NUMPROG ZSMF. TEIL 2

wichtige Infos/Notizen aus TÜ 2
KONDITION – STABILITÄT (ERKLÄRUNG + BSP)

Kondition:

- rel. Fehlerverstärkung des Eingabefehlers
- → PROBLEMABHÄNGIG!

$$\boxed{f(x+\varepsilon_{in}) = y + \varepsilon_{aus}}$$

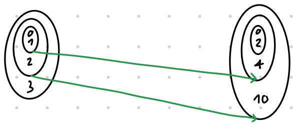
ε_{in}: Eingabefehler, ε_{aus}: Ausgabefehler

$$\boxed{\heartsuit \ cond(f,x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|}$$

♡ $cond(f,x) \leq 1$ → gut konditioniert

♡ $cond(f,x) \gg 1$ → schlecht –〃–

Veranschaulichung: (BSP)



ε_{in} von 1 auf 2

ε_{aus} von 4 auf 10

$$\Rightarrow \frac{10-4}{10} = 0{,}6 \approx 60\%$$

Weitere Beispiele mit Erklärungen auf den nächsten Seiten

weitere Beispiele:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; → $cond(f,x) = cond\left(\frac{1}{x}, x\right) = \left| \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \right| = \left| \frac{x}{x} \right| = 1$ ← Fehlerverstärkung

2) $f(x) = \sin(x)$ → Konditionierung für $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)} \xrightarrow{\text{L'hospital}} \left| \frac{x \cdot \sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)} \right| = 1$$ ← gut konditioniert

$$\lim_{x\to \pi} \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)} \to |\pm \infty| = \infty$$ ← schlecht k.

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)} = 0$$ ← gut konditioniert

Fehlerverstärkung berechnen:

1. Rel. Ausgabefehler: $\left| \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \right|$
2. Rel. Eingabefehler: $\left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|$
3. Fehlerverstärkung: $\boxed{\frac{\text{rel. Ausgabefehler}}{\text{rel. Eingabefehler}}}$

nach zu Kondition

Stabilität:

- sagt aus, ob sich der relative Fehler durch Rundungen stark verschlechtert oder nicht
- ⇒ ALGORITHMUSABHÄNGIG

$$\boxed{\begin{gathered} f_{rel} = \left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \varepsilon_{Ma} \\ rd(x) = (1+\varepsilon) \cdot x = x + x \cdot \varepsilon \end{gathered}}$$ rel. Fehler

$$\boxed{\left| \frac{rd(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right|}$$ rel. Ergebnisfehler

EPSILONTIK:

$a \ op_\varepsilon \ b$ (fehlerhafte Operationen) mit $(a \ op \ b) \cdot (1+\varepsilon_i)$ ersetzen // $a +_\varepsilon b = rd(a+b)$

WICHTIG: $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$ (per Definition) (da ε etwas sehr kleines ist)

BSP: $f(x) = x^2$

$x^2 = x \cdot_\varepsilon x \cdot_\varepsilon x$ (2 fehlerhafte Operationen)

$= (x^2(1+\varepsilon_a)) \cdot x) \cdot (1+\varepsilon_b)$

$= x^3 \cdot (1+\varepsilon_a) \cdot (1+\varepsilon_b)$

$= x^3 \cdot (1 + \varepsilon_a + \varepsilon_b + \underbrace{\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b}_{=0})$

$- f(x) + f(x)(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$

$$= \frac{\cancel{f(x)} + \cancel{f(x)}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) - \cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}}$$

$$= |\varepsilon_a + \varepsilon_b| \leq 2 \cdot \varepsilon_{Ma}$$

gute Stabilität, da Anz. an Fehlern = konstant (schlecht wär z.B. $x \cdot |\varepsilon_{Ma}|$ für $x \mapsto \infty$)

Beispiele zu KONDITION

$$\mathrm{cond}(f,x) = \left|\frac{x \cdot f'(x)}{x}\right|$$ ⚠

①

a) $f_1(x) = a \cdot x$
$f_1'(x) = a$
$\Rightarrow \left|\frac{x \cdot a}{a \cdot x}\right| = 1 \Rightarrow$ gute Kondition :)

b) $f_2(x) = \frac{a-x}{b}$
$f_2'(x) = -\frac{1}{b}$
$\Rightarrow \left|\frac{x \cdot (-\frac{1}{b})}{\frac{a-x}{b}}\right| \Rightarrow \left|x \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) \cdot \frac{b}{a-x}\right| = \left|\frac{x}{a-x}\right| \Rightarrow$

• wenn $x \mapsto a \Rightarrow \frac{x}{a-a} \mapsto \infty$ $\Rightarrow$ schlecht konditioniert :(
• wenn $x \mapsto \infty \Rightarrow \mathrm{cond} = 1$ $\Rightarrow$ gut konditioniert :)

c) $f_3(x) = 3e^x - 3$
$f_3'(x) = 3e^x$
$\Rightarrow \left|\frac{x \cdot 3e^x}{3e^x - 3}\right|$

für:
$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \infty$

$$\lim_{x \mapsto 0} \left|\frac{0 \cdot e^x}{e^x - 1}\right| \Rightarrow \left|\frac{e^x + xe^x}{e^x}\right| \Rightarrow \left|\frac{1+x}{1}\right| \Rightarrow \lim_{x \mapsto 0} \frac{1+x}{1} = 1$$ $\Rightarrow$ gut konditioniert :)

$$\lim_{x \mapsto \infty} \left|\frac{x \cdot 3e^x}{3e^x - 3}\right| = \infty$$ $\Rightarrow$ schlecht konditioniert :(

$$\lim_{x \mapsto 1} \left|\frac{x \cdot e^x}{3e^x - 3}\right| \Rightarrow \left|\frac{e}{e-1}\right| = 1{,}58$$ $\Rightarrow$ okay konditioniert :|

da etwas sehr viel größer als 1 sein muss, damit es schlecht konditioniert ist.

②

$g_1 : y = x \; ; \; g_2 : y = mx + 1 \; , \; m = 1{,}005 \; , \tilde{m} = 1{,}010$

a) Schnittpunkt $g_1 \times g_2$ bestimmen:

$g_1 = g_2 \Rightarrow x = mx + 1 \Rightarrow x - mx = 1 \Rightarrow x(1-m) = 1 \Rightarrow \boxed{f(m) = \frac{1}{1-m}}$

von m abh. machen

b) Kondition an Stelle m berechnen:

$0{,}005 = \frac{1}{200}$
$1{,}005 = \frac{201}{200}$

$$\mathrm{cond}(f,m) = \left|\frac{m \cdot \frac{1}{(1-m)^2}}{\frac{1}{1-m}}\right| = \left|\frac{m}{1-m}\right| \Rightarrow \left|\frac{1{,}005}{1-1{,}005}\right| = \left|\frac{1{,}005}{0{,}005}\right| = \left|\frac{\frac{201}{200}}{\frac{1}{200}}\right| = \boxed{201}$$

c) Fehlerverstärkung berechnen: (falls $\tilde{m}$ anstatt m)

Fehlerverstärkung

$$= \frac{\text{rel. Ausgabefehler}}{\text{rel. Eingabefehler}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{201}} = \frac{201}{2} = 100{,}5$$

Rel. Ausgabefehler:

$f(m) = \frac{1}{1-1{,}005} = -200$

$f(\tilde{m}) = \frac{1}{1-1{,}01} = -100$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f(m) - f(\tilde{m})}{f(m)}}$$

$$\frac{-200-(-100)}{-200} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

Rel. Eingabefehler:

$$\boxed{\left|\frac{m-\tilde{m}}{m}\right|} = \left|\frac{\frac{1}{200}}{\frac{201}{200}}\right| = \frac{1}{201}$$

Beispiele zu Stabilität

Beispiele zu **Stabilität**

Fehlerhafte operation

① $f_1(x) = a\cdot x = (a\cdot x)(1+\varepsilon_a) = ax + ax\varepsilon_a = f(x) + f(x)\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{f(x)} + \cancel{f(x)}\varepsilon - \cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}}\right| = |\varepsilon|$

② $f_2(x) = \frac{a-x}{b} = \frac{(a-x)(1+\varepsilon_a)}{b}\cdot(1+\varepsilon_b) = \frac{a-x}{b}\cdot(1+\varepsilon_a)\cdot(1+\varepsilon_b) = \frac{a-x}{b}\cdot(1+\varepsilon_b+\varepsilon_a+\underbrace{\varepsilon_a\cdot\varepsilon_b}_{=0})$

2 Fehler

$\frac{a-x}{b} + \varepsilon_a\frac{a-x}{b} + \varepsilon_b\frac{a-x}{b} = f(x) + f(x)\varepsilon_a + f(x)\varepsilon_b \Rightarrow \left|\frac{\cancel{f(x)} + \cancel{f(x)}(\varepsilon_a+\varepsilon_b) - \cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}}\right| = |\varepsilon_a+\varepsilon_b|$

③ $f_3(x) = 3e^x - 3 = (3e^x(1+\varepsilon_a)\cdot(1+\varepsilon_b) - 3)(1+\varepsilon_c) = (3e^x\cdot(1+\varepsilon_a+\varepsilon_b) - 3)\cdot(1+\varepsilon_c)$

$= (3e^x + 3e^x(\varepsilon_a+\varepsilon_b) - 3)(1+\varepsilon_c)$

$= f(x) + 3e^x(\varepsilon_a+\varepsilon_b) + \varepsilon_c\cdot(3e^x - 3 + 3e^x(\varepsilon_a+\varepsilon_b))$

$= f(x) + 3e^x(\varepsilon_a+\varepsilon_b) + \varepsilon_c\cdot f(x)$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x) + 3e^x(\varepsilon_a+\varepsilon_b) + \varepsilon_c\cdot f(x) - f(x)}{f(x)}\right| \le \left|\varepsilon_c + \frac{3e^x}{3e^x-3}\cdot(\varepsilon_a+\varepsilon_b)\right| = \left|\varepsilon_c + \left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|\cdot(\varepsilon_a+\varepsilon_b)\right|$

$\le |\varepsilon_c| + \left|\frac{e^x}{e^x-1}\cdot(\varepsilon_a+\varepsilon_b)\right|$

△ungleichung

Wann ist die Funktion instabil?
⇒ Wenn Fehler ganz groß wird also für $x \mapsto 0$, geht der Bruch gegen ∞

Zusatz:
Für $x \mapsto 0$ hat die Funktion eine gute Kondition (wie auf der vorherigen Seite gesehen)

⇒ D.h.

STABILITÄT UNABHÄNGIG VON KONDITION