NUMPROG ZSMF. TEIL 5

GAUß-Elimination und Pivotsuche

BSP: $\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Löse das LGS:

1) ohne Spalten-Pivotsuche und ohne Runden

$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-3} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot 2000 + \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array}\right)$

$x_2 = \frac{2000}{2001} = \underline{0{,}9995}$

$x_1 = (1 - x_2) \cdot (-1000) = \underline{-0{,}4997}$

2) ohne Spalten-Pivotsuche und mit Runden (3 signifikante Stellen)

$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-3} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot 2000 - = \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Runden}} \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-3} & 1 & 1 \\ 0 & 2000 & 2000 \end{array}\right)$

$x_2 = \frac{2000}{2000} = \underline{1}$

wenn iwo 0 rauskommt, weiß man schon, dass das voll ungenau ist

$x_1 = (1 - x_2) \cdot (-1000) = \underline{0}$

3) mit Spalten-Pivotsuche und mit Runden

$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{-10^{-3}} & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -10^{-3} & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot 2000 + \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2001 & 2000 \end{array}\right)$

Größtes Element in der 1. Spalte = 2 ⇒ Zeile mit 2 nach oben tauschen

$+\left(\frac{2}{-10^{-3}}\right)$

Runden

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2000 & 2000 \end{array}\right) \Rightarrow$ $x_2 = \frac{2000}{2000} = \underline{1}$

$x_1 = (0 - x_2)/2 = \underline{-0{,}5}$

VERGLEICHEN DER ERGEBNISSE:

① ✗PIVOT, ✗RUNDEN	② ✗PIVOT, ✓RUNDEN	✓PIVOT, ✓RUNDEN
$\begin{pmatrix} -0{,}4997 \\ 0{,}9995 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$
am genauesten	am ungenauesten	Mittelding :)

⚠ ZEILEN-PIVOTSUCHE gibt es auch! (funktioniert analog :)))

ACHTUNG: beim Vertauschen der Zeilen ⇒ auch x_i vertauschen!

$\Rightarrow (a \;\; b) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

LR-ZERLEGUNG

LR-Zerlegung zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, besteht aus 3 Teilen:

1. Zerlegung der Matrix A: $A = L \cdot R$
2. Vorwärtssubstitution: $Ly = b$
3. Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

BSP:

$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$

1) Zerlegen der Matrix: $A = L \cdot R$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} II - \frac{2}{4} I \\ III - \frac{2}{4} I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & -2{,}5 \end{array}\right) III - 1 II$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ← feste Form von L

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$

$A = L \cdot R$

2) Vorwärtssubstitution: $Ly = b$

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1/2 & 1 & 0 & -3 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{(L|b)} \Rightarrow$

$1 y_1 = 5 \Rightarrow y_1 = 5$

$1/2\, y_1 + y_2 = -3 \Rightarrow y_2 = -5{,}5$

$1/2\, y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow y_3 = 3$

$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} 5 \\ -5{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) Rückwärtssubstitution: $Rx = y$

$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & -5{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)}_{(R|y)} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 3 \end{array} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$