Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel I_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

i) $\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$, ii) $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x$ und iii) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

näherungsweise zu bestimmen!

c) Welche Näherung I_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

d) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel I_2 aus Teilaufgabe b) die Gleichung

$$I_2(p) \quad = \quad \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$$

stets erfüllt!

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) \quad = \quad \int_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_{\mathrm{T}}(f)$ und $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$,

$$Q_{\mathrm{T}}(f) \quad = \quad H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{\mathrm{TS}}(f;h) \quad = \quad h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_{\mathrm{T}}(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{\mathrm{TS}}(f;h) \quad = \quad h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

c) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_{\mathrm{T}}(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

d) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_{\mathrm{F}}(g)$ und $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_{\mathrm{F}}(g) = H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{\mathrm{SS}}(g;h) = \frac{h}{3} \cdot (g_0 + 4g_1 + 2g_2 + 4g_3 + \ldots + 2g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n)\,, \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $g_i = g(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_{\mathrm{F}}(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{SS}}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{\mathrm{SS}}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$