Übung 4 - Numerisches Programmieren

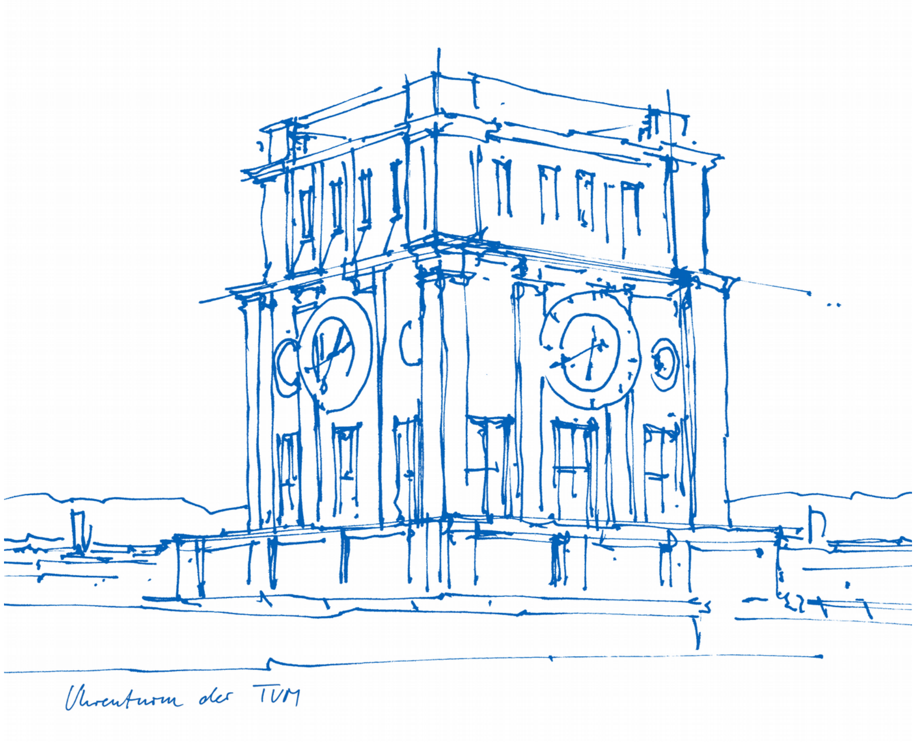
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

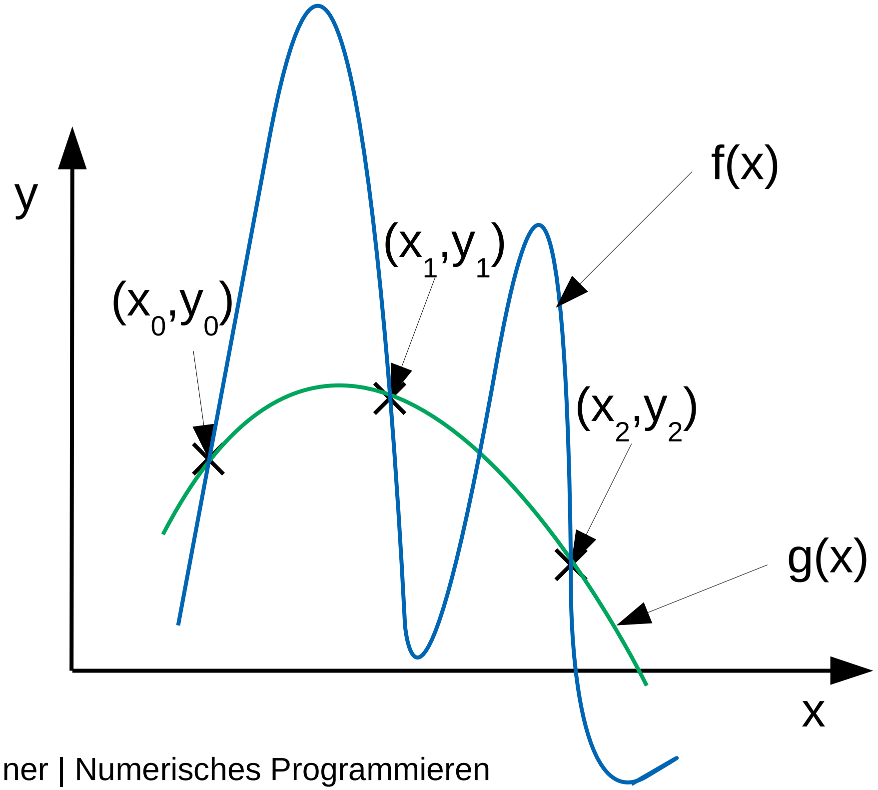
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 2 November 2020



Recap - Interpolation

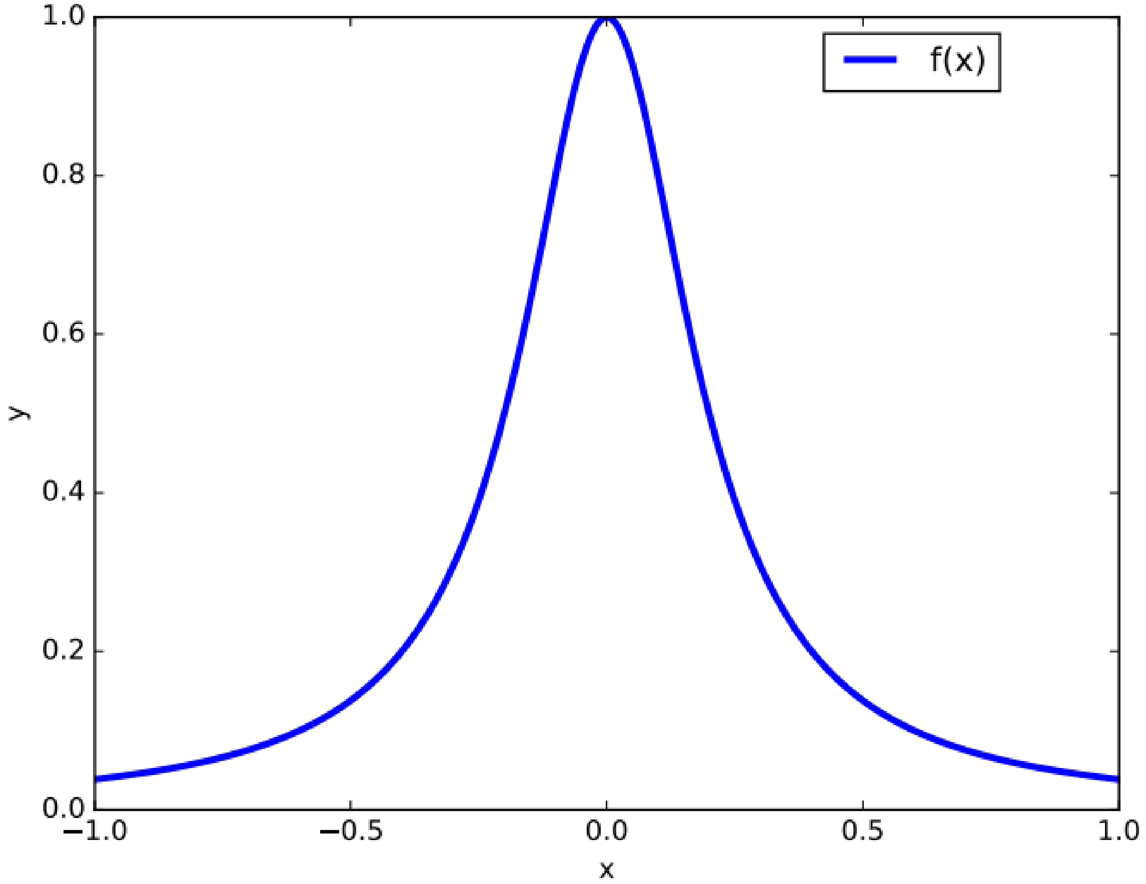
- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere g(x) mit $g(x_i) = g(x_i)$ und idealerweise $g(x) \approx f(x)$



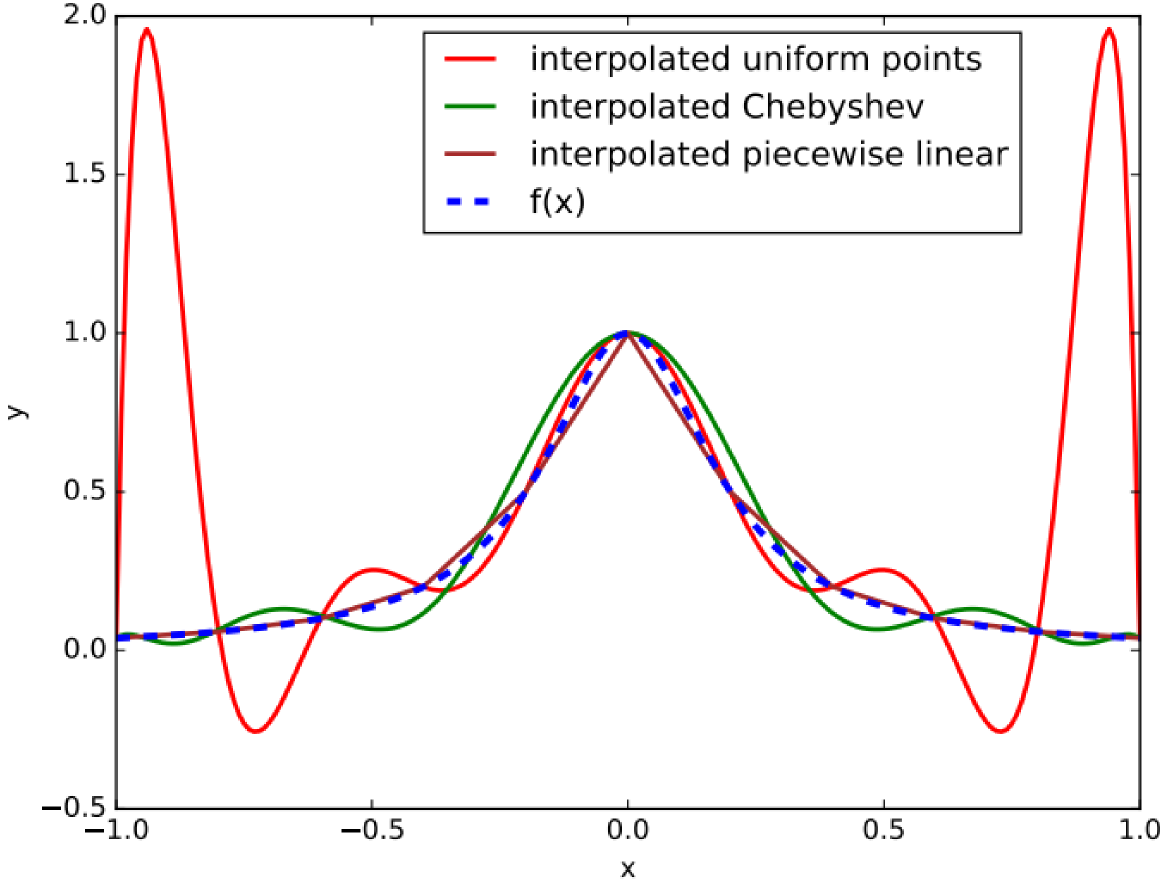
Recap - Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere g(x) mit $g(x_i) = f(x_i)$ und $g(x) \approx f(x)$
- Ansatz: $$g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \cdot c_i$$
- Lösung: $Ac = y \qquad A_{i,j} = g_j(x_i)$
- Typische Wahl für Basisfunktionen bei Polynominterpolation:
  - Monome: $g_i(x) = x^i$
  - Newtonverfahren: $g_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$
  - Lagrangepolynome: $g_i(x) = l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Recap – Runge Effekt



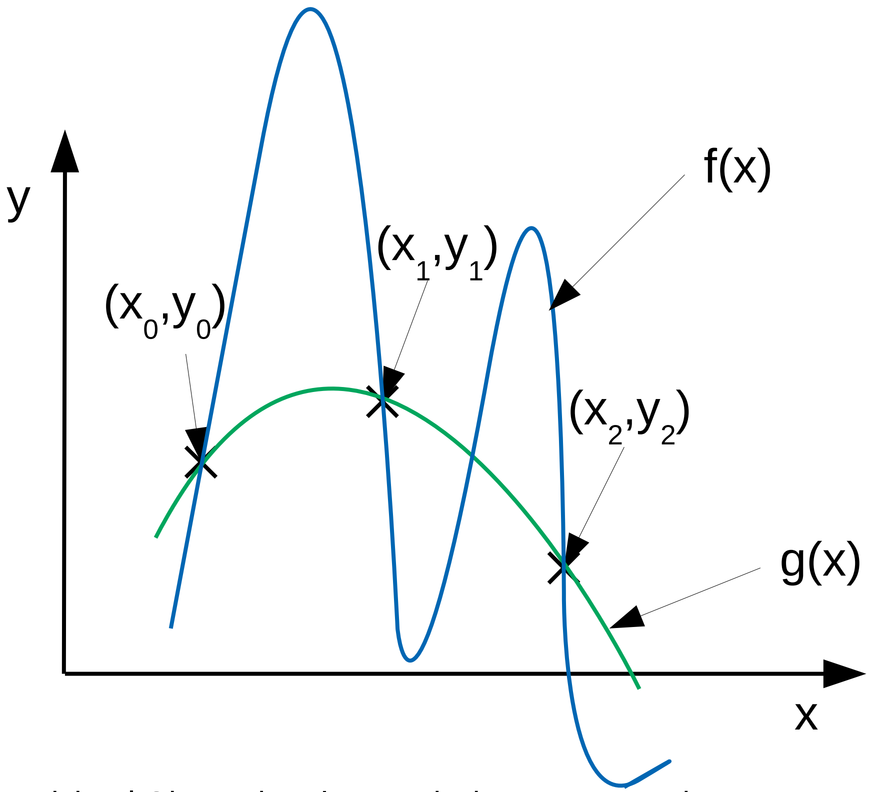
Recap – Runge Effekt



Übung 6 – Hermite Interpolation

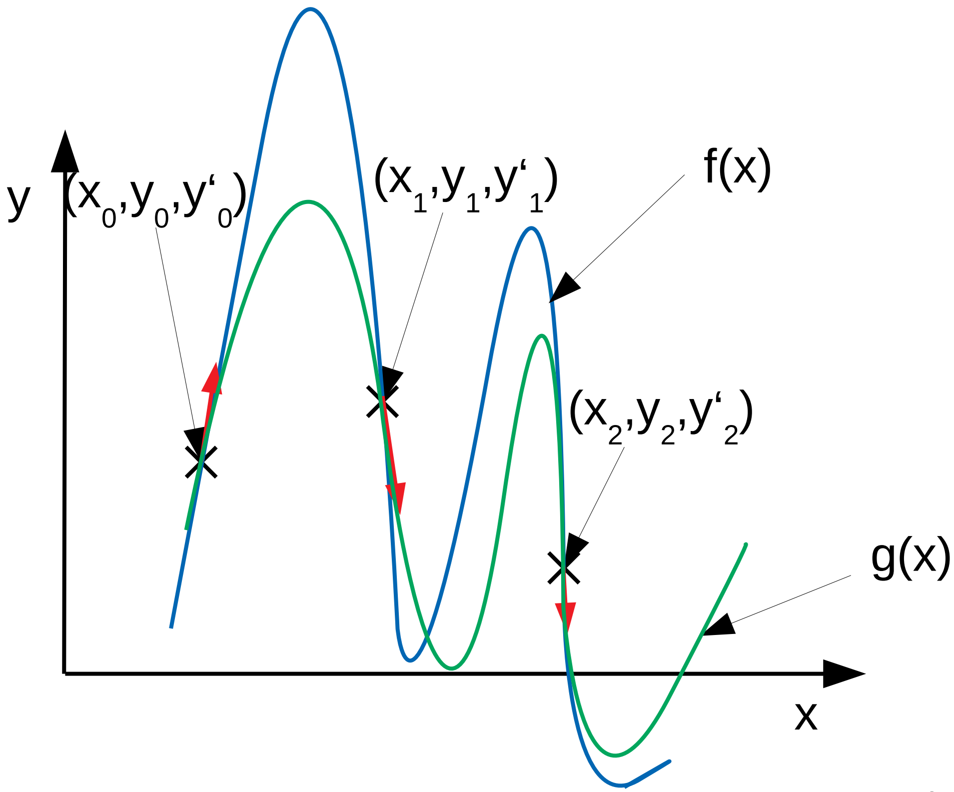
Lagrange Interpolation

- Nur Funktionswerte



Hermite Interpolation

- Funktionswerte und Ableitungen



Übung 6 – Hermite Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i, y_i') als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere g(x) mit $g(x_i) = f(x_i)$ und $g'(x_i) = f'(x_i)$
- Ansatz: $g(x) = \sum_{i=0}^{2n+1} g_i(x) \cdot c_i$
- Lösung: $Ac = y$ $\quad A_{i,j} = \begin{cases} g_j(x_i) & \text{for } i \leq n \\ g_j'(x_{i-n}) & \text{for } i > n \end{cases}$ $\quad y_i = \begin{cases} y_i & \text{for } i \leq n \\ y'_{i-(n+1)} & \text{for } i > n \end{cases}$

Umformung für Übungsblatt (n=1):

- Bestimmung der Hermite Polynome

$$p(t) = y_0 H_0(t) + y_1 H_1(t) + y_0' H_2(t) + y_1' H_3(t)$$

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 1

a) Bestimme kubisches Polynom durch $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$

b) Bestimme Transformation $t_i(x) : [x_i, x_{i+1}] \to [0, 1]$

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 1

Übung 6 – Hermite Interpolation

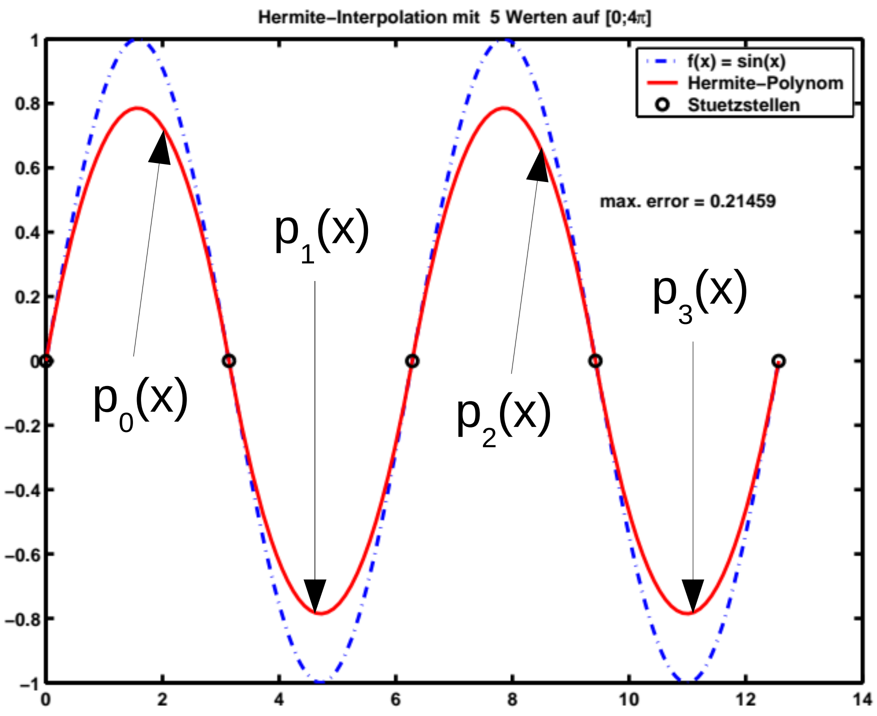
Bearbeitung Aufgabe 1

Übung 6 – Hermite Interpolation

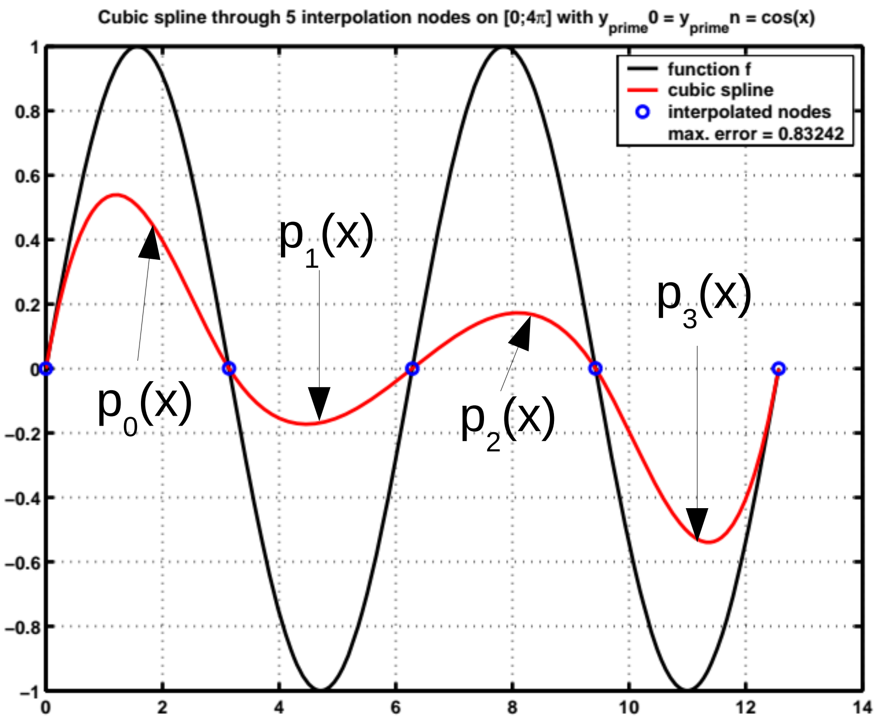
Bearbeitung Aufgabe 1

Übung 4 – Vergleich Hermite und kubische Splines

Hermite



Kubische Splines



Übung 4 – kubische Splines

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere $g_i(x)$ mit:

C² stetig

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i) = f(x_i) & p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \\ p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) & p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_0'(x_0) = y_0' & p_{n-1}'(x_n) = y_n' \end{array}}$$

Randbedingungen

Übung 4 – kubische Splines

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere $g_i(x)$ mit:

C² stetig

$$p_i(x_i) = p_{i-1}(x_i) = f(x_i) \qquad p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

$$p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}) \qquad p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$$

$$p_0'(x_0) = y_0' \qquad p_{n-1}'(x_n) = y_n'$$

Randbedingungen

- Ansatz:

Werden approximiert!

$$p_i(x) = y_i H_0(t_i(x)) + y_{i+1} H_1(t_i(x)) + \boxed{y_i'} h_i H_2(t_i(x)) + \boxed{y_{i+1}'} h_i H_3(t_i(x))$$

$$t_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$H_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$$
$$H_1(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$H_2(t) = t - 2t^2 + t^3$$
$$H_3(t) = -t^2 + t^3$$

Übung 4 – kubische Splines

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Lösung: Approximiere fehlende Ableitungen ($\mathcal{O}(n)$)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \begin{pmatrix} y_2 - y_0 - \frac{h}{3}\boxed{y_0'} \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} - \frac{h}{3}\boxed{y_n'} \end{pmatrix}$$

Randbedingungen

- Ansatz wie bei Hermite mit Approximierten Ableitungen:

$$p_i(x) = y_i H_0(t_i(x)) + y_{i+1} H_1(t_i(x)) + y_i' h_i H_2(t_i(x)) + y_{i+1}' h_i H_3(t_i(x))$$

$$t_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$H_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$$
$$H_1(t) = 3t^2 - 2t^3$$
$$H_2(t) = t - 2t^2 + t^3$$
$$H_3(t) = -t^2 + t^3$$

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 2

b) Bestimme Ableitungen und Funktionswerte der Hermitepolynome

c) Zeige das Gleichungssystem Lösung für Ableitungen darstellt

d) Beispiel Rechnung

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 2

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 2

Übung 6 – Hermite Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 2