absolute Fehler.

oder mit den vier Punkten:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - p(x)| &= |f(0.5) - p(0.5)| = \left| \frac{D^4 f(\xi)}{4!} \cdot (0.5 - 0)(0.5 - 1)(0.5 - 1.5)(0.5 - 2) \right| \\
 &= \frac{1}{64} \cdot |D^4 f(\xi)| \\
 &\leq \frac{1}{64} \cdot \max_{x \in [0, 2]} |D^4 f(x)| = \frac{1}{64} 107.53 \approx 1.68
 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Funktion war

$$f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin(\pi x).$$