

NumProg WS 20/21 : Tutorübung 02

1. Kondition + Konditionszahl
2. Beispiel für schlechte Kondition
3. Stabilität + Epsilontik

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden** **Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden** **Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

	Eingabe x
	\downarrow f
	Ausgabe $f(x)$

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden** **Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

[Störung]	Eingabe \tilde{x}
	↓ f
	Ausgabe $f(x)$

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden** **Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

[Störung]	Eingabe \tilde{x}
	↓ f
	Ausgabe $f(x)$

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden** **Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

[Störung]	Eingabe \tilde{x}
	\downarrow f
	Ausgabe $f(\tilde{x})$

Kondition

Kondition beschreibt das Verhältnis zwischen einem **Eingabefehler** \tilde{x} und dem **daraus resultierenden Ausgabefehler** $f(\tilde{x})$.

[Störung]	Eingabe	\tilde{x}
	↓	f
	Ausgabe	$f(\tilde{x})$

Kondition **betrachtet keine internen Fehler eines Algorithmus** und kann durch dessen Veränderung nicht verbessert werden!

→ allerdings kann Problem umformuliert werden (Vorkonditionierung)

Konditionszahl

Die **Konditionszahl** kann berechnet werden und ist eine obere Schranke für den Verstärkungsfaktor des Fehlers der Eingabe bis hin zur Ausgabe.

Konditionszahl einer Funktion $f(x)$ kann durch Ableitung approximiert werden:

$$\text{cond}(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

Konditionszahl

Die **Konditionszahl** kann berechnet werden und ist eine obere Schranke für den Verstärkungsfaktor des Fehlers der Eingabe bis hin zur Ausgabe.

Konditionszahl einer Funktion $f(x)$ kann durch Ableitung approximiert werden:

$$\text{cond}(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

Auswertung der Konditionszahl:

- $\text{cond}(f, x) \leq 1$
Maximaler Verstärkungsfaktor ist 1; Fehler kann zur Ausgabe hin nicht wachsen
→ **gute Konditionierung**
- $\text{cond}(f, x) \gg 1$
Maximaler Verstärkungsfaktor wesentlich größer als 1; Fehler zur Ausgabe hin wächst stark
→ **schlechte Konditionierung**

Stabilität

Stabilität beschreibt, wie sich **interne Fehler** akkumulieren und auf das Endergebnis auswirken (z.B. Runden).

	Eingabe x
	\downarrow f
	Ausgabe $f(x)$

Stabilität

Stabilität beschreibt, wie sich **interne Fehler** akkumulieren und auf das Endergebnis auswirken (z.B. Runden).

	Eingabe x
	\downarrow f
	Ausgabe $f(x)$

Stabilität

Stabilität beschreibt, wie sich **interne Fehler** akkumulieren und auf das Endergebnis auswirken (z.B. Runden).

[Störung]	Eingabe x
	↓ rd(f)
	Ausgabe $f(x)$

Stabilität

Stabilität beschreibt, wie sich **interne Fehler** akkumulieren und auf das Endergebnis auswirken (z.B. Runden).

[Störung]	Eingabe	x
	↓	$\text{rd}(f)$
	Ausgabe	$\text{rd}(f)(x)$

Stabilität

Stabilität beschreibt, wie sich **interne Fehler** akkumulieren und auf das Endergebnis auswirken (z.B. Runden).

[Störung]	Eingabe	x
	↓	$\text{rd}(f)$
	Ausgabe	$\text{rd}(f)(x)$

Analyse der Stabilität einer Funktion $f(x)$ ist mit sogenannter **Epsilontik** möglich:

- bei jeder Maschinenoperation op_M wird ein neuer relativer Fehler ε_i erzeugt
 $(a \text{ op}_M b) = \text{rd}_M(a \text{ op } b) = (a \text{ op } b) \cdot (1 + \varepsilon_i)$, wobei
 $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{\text{Ma}}$ (Maschinengenauigkeit) *und* $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \doteq 0$
 \rightarrow so wird aus $f(x)$ die gerundete Auswertung $\text{rd}(f)(x)$ erstellt
- Stabilität beschreibender relativer Fehler:

$$\left| \frac{\text{rd}(f)(x) - f(x)}{f(x)} \right|$$

Zusammenfassung

Kondition

[Störung]	Eingabe \tilde{x}
	↓ f
	Ausgabe $f(\tilde{x})$

- Konditionierung eines Problems kann mit Konditionszahl abgeschätzt werden
- Problemspezifisch und nicht von Implementierung abhängig!
- Vorkonditionierung kann da aber helfen

Stabilität

[Störung]	Eingabe x
	↓ $\text{rd}(f)$
	Ausgabe $\text{rd}(f)(x)$

- Stabilität kann mit Epsilontik abgeschätzt werden
- Implementierungsabhängig!
- Umformung der Operation kann helfen