NumProg WS 20/21 : Tutorübung 07

1. Quadratur nach Romberg
2. Integration mit Gauß Quadratur
3. Quadratur nach Archimedes

Quadratur nach Romberg

Bei der Quadratur nach Romberg kombinieren wird **schrittweise zwei Trapezsummen** $Q_{TS}(f; h_1)$ und $Q_{TS}(f; h_2)$ mit **unterschiedlichen Schrittweiten $\boldsymbol{h_i}$** miteinander.
Dabei werden die h_i bei jeden Schritt kleiner bzw. die Anzahl der Stücke N größer.

So können wir das exakte Ergebnis $I(f)$ relativ gut approximieren:

$$I(f) = \lim_{h \to 0} Q_{TS}(f; h)$$

Der Algorithmus ähnelt Aitken-Neville bzw. Newton.

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$

Aktuelle Berechnung: **keine (initiale Tabelle)**

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
$\frac{b-a}{1}$	0	$Q_{TS}\left(f; \frac{b-a}{1}\right) = Q_{00}$				
			$\searrow$			
$\frac{b-a}{2}$	1	$Q_{TS}\left(f; \frac{b-a}{2}\right) = Q_{10}$	$\rightarrow$	Q_{11}		
			$\searrow$		$\searrow$	
$\frac{b-a}{4}$	2	$Q_{TS}\left(f; \frac{b-a}{4}\right) = Q_{20}$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$

Aktuelle Berechnung: h_i **einsetzen**

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{TS}(f;4) = Q_{00}$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{TS}(f;2) = Q_{10}$	$\rightarrow$	Q_{11}		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{TS}(f;1) = Q_{20}$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$ **mit** $N = \frac{H}{h} = \frac{4}{4} = 1$

Aktuelle Berechnung: $Q_{00} = Q_{TS}\left(x^4; \frac{4-0}{1}\right) = 4 \cdot \left(\frac{0}{2} + \frac{256}{2}\right) = 512$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{TS}(f;2) = Q_{10}$	$\rightarrow$	Q_{11}		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{TS}(f;1) = Q_{20}$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$ **mit** $N = \frac{H}{h} = \frac{4}{2} = 2$

Aktuelle Berechnung: $Q_{10} = Q_{TS}\left(x^4; \frac{4-0}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{0}{2} + 16 + \frac{256}{2}\right) = 288$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{10} = 288$	$\rightarrow$	Q_{11}		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{TS}(f; 1) = Q_{20}$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$ mit $N = \frac{H}{h} = \frac{4}{1} = 4$

Aktuelle Berechnung: $Q_{20} = Q_{TS}\left(x^4; \frac{4-0}{4}\right) = 1 \cdot \left(\frac{0}{2} + 1 + 16 + 81 + \frac{256}{2}\right) = 226$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{10} = 288$	$\rightarrow$	Q_{11}		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{20} = 226$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$

Aktuelle Berechnung: $Q_{11} = Q_{10} + \frac{Q_{10} - Q_{00}}{\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 - 1} = 288 + \frac{288 - 512}{2^2 - 1} = \frac{640}{3} = 213,\overline{3}$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{10} = 288$	$\rightarrow$	$Q_{11} = 213,\overline{3}$		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{20} = 226$	$\rightarrow$	Q_{21}	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$

Aktuelle Berechnung: $Q_{21} = Q_{20} + \frac{Q_{20} - Q_{10}}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} = 226 + \frac{226 - 288}{2^2 - 1} = \frac{616}{3} = 205,\overline{3}$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{10} = 288$	$\rightarrow$	$Q_{11} = 213,\overline{3}$		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{20} = 226$	$\rightarrow$	$Q_{21} = 205,\overline{3}$	$\rightarrow$	Q_{22}

Quadratur nach Romberg

gesuchtes Integral: $\int_0^4 x^4 dx$

Aktuelle Berechnung: $Q_{22} = Q_{21} + \frac{Q_{21} - Q_{11}}{\left(\frac{h_0}{h_2}\right)^2 - 1} = 205,\overline{3} + \frac{205,\overline{3} - 213,\overline{3}}{4^2 - 1} = \frac{1024}{5} = 204,8$

h_i	$i \setminus k$	0		1		2
4	0	$Q_{00} = 512$				
			$\searrow$			
2	1	$Q_{10} = 288$	$\rightarrow$	$Q_{11} = 213,\overline{3}$		
			$\searrow$		$\searrow$	
1	2	$Q_{20} = 226$	$\rightarrow$	$Q_{21} = 205,\overline{3}$	$\rightarrow$	$Q_{22} = 204,8$

Gauß Quadratur

In der Formel zur Quadratur von Aufgabe 1):

$$I_f = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = I_g$$

haben wir angenommen, dass die Stützstellen x_i alle den gleichen Abstand zueinander haben.

Gauß Quadratur

In der Formel zur Quadratur von Aufgabe 1):

$$I_f = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = I_g$$

haben wir angenommen, dass die Stützstellen x_i alle den gleichen Abstand zueinander haben.

Bei der Gauß Quadratur haben wir neben den Gewichten w_i auch noch die Position x_i als zusätzliche Bedingung (also 2 Bedingungen pro Stützpunkt $y_i = f(x_i)$)

→ mit Gauß Quadratur maximal korrekt integrierbarer Polynomgrad: $2n - 1$ bei n Stützstellen

Gauß Quadratur

In der Formel zur Quadratur von Aufgabe 1):

$$I_f = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = I_g$$

haben wir angenommen, dass die Stützstellen x_i alle den gleichen Abstand zueinander haben.

Bei der Gauß Quadratur haben wir neben den Gewichten w_i auch noch die Position x_i als zusätzliche Bedingung (also 2 Bedingungen pro Stützpunkt $y_i = f(x_i)$)

→ mit Gauß Quadratur maximal korrekt integrierbarer Polynomgrad: $2n - 1$ bei n Stützstellen

Achtung: Integrationsgrenzen bei klassischer Gauß Quadratur sind $[-1; 1]$!

(andere Intervalle können wie bei Hermite auf $[-1; 1]$ gemappt werden)

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n - 1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n-1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad … exakt integrieren.

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n - 1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 2 - 1 = 3$ exakt integrieren.

→ also stellen wir … Gleichungen auf

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n - 1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 2 - 1 = 3$ exakt integrieren.

→ also stellen wir 4 Gleichungen auf (Grad 0 bis 3)

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n - 1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 2 - 1 = 3$ exakt integrieren.
→ also stellen wir 4 Gleichungen auf (Grad 0 bis 3)

Bei z.B. 4 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad … exakt integrieren.

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n-1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 2 - 1 = 3$ exakt integrieren.

→ also stellen wir 4 Gleichungen auf (Grad 0 bis 3)

Bei z.B. 4 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 4 - 1 = 7$ exakt integrieren.

→ also stellen wir … Gleichungen auf

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Da wir die Methode der unbestimmten Koeffizienten verwenden (also wir müssen nur so viele w_i bestimmen, sodass wir den Polynomgrad $2n - 1$ bei n Stützstellen nicht überschreiten, aka n w_i), können wir $2n$ Gleichungen und damit ein Gleichungssystem aufstellen.

Bei z.B. 2 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 2 - 1 = 3$ exakt integrieren.
→ also stellen wir 4 Gleichungen auf (Grad 0 bis 3)

Bei z.B. 4 Stützstellen, können wir nur bis zum Grad $2 \cdot 4 - 1 = 7$ exakt integrieren.
→ also stellen wir 8 Gleichungen auf (Grad 0 bis 7)

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir … Stützstellen.

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir 4 Stützstellen.

→ also müssen wir … Gleichungen aufstellen

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir 4 Stützstellen.

→ also müssen wir $2 \cdot 4 = 8$ Gleichungen aufstellen

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir 4 Stützstellen.

→ also müssen wir $2 \cdot 4 = 8$ Gleichungen aufstellen

Für ein Polynom von Grad 3 brauchen wir … Stützstellen

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir 4 Stützstellen.

→ also müssen wir $2 \cdot 4 = 8$ Gleichungen aufstellen

Für ein Polynom von Grad 3 brauchen wir 2 Stützstellen

→ also müssen wir … Gleichungen aufstellen

Gauß Quadratur

Wie funktioniert das jetzt?

Anders gedacht: Wenn wir z.B. ein Polynom von Grad 6 mit der Gauß Quadratur exakt integrieren wollen, brauchen wir 4 Stützstellen.

→ also müssen wir $2 \cdot 4 = 8$ Gleichungen aufstellen

Für ein Polynom von Grad 3 brauchen wir 2 Stützstellen

→ also müssen wir $2 \cdot 2 = 4$ Gleichungen aufstellen

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = \dots$:

Grad 1 mit $f_1(x) = \dots$:

Grad 2 mit $f_2(x) = \dots$:

Grad 3 mit $f_3(x) = \dots$:

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$:

Grad 1 mit $f_1(x) = x$:

Grad 2 mit $f_2(x) = x^2$:

Grad 3 mit $f_3(x) = x^3$:

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$: $f_0(x_0) \cdot w_0 + f_0(x_1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \quad = \int_{-1}^{1} 1dx = \mathbf{2}$

Grad 1 mit $f_1(x) = x$:

Grad 2 mit $f_2(x) = x^2$:

Grad 3 mit $f_3(x) = x^3$:

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$: $f_0(x_0) \cdot w_0 + f_0(x_1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \quad = \int_{-1}^{1} 1dx = \mathbf{2}$

Grad 1 mit $f_1(x) = x$: $f_1(x_0) \cdot w_0 + f_1(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \quad = \int_{-1}^{1} xdx = \mathbf{0}$

Grad 2 mit $f_2(x) = x^2$:

Grad 3 mit $f_3(x) = x^3$:

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$: $\quad f_0(x_0) \cdot w_0 + f_0(x_1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \quad = \int_{-1}^{1} 1 dx = \mathbf{2}$

Grad 1 mit $f_1(x) = x$: $\quad f_1(x_0) \cdot w_0 + f_1(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \quad = \int_{-1}^{1} x dx = \mathbf{0}$

Grad 2 mit $f_2(x) = x^2$: $\quad f_2(x_0) \cdot w_0 + f_2(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \quad = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Grad 3 mit $f_3(x) = x^3$:

Gauß Quadratur

Allgemeine Formel für die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i) \cdot w_i = \int_{-1}^{1} f_k(x)$$

Wobei k für den Grad der Funktion $f_k(x)$ steht. Wir sagen hier: $f_k(x) = x^k$

Beispiel mit 2 Stützstellen (x_0 und x_1), aka Aufgabe 2a):

Grad 0 mit $f_0(x) = 1$: $\quad f_0(x_0) \cdot w_0 + f_0(x_1) \cdot w_1 = w_0 + w_1 \quad = \int_{-1}^{1} 1 dx = \mathbf{2}$

Grad 1 mit $f_1(x) = x$: $\quad f_1(x_0) \cdot w_0 + f_1(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \quad = \int_{-1}^{1} x dx = \mathbf{0}$

Grad 2 mit $f_2(x) = x^2$: $\quad f_2(x_0) \cdot w_0 + f_2(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \quad = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \mathbf{\frac{2}{3}}$

Grad 3 mit $f_3(x) = x^3$: $\quad f_3(x_0) \cdot w_0 + f_3(x_1) \cdot w_1 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \quad = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \mathbf{0}$

Gauß Quadratur

Dann noch Gleichungssystem auflösen:

$$
\begin{aligned}
w_0 + w_1 &= \mathbf{2} \\
w_0 x_0 + w_1 x_1 &= \mathbf{0} \\
w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 &= \mathbf{\frac{2}{3}} \\
w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Gauß Quadratur

Dann noch Gleichungssystem auflösen:

$$w_0 + w_1 = \mathbf{2} \qquad \rightarrow w_0 = 2 - w_1$$

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \text{mit } x_0 = -x_1\text{: } 0 = x_0(w_0 - w_1) = x_0(2 - 2w_1)$$

$$w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad \rightarrow \text{mit } w_0 = w_1 = 1 \text{ und } x_0 = -x_1\text{: } x_0^2 = \frac{1}{3}$$

$$w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \qquad w_0 = 1$$

$$w_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Gauß Quadratur

Dann noch Gleichungssystem auflösen:

$$w_0 + w_1 = \mathbf{2} \qquad \rightarrow w_0 = 2 - w_1$$

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \text{mit } x_0 = -x_1\text{: } 0 = x_0(w_0 - w_1) = x_0(2 - 2w_1)$$

$$w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad \rightarrow \text{mit } w_0 = w_1 = 1 \text{ und } x_0 = -x_1\text{: } x_0^2 = \frac{1}{3}$$

$$w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \qquad w_0 = 1, \quad w_1 = 1, \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ Template für Gauß Quadratur bei 2 Stützstellen:

$$Q_G(f) = w_0 \cdot f(x_0) + w_1 \cdot f(x_1)$$
$$= 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Quadratur nach Archimedes