NUMPROG ZSMF. TEIL 7

EXPLIZITES/IMPLIZITES EULERVERFAHREN, HEUN, KLASSISCHES RUNGE-KUTTA-VERFAHREN

ODE: Einfache Differenzial-Gleichungen als AWP ← Anfangs-Wert-Problem

= Differenzialgleichungen sind Formeln, die nach einer Menge an Funktionen suchen.

In ODE's sind alle Punkte unendlich oft differenzierbar, außer Pol-Stellen (d.h. keine „Knicke" / Definitionslücken)

Im Gegensatz zu PDE's (Partial differenzierbare Gleichungen)

SEPARIERBARE ODE'S?

= ODE's der Form $y'(x) = f(y,t)$

Diese sind i.d.r. mit Separation der Variablen lösbar

Beim Lösen = wichtig zu unterscheiden, ob t in y gebunden ist oder nicht

BSP: $y'(t) = y(t)^2$

$y'(t) = t * y(t)^2$

WAS IST EIN AWP? = Anfangswertproblem

⇒ Für ODE's mit einer Variable t und Grad 1, reicht ein Punkt aus um festzulegen welche Funktion die speziellste Lösung des ODE's ist.

Separation von Variablen

VORGEHEN:

Gegeben: Differenzialgleichung der Form: $y'(t) = \varphi(y,t)$

METHODIK:

1. Leibniz-Notation
2. Separieren
3. Integrieren
4. Integral lösen
5. Nach y auflösen

AWP's Lösen: BSP

AW := (t_0, y_0)

$y'(t) = t \cdot y(t)$	1. Leibniz $(y(t) \to y)$
$y' = t \cdot y$	2. $y' \to dy/dt$
$\frac{dy}{dt} = t \cdot y$	Sortiere nach freiem t und $y(t)$
$\frac{1}{y} dy = t \cdot dt$	3. Integrieren (Am besten jetzt schon AW einsetzen)
$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y} dy = \int_{t_0} t \cdot dt$	4. Integrieren $\left(\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\mu} d\mu = \int_{t_0}^{t} \theta \cdot d\theta \right)$
$[\ln\|y\|]_{y_0}^{y} = [\frac{1}{2}t^2]_{t_0}^{t}$	(!! Betrag nicht vergessen !!)

mit random griechischen Buchstaben ersetzen

EXPLIZITES EULERVERFAHREN

- implizites Eulerverfahren
- Heun-Verfahren
- Runge-Kutta-Verfahren

next page

weitere Bsp (Übung macht den Meister :3)

(gilt für beide) $y(0) = y_0$

$y'(t) = 2y(t)$	$y'(t) = -2y(t)$
$\frac{dy}{dt} = 2y$	$\frac{dy}{dt} = -2y$
$\frac{dy}{2y} = dt$	$\frac{dy}{-2y} = dt$
$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{2\eta} d\eta = \int_0^t d\tau$	$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{-2\eta} d\eta = \int_0^t d\tau$
$\frac{1}{2}(\ln\|y\| - \ln\|y_0\|) = t - 0$	$-\frac{1}{2}(\ln\|y\| - \ln\|y_0\|) = t - 0$
$\left\|\frac{y(t)}{y_0}\right\| = e^{2t}$	$\left\|\frac{y(t)}{y_0}\right\| = e^{-2t}$
$y(t) = \pm y_0 \cdot e^{2t}$	$y(t) = \pm y_0 \cdot e^{-2t}$

Da $t=0$ als Anfangswert $y(t=0) = y_0$ gegeben ist, ist die + Lösung gesucht

⇓

$y(t) = y_0 \cdot e^{2t}$ | $y(t) = y_0 \cdot e^{-2t}$

Fehlerentwicklung falls y_0 einen Eingabefehler hat; Für $t \to \infty$

$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$	$y_\varepsilon(0) = y_0 + \varepsilon$
Schlechte Kondition! Für $t \to \infty$	Gute Kondition! Für $t \to \infty$
$y(x) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{2t}$	$y(x) = (y_0 + \varepsilon) \cdot e^{-2t}$

Bsp:

$\dot{y}(t) = t \cdot y(t)$, $y(0) = 1$, $t \geq 0$ (t_0, y_0)

a) analytische Lösung $y(t)$ des AWP mit Hilfe der Separation der Variablen

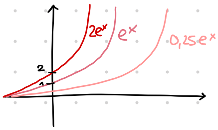
$\dot{y} = t \cdot y$	
$\frac{dy}{dt} = t \cdot y$	Leibniz-Notation
$\frac{1}{y} dy = t \cdot dt$	sortieren nach y & t
$\int_{y_0} \frac{1}{y} dy = \int_{t_0} t \cdot dt$	Integrieren
$\int_1 \frac{1}{y} dt = \int_0 t \cdot dt$	$y_0 = 1, t_0 = 0$
$\int_1^y \frac{1}{\varphi} d\varphi = \int_0^t \theta \, d\theta$	mit griechischen Buchstaben ersetzen
$[\ln\|\varphi\|]_1^y = [\frac{1}{2}\theta^2]_0^t$	Integrieren

$\Rightarrow \ln|y| - \underbrace{\ln|1|}_{=0} = \frac{1}{2}t^2 - \underbrace{\frac{1}{2}0^2}_{=0} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}t^2$

$|y| = e^{\frac{1}{2}t^2} = y(t) = \pm e^{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow y(t) = +e^{\frac{1}{2}t^2}$

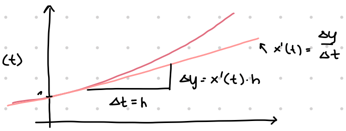
Einschrittverfahren:

1)
Explizites EULER Verfahren



DFG: $x' = x$
Allgemeinlösung $F(T) = ce^x$
$c \in \mathbb{R}$

- $x(t+h) = x(t) + x'(t)\cdot h$
- $x'(t)$: Steigung an Stelle $x(t)$
- h: Schnittstelle



EULERVERFAHREN:

- Linear wachsender Fehler
- kann nur DFG ersten Grades lösen
- Abbruch bei Polynomen

Die direkten/expliziten Verfahren lassen sich mit Quadratur durch Polynominterpolation herleiten.
Dadurch haben sie das selbe Fehlerverhalten
Eulerverfahren wird aus den Polynomen 0. Grades hergeleitet => O(h)

$$\boxed{\begin{aligned} t_k &= t_0 + k\cdot\delta t \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t\cdot f(t_k, y_k) \end{aligned}}$$!!

Bsp: $\dot y(t) = t\cdot y(t)$, $y(0) = 1$, $t \geq 0$
Berechnen der num. Lösungswerte y_k im Intervall $[0;4]$
Rechnen mit Schnittwerte $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$

$y_0 = 1$
$t_0 = 0$
$y_{k+1} =$ $y_1 = y_0 + \delta t\cdot f(t_0, y_0) = 1 + 1\cdot(0\cdot1) = 1$
$t_k =$ $t_1 = t_0 + k\cdot\delta t = 0 + 1\cdot1 = 1$
$y_2 = y_1 + \delta t\cdot f(t_1, y_1) = 1 + 1\cdot(1\cdot1) = 2$
$t_2 = t_0 + k\cdot\delta t = 1 + 2\cdot1 = 2$
$y_3 = y_2 + \delta t\cdot f(t_2, y_2) = 2 + 1\cdot(2\cdot2) = 6$
$t_3 = t_0 + k\cdot\delta t = 1 + 3\cdot1 = 3$
$y_4 = y_3 + \delta t\cdot f(t_3, y_3) = 6 + 1\cdot(3\cdot6) = 24$
$t_4 = t_0 + k\cdot\delta t = 1 + 4\cdot1 = 4$

$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ ⇒

VERGLEICH mit Werten der analytischen Lösung
$y(t_1) = e^{\frac12} = 1.6487\ldots$
$y(t_2) = e^{\frac42} = 7.3890\ldots$
$y(t_3) = e^{\frac92} = 90.017\ldots$
$y(t_4) = e^{\frac{16}{2}} = 2980.9\ldots$

2)
Verfahren von Heun => 2. Ordnung $O(h^2)$

$$\boxed{\begin{aligned} t_k &= t_0 + k\cdot\delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2}\cdot\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t\cdot f(t_k, y_k))\right); \end{aligned}}$$!!

BSP: $\dot y(t) = t\cdot y(t)$, $y(0) = 1$, $t \geq 0$

$t_1 = t_0 + k\cdot\delta t = 0 + 1\cdot1 = 1$

$y_1 = y_0 + \frac{\delta t}{2}\cdot\Big(\underbrace{f(t_0,y_0)}_{=0} + \underbrace{f(t_1, y_0 + \delta t\cdot f(t_0,y_0))}_{f(t_1,1)}\Big) = 1 + \frac12\cdot(1\cdot1) = \frac32$

$t_2 = y_0 + k\cdot\delta t = 0 + 2\cdot1 = 2$

$y_2 = y_1 + \frac{\delta t}{2}\cdot\Big(\underbrace{f(t_1, y_1)}_{=1\cdot\frac32} + \underbrace{f(t_2, y_1 + \delta t\cdot f(t_1,y_1))}_{\frac32+1\cdot(1\cdot\frac32) = (\frac32+\frac32)}\Big);$

$\frac32 + \frac12\cdot\left(\frac32 + 2\cdot\left(\frac32 + \frac32\right)\right) = \frac{21}{4} = 5{,}25$

$t_3 = t_0 + k\cdot\delta t = 0 + 3\cdot1 = 3$

$y_3 = y_2 + \frac{\delta t}{2}\cdot\left(f(t_2,y_2) + f(t_3, y_2 + \delta t\cdot f(t_2,y_2))\right);$

$\frac{21}{4} + \frac12\cdot\left(\frac{21}{2} + 3\cdot\left(\frac{21}{4} + \frac{42}{4}\right)\right) = \frac{21}{4} + \frac12\cdot\left(\frac{189}{4} + \frac{42}{4}\right) = \frac{273}{8} = 34.125$

$t_4 = t_0 + k\cdot\delta t = 0 + 4\cdot1$

$y_4 = y_3 + \frac{\delta t}{2}\cdot\left(f(t_3,y_3) + f(t_4, y_3 + \delta t\cdot f(t_3,t_3))\right);$

$\frac{273}{8} + \frac12\cdot\left(3\cdot\frac{273}{8} + 4\cdot\left(\frac{273}{8} + 3\cdot\frac{273}{8}\right)\right) = \frac{273}{8} + \frac12\cdot\left(3\cdot\frac{273}{8} + 2\cdot273\right)$

$= \frac{21}{16}\cdot273 = 358{,}3\ldots$

im Vergleich zur analytischen Lösung => besser als explizites Eulerverfahren

3)
Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

4. Ordnung → $O(h^4)$

$$\boxed{\begin{aligned} t_k &= t_0 + k\cdot\delta t; \\ T_1 &= f(t_k, y_k); \\ T_2 &= f\left(t_k + \tfrac{\delta t}{2}, y_k + \tfrac{\delta t}{2}T_1\right); \\ T_3 &= f\left(t_k + \tfrac{\delta t}{2}, y_k + \tfrac{\delta t}{2}T_2\right); \\ T_4 &= f(t_{k+1}, y_k + \delta t T_3); \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{\delta t}{6}\cdot(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4); \end{aligned}}$$!!

BSP: $\dot y(t) = t\cdot y(t)$, $y(0) = 1$, $t \geq 0$

k=0:
$T_1 = f(t_0, y_0) = t_0\cdot y_0 = 0$
$T_2 = f\left(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2}T_1\right) = \frac12\cdot1 = \frac12$
$T_3 = f\left(t_0 + \frac{\delta t}{2}, y_0 + \frac{\delta t}{2}T_2\right) = \frac12\cdot\frac54 = \frac58$
$T_4 = f(t_1, y_0 + \delta t\cdot T_3) = 1\cdot\frac{13}{8} = \frac{13}{8}$

Gesamtschritt:

$y_1 = y_0 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = 1 + \frac16\cdot\left(0 + 1 + \frac54 + \frac{13}{8}\right)$

$= 1 + \frac16\cdot\frac{31}{8} = \frac{79}{48} = 1{,}645\ldots$

k=1

$k=1$

$T_1 = f(t_1, y_1) = t_1 \cdot y_1 = \frac{79}{48}$

$T_2 = f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} T_1) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{79}{2 \cdot 48}\right) = \frac{711}{192} = \frac{237}{64}$

$T_3 = f(t_1 + \frac{\delta t}{2}, y_1 + \frac{\delta t}{2} T_2) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{79}{48} \cdot \frac{4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{711}{192}\right) = \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}$

$T_4 = f(t_2, y_1 + \delta t \cdot T_3) = 2 \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{3 \cdot 1343}{4 \cdot 192}\right) = \frac{5293}{2 \cdot 192}$

Gesamtschritt:

$y_2 = y_1 + \frac{\delta t}{6}(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4) = \frac{79}{48} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{79}{48} + \frac{711}{2 \cdot 48} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1343}{192} + \frac{5293}{2 \cdot 192}\right) =$

$= \frac{16590}{48 \cdot 48} = 7{,}200\ldots$

$y_3 = 77{,}70\ldots$

$y_4 = 1856.8\ldots$

rechnet man genauso aus, aber zu viel Arbeit (sollte der Computer machen)

Vergleichen der Werte der letzten 3 Verfahren:

$e^{\frac{t^2}{2}}$	Euler	Heun	R-K
1,648	1	1,5	1,645
7,389	2	5,25	7,20
90,01	6	34,125	77,70
2981	24	358,3	1856,8

→ alle zmε ungenau

⇒ Lösung:

Implizites Eulerverfahren

4) # Implizites Eulerverfahren

1. Ordnung

- In direkten Verfahren haben wir alle Werte die wir benötigen.
- Bei impliziten Verfahren nutzen wir bereits den Zielwert um auf das Ergebnis zu kommen.
- Hierfür müssen wir ein Lösungsverfahren – wie das NST-Problem – anwenden.

↳ Implizite Verfahren gleicher Ordnung → gleiches Konvergenzverhalten, jedoch stabiler.

!! $\boxed{y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})}$!!

BSP: $\dot{y}(t) = -12(y(t))^2$, $y(1) = 1$, $\forall t \geq 1$

a) AWP:

$\frac{dy}{dt} = -12y^2$

$-\frac{1}{y^2} dy = 12 dt$

$-\int_{y(t_0)}^{y} \frac{1}{\eta^2} d\eta = \int_{t_0}^{t} 12 d\tau$

$\frac{1}{y} - 1 = 12t - 12$

$y(t) = \frac{1}{12t - 11}$

b) Lösen mit EXPLIZITEM Eulerverfahren

$y_0 = 1$

$t_0 = 1$

$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) = 1 + 0{,}5 \cdot (-12 \cdot 1^2) = \boxed{-5}$

c) Lösen mit IMPLIZITEM Eulerverfahren

$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(y_{k+1}, t_{k+1})$

$= y_k + h \cdot (-12 y_{k+1}^2) = y_k - 12h y_{k+1}^2$

da wir y_{k+1} erst berechnen wollen und es daher noch nicht gegeben haben

Explizite Lösung gegeben durch:

$0 = 12h y_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k$

$y_{k+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h} \overset{y(t)>0}{\Longrightarrow} y_{k+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 48hy_k}}{24h}$

Ein Zeitschritt mit dem impliziten Eulerverfahren:

$y_0 = 1$

$y_1 = y_0 - 12h \cdot y^2$

$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24 \cdot 1}}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$

DISCLAIMER:
Ich bin auch nur Student, also kanns sein, dass ich manchmal (Flüchtigkeits-) Fehler mach. Sorry dafür :)

viel Erfolg ♡