NumProg WS 20/21 : Tutorübung 12

1. Power Iteration
2. Satz von Gerschgorin
3. Klausurvorbereitung (Blatt 13)

Eigenwerte und -vektoren

Wir haben folgendes Problem: $\boldsymbol{A\vec{v}} = \boldsymbol{\lambda\vec{v}}$

Matrix A multipliziert mit Vektor $\vec{v}$ ist das λ-fache des Vektors $\vec{v}$

$\boldsymbol{\lambda}$ ist **Eigenwert** der Matrix A

$\boldsymbol{\vec{v}}$ ist **Eigenvektor** der Matrix A

Formel, um **Eigenwerte** $\boldsymbol{\lambda_i}$ einer Matrix A zu bestimmen:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Formel, um **Eigenvektor** $\boldsymbol{\vec{v}_i}$ zu einem zugehörigen Eigenwert λ_i zu bestimmen:

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot v_i = 0$$

Eigenwerte und -vektoren

Wir haben folgendes Problem: $\boldsymbol{A\vec{v}} = \boldsymbol{\lambda\vec{v}}$

Matrix A multipliziert mit Vektor $\vec{v}$ ist das λ-fache des Vektors $\vec{v}$

$\boldsymbol{\lambda}$ ist **Eigenwert** der Matrix A

$\boldsymbol{\vec{v}}$ ist **Eigenvektor** der Matrix A

Formel, um **Eigenwerte** $\boldsymbol{\lambda_i}$ einer Matrix A zu bestimmen:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0$$ $\longleftarrow$ λ mit pq-Formel o.Ä. bestimmen

Formel, um **Eigenvektor** $\boldsymbol{\vec{v}_i}$ zu einem zugehörigen Eigenwert λ_i zu bestimmen:

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot v_i = 0$$ $\longleftarrow$ LGS mit Gauß lösen

Power Iteration

Mit der Power Iteration können wir **Eigenwerte** λ einer Matrix A **annähern**.

Gegeben sind die Matrix selbst und ein Startvektor x_0.

Verwenden wir die **direkte Power Iteration**, so nähert sich x_0 mit jedem Iterationsschritt dem Eigenvektor $\vec{v}_{max}$ an, der zu dem **betragsmäßig größten Eigenwert $\boldsymbol{\lambda_{max}}$** gehört.

$$x_{k+1} = \frac{A \cdot x_k}{\|A \cdot x_k\|_2}$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{x_k^T \cdot A \cdot x_k}{x_k^T \cdot x_k} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^{(k)} = x_k^T \cdot A \cdot x_k \;\; (\text{ab } x_1 \text{ eh genormt})$$

Power Iteration

Man kann bei der direkten Power Iteration auch noch einen **Shift $\boldsymbol{\mu}$** einfügen.

Dies verändert die Matrix A so, dass ihre Eigenwerte um μ nach unten geschoben werden.

Warum macht man das?

→ So kann sich das Iterationsverfahren auch anderen Eigenwerten annähern, indem man sie einfach **betragsmäßig am größten macht**.

$$x_{k+1} = \frac{(A - \mu \cdot I) \cdot x_k}{\|(A - \mu \cdot I) \cdot x_k\|_2}$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{x_k^T \cdot (A - \mu \cdot I) \cdot x_k}{x_k^T \cdot x_k} + \mu \quad \text{bzw.} \quad \lambda^{(k)} = x_k^T \cdot (A - \mu \cdot I) \cdot x_k + \mu \;\; (\text{ab } x_1 \text{eh genormt})$$

Konvergenzrate

Die **Konvergenzrate** $\boldsymbol{p} \in (0,1)$ beschreibt, wie schnell sich eine konvergente Folge ihrem Grenzwert nähert. Je näher p an der 0 ist, desto besser.

Konvergenzrate für **direkte Power Iteration**: $p = \frac{\lambda_{\text{zweitgrößter}}}{\lambda_{\text{größter}}}$

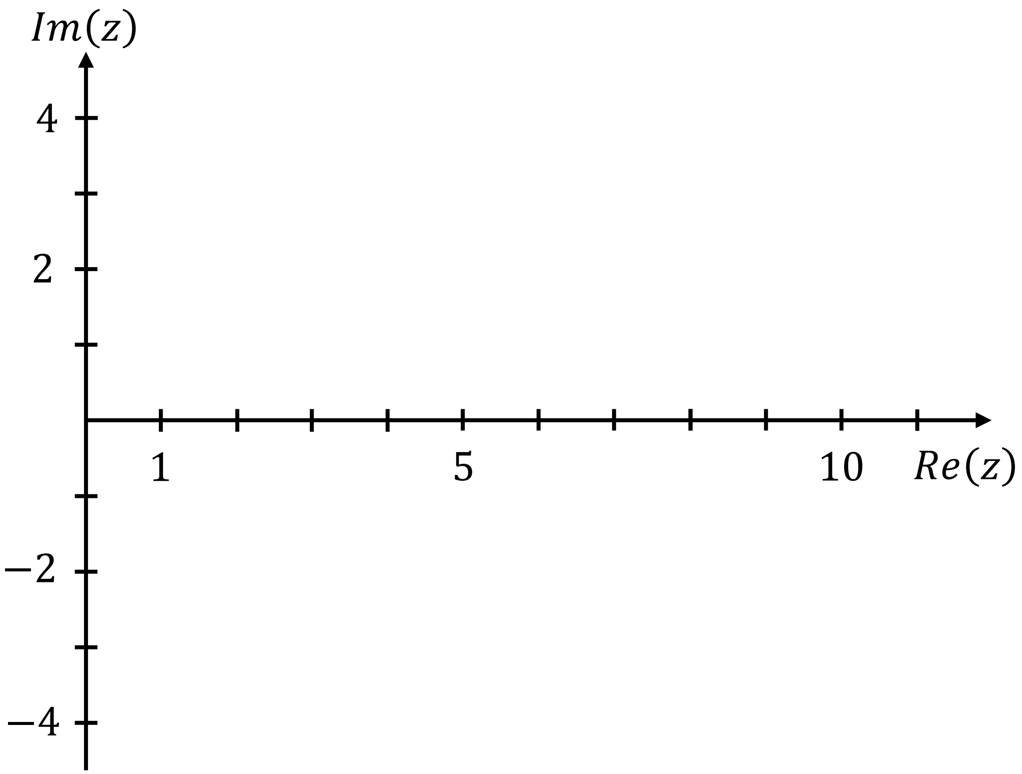
Konvergenzrate für **Shift Power Iteration**: $p = \frac{\lambda_{\text{zweitgrößter}} - \mu}{\lambda_{\text{größter}} - \mu}$

Der Fehler ε verringert sich quasi nach jedem Iterationsschritt, abhängig von p.

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \cdot p$$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - a_{jj}\right| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \left|a_{jk}\right|\right\}$

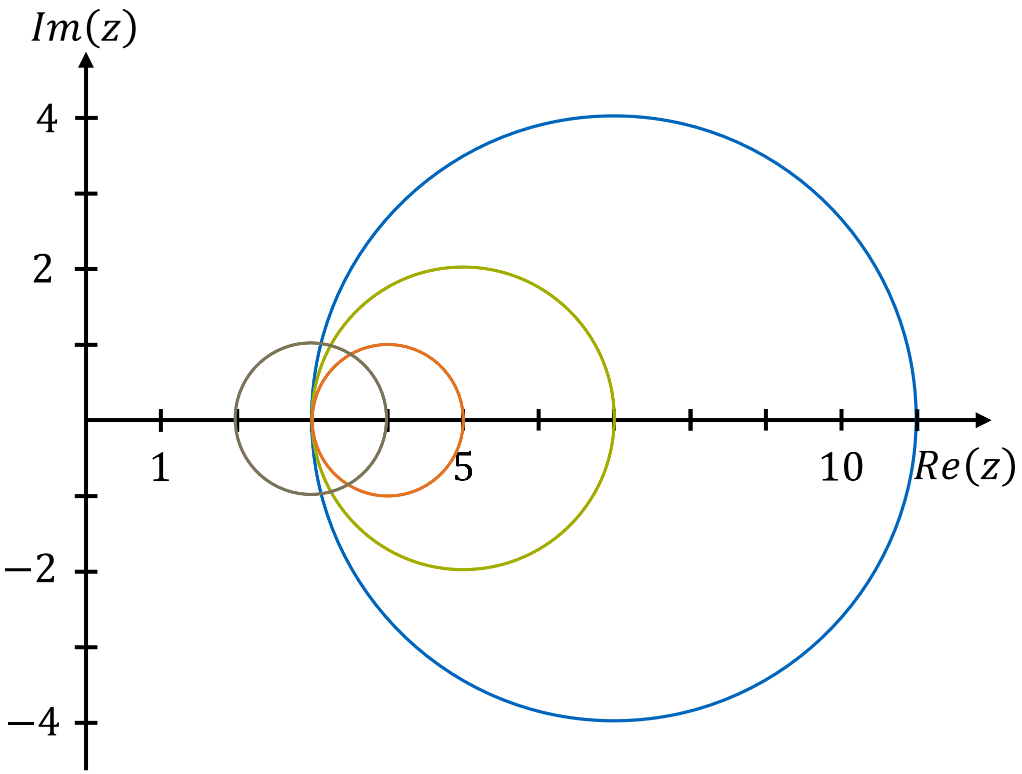


Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$\left|\lambda - MittelPunkt\left(K_j\right)\right| \leq Radius\left(K_j\right)$$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



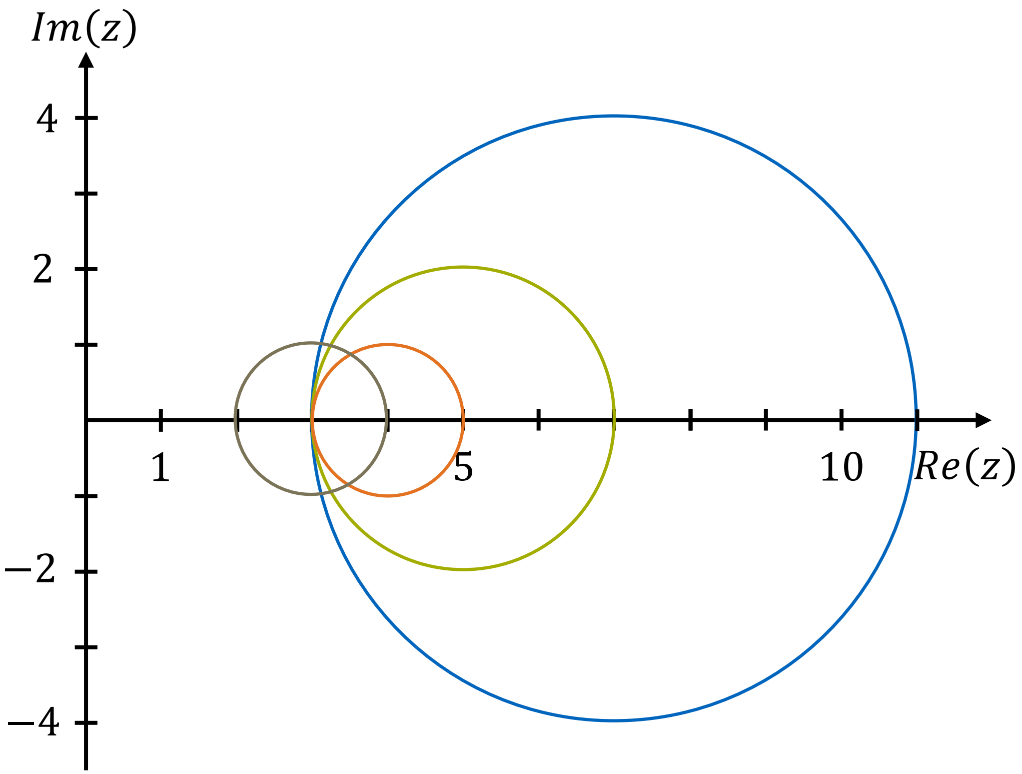
Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b)$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

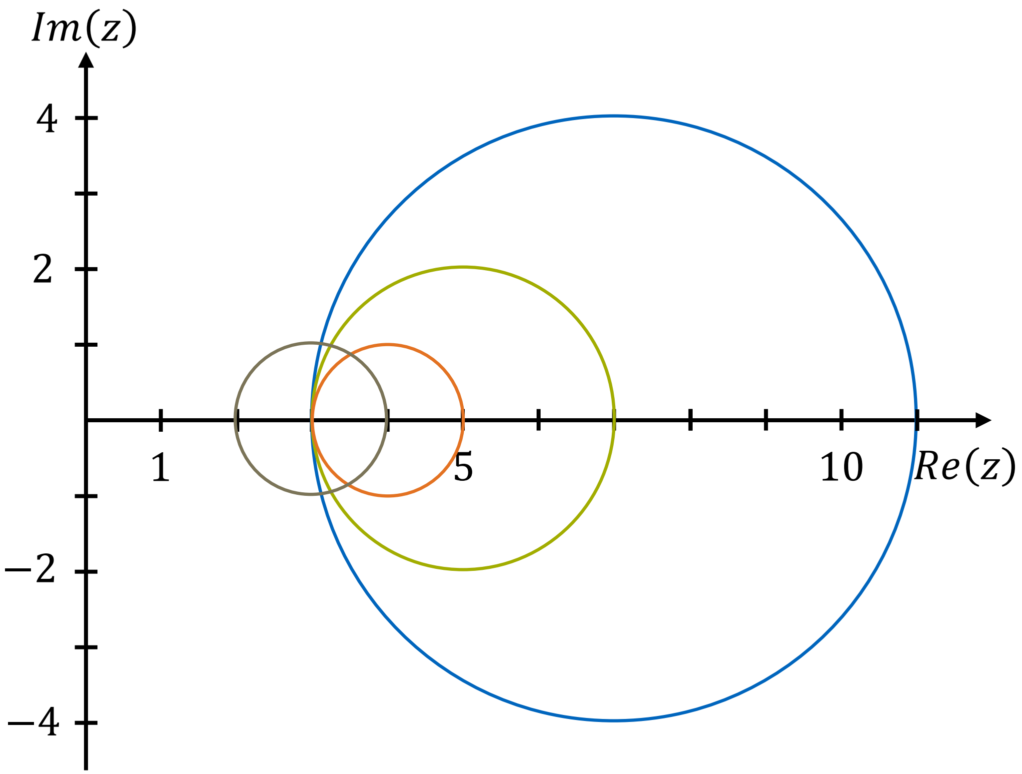
$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b)$

Folgendes schließen wir in $2b)$:

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - a_{jj} \right| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \left| a_{jk} \right| \right\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$\left| \lambda - MittelPunkt(K_j) \right| \leq Radius(K_j)$$

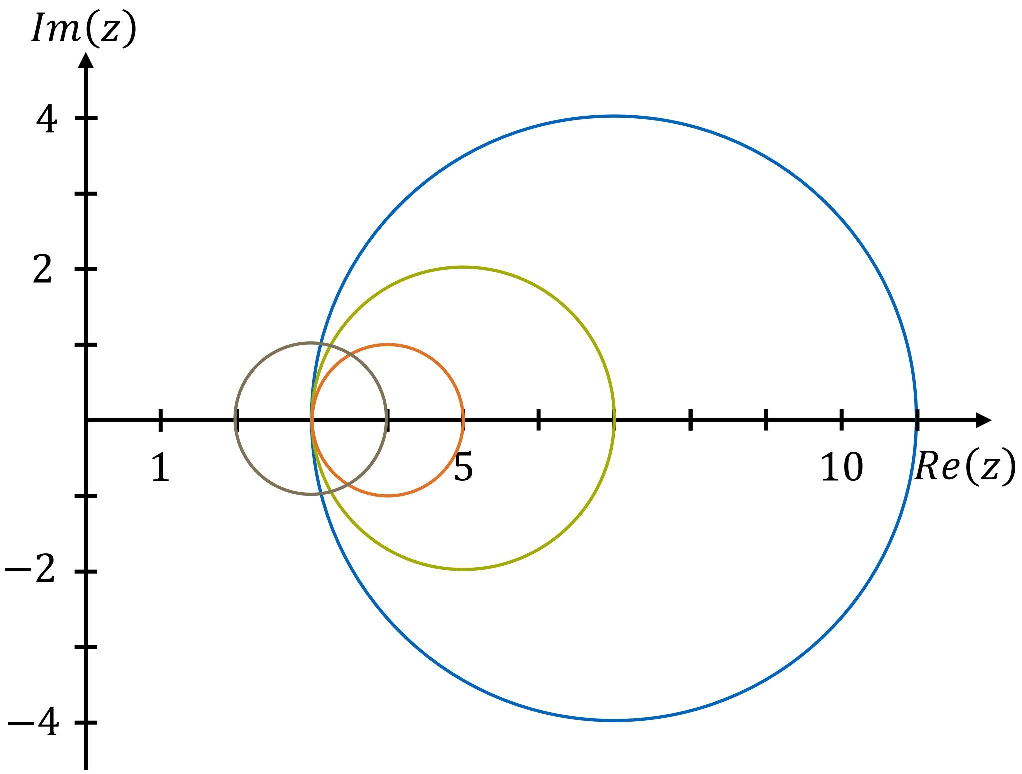
Links Zeichnung aus Aufgabe $2b)$

Folgendes schließen wir in $2b)$:

$\Rightarrow A$ ist symmetrisch

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b$)

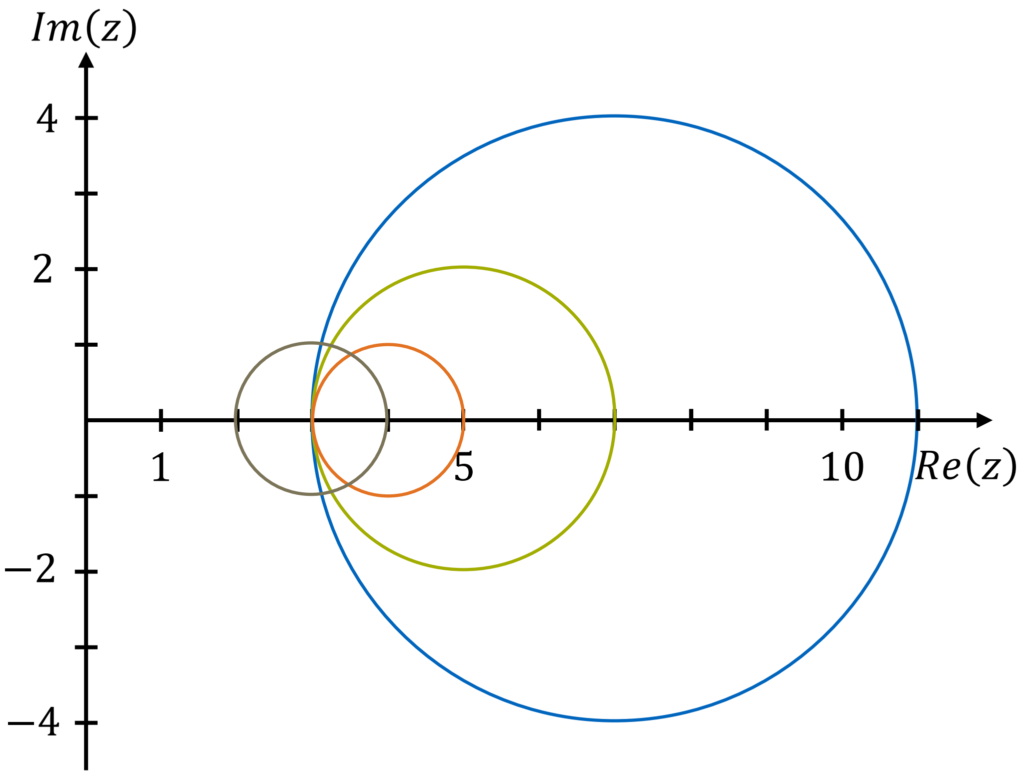
Folgendes schließen wir in $2b$):

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b$)

Folgendes schließen wir in $2b$):

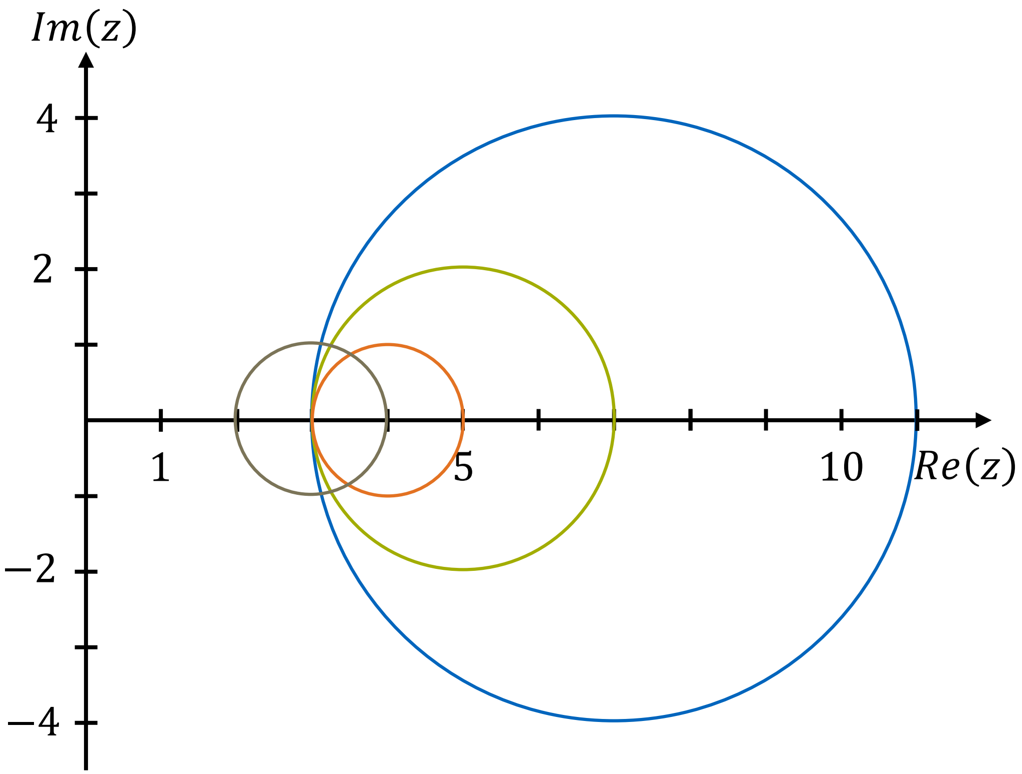
$\Rightarrow$ A ist symmetrisch

$\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ wir schauen uns λ nur für $Re(z)$ an

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b$)

Folgendes schließen wir in $2b$):

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch

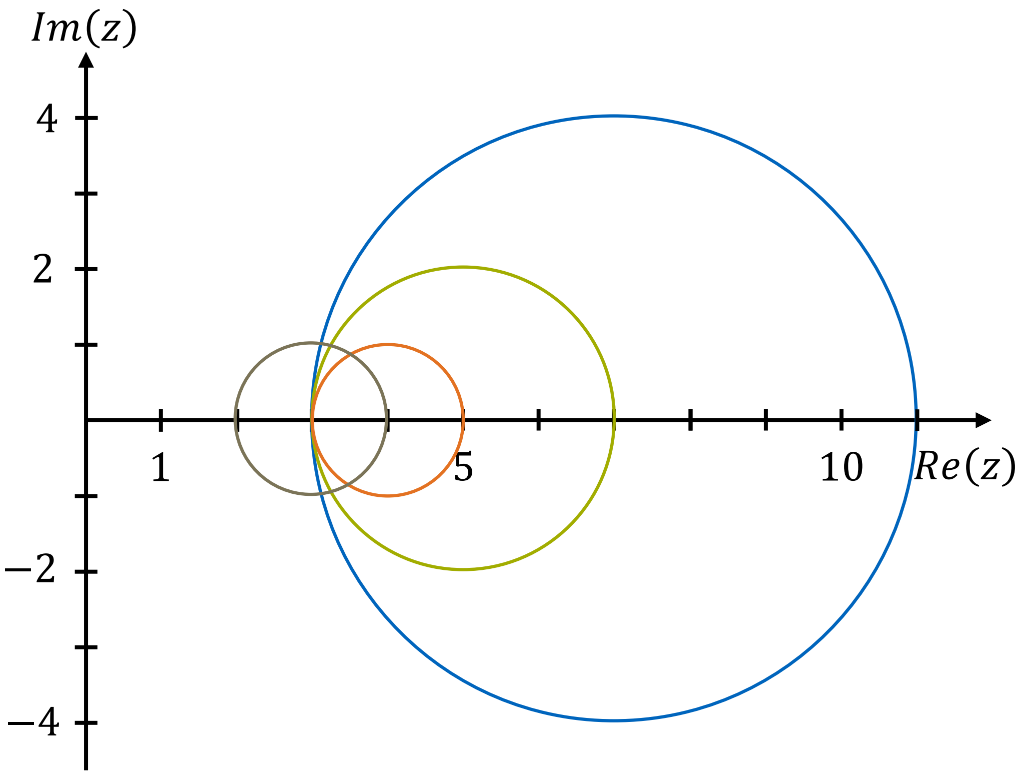
$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ wir schauen uns λ nur für $Re(z)$ an

$\Rightarrow \lambda \in [3,11] \cup [3,7] \cup [3,5] \cup [2,4] = [2,11]$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b$)

Folgendes schließen wir in $2b$):

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

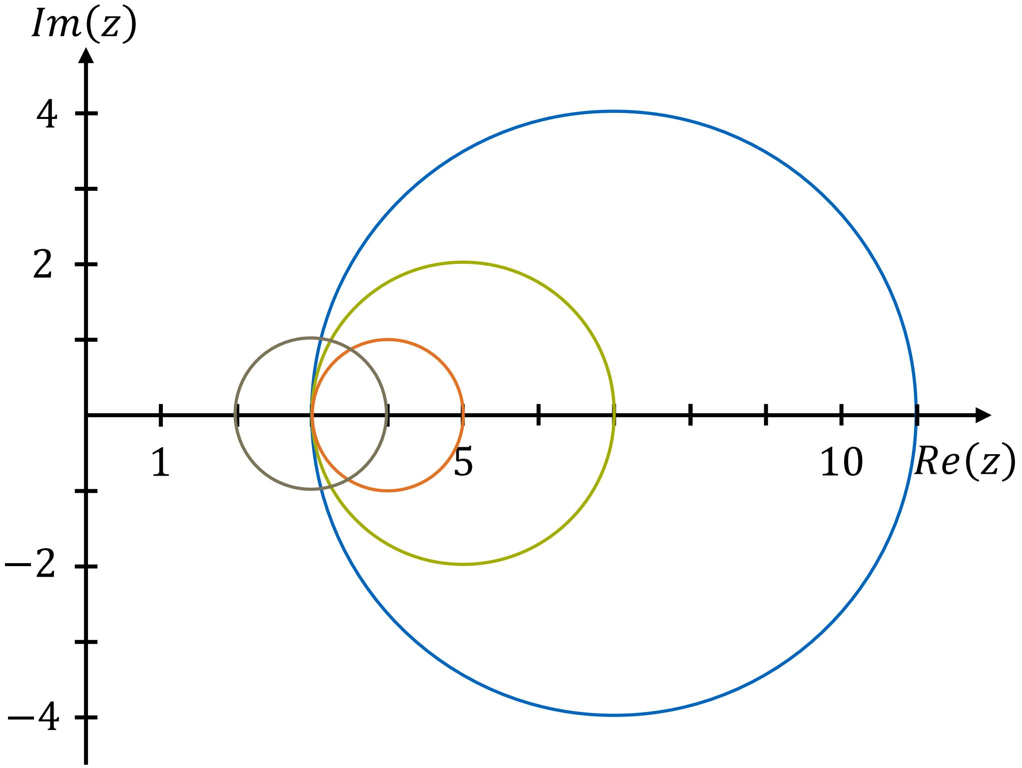
$\Rightarrow$ wir schauen uns λ nur für $Re(z)$ an

$\Rightarrow \lambda \in [3,11] \cup [3,7] \cup [3,5] \cup [2,4] = [2,11]$

$\Rightarrow$ A ist positiv definit $(\lambda > 0)$

Satz von Gerschgorin

Jeder EW λ von A liegt in mindestens einer Kreisscheibe $K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|\}$



Zeichnen eines Kreises nach Form:

$$|\lambda - MittelPunkt(K_j)| \leq Radius(K_j)$$

Links Zeichnung aus Aufgabe $2b)$

Folgendes schließen wir in $2b)$:

$\Rightarrow A$ ist symmetrisch

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ wir schauen uns λ nur für $Re(z)$ an

$\Rightarrow \lambda \in [3,11] \cup [3,7] \cup [3,5] \cup [2,4] = [2,11]$

$\Rightarrow A$ ist positiv definit $(\lambda > 0)$

$\Rightarrow A^{-1}$ existiert

Klausurvorbereitung

- 5 Aufgaben
  - Gleitkomma-Arithmetik
  - Interpolation
  - Quadratur
  - Abstiegsverfahren
  - Programmieraufgabe

- 45 Minuten Selbstarbeit
  - nicht genug Zeit für alle Aufgaben → sucht euch 2 bis 4 Aufgaben aus

- Danach besprechen wir die problematischsten Aufgaben 30 Minuten lang
  - werden vermutlich wieder überziehen müssen…

Klausurvorbereitung

- 5 Aufgaben
  - Gleitkomma-Arithmetik
  - Interpolation
  - Quadratur
  - Abstiegsverfahren
  - Programmieraufgabe

- 45 Minuten Selbstarbeit
  - nicht genug Zeit für alle Aufgaben → sucht euch 2 bis 4 Aufgaben aus

- Danach besprechen wir die problematischsten Aufgaben 30 Minuten lang
  - werden vermutlich wieder überziehen müssen…

- Tipp: macht auf jeden Fall Aufgaben $1), 2)$

Pseudo Cheatsheet für Aufgabe 1-5

Dezimale Brüche zu Binärzahl

$\frac{x_{10}}{y_{10}}$ in binäre Zahl umwandeln:
Polynomdivision $x_2 : y_2 = \cdots$

Binäre Rundungsregeln

↓	$y \mid 0\, z'$	abrunden, z' beliebig
↑	$y \mid 1\, z'$	aufrunden, **falls** $\mathbf{z' \neq 0}$
↓	$y'\, \mathbf{0} \mid 1\, z'$	abrunden, **falls** $\mathbf{z' = 0}$
↑	$y'\, \mathbf{1} \mid 1\, z'$	aufrunden, **falls** $\mathbf{z' = 0}$

Verfahren des steilsten Abstiegs

Hyperfläche	$f(x) = x^T A x - b^T x$
Gradient (Ableitung Fläche)	$\nabla f(x) = Ax - b$

Gauss-Quadratur

$$\text{grad(korrekt integrierbar)} \leq 2 \cdot \text{AnzahlStützstellen} - 1$$

Fehler bei Trapez-/Simpsonsumme

Fehler Trapezsumme	$R_{TS}(f; h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f''(\xi)}{12}$	$H \coloneqq b - a$
Fehler Simpsonsumme	$R_{SS}(f; h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{f''''(\xi)}{180}$	$h \coloneqq \frac{H}{N}$

Newton-Verfahren (Polynominterpolation)

$$p(x) = y_0 + f[0,1](x - x_0) + f[0,2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[i,k] = \frac{f[i+1,k-1] - f[i,k-1]}{x_{i+k} - x_i}$$

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
x_0	0	y_0	$f[0,1]$	$f[0,2]$
x_1	1	y_1	$f[1,1]$	
x_2	2	y_2		

Aitken-Neville (Polynominterpolation)

Auswertung Funktion an $x \coloneqq p[0,2]$

$$p[i,k] = p[i,k-1] + \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}\left(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]\right)$$

x_i	$i \setminus k$	0	1	2
x_0	0	y_0	$p[0,1]$	$p[0,2]$
x_1	1	y_1	$p[1,1]$	
x_2	2	y_2		