NumProg WS 20/21 : Tutorübung 06

1. Integration von Interpolationspolynomen
2. Trapezregel & Trapezsumme
3. Keplersche Fassregel (Simpsonregel) & Simpsonsumme

Quadratur (Numerische Integration)

Integration einer Funktion $f(x)$ in vielen Fällen nicht analytisch lösbar.

→ **Idee:** $f(x)$ möglichst gut interpolieren und **Integral von Interpolationsfunktion** $\boldsymbol{g(x)}$ bestimmen

Quadratur (Numerische Integration)

Integration einer Funktion $f(x)$ in vielen Fällen nicht analytisch lösbar.

→ **Idee:** $f(x)$ möglichst gut interpolieren und **Integral von Interpolationsfunktion** $\boldsymbol{g(x)}$ bestimmen

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \qquad \text{mit } f(x_i) = g(x_i)$$

Quadratur (Numerische Integration)

Integration einer Funktion $f(x)$ in vielen Fällen nicht analytisch lösbar.

→ **Idee:** $f(x)$ möglichst gut interpolieren und **Integral von Interpolationsfunktion $\boldsymbol{g(x)}$** bestimmen

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \qquad \text{mit } f(x_i) = g(x_i)$$

Man kann dies im Allgemeinen auch als **Summe von Gewichten und Stützwerten** schreiben:

$$I_f = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{w_i y_i} = I_g \qquad \text{mit } y_i = f(x_i)$$

Quadratur (Numerische Integration)

Daraus folgt der **Ansatz für die Quadratur**:

1. Wähle Stützpunkte (x_i, y_i) und geeignete Basisfunktionen für Interpolation
2. Berechne die Gewichte w_i durch Aufstellen und Integrieren von $g(x)$
3. Berechne $I_g = \sum_{i=0}^{n} w_i y_i$

Am Ende gilt dann $I_f \approx I_g$ für die ursprüngliche Funktion $f(x)$ und deren Interpolationsfunktion $g(x)$

Quadratur (Numerische Integration)

Erinnerung Lagrange (Basispolynom l_j):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Quadratur (Numerische Integration)

Erinnerung Lagrange (Basispolynom l_j):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Polynominterpolationsfunktion $g(x)$ mit Lagrange als Basispolynom bei n Stützstellen:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(x) \cdot y_i$$

Quadratur (Numerische Integration)

Erinnerung Lagrange (Basispolynom l_j):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Polynominterpolationsfunktion $g(x)$ mit Lagrange als Basispolynom bei n Stützstellen:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(x) \cdot y_i$$

Mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ bzw. $y_0 = f(0)$ und $y_1 = f(1)$: $\boldsymbol{g(x) = l_0(x) \cdot f(0) + l_1(x) \cdot f(1)}$

Quadratur (Numerische Integration)

Erinnerung Lagrange (Basispolynom l_j):

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Polynominterpolationsfunktion $g(x)$ mit Lagrange als Basispolynom bei n Stützstellen:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(x) \cdot y_i$$

Mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ bzw. $y_0 = f(0)$ und $y_1 = f(1)$: $\boldsymbol{g(x) = l_0(x) \cdot f(0) + l_1(x) \cdot f(1)}$

→ jetzt noch $\boldsymbol{g(x)}$ integrieren und $\boldsymbol{I_g}$ aufstellen

Trapezregel

Trapezregel (Quadratur mit **2 Stützpunkten** über a und b):

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(f(a) + f(b)\right)$$

Als $H = b - a$ bezeichnen wir den Abstand zwischen a und b

(also die Länge des zu integrierenden Bereichs)

Trapezregel & Simpsonregel

Trapezregel (Quadratur mit **2 Stützpunkten** über a und b):

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{1}{2} \cdot \big(f(a) + f(b)\big)$$

Simpsonregel (Quadratur mit **3 Stützpunkten** über a und b):

$$Q_S(f) = H \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Als $H = b - a$ bezeichnen wir den Abstand zwischen a und b

(also die Länge des zu integrierenden Bereichs)

Trapezsumme

Ähnliche Idee wie Hermite/ kubische Splines:

Wir **unterteilen** den zu integrierenden Bereich **in kleine Einzelstücke** und vermeiden so höhere Polynomgrade.

Länge zu integrierender Bereich: $H = b - a$

Länge der einzelnen Stücke: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{H}{N}$ bei N einzelnen Stücken

Stützpunkte: $f_i = f(x_i)$ mit $x_i = a + i \cdot h$

Restglied (Fehlerabschätzung): $R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$ also $R_{TS} \approx Q_{TS} - I(f)$

Trapezsummenformel: $Q_{TS}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$

Simpsonsumme

Die **Simpsonregel** von vorhin (oder auch die **Keplersche Fassregel**) kann man ebenfalls in eine **Summenformel umwandeln**.

Nur wird jetzt mit Parabeln statt Geraden interpoliert.

Länge zu integrierender Bereich: $H = b - a$

Länge der einzelnen Stücke: $h = \frac{b-a}{N} = \frac{H}{N}$ bei N einzelnen Stücken

Stützpunkte: $f_i = f(x_i)$ mit $x_i = a + i \cdot h$

Restglied (Fehlerabschätzung): $R_{SS}(f;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{180}$ also $R_{SS} \approx Q_{SS} - I(f)$

Simpsonsummenformel: $Q_{SS}(f;h) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$