NUMPROG ZSMF TEIL 10: POWER ITERATION, SATZ VON GERSCHGORIN

Eigenwerte – Eigenvektoren $Ax = \lambda x$

- λ ist ein Eigenwert zum Eigenvektor
- Eigenwerte sind eindeutig, Eigenvektoren beliebig skalierbar

Eigenwerte berechnen: $\det(A - \lambda I) = 0$

Eigenvektoren berechnen: $\text{Kern}(A - \lambda I)$ hier ist λ dann ein EW

BSP: $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ finde EW und EV:

Eigenwerte:

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 6 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(1-\lambda) - 6^2 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 - 36 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda - 30 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 30}}{2} = \frac{7 \pm 13}{2}$ → $\lambda_1 = -3$ → $\lambda_2 = 10$

Eigenvektoren:

Kern$(A - \lambda I)$ mit gegebenem λ

- $\lambda_2 = 10$

$\left(\begin{array}{cc|c} 6-10 & 6 & 0 \\ 6 & 1-10 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ -6 \cdot \frac{2}{3} & 9 \cdot \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ \cancel{-4} & \cancel{6} & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow -4x_1 + 6x_2 = 0$

$x_1 = \frac{6}{4} x_2$ 1ne Variable frei wählen

$x_1 = 1{,}5\, x_2$ Sei $x_2 = 2$ $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x_1 = 3$

- $\lambda_1 = -3$

$\left(\begin{array}{cc|c} 6-(-3) & 6 & 0 \\ 6 & 1-(-3) & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 6 \cdot \frac{3}{2} & 4 \cdot \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ \cancel{9} & \cancel{6} & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 9x_1 + 6x_2 = 0$

$x_2 = -\frac{9}{6} x_1$ 1ne Variable frei wählen

$x_2 = -1{,}5\, x_1$ Sei $x_1 = 2$ $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$x_2 = -3$

KONDITIONSFORMEL: Kondition einer Matrix

(Spektralnorm $\|A\|_2$ = Betragsmäßig größter Eigenvektor

$\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ oder $\frac{|\text{größter EW}|}{|\text{kleinster EW}|}$

BSP: Kondition von $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

EW: $-3, 10$ (kleinster EW: -3, größter EW: 10)

entweder: $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$

oder: $10 \cdot \frac{1}{3} = 3{,}333\ldots$ hier 3, da $\frac{1}{3} > \frac{1}{10}$

rel Fehler kann durch $3{,}333\ldots$ verstärkt werden

POWER ITERATION: (=VEKTORITERATION)

- **DIREKTE POWER ITERATION:**

$x_{k+1} = \frac{A \cdot x_k}{\|A \cdot x_k\|}$ in jedem Schritt wird der Vektor wieder normalisiert

Abschätzen des aktuellen λ: $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$

- **SHIFTED POWER ITERATION:** μ

→ Matrix manipulieren, durch einbauen eines Shift μ ⇒ verschieben der Eigenwerte

→ Ziel: anderer EW als Maximum und verfahren dementsprechend gegen anderen EW konvergiert

→ Jeder Shift verschiebt nach unten

$x_{k+1} = \frac{x_k^T \cdot (A \cdot \mu \cdot \mathbb{1}) \cdot x_k}{x_k^T \cdot x_k} + \mu$ ($\mathbb{1}$: Einheitsmatrix)

BSP: $[1, 3, 5] - 4$ (max EW: 5, μ: 4)

⇒ $[-3, -1, 1]$ (max EW)

Problem z.B. bei:

$[3, 7] - 5$

⇒ $[-2, 2]$ gleich groß

⇒ Shiften kann kleinsten EW zu größten machen

⇒ kann Konvergenzgeschwindigkeit verbessern

$x_{k+1} = \frac{(A - \mu \cdot \mathbb{1}) \cdot x_k}{\|(A - \mu \cdot \mathbb{1}) \cdot x_k\|}$

⇒ im Grunde genommen ist der Shift also ein konstanter Offset der Diagonaleinträge

KONVERGENZRATE:

$q = \frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu}$

λ_1 = größter EW von A

λ_2 = zweitgrößter EW von A

!! Den Shift schon mit einberechnet !!

- EV konvergieren linear und EW quadratisch mit dem Faktor
- Aus diesem Grund ist das direkte Verfahren schlecht geeignet, wenn man viele EW nahe dem max. EW hat.
- q geht hierbei gegen 1.

EV → linear: q

EW → quadratisch: q^2

BSP: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Startvektor), EW = $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, EV = $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe: 2 Schritte / Iterationen der Poweriteration

1. ohne Shift
2. mit $\mu = 1{,}5$
3. mit $\mu = 3{,}5$

(1) $\omega_0 = A x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda^{(0)} = x_0^T \omega_0 = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

$x_1 = \frac{\omega_0}{\|\omega_0\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\| = \sqrt{3^2 + 1^2}\right)$

$\lambda^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 4$

$\omega_1 = A x_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\lambda^{(1)} = x_1^T \omega_1 = \frac{36}{10} = 3{,}6$

$x_2 = \frac{\omega_1}{\|\omega_1\|_2} = 0{,}0857 \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}}{\|\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}\|}\right)$

KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT: $\frac{\lambda_{2.max}}{\lambda_{1.max}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

② $\mu = 1{,}5$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_0 = (A - \mu I)x_0 = \begin{pmatrix} 3-1{,}5 & 1 \\ 1 & 3-1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}^{(0)} = x_0^T w_0 = (1 \; 0) \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{w_0}{\|w_0\|_2} = \frac{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = (A - \mu I)x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 13/2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}^{(1)} = x_1^T w_1 = \frac{1}{13}(3,2) \cdot \left(\frac{13}{2}, 6\right)^T = \frac{63}{26} \approx 2{,}42$$

$$\lambda^{(1)} = \tilde{\lambda}^{(1)} + \mu \approx 3{,}92$$

$$x_2 = \frac{w_1}{\|w_1\|_2}$$

$$\boxed{\lambda^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 4}$$

KONVERGENZ-RATE: $\quad \dfrac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu} = \dfrac{2 - 1{,}5}{4 - 1{,}5} = \dfrac{0{,}5}{2{,}5} = \dfrac{1}{5}$

③ $\mu = 3{,}5$ $\qquad (A - \mu I) = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

$$w_0 = (A - \mu I)x_0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}^{(0)} = w_0^T w_0 = \frac{-1}{2}$$

$$x_1 = \frac{w_0}{\|w_0\|_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = (A - \mu I)x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}^{(1)} = x_1^T w_1 = -1{,}3$$

$$\lambda^{(1)} = \tilde{\lambda}^{(1)} + \mu = 2{,}2$$

$$\boxed{\lambda^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 2}$$

KONVERGENZ-RATE: $\quad \dfrac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_1 - \mu} = \dfrac{0{,}5}{-1{,}5} = \dfrac{-1}{3} \overset{\text{Betrag}}{=} \dfrac{1}{3}$

NOTICE:

$\mu < 3 \Rightarrow \lambda^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 4$

$\mu > 3 \Rightarrow \lambda^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} 2$

und falls $\mu = 3$ $\qquad [4, 2] - 3$

$\Rightarrow$ periodisch! keine Konvergenz $\qquad [1, -1]$ ↯

• INVERSE POWER ITERATION:

$\Rightarrow$ wie direkte power Iteration, nur Verfahren konvergiert gegen betragsmäßig kleinsten EW.

$$B = (A - \mu I)^{-1} \qquad x_{k+1} = \frac{B \cdot x_k}{\|B \cdot x_k\|}$$

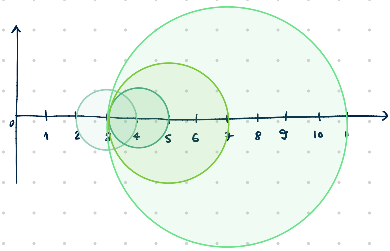
SATZ VON GERSCHGORIN

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ = quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}.
- Dann liegen die EW λ von a in mind. einer der Kreisscheiben K_j

$$K_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \le \sum_{k=1, k \ne j}^{n} |a_{jk}| \right\}$$

a) zeichne: $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Mittelpunkt =	Radius =
7	2+1+1 = 4
5	2
4	1
3	1



Viel Erfolg

Ich hoffe dass ich durch meine Zusammenfassungen jmd. helfen konnte

nochmal die wichtigen Formeln:

OHNE SHIFT:

$$w_i = A x_i$$
$$\lambda^{(i)} = x_i^T w_i$$
$$x_{i+1} = \frac{w_i}{\|w_i\|_2}$$

MIT SHIFT μ:

$$w_i = (A - \mu I)x_i$$
$$\tilde{\lambda}^{(i)} = x_i^T w_i$$
$$\lambda^{(i)} = \tilde{\lambda}^{(i)} + \mu$$
$$x_{i+1} = \frac{w_i}{\|w_i\|_2}$$