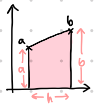
NUMPROG 2SMF. TEIL 4

Quadratur, INTEGRATION VON INTERPOLATIONSPOLYNOMEN
TRAPEZ-REGEL/SUMME, FASSREGEL/SIMPSON-SUMME
GAUß-ARCHIMEDES- UND ROMBERG-QUADRATUR

Quadratur Integrieren im Diskreten



Wie groß ist die Fläche?
=> TRAPEZ: $\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

kleine Veranschaulichung :)

INTEGRATION VON INTERPOLATIONSPOLYNOMEN

BSP: Lagrangepolynom

Näherungsformel für das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, die sich durch Integration des Integrationspolynoms von Larange bestimmt
Stützstellen: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

LARANGE POLYNOM

$$\ell_j(x) = \prod_{i\neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$\int_0^1 y_0\cdot \ell_0(x) + y_1\cdot \ell_0(x) = \left[y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)\right]_0^1$$

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0-1} = 1 - x \quad \Rightarrow L_0(x) = x + \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-0}{1-0} = x \quad \Rightarrow L_0(x) = \tfrac{1}{2}x^2$$

Integrale

da einsetzen

$$\Rightarrow \left[y_0\cdot\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) + y_1\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\right]_0^1$$

$$= y_0\cdot\left(x + \tfrac{1}{2}1^2\right) + y_1\cdot\left(\tfrac{1}{2}1^2\right) - \underbrace{y_0\cdot\left(0 + \tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right) + y_1\cdot\left(\tfrac{1}{2}0^2\right)}_{=0} =$$

$$= y_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + y_1\cdot\tfrac{1}{2} = \boxed{\tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)}$$

Bestimme folgende Integrale näherungsweise mit der ersten Näherungsformel:

(i) $\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx$

(iii) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$$I = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)$$

$f(x)$	$f(0)$ (y_0)	$f(1)$ (y_1)	$I(f)$
i	0	0	$\frac{1}{2}(0+0) = 0$
ii	π	0	$\frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$
iii	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

Was wenn nun eine 3. Stützstelle hinzukommt? $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$

Näherungsformel:

$$\int_0^1 f(x) = \int_0^1 y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) = \left[y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)\right]_0^1$$

$$\ell_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\cdot\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{0 - \frac{1}{2}}\cdot\frac{x-1}{0-1} = \frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x) = (-2x+1)(1-x)$$

$$= -2x + 2x^2 + 1 - x = (2x^2 - 3x + 1)$$

$$\ell_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\cdot\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \ldots = (-4x^2 + 4x)$$

$$\ell_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \ldots = (2x^2 - x)$$

nun die Integrale L_0, L_1, L_2

$$L_0(x) = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 1x = \tfrac{2}{3}x^3 - 1{,}5x^2 + x$$

$$L_1(x) = -\tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{4}{2}x^2 = \tfrac{4}{3}x^3 + 2x^2$$

$$L_0(x) = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2$$

EINSETZEN:

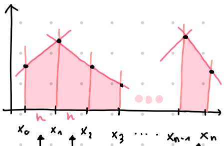
$$\left[y_0\left(\tfrac{2}{3}x^3 - 1{,}5x^2 + x\right) + y_1\left(\tfrac{4}{3}x^3 + 2x^2\right) + y_2\left(\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\right]_1^0$$

$$= y_0\left(\tfrac{2}{3} - 1{,}5 + 1\right) + y_1\left(\tfrac{4}{3} + 2\right) + y_2\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}\right)\Big]_1^0$$

$$= y\left(\tfrac{1}{6}\right) + y_2\left(\tfrac{4}{6}\right) + y_3\left(\tfrac{1}{6}\right) = \boxed{\tfrac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

TRAPEZREGEL & TRAPEZSUMME UND FASSREGEL/SIMPSON-SUMME

TRAPEZREGEL / TRAPEZSUMME



Muss man nicht verstehen, aber so ist die Trapezsumme entstanden :)

$\frac{1}{2}(f(x_0)-f(x_1)) + \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)) + \ldots + \frac{1}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n))$

2 x aufaddieren deswegen 1x

nur 1. und n. Mal sind $\frac{1}{2}$ x

WICHTIG

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$Q_{TS}(f;h) = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

↑ Trapezsumme

$$R_{TS}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

BSP:

a) $f(x) = -x^2+4$ => Berechne $I(f)$ und $Q_T(f)$ für $a=-2$, $b=2$

$$I(f) = \int_{a=-2}^{b=2} -x^2+4 = \left[-\tfrac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}2^3+4\cdot 2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}(-2)^3+4\cdot(-2)\right) = -\tfrac{8}{3}+8-\tfrac{8}{3}+8$$

$$= \underline{\underline{10,\overline{6}}}$$

$$Q_T(f) = H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} = 4 \cdot \frac{0+0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

↑ $b-a = 2-(-2) = 4$

♡ $H = b-a$

♡ $h = \frac{b-a}{n}$

b) $g(x) = x^4$; $I(g)$ & $Q_T(g) = ?$ mit $a=0$, $b=4$

$$I(g) = \int_0^4 x^4\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^4 = \tfrac{1}{5}\cdot 4^5 = \underline{\underline{204,8}}$$

$$Q_T(g) = H \cdot \frac{g(a)\cdot g(b)}{2} = 4 \cdot \frac{0+256}{2} = \underline{\underline{512}}$$

Berechnen der Trapezsumme $Q_{TS}(f;h)$ & $R_{TS}(f;h)$ für $f(x)=-x^2+4$ mit $a=-2$, $b=2$ und $n=8$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$

(h = Schritte Satz)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f_i	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$	0

$$Q_{TS}(f;h) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0}{2}+\frac{7}{4}+3+\frac{15}{4}+4\cdot\frac{15}{4}+3+\frac{7}{4}+\frac{0}{2}\right) = \underline{\underline{10,5}}$$

1. und letzter Eintrag durch 2

$$R_{TS}(f;h) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 \cdot \frac{f''(\xi)}{12} = \frac{4}{4}\cdot\frac{-2}{12} = \underline{\underline{10,\overline{6}}}$$

Abschätzung

2. Abl von $-x^2+4 = -2$

($n+1 = 8+1$ Schnittstellen)

$Q_{TS}(g;h)$, $R_{TS}(g;h)$ für $g(x)=x^4$, $a=0$, $b=4$, $n=4$

$$Q_{TS}(g;h) = 1\cdot\left(\frac{0}{2}+1+16+81+\frac{256}{2}\right) = \underline{\underline{226}}$$

0	1	2	3	4
0	1	16	81	256

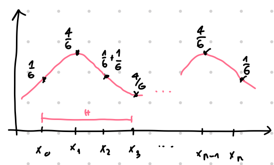
$$R_{TS}(g;h) = \left|1\cdot 4\cdot\frac{12\cdot\xi^2}{12}\right| = |4\cdot\xi^2| \quad \xi\in[0,4]$$

$g(x) = x^4$
$g'(x) = 4x^3$
$g''(x) = 4\cdot 3\cdot x^2 = 12x^2$

Maximum für $12\cdot\xi^2$? mit $\xi\in[0,4]$

=> $\xi = 4$ = max = $|4\cdot 4^2| = \underline{\underline{64}}$

SIMPSON-SUMME / FASSREGEL



1 4 2 4 … 4 1

2,4,2,4…

Kann nur mit einer ungeraden Anzahl von Schnittstellen umgehen

WICHTIG

$$Q_F(g) = H \cdot \frac{g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)}{6}$$

$$Q_{SS}(g;h) = \frac{h}{3}\cdot\left(g_0+4g_1+2g_2+4g_3+\ldots+2g_{n-2}+4g_{n-1}+g_n\right)$$

$$R_{SS}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi\in[a,b]$$

BSP: $g(x) = x^4$; $a=0$, $b=4$

$H = b-a$

$h = \frac{b-a}{n}$

$$Q_F(g) = 4\cdot\frac{(0+4\cdot 16+256)}{6} = \frac{2}{3}\cdot 320 = \underline{\underline{213,\overline{3}}}$$

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1	16	81	256

$$Q_{SS}(g;h) = \frac{1}{3}\cdot\left(0+\overset{1x}{4}\cdot 1+2\cdot 16+\overset{1x}{4}\cdot 81+256\right) = \underline{\underline{205,\overline{6}}}$$

$$R_{SS}(g;h) = 1^4\cdot 4\cdot\frac{24}{180} = \frac{8}{15}$$

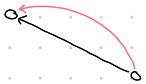
4. Ableitung von $g(x)$:

$g(x) = x^4$
$g'(x) = 4x^3$
$g''(x) = 12x^2$
$g'''(x) = 24x$
$g''''(x) = 24$

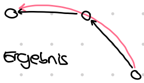
ROMBERG-QUADRATUR

(Gauß & Archimedes)

RONBERG QUADRATUR
(Dreiecksschema)



=> Einfügen von mehr Punkten (Schnittstellen) um eingenaueres Ergebnis zu erzielen



$$I(f) = \lim_{h \to 0} Q_{TS}(f, h)$$

$$Q_{i,k} = Q_{i,k-1} + \frac{Q_{i,k-1} - Q_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1} \quad , 1 \leq i \leq k$$

$$Q_{TS}(f;h) = \frac{Q_{TS}(f;2h)}{2} + h \cdot (f_1 + f_3 + \dots + f_{N-3} + f_{N-1})$$

yay.. noch mehr Quadratur :3

GAUß-QUADRATUR

ARHIMEDES-QUADRATUR

h_i	i	$k=$ 0	1	...	n
$\frac{b-a}{1}$	0	$Q_{TS}(f; \frac{b-a}{1}) = Q_{00}$			
$\frac{b-a}{2}$	1	$Q_{TS}(f; \frac{b-a}{2}) = Q_{10}$	Q_{11}		
$\frac{b-a}{4}$	2	$Q_{TS}(f; \frac{b-a}{4}) = Q_{20}$	Q_{21}	...	
...	...	...	... ...	...	...
$\frac{b-a}{2^n}$	n	$Q_{TS}(f; \frac{b-a}{2^n}) = Q_{n0}$	Q_{n1}	...	Q_{nn}

k=0 muss man mit $Q_{TS}(f;h)$ ausrechnen

Der Rest geht dann mit Q_{ik}

das ist unser finales Ergebnis :)

TRAPEZ-SUMME

$$h \cdot \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$$

BSP:

$$\int_{a:\,-2}^{b:\,2} -x^2 + 4 \, dx$$

f(-2)	f(-1)	f(0)	f(1)	f(2)
0	3	4	3	0

h_i	i	Q_{k0}	Q_{k1}	Q_{k2}
$\frac{b-a}{1} = 4$	0	0		
$\frac{b-a}{2} = 2$	1	8	$10\frac{2}{3}$	
$\frac{b-a}{4} = 1$	2	10	$10\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$

das mit $Q_{i,k}$

die Spalte mit $Q_{TS}(f;h)$ berechnen

Q_{00} = (mit Trapezsumme) $4 \cdot \frac{1}{2} (\underbrace{f(-2)}_{=0} + \underbrace{f(2)}_{=0}) = 0$

$Q_{10} = Q_{TS}(f;2) = \frac{0}{2} + 2 \cdot (\underbrace{f(-2)}_{=0} + \underbrace{f(0)}_{=4} + \underbrace{f(2)}_{=0}) = 0 + 4 \cdot 2 = 8$

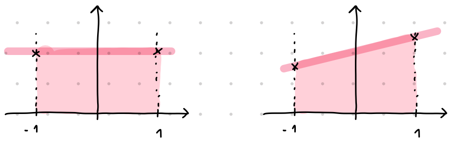
$Q_{20} = Q_{TS}(f;1) = \frac{8}{2} + 2 \cdot (f(-1) + f(1)) = 4 + 3 \cdot 2 = 10$

$$Q_{1,1} = Q_{1,0} + \frac{Q_{1,0} - Q_{0,0}}{\frac{16}{4} - 1} = 8 + \frac{8}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$Q_{2,1} = Q_{2,0} + \frac{Q_{2,0} - Q_{1,0}}{\frac{4}{2} - 1} = 10 + \frac{2}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$Q_{2,2} = Q_{2,1} + \frac{Q_{2,1} + Q_{1,1}}{\frac{16}{1} - 1} = 10\frac{2}{3} + 0 = 10\frac{2}{3}$$

Integration mit Gauß-Quadratur



$n=1$ (1 Stützpunkte) $\qquad$ $n=2$ (2 Stützpunkte)

$\Rightarrow f_0(-1)\cdot w_0 + f_0(1)\cdot w_1 = w_0 + w_1 \overset{!}{=} \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

$\Rightarrow f_0(-1)\, w_0 + f_1(1)\cdot w_1 = -w_0 + w_1 \overset{!}{=} \int_{-1} x\,dx = 0$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1} f_k(x_i)\cdot w_i \overset{!}{=} \int_a^b f_k(x) \qquad f_k(x) = x^k}$$

n-Schnittstellen ⇒ Grad $= 2n-1$

BSP: Gauß-Quadratur mit 2 Stützpunkten $n=2 \Rightarrow \text{Grad} = 3$
außerdem: $\boxed{x_0 = -x_1}$

GRAD 0:
$f_0(x_0)\cdot w_0 + f_0(x_1)\cdot w_1 = w_0 + w_1 = \int_{-1}^{1} \overset{=1}{x^0}\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2$

GRAD 1:
$f_1(x_0)\cdot w_0 + f_1(x_1)\cdot w_1 = w_0x_0 + w_1x_1 = \int_{-1}^{1} x^1\,dx = \left[\frac12 x^2\right]_{-1}^{1} = 0$

GRAD 2:
$f_2(x_0)\cdot w_0 + f_2(x_1)\cdot w_1 = w_0x_0^2 + w_1x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac13 x^3\right]_{-1}^{1} = \frac23$

GRAD 3:
$f_3(x_0)\cdot w_0 + f_3(x_1)\cdot w_1 = w_0x_0^3 + w_1x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac14 x^4\right]_{-1}^{1} = 0$

I $\quad 2 = w_0 + w_1$
II $\quad 0 = x_0w_0 + x_1w_1$
III $\quad 2/3 = x_0^2 w_0 + x_1^2 w_1$
IV $\quad 0 = x_0^3 w_0 + x_1^3 w_1$
V $\quad \boxed{x_0 = -x_1}$ (von Angabe)

Auf-lösen

I und II:
$0 = x_0w_0 - x_0(2-w_0)$
$\Leftrightarrow$
$2x_0 = 2x_0w_0 \Leftrightarrow 1 = w_0$

w_0 in I:
$2 = w_1 + 1 \Leftrightarrow 1 = w_1$

x_0 in V:
$\mp\sqrt{\frac13} = x_0 = -\sqrt{\frac13} = x_0,\ \sqrt{\frac13} = x_1$
$1 = w_0 = w_1$

w_1, w_0, V in III:
$2/3 = x_0^2 \cdot 1 + (-x_0)^2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac23 = 2\cdot x_0^2$
$\Leftrightarrow \frac13 = x_0^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac13} = x_0$

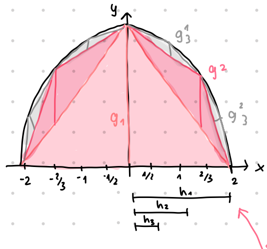
BSP: Berechne $\int_{-1}^{1} x^3 - x^2\,dx$ mit Gauß-Quadratur und Trapezregel

$\Rightarrow f(x_0)\cdot w_0 + f(x_1)\cdot w_1$

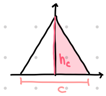
$f(-\sqrt{\frac13})\cdot 1 + f(\sqrt{\frac13})\cdot 1 = \frac23$

$x_0 = -\sqrt{\frac13}$
$x_1 = \sqrt{\frac13}$
$w_1 = 1$
$w_0 = 0$

ARHIMEDES QUADRATUR



A_1 LEVEL 3
A_2 LEVEL 2
A_3 LEVEL 1



$A = h_c * c * \frac12$

⇒ Punkte hinzufügen zum verfeinern

Skizze zur Veranschaulichung des BSP, aber ungenaue Skizze!

BSP: $f(x) = -x^2 + 4$ $\qquad I(f) = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ ← gesucht (Integrieren durch Archimedes Quadratur)

$\frac{A_1}{2} = 1/2 \cdot (g_1\cdot h_1) \cdot \#\text{Stücke}$

$\frac{A_1}{2} = 1/2 \cdot (f(0)\cdot 2) = f(0)\cdot 2 = -0^2+4 \cdot 2 = 8$

$A_2 = 1/2 \cdot (g_2 \cdot h_2) \cdot \#\text{Stücke}$

$A_2 = 1/2 \cdot (g_2\cdot h_2)\cdot 2 = \left(f(1) - \frac{f(0)+f(2)}{2}\right) = 3 - \left(\frac{4+0}{2}\right) = 1$

$A_3 = A_3^1 + A_3^2$

$g_3^1 = f(\frac12) - \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac14$

$g_3^2 = f(\frac32) - \frac{f(1)+f(2)}{2} = \frac74 - \frac64 = \frac14$

$A_3^1 = 2\cdot\frac12\cdot(g_3^1\cdot h_3) = \frac14\cdot\frac12 = \frac18$

$A_3^2 = 2\cdot\frac12\cdot(g_3^2\cdot h_3) = \frac14\cdot\frac12 = \frac18$

wir haben immer jeweils nur die rechte Seite der Fläche berechnet
→ Machen zum Schluss dann $*2$

$A_{\text{rechte Seite}} = \frac{A_1}{2} + A_2 + A_3 = 4 + 1 + \frac18 + \frac18 = 5\frac14$

$A_{\text{gesamt}} = 2\cdot A_{\text{rechte Seite}} = 2\cdot(5\frac14) = \boxed{10\frac12}$

VIEL ERFOLG :)