Numprog 2SHF Teil 9:

Iterative-Verfahren, Gauss-Seidl-Verfahren
Newton-Verfahren, Jacobi-Verfahren, Steilster Abstieg

Iteratives Lösungsverfahren:

für lineare Gleichungssysteme

$\Phi(x) := x + M^{-1}(b - Ax)$

M = Vorkonditionierer
↳ bestimmt Konvergenz-Geschwindigkeit

Nach wie vielen Schritten konvergiert das Verfahren, falls $M = A$

$\Phi(x) = x + A^{-1} \cdot (b - Ax)$

$\Phi(x) = x + (A^{-1}b - A^{-1}Ax)$

$\Phi(x) = x + (x_{final} - x)$

$\Phi(x) = x_{final}$

$A x_{final} = b$
$A^{-1}b = x_{final}$

Verfahren konvergiert nach 1nem Schritt!

WDH: FIXPUNKTE

$f(x) = x^2$
$f(1) = 1$
$f(0) = 0$ BSP

also für x muss y=x rauskommen

ABER: nicht praktikabel,

da wir $A^{-1}b$ benutzen brauchen wir das Iterative Verfahren dann eigentlich garnicht, da wir x_{final} gleich so lösen können: $x = A^{-1}b$

Matrix	Invertierbarkeit	Approximation von A	
I_n	schnell	schlecht	→ Richardson Verfahren
A	langsam	gut	→ Jacobi-Verfahren
diag(A)	mittel	mittel	→ Gauss-Seidl-Verfahren

↳ je ähnlicher zu A, desto schneller ist das Iterations-Verfahren

Jacobi-Verfahren

$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + \mathrm{diag}(A)^{-1}(b - Ax^{(k)})$

Betrachtet man nur eine Komponente von $x^{(k+1)}$

$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$

$= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)}) - a_{ii} x_i^{(k)}\right)$

$= \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)})\right)$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \mathrm{diag}(A)^{-1}(b - Ax^{(k)})$

PSEUDO CODE:

```
function jacobi
    for i = 1:n
        summe = b(i);
        for l = 1:n
            if (l != i)
                summe -= a(i,l) * x_alt(l);
            end
        end
        x_neu(i) = summe / a(i,i);
    end
return;
```

Important Stuff!!!

!!

$i = n \quad [0 \dots n]$

$r^{(n)} = b - Ax^{(n)}$

$y_1^{(n)} = \frac{1}{a_{11}} r_1^{(n)}$

$y_2^{(n)} = \frac{1}{a_{22}} r_2^{(n)}$

$\vdots$

$y_z(n) = \frac{1}{a_{zz}} r_z^{(n)}$

$x^{(n+1)} = x^{(n)} + y^{(n)}$

= DAS VERFAHREN !

Gauss-Seidl-Verfahren

$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{m=1}^{i-1} a_{im} x_m^{(k+1)} - \sum_{m=i}^{n} a_{im} x_m^{(k)}$

PSEUDO CODE:

```
x : List(float), A : List(List(float)), b : List(float)
n = len(b)
for i in range(n)
    summe = b[i]
    for j in range(n)
        if (i != j)
            summe -= A[i,j] * x[j]
    x[i] = summe / A[i][i]
return x
```

Aufgabe:

① durch Gauß Elimination lösen
② 3 Schritte des Jacobi-Verfahren Startwert: Nullvektor $x^{(0)} = (0,0,0)^T$
③ 2 Schritte des Gauss-Seidl-Verfahren $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

①

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -8/3 & 0 \end{array}\right)$

RÜCKWÄRTSSUBSTITUTION:

$-8/3 x_3 = 0$
$x_3 = 0$
$3/2 x_2 + 0 = -3/2$
$x_2 = -1$
$2x_1 + 1 + 0 = -1$
$x_1 = -1$

$\Rightarrow$ Endergebnis: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

② **JACOBI**

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i = 0:

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A \cdot x^{(0)}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y_1^{(0)} = \frac{1}{a_{11}} r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$

$y_2^{(0)} = \frac{1}{a_{22}} r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$

$y_3^{(0)} = \frac{1}{a_{33}} r_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$x^{(1)} = x^{(0)} + y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

i = 1:

$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} - \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A \cdot x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$y_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$y_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} r_2^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

i = 2:

$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}} r_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

$y_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}} r_2^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

$y_3^{(2)} = \frac{1}{a_{33}} r_3^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

$x^{(3)} = x^{(2)} + y^{(2)} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/8 \\ -1/8 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{7}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

GAUSS-SEIDL

③ $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

2 Schritte → $i=0$, $i=1$

• $i=0$

- $k=1$:

$$r_1^{(0)}=b_1-\sum_{j=1}^{0}a_{1j}x_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j^{(0)}$$
$$=-1-(0)-(2\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\cdot 0)=-1$$
$$y_1^{(0)}=\frac{1}{a_{11}}r_1^{(0)}=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$
$$x_1^{(1)}=x_1^{(0)}+y_1^{(0)}=0+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

- $k=2$:

$$r_2^{(0)}=b_2-\sum_{j=1}^{1}a_{2j}x_j^{(1)}-\sum_{j=2}^{3}a_{2j}x_j^{(0)}=$$
$$=-1-\left(-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)-(2\cdot 0+(-1)\cdot 0)=-\frac{3}{2}$$
$$y_2^{(0)}=\frac{1}{a_{22}}r_2^{(0)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$
$$x_2^{(1)}=x_2^{(0)}+y_2^{(0)}=0+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$$

- $k=3$:

$$r_3^{(0)}=b_3-\sum_{j=1}^{2}a_{3j}x_j^{(1)}-\sum_{j=3}^{3}a_{3j}x_j^{(0)}=$$
$$=0-\left(1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right)-(-2\cdot 0)=-\frac{1}{4}$$
$$y_3^{(0)}=\frac{1}{a_{33}}r_3^{(0)}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$
$$x_3^{(1)}=x_3^{(0)}+y_3^{(0)}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}-1/2\\-3/4\\1/8\end{pmatrix}$$

• $i=1$

- $k=1$:

$$r_1^{(1)}=b_1-\sum_{j=1}^{0}a_{1j}x_j^{(2)}-\sum_{j=1}^{3}a_{1j}x_j^{(1)}$$
$$=-1-0-\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+1\cdot\frac{1}{8}\right)=-\frac{7}{8}$$
$$y_1^{(1)}=\frac{1}{a_{11}}r_1^{(1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{16}$$
$$x_1^{(2)}=x_1^{(1)}+y_1^{(1)}=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{7}{16}\right)=-\frac{15}{16}$$

- $k=2$:

$$r_2^{(1)}=b_2-\sum_{j=1}^{1}a_{2j}x_j^{(2)}-\sum_{j=2}^{3}a_{2j}x_j^{(1)}=$$
$$=-1-\left(-1\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)\right)-\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+(-1)\cdot\frac{1}{8}\right)=-\frac{5}{16}$$
$$y_2^{(1)}=\frac{1}{a_{22}}r_2^{(1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{16}\right)=-\frac{5}{32}$$
$$x_2^{(2)}=x_2^{(1)}+y_2^{(1)}=-\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{32}\right)=-\frac{29}{32}$$

- $k=3$:

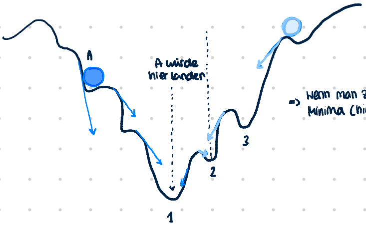
$$r_3^{(1)}=b_3-\sum_{j=1}^{2}a_{3j}x_j^{(2)}-\sum_{j=3}^{3}a_{3j}x_j^{(1)}=$$
$$=0-\left(1\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)+(-1)\cdot\left(-\frac{29}{32}\right)\right)-\left(-2\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{32}$$
$$y_3^{(1)}=\frac{1}{a_{33}}r_3^{(1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{32}=-\frac{9}{64}$$
$$x_3^{(2)}=x_3^{(1)}+y_3^{(1)}=\frac{1}{8}+\left(-\frac{9}{64}\right)=-\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow\quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}-15/16\\-29/32\\-1/64\end{pmatrix}$$

more general:

$$r_k^{(i)}=b_k-\sum_{j=1}^{k-1}a_{kj}x_j^{(i+1)}-\sum_{j=k}^{3}a_{kj}x_j^{(i)}$$

VERFAHREN DES STEILSTEN ABSTIEGS



⇒ Wenn man zu große Schritte wählt, können Minima (hier 3) übersehen werden.

Jede Iteration des Verfahrens entspricht dabei den folgenden 3 Schritten:

!!

① Berechnung des aktuellen Residuums: $r^{(i)}=b-Ax^{(i)}$

② Berechnung der optimalen Schrittweite: $\alpha^{(i)}=\dfrac{r^{(i)T}r^{(i)}}{r^{(i)T}Ar^{(i)}}$

③ Berechnung des aktuellen Zwischenergebnisses: $x^{(i+1)}=x^{(i)}+\alpha^{(i)}r^{(i)}$

!!

BEISPIEL:

2 Schritte des Verfahren des steilsten Abstiegs durchführen um eine iterative Lösung für $Ax=b$ zu finden:

$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$, $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gesucht: $x^{(2)}$

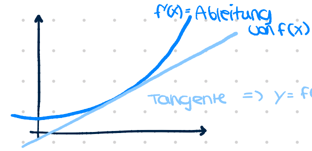
$i=0$: ERSTE ITERATION

$$r^{(0)}=b-Ax^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$$
$$\alpha^{(0)}=\frac{r^{(0)T}r^{(0)}}{r^{(0)T}Ar^{(0)}}=\frac{\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}}=\frac{1}{6}$$
$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha^{(0)}r^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$i=1$: ZWEITE ITERATION

$$r^{(1)}=b-Ax^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}$$
$$\alpha^{(1)}=\frac{r^{(1)T}r^{(1)}}{r^{(1)T}Ar^{(1)}}=\frac{\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}}=\frac{1}{2}$$
$$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha^{(1)}r^{(1)}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4/3\\0\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

SPEZIELLES NEWTONVERFAHREN

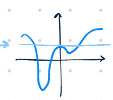


Formel der Tangente

Tangente ⇒ $y=f(x_B)+(x-x_B)*f'(x_B)$

Was macht das Newtonverfahren?
→ Random Punkt auf dem Graphen → Tangente von der Steigung
→ Nullstelle der Tangente → Funktionswert an der Stelle is unser neuer Punkt
→ neue Tangente usw usw...

Problem: wenn unser 1ster Random Punkt kacke gesetzt ist, z.B sehr weit weg, oder an nem Max, Min
mit der Tangente kommt man nicht weit



VERFAHREN:

x_1 = Anfangswert → 1. Punkt

$$y=f(x_1)+(x-x_1)*f'(x_1)=0$$
$$x-x_1=\frac{-f(x_1)}{f'(x_1)}$$

nach x umformen

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$ → 2. Punkt

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$ → 3. Punkt

⋮

!!

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

!!

Wie lang macht man des?
Bei jedem x das man rauskriegt die ersten 2 Nachkommastellen anschauen, wenn bei 2 x's hintereinander die 2 Nachkommastellen gleich bleiben, dann hat man die NST gefunden.

BEISPIEL:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = mx + b$

- NST von $f(x)$ wie bisher gerechnet: $x_* = -\frac{b}{m}$
- Newtonverfahren für f, nach wievielen Iterationen hat das Verfahren die NST gefunden?

$\Rightarrow$ $x_{k+1} = -\frac{b}{m}$ beschreibt direkt die NST, direktes Einsehen in Fkt liefert 0)

b) Newtonverfahren für:

① $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ② $g(x) = x^2 - 8x + 15$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2x_n - 3}{2x_n - 2} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 8x_n + 15}{2x_n - 8}$$

$$= \frac{x_n(2x_n - 2) - (x_n^2 - 2x_n - 3)}{2x_n - 2} \qquad = \frac{x_n(2x_n - 8) - (x_n^2 - 8x_n + 15)}{2x_n - 8}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n - 2} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 15}{2x_n - 8}$$

c) Berechnen der ersten 4 Iterationsschritte mit Startwerten:

für ① 2 und −2

für ② 2 und 6

	$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n - 2}$		$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 15}{2x_n - 8}$	
x_0	2	−2	2	6
x_1	3,5	−1,16667	2,75	5,25
x_2	3,05	−1,00641	2,975	5,025
x_3	3,0006	−1,000010	2,9997	5,0030
x_4	3,00000	−1,0	3,000000	5,0000000

viel Erfolg ♡

nochmal all the important stuff

JACOBI

$i = n \quad [0 \ldots n]$

$r^{(n)} = b - Ax^{(n)}$

$y_1^{(n)} = \frac{1}{a_{11}} r_1^{(n)}$

$y_2^{(n)} = \frac{1}{a_{22}} r_2^{(n)}$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_z(n) = \frac{1}{a_{zz}} r_z^{(n)}$

$x^{(n+1)} = x^{(n)} + y^{(n)}$

GAUSS-SEIDL

$$r_k^{(i)} = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(i+1)} - \sum_{j=k}^{3} a_{kj} x_j^{(i)}$$

STEILSTER ABSTIEG

$r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$

$\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} r^{(i)}}{r^{(i)T} A r^{(i)}}$

$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha^{(i)} r^{(i)}$

NEWTON

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$