NumProg WS 20/21 : Tutorübung 03

1. Interpolation + verschiedene Basisfunktionen
2. Polynominterpolation Newton
3. Polynominterpolation Aitken-Neville
4. Runge-Effekt

Interpolation

Wir können eine **unbekannte Funktion $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$** mit Hilfe von **gegebenen Stützpunkten $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$** annähernd rekonstruieren:

- konstruieren einer **Interpolationsfunktion $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$**, welche durch Stützpunkte verläuft
- damit folgt $\forall x_i, y_i : g(x_i) = y_i = f(x_i)$
- Ziel: $g(x) \approx f(x)$ im gesamten Interpolationsbereich

Interpolation

Wir können eine **unbekannte Funktion** $\boldsymbol{f(x)}$ mit Hilfe von **gegebenen Stützpunkten** $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$ annähernd rekonstruieren:

- konstruieren einer **Interpolationsfunktion** $\boldsymbol{g(x)}$, welche durch Stützpunkte verläuft
- damit folgt $\forall x_i, y_i : g(x_i) = y_i = f(x_i)$
- Ziel: $g(x) \approx f(x)$ im gesamten Interpolationsbereich

Wie wird $g(x)$ nun konstruiert?

Konstruktion von $g(x)$

Allgemeine Zusammensetzung von **Interpolationsfunktion** $\boldsymbol{g(x)}$ bei n Stützstellen:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot c_i$$

- $g_i(x)$:= verwendete Basisfunktionen
- c_i := deren Anteil an der Lösung

Die Lösung wird mit einem Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ berechnet, wobei $\boldsymbol{A_{i,j} = g_j(x_i)}$:

$$\begin{bmatrix} g_0(x_0) & \cdots & g_{n-1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(x_{n-1}) & \cdots & g_{n-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

verschiedene Basisfunktionen $g_i(x)$

		Komplexität Gleichungssystem	Komplexität Polynomauswertung
(Aufgabe 1.a) :	Vandermonde	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n)$
(Aufgabe 1.d) :	Lagrange	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n^2)$
(Aufgabe 2) :	Newton	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n)$

verschiedene Basisfunktionen $g_i(x)$

		Komplexität Gleichungssystem	Komplexität Polynomauswertung
(Aufgabe 1.a) :	Vandermonde	$\mathcal{O}(n^3)$	$\mathcal{O}(n)$
(Aufgabe 1.d) :	Lagrange	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n^2)$
(Aufgabe 2) :	**Newton**	$\boldsymbol{\mathcal{O}(n^2)}$	$\boldsymbol{\mathcal{O}(n)}$

→ wir wollen oft Polynome auswerten: **Newton-Verfahren bevorzugt**

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0,1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1,3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2,5)}$

Aktuelle Berechnung: **keine (initiale Tabelle)**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
x_0	0	$[x_0]f$	$\rightarrow$	$[x_0, x_1]f$	$\rightarrow$	$[x_0, x_1, x_2]f$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
x_1	1	$[x_1]f$	$\rightarrow$	$[x_1, x_2]f$		
			$\nearrow$			
x_2	2	$[x_2]f$				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{x_i}$ **einsetzen**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	$[0]f$	$\rightarrow$	$[0, 1]f$	$\rightarrow$	$[0, 1, 2]f$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	$[1]f$	$\rightarrow$	$[1, 2]f$		
			$\nearrow$			
2	2	$[2]f$				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{f(x_i)}$ **einsetzen**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	$[0,1]f$	$\rightarrow$	$[0,1,2]f$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	$[1,2]f$		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{[1, 2]f = \frac{5-3}{2-1} = 2}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	$[0, 1]f$	$\rightarrow$	$[0, 1, 2]f$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	2		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{[0, 1]f = \frac{3-1}{1-0} = 2}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	$[0, 1, 2]f$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	2		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{[0, 1, 2]f = \frac{2-2}{2-0} = 0}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	$\color{red}{0}$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	2		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Newton: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{p(x) = 1 + 2 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (x - x_0)(x - x_1) = 2x + 1}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	0
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	2		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: **keine (initiale Tabelle)**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
x_0	0	$p[0,0] = y_0$	$\rightarrow$	$p[0,1]$	$\rightarrow$	$p[0,2]$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
x_1	1	$p[1,0] = y_1$	$\rightarrow$	$p[1,1]$		
			$\nearrow$			
x_2	2	$p[2,0] = y_2$				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{x_i}$ **und** $\boldsymbol{y_i}$ **einsetzen**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	$p[0,1]$	$\rightarrow$	$p[0,2]$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	$p[1,1]$		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{p[1,0] = 1 + \frac{1.5-0}{1-0}(3-1) = 1 + 1.5 \cdot 2 = 4}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	$p[0,2]$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	$p[1,1]$		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0,1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1,3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2,5)}$

Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{p[1,1] = 3 + \frac{1.5-1}{2-1}(5-3) = 3 + 0.5 \cdot 2 = 4}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	$p[0,2]$
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	4		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{p[0, 2] = 4 + \frac{1.5-0}{2-0}(4 - 4) = 4 + 0.75 \cdot 0 = 4}$ **← Auswertung**

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	4
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	4		
			$\nearrow$			
2	2	5				

Polynominterpolation nach Aitken-Neville: Beispiel

Punkte: $\boldsymbol{P_0 = (0, 1)}$ $\boldsymbol{P_1 = (1, 3)}$ $\boldsymbol{P_2 = (2, 5)}$

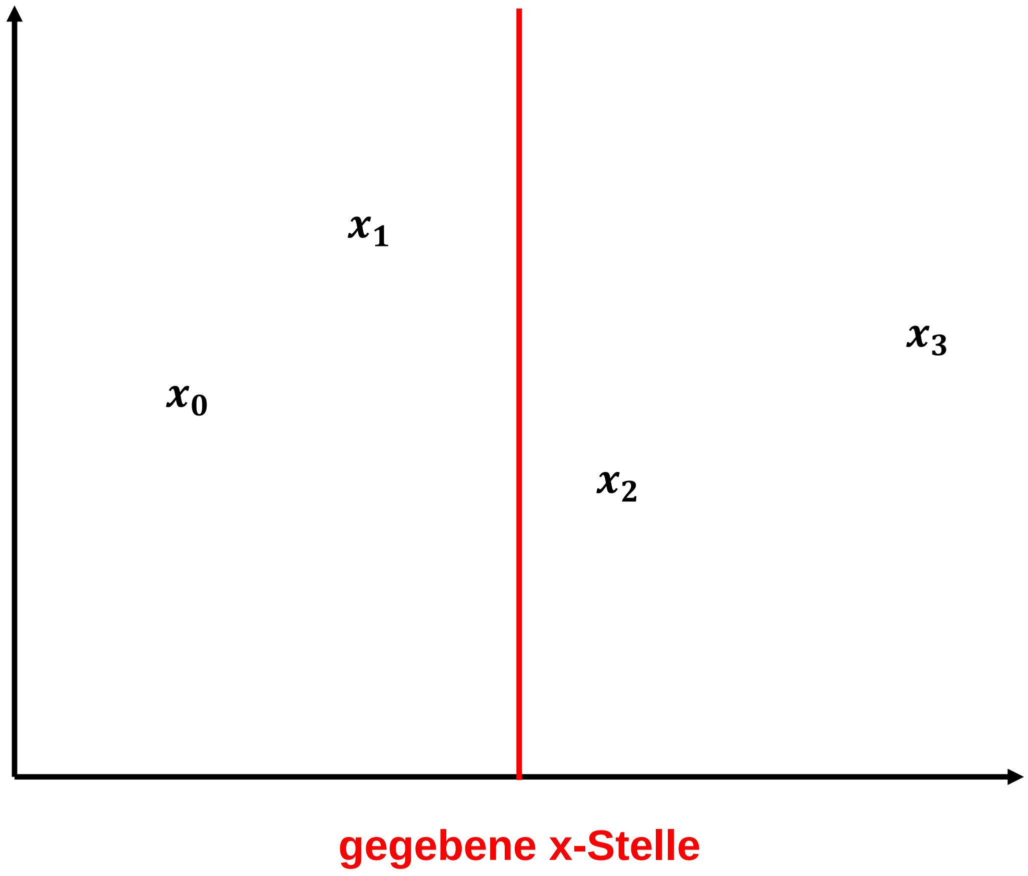
Wert gesucht an Stelle: $\boldsymbol{x = 1.5}$

Aktuelle Berechnung: $\boldsymbol{p[0,2] = 4 + \frac{1.5-0}{2-0}(4-4) = 4 + 0.75 \cdot 0 = 4}$ $\boldsymbol{\leftarrow p(1.5) = 4}$

x_i	$i \setminus k$	0		1		2
0	0	1	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	4
			$\nearrow$		$\nearrow$	
1	1	3	$\rightarrow$	4		
			$\nearrow$			
2	2	5				

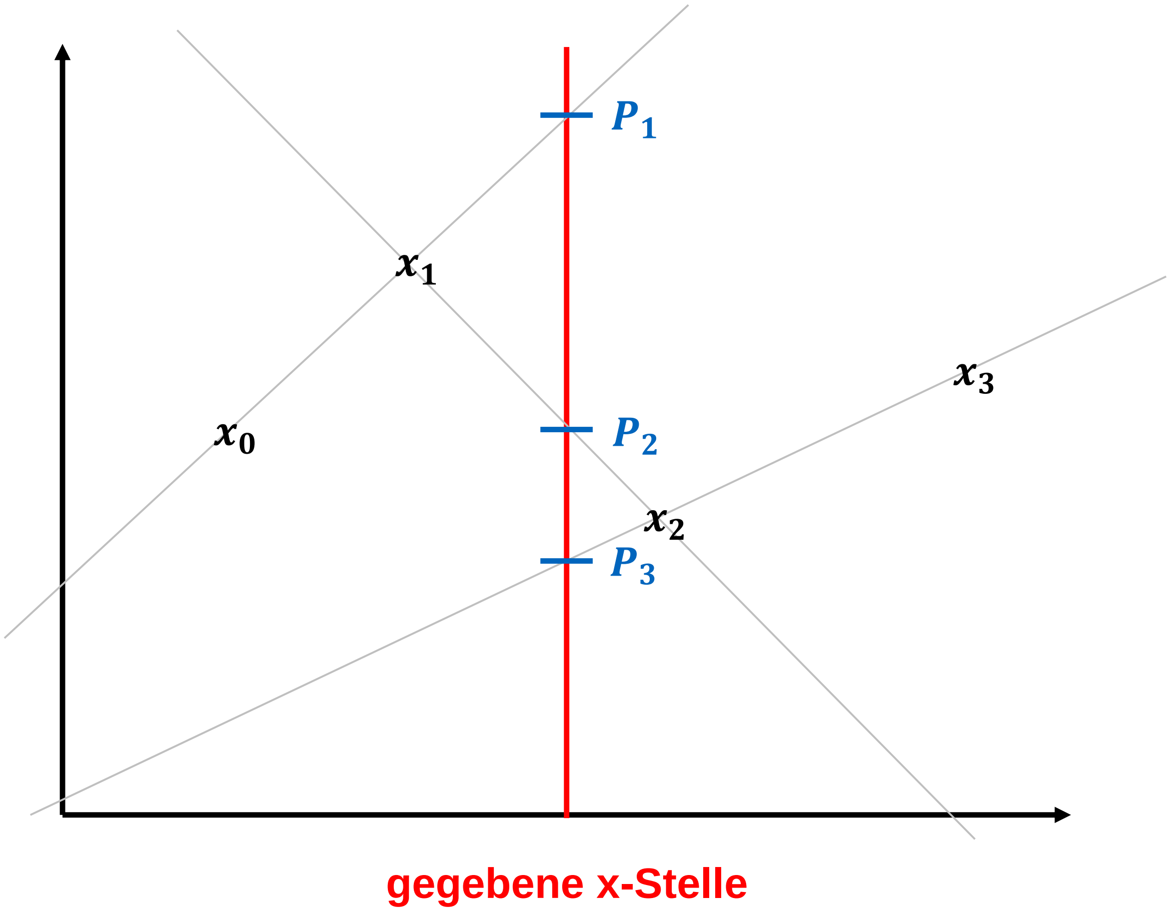
Aitken-Neville graphisch

x_i	$i\backslash k$	0	1	2	3
x_0	0	$\boldsymbol{y_0}$			
x_1	1	$\boldsymbol{y_1}$			
x_2	2	$\boldsymbol{y_2}$			
x_3	3	$\boldsymbol{y_3}$			



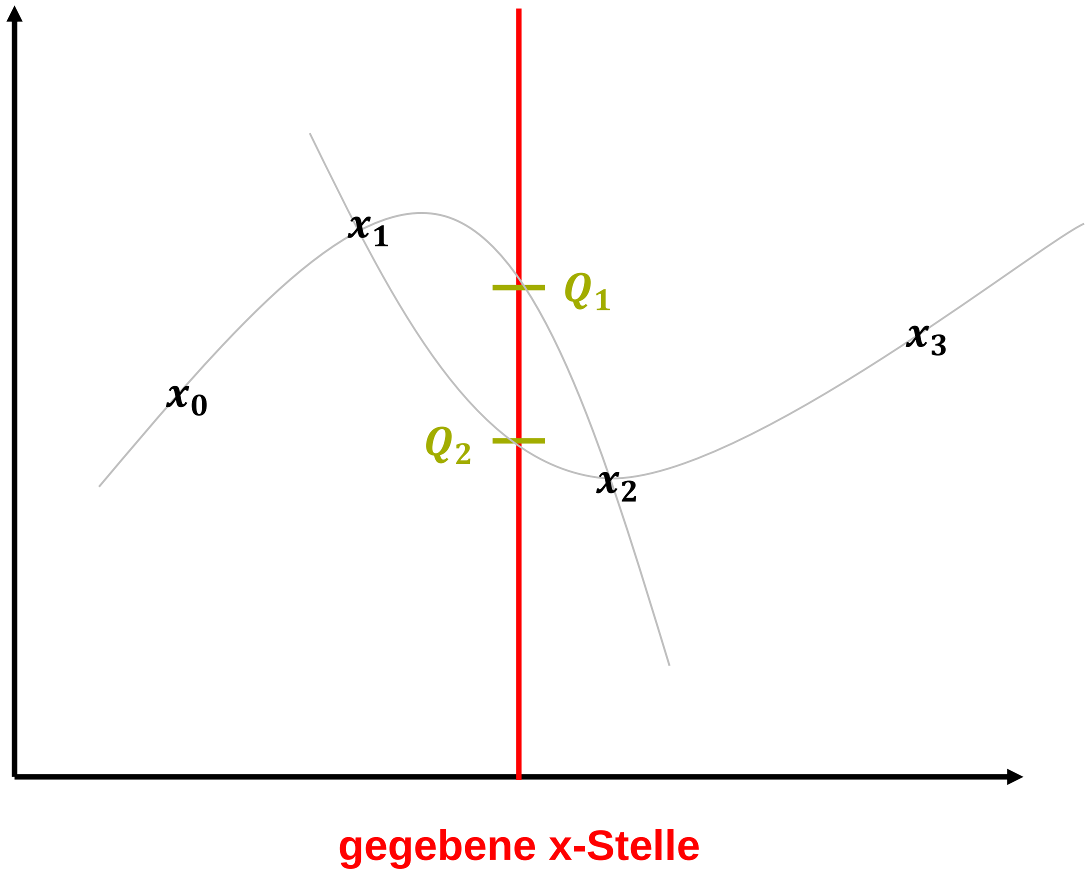
Aitken-Neville graphisch

x_i	$i\backslash k$	0	1	2	3
x_0	0	y_0	$\boldsymbol{P_1}$		
x_1	1	y_1	$\boldsymbol{P_2}$		
x_2	2	y_2	$\boldsymbol{P_3}$		
x_3	3	y_3			



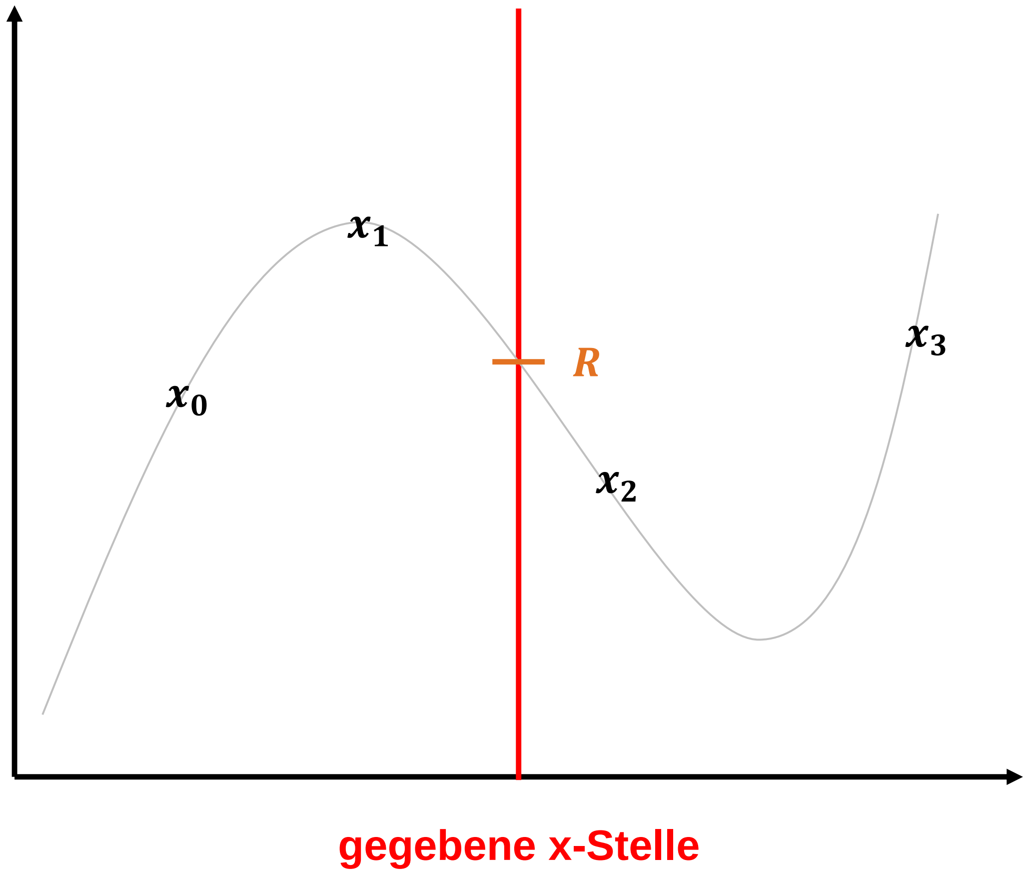
Aitken-Neville graphisch

x_i	$i\backslash k$	0	1	2	3
x_0	0	y_0	P_1	Q_1	
x_1	1	y_1	P_2	Q_2	
x_2	2	y_2	P_3		
x_3	3	y_3			

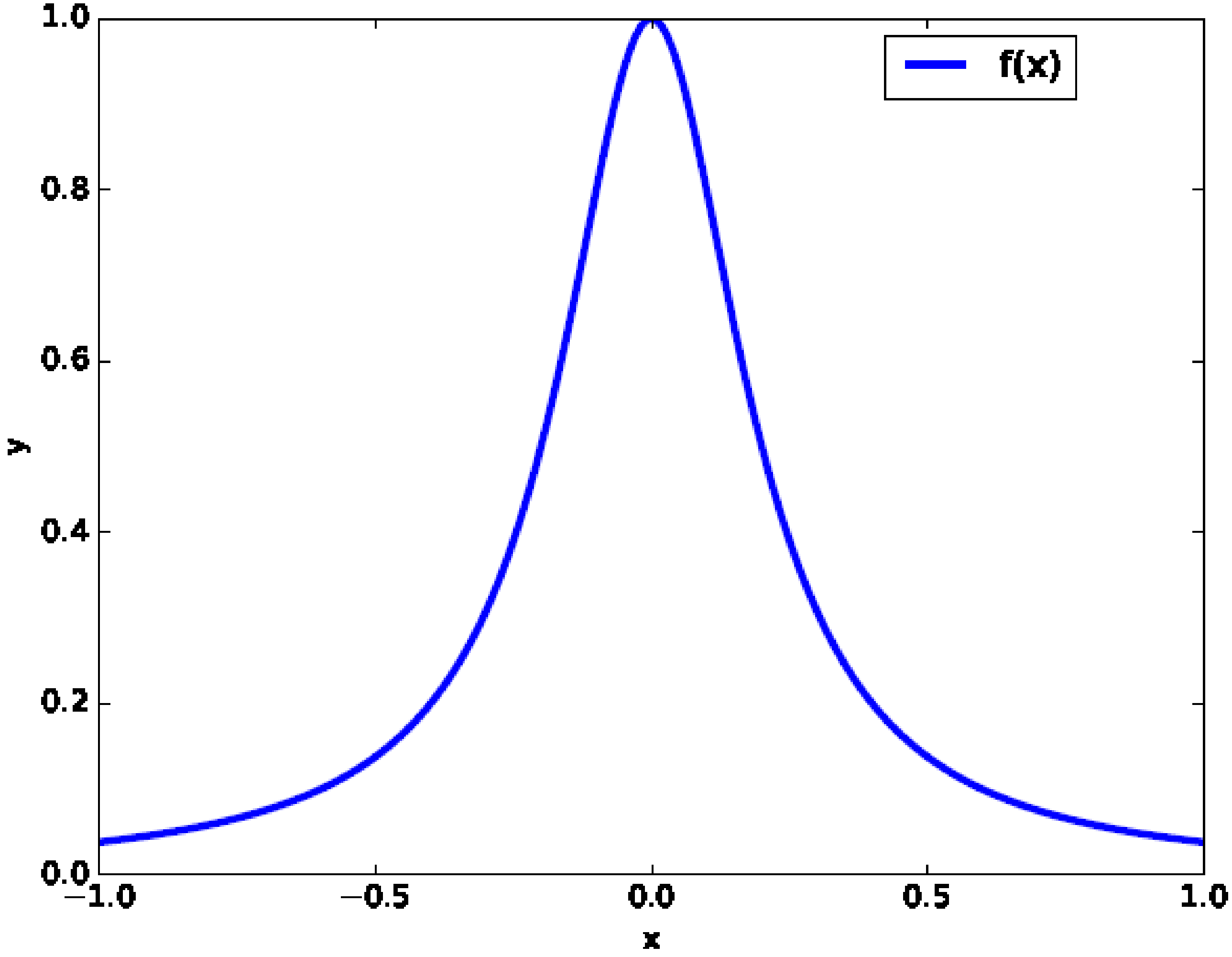


Aitken-Neville graphisch

x_i	$i\backslash k$	0	1	2	3
x_0	0	y_0	P_1	Q_1	$\boldsymbol{R}$
x_1	1	y_1	P_2	Q_2	
x_2	2	y_2	P_3		
x_3	3	y_3			



Runge-Effekt



Runge-Effekt