Übung 7 - Numerisches Programmieren

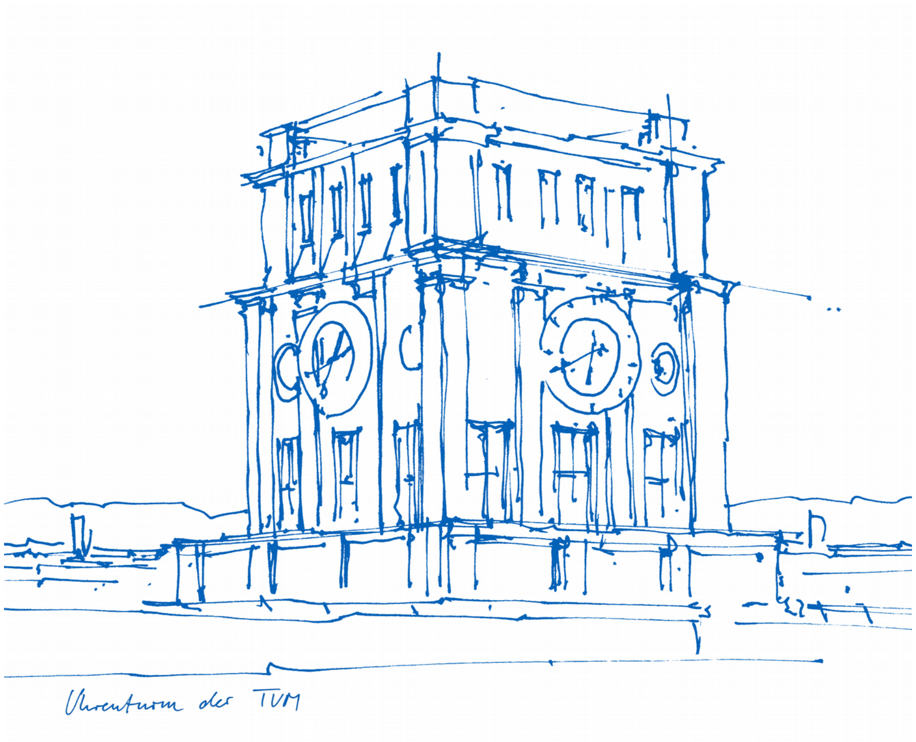
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

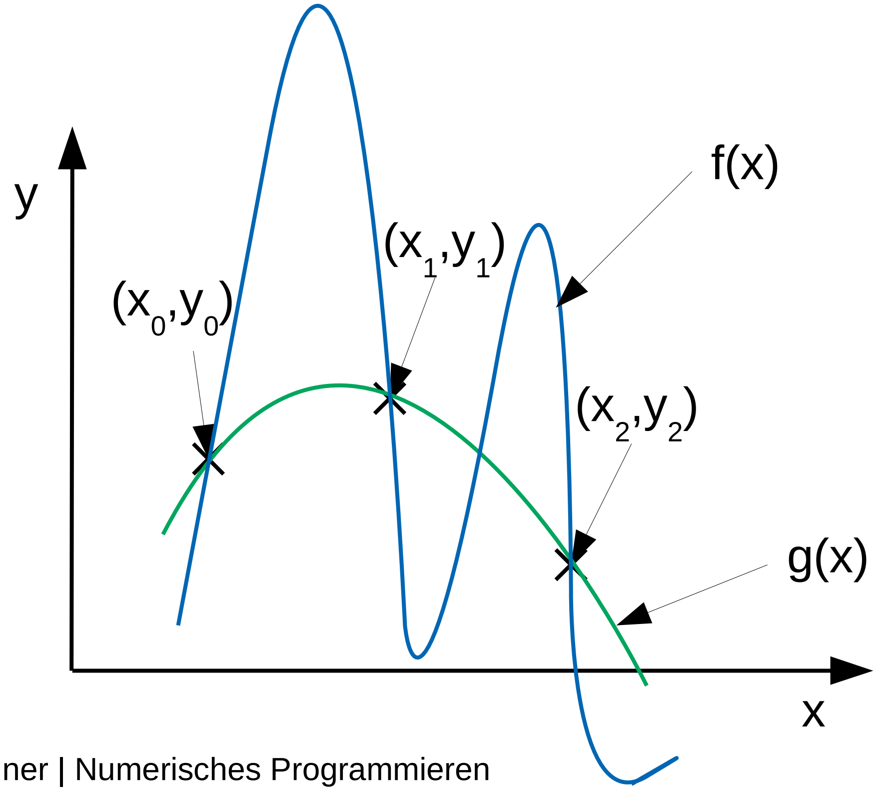
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 23. Dezember 2020



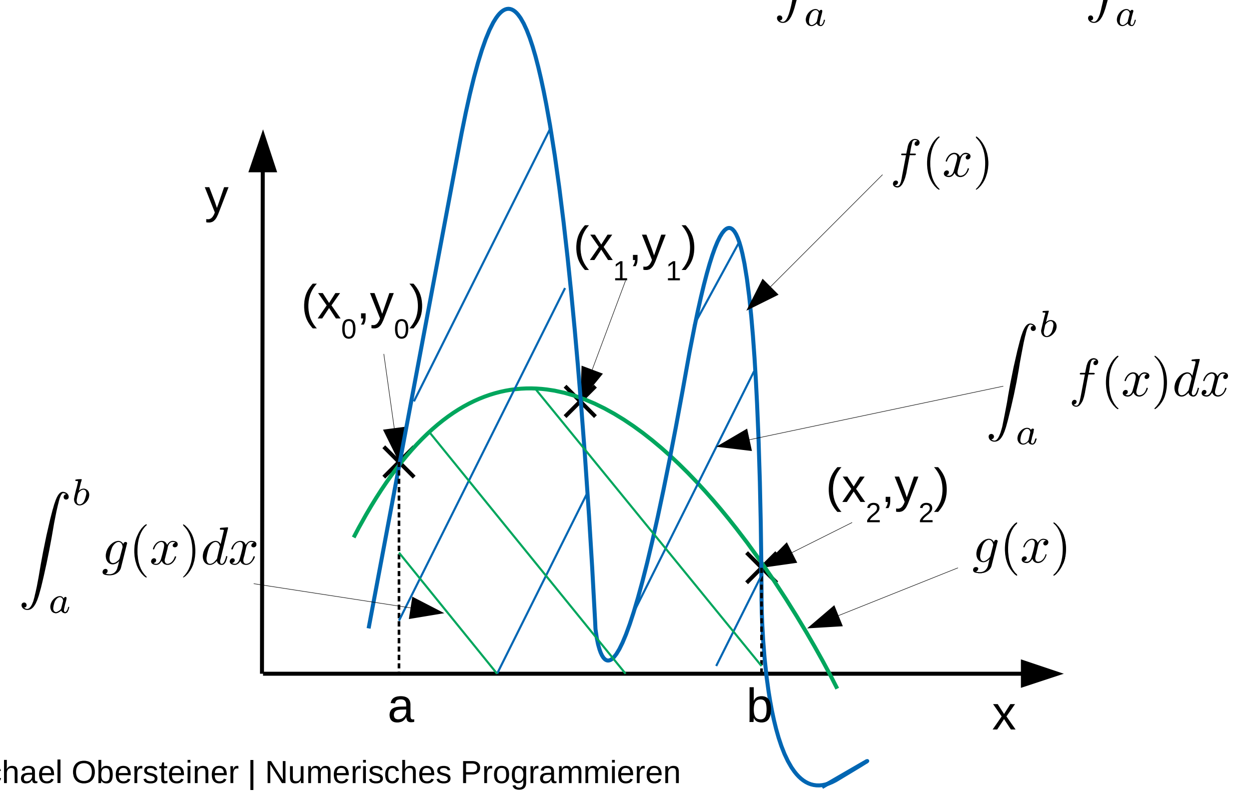
Recap - Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von f(x)
- Gesucht: f(x)
- Vorgehen: Konstruiere g(x) mit $g(x_i) = f(x_i)$ und idealerweise $g(x) \approx f(x)$



Übung 7 – Numerische Quadratur

- Ziel: Berechnung des Integrals einer Funktion $f(x)$: $I_f = \int_a^b f(x)dx$
- Problem: Oft nur numerisch Möglich!
- Ansatz: Interpolation mit $g(x)$ $\quad \rightarrow \quad \int_a^b g(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$



Übung 7 – Numerische Quadratur

- Ziel: Berechnung des Integrals einer Funktion $f(x)$: $I_f = \int_a^b f(x)dx$
- Problem: Oft nur numerisch Möglich!
- Ansatz: Interpolation mit $g(x) \quad \rightarrow \quad \int_a^b g(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$

- Algorithmus:

1) Wähle Basis und Stützpunkte
2) Berechne Interpolationsfunktion $g(x)$
3) Integriere $g(x)$ $\rightarrow$ Quadraturformel Q_g

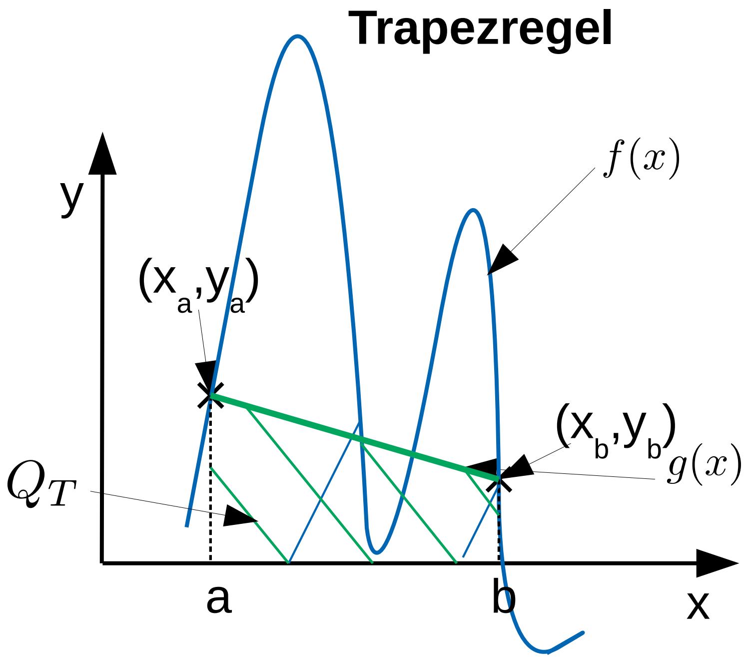
- Allgemein: Summe aus Stützwerten y_i und Gewichten w_i

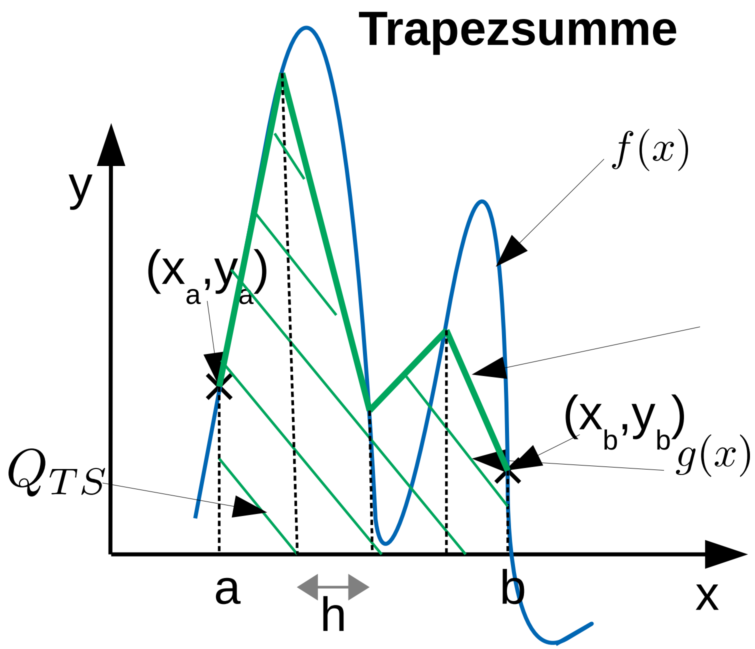
$$Q_g = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \quad \text{mit} \quad y_i = f(x_i)$$

Übung 7 – Trapezregel

- Approximation mit Trapez: $Q_T(f) = (b-a)\frac{y_a + y_b}{2}$
- Bei Verkettung mehrere Trapeze → Trapezsumme:

$$Q_{TS}(f;h) = h \cdot (\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}); h = \frac{b-a}{n}$$





Übung 7 – Trapezregel Fehler

- Taylor-Entwicklung um den Mittelpunkt der Integrationsdomaine ((a+b)/2)

$$f(x) = f(m) + \frac{f'(m)(x-m)}{1!} + \frac{f''(m)(x-m)^2}{2!} + \frac{f'''(m)(x-m)^3}{3!} + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(m)(x-m)^i}{i!}$$

I: $$T(f) = H\frac{f(a)+f(b)}{2} = \boxed{Hf(m)} + \sum_{i=2, i\%2=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(m)H^{i+1}}{2^i i!}$$

II: $$\int_a^b f(x)dx = \boxed{Hf(m)} + \sum_{i=2, i\%2=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(m)H^{i+1}}{(i+1)2^i i!}$$

Jeder 2. Term wird zu 0

$$i\%2 = 1 \Rightarrow (a-m)^i + (b-m)^i = 0$$

$$i\%2 = 1 \Rightarrow \int_{-H/2}^{H/2} x^i = 0$$

I in II $$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = H\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=2, i\%2=0}^{\infty} f^{(i)}(m)\left(\frac{(H)^{i+1}}{(i+1)2^i i!} - \frac{H^{i+1}}{2^i i!}\right)$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - T(f) = \sum_{i=2, i\%2=0}^{\infty} H^{i+1} C_i$$

Bei Trapezsumme mit Hilfe
Der Euler-Maclaurin Formel: $$\int_a^b f(x)dx - TS(f;h) = H \sum_{i=2, i\%2=0}^{\infty} h^i \tilde{C}_i \in O(Hh^2)$$

Übung 7 - Romberg Quadratur

- Idee: Kombiniere Trapezsummen mit unterschiedlichem h → Fehlerreduktion

$$I : \int_a^b f(x)dx - TS(f;h_1) = H(h_1^2\tilde{C}_2 + h_1^4\tilde{C}_4 + \ldots)$$

$$II : \int_a^b f(x)dx - TS(f;h_2) = H(h_2^2\tilde{C}_2 + h_2^4\tilde{C}_4 + \ldots)$$

$$I - II * h_1^2/h_2^2 := \int_a^b f(x)dx(1 - h_1^2/h_2^2) - TS(f;h_1) + h_1^2/h_2^2 TS(f;h_2) = H(h_2^2 h_1^2 \tilde{C}_4 + \ldots)$$

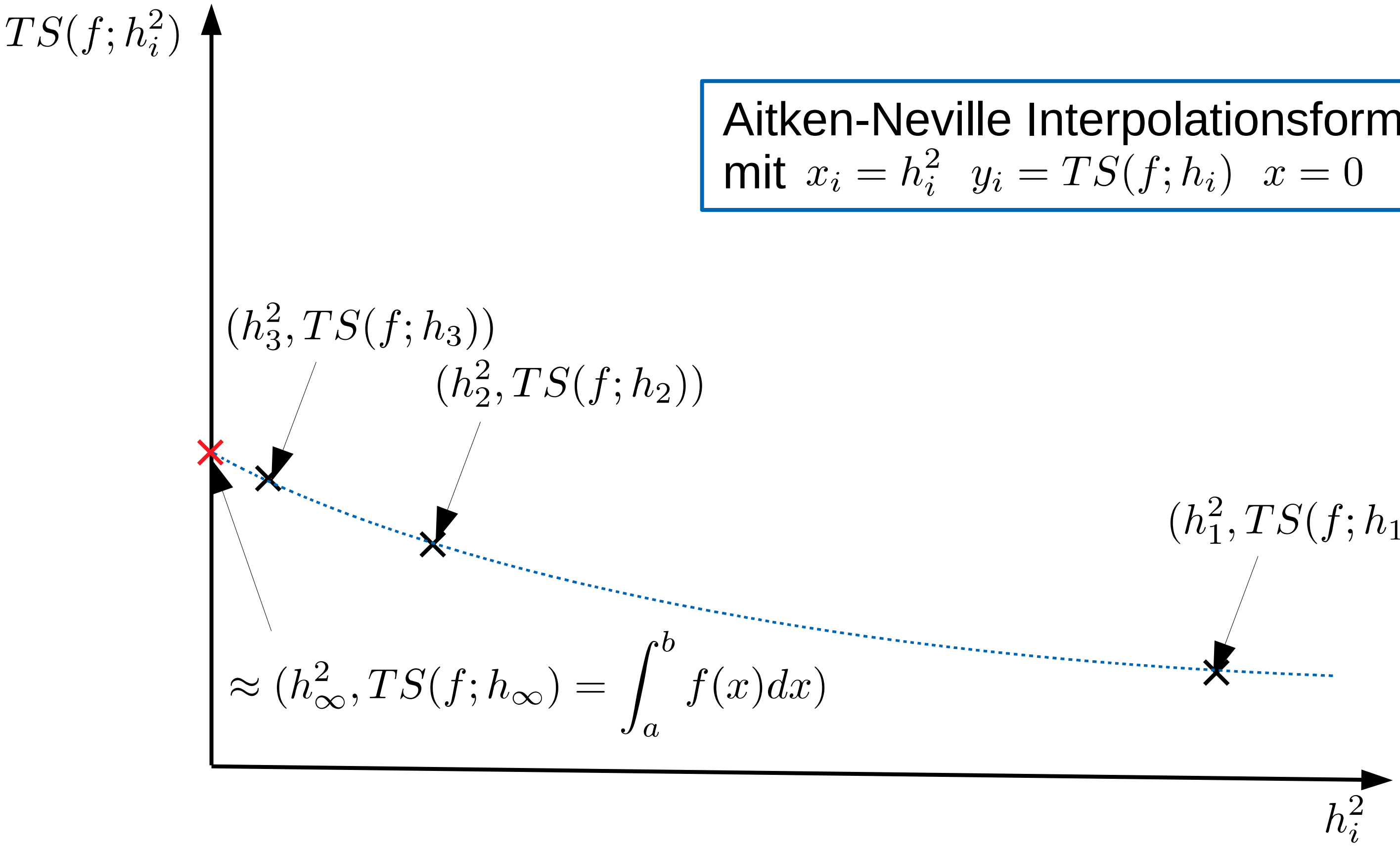
$$\frac{I - II * h_1^2/h_2^2}{1 - h_1^2/h_2^2} := \int_a^b f(x)dx - \frac{TS(f;h_1) - h_1^2/h_2^2 TS(f;h_2)}{1 - h_1^2/h_2^2} = \frac{H(h_2^2 h_1^2 \tilde{C}_4 + \ldots)}{1 - h_1^2/h_2^2} \in O(h_2^2 h_1^2)$$

- Wiederholte Anwendung mit unterschiedlichen Schrittweiten kürzt weitere Terme!
  → Fehler in $O(h_1^2 h_2^2 h_3^2 \ldots)$

Übung 7 – Alternativer Blick auf Romberg

- Extrapolation und Auswertung bei 0 um Ergebnis zu verbessern!

Aitken-Neville Interpolationsformel
mit $x_i = h_i^2 \quad y_i = TS(f;h_i) \quad x = 0$



Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 3

a) Berechnung der Trapezsummen

b) Romberg Extrapolation

Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 3

Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 3

Übung 7 - Kondition der Quadratur

- Eingabefehler durch Stützwerte $f(x_i) = y_i$
- Quadraturformel allgemein: $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i y_i = Q(y)$
- Absolute Kondition: $|Q(y) - Q(\tilde{y})| = \left| \sum_{i=0}^{n} w_i y_i - \sum_{i=0}^{n} w_i (y_i + \epsilon_i) \right| =$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n} w_i \epsilon_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |w_i \epsilon_i|$$

$$\leq |e_{max}| \sum_{i=0}^{n} |w_i|$$

- Potentiell Vergrößerung bei negativen Gewichten! $\sum_{i=0}^{n} w_i = b - a \leq \sum_{i=0}^{n} |w_i|$

→ Quadraturformeln gut konditioniert wenn alle Gewichte positiv (oder 0)!

Übung 7 - Gauß Quadratur

- Beobachtung: Quadraturformel besitzt 2n Parameter $\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$
- Idee: Bestimme nicht nur Gewichte w_i optimal sondern auch Stützstellen x_i
  → 2n Bedingungen
  → Polynom vom Grad 2n-1 exakt integrierbar

- Ansatz mit Methode der unbestimmten Koeffizienten:

$$g_0(x) = x^0 : \sum_{i=1}^{n} w_i g_0(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \stackrel{!}{=} \int_a^b 1 dx = \int_a^b g_0(x) dx$$

$$\vdots$$

$$g_{2n-1}(x) = x^{2n-1} : \sum_{i=1}^{n} w_i g_{2n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^{2n-1} \stackrel{!}{=} \int_a^b x^{2n-1} dx = \int_a^b g_{2n-1}(x) dx$$

→ Löse nichtlineares Gleichungssystem → w_i und x_i
In Praxis: Stützstellen x_i über Nullstellen orthogonaler Polynome (z.B. Lagrange Polynome)
Beobachtung: Gewichte $w_i > 0$ → immer gut konditioniert!

Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 4

a) Herleitung der Gaussquadratur mit 2 Punkten

b) Anwendung der Gaussquadratur auf Beispielfunktion

Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 4

Übung 7 – Numerische Quadratur

Bearbeitung Aufgabe 4

Archimedes Quadratur

- Start mit Trapez
- Weitere Punkte hinzufügen → berechne hinzugefügte Dreiecksfläche

- Hierarchisches Verfahren:
  Was kommt hinzu bei Verfeinerung?

- Adaptives Verfeinern möglich:
  Stoppe Verfeinerung bei
  kleinem Dreiecksvolumen