Übung 5 - Numerisches Programmieren

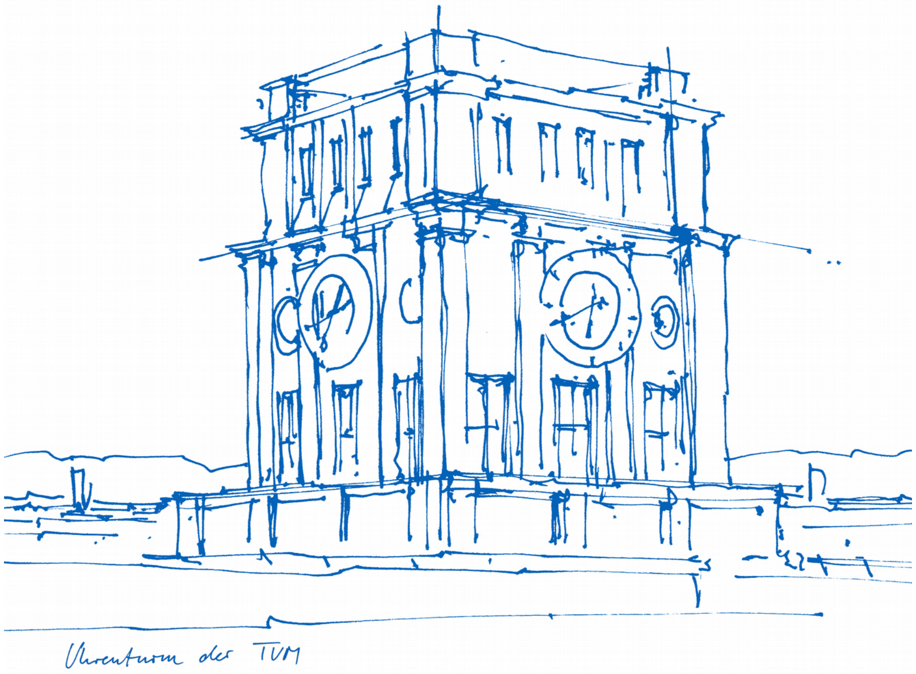
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

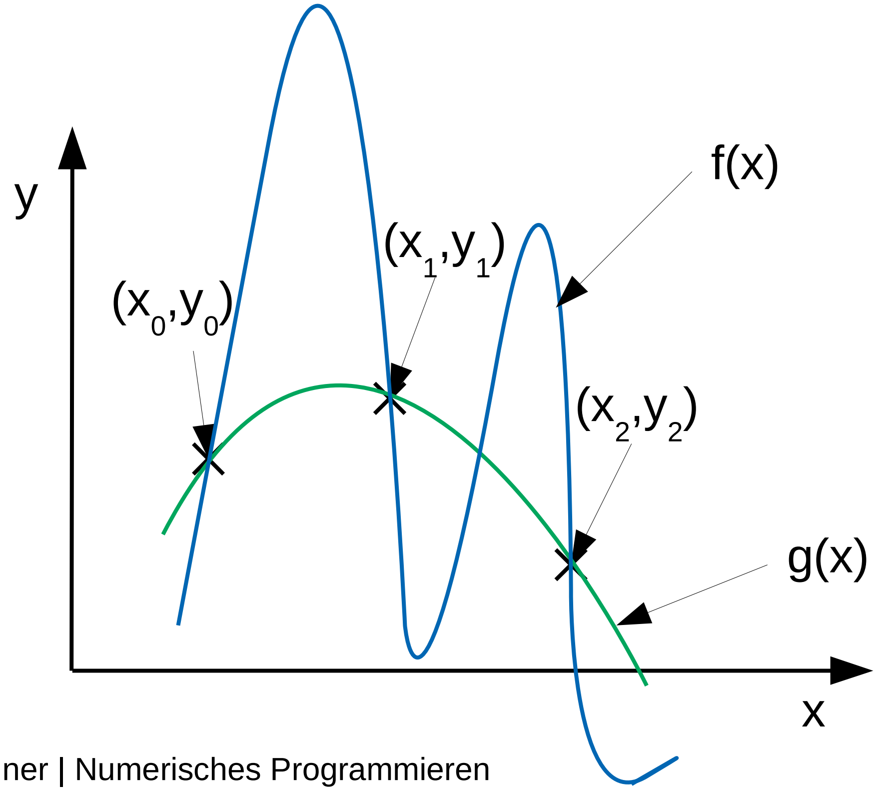
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 9. Dezember 2020



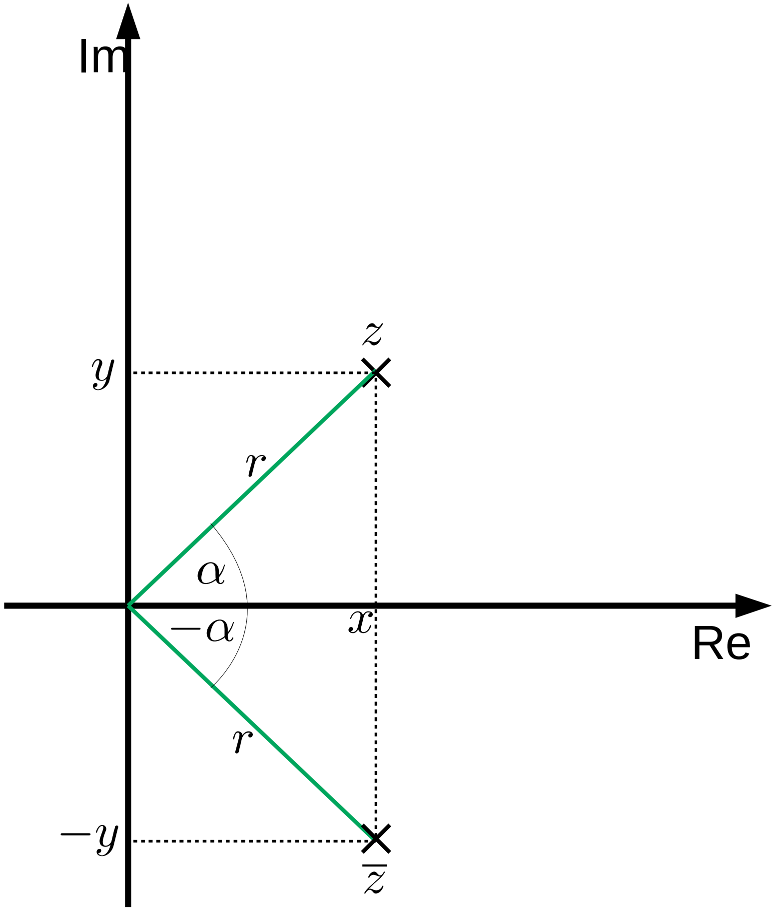
Recap - Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere g(x) mit $g(x_i) = f(x_i)$ und idealerweise $g(x) \approx f(x)$



Komplexe Zahlen

- Imaginäre Zahl: $z = x + iy$
- Konjugiert Komplexes: $\overline{z} = x - iy$
- Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$
- Eulersche Formel: $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + isin(\alpha)$
- Periodizität: $e^{i(\alpha + 2\pi \cdot k)} = e^{i\alpha}; k \in \mathbb{Z}$
- Umrechnung in Polarform:
  $z = |z|e^{iarctan(y/x)}$
- Multiplikation:
  $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\alpha_1} \cdot r_2 e^{i\alpha_2} = (r_1 \cdot r_2)e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$



Komplexe Zahlen

Bearbeitung Aufgabe 1

a) $w^3 = 1 \;\; ; \;\; w \in \mathbb{R}$

b) $w^3 = 1 \;\; ; \;\; w \in \mathbb{C}$

Komplexe Zahlen

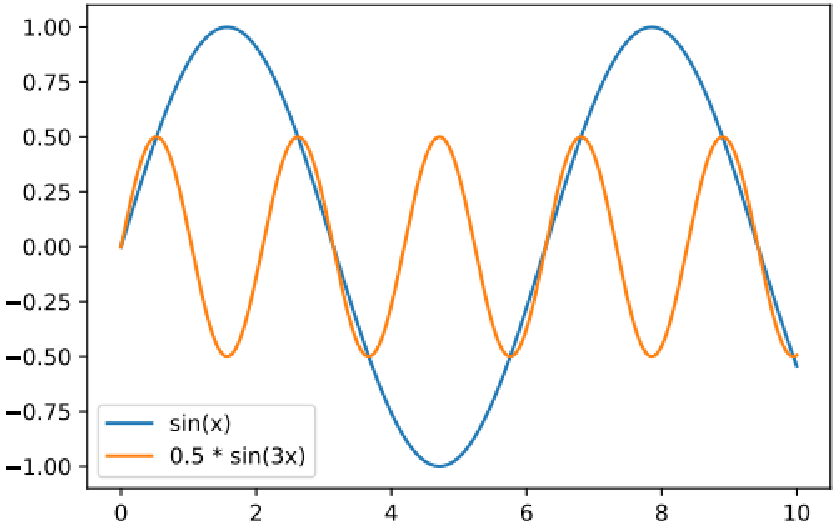
Bearbeitung Aufgabe 1

Frequenzanalyse

- Signal wird repräsentiert als Summe von Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen:

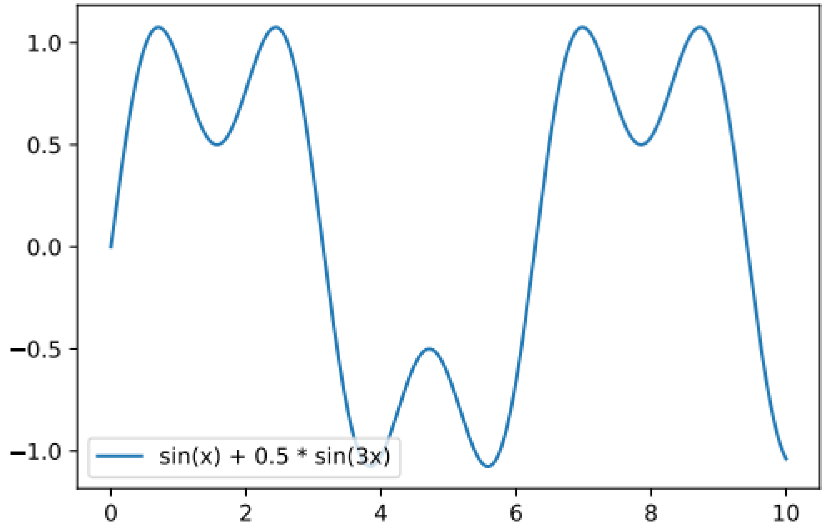
z.B.: $s(t) = c_1 sin(f_1 t) + c_2 sin(f_2 t) + ...$

$sin(x)$ und $0.5sin(3x)$



Amplitude Frequenz

$sin(x) + \boxed{0.5} sin(\boxed{3}x)$



Bei komplexen Zahlen Spiralen da $e^{it} = cos(t) + isin(t)$

Frequenzanalyse

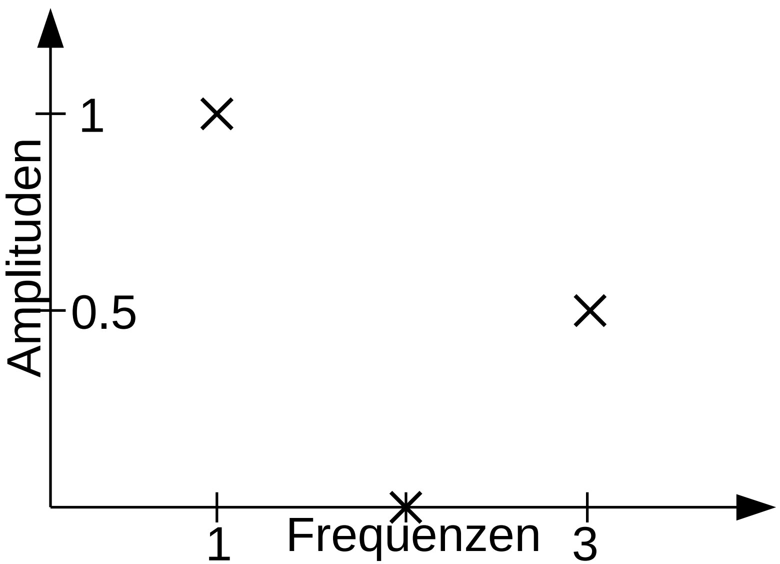
- Signal wird repräsentiert als Summe von Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen:

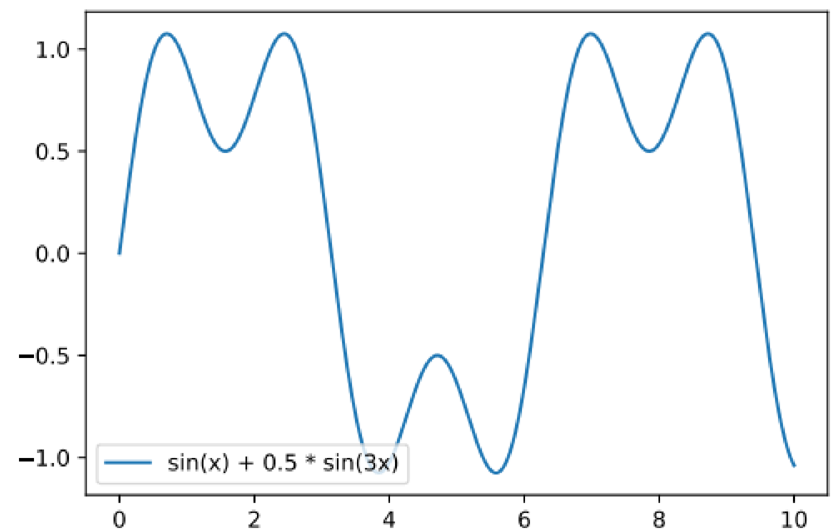
z.B.: $s(t) = c_1 sin(f_1 t) + c_2 sin(f_2 t) + ...$

Amplitude Frequenz

$$sin(x) + \boxed{0.5} sin(\boxed{3}x)$$

Frequenzspektrum



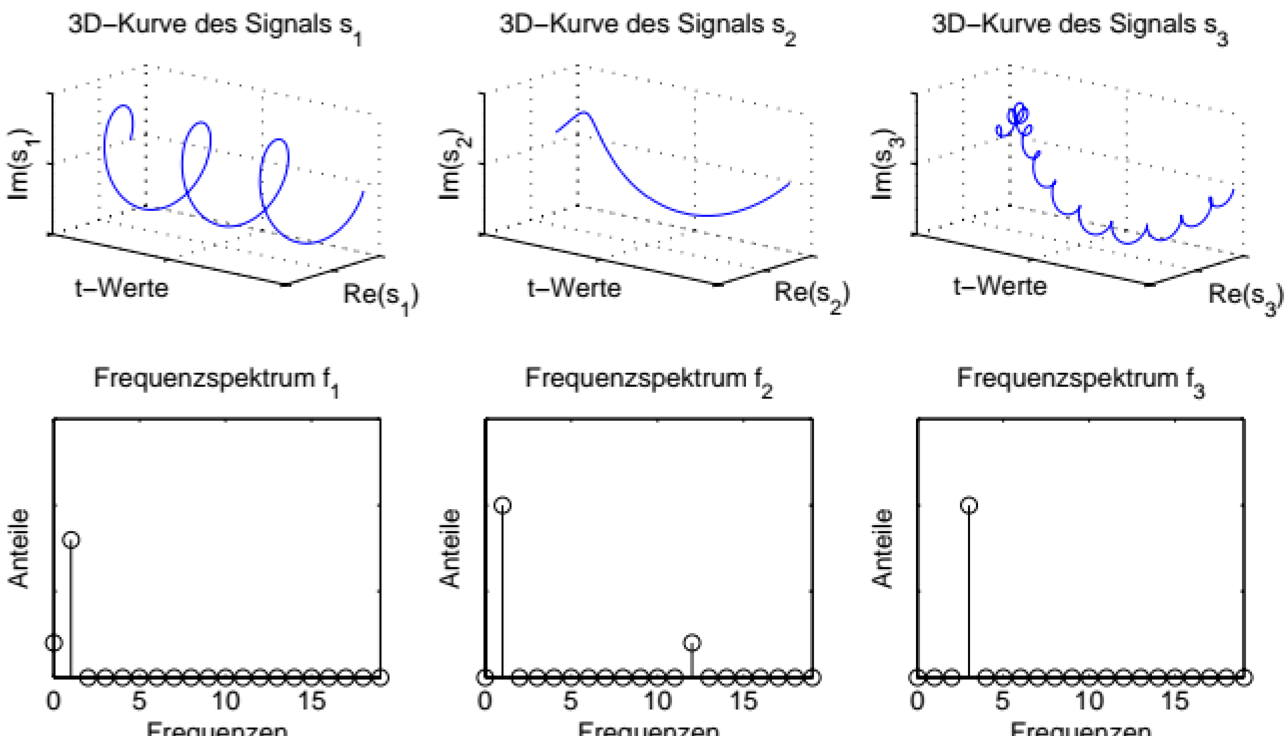


Bei komplexen Zahlen Spiralen da $e^{it} = cos(t) + isin(t)$

Komplexe Zahlen

Bearbeitung Aufgabe 2

Zuordnung Graphen zu Frequenzspektrum



Diskrete Fourier Transformation

- Gegeben: Samples eines Signals $v = (v_0, v_1, ..., v_{n-1})^T; s(x_j) = v_j; x_j = 2\pi j/n$
- Gesucht: s(x)
- Vorgehen: Rekonstruktion des Signals mittels Schwingungen

$$g(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + ... + c_{n-1} g_{n-1}(x); \quad g_k(x) = e^{ixk}$$

- Lösung (wie bisher): $Ac = v \qquad A_{j,k} = g_k(x_j) \qquad \omega = e^{i2\pi/n}$

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = v = M \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Inverse Matrix bekannt → DFT ist Matrixmultiplikation mit Inversen → $O(n^2)$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = c = M_{DFT,n} \cdot v = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{\omega}^1 & \overline{\omega}^2 & \dots & \overline{\omega}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{n-1} & \overline{\omega}^{2(n-1)} & \dots & \overline{\omega}^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier Transformation

Bearbeitung Aufgabe 3

a) Beispiel mit v = (1, 0, -1)

b) $w^n = 1$?

c) $DFT(v) = \frac{1}{n}\overline{IDFT(\overline{v})}$?

d) $DFT(v + u) = DFT(v) + DFT(u)$?

Diskrete Fourier Transformation

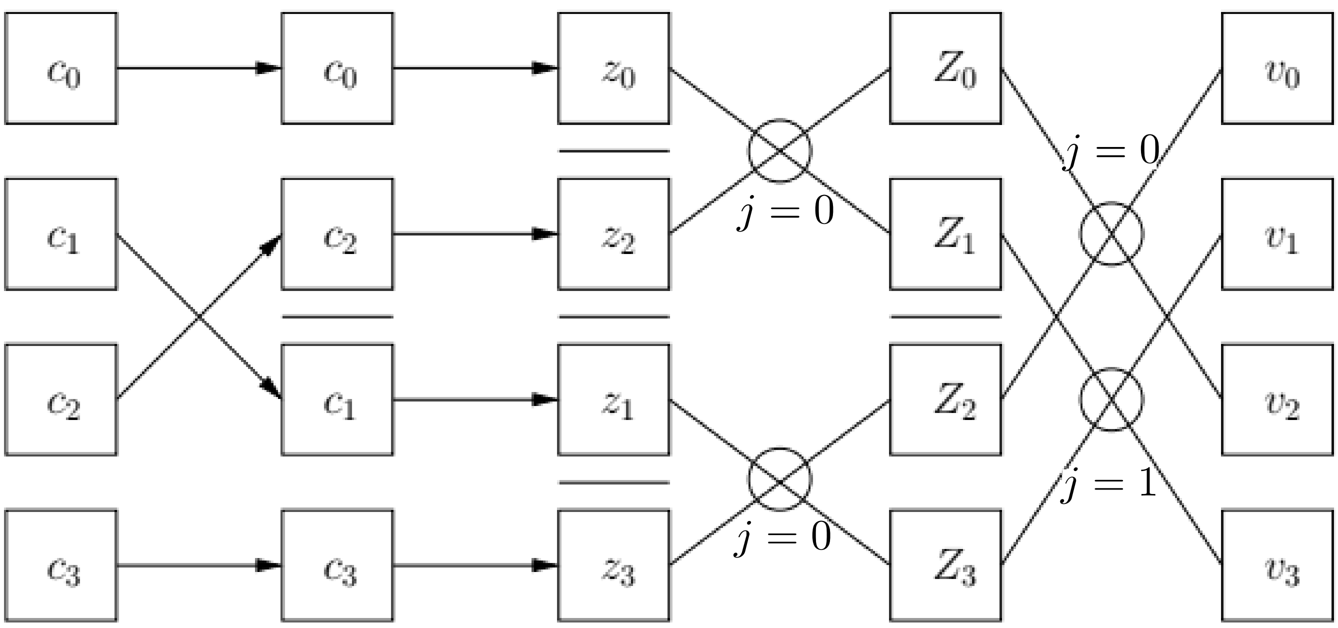
Bearbeitung Aufgabe 3

Diskrete Fourier Transformation

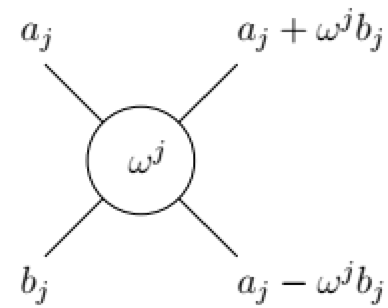
Bearbeitung Aufgabe 3

Inverse Fast Fourier Transformation

Sortierphase $O(NlogN)$ | Kombinationsphase $O(NlogN)$



Butterfly Operator



Inverse Fast Fourier Transformation

Bearbeitung Aufgabe 4

a) $IDFT(c)$

b) $IFFT(c)$

Inverse Fast Fourier Transformation

Bearbeitung Aufgabe 4

Inverse Fast Fourier Transformation

Bearbeitung Aufgabe 4