Übung 8 - Numerisches Programmieren

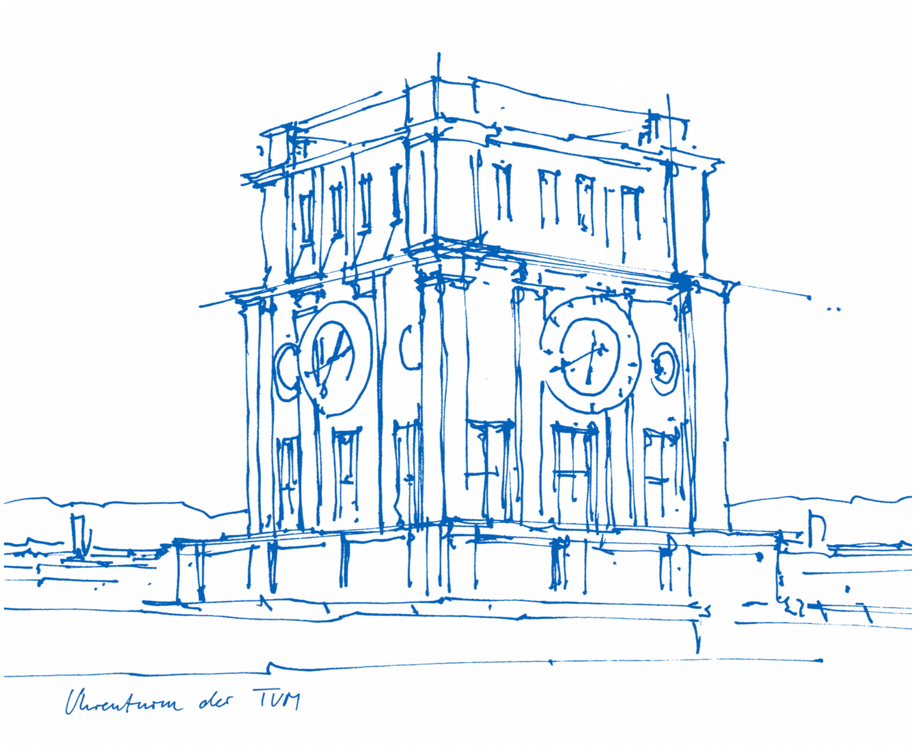
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 13. Januar 2021



Lösen Linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Gleichungssystem der Form: $Ax = b; A \in R^{n \times n}; x, b \in R^n$
- Gesucht: Lösung x
- Lösungsmethode: Gauss-Elimination $O(n^3)$
- Beispiel:

Elimination $O(n^3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Rückwärts-substitution $O(n^2)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = (-4, 4, -1)^T$$

Spalten-Pivotsuche

- Tausche während Elimination immer die Zeile mit größtem absolutem Element nach oben
- Es wird nur nach größtem Element in aktueller Eliminationsspalte gesucht
- Faktoren zur Subtraktion immer < 1
- Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ \boxed{3} & 5 & 8 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1/3 & -7/3 & 1 \\ 0 & \boxed{-2/3} & -5/3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & -5/3 & -1 \\ 0 & -1/3 & -7/3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -2/3 & -5/3 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = (-4, 4, -1)^T$$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Standard Gauss-Elimination

b) Standard Gauss-Elimination mit Rundung auf 3 gültige Stellen

c) Gauss-Elimination mit Spalten-Pivotsuche und Rundung (3 gült. Stellen)

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} -10^{-3} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung

- Idee: Zerlege Matrix $A = LR$; L linke untere Dreiecksmatrix; R rechte obere Dreiecksmatrix
- Algorithmus:
  - Berechne Zerlegung: $A = LR \quad O(n^3)$
  - Löse Vorwärtssubstitution: $Ly = b \quad O(n^2)$
  - Löse Rückwärtssubstitution: $Rx = y \quad O(n^2)$

- Berechnung der Zerlegung mit Gauss-Elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} = R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}} = L$$

Faktoren der Subtraktion (Bsp 1. Schritt: II – 2 I)

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Standard Gauss-Elimination

b+c) LR Zerlegung und anschließende Vorwärts- und Rückwärssubstitution

d) Löse mit neuer rechten Seite $c = (2, 1, 2)^T$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

LR-Zerlegung

- Idee: Zerlege Matrix $A = LR$; L linke untere Dreiecksmatrix; R rechte obere Dreiecksmatrix
- Algorithmus:
  - Berechne Zerlegung: $A = LR \quad O(n^3)$
  - Löse Vorwärtssubstitution: $Ly = b \quad O(n^2)$
  - Löse Rückwärtssubstitution: $Rx = y \quad O(n^2)$

Bei verschiedenen b Vektoren nur noch diese Schritte! $O(n^2)$

- Berechnung der Zerlegung mit Gauss-Elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} = R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}} = L$$

Faktoren der Subtraktion (Bsp 1. Schritt: II – 2 I)

Kondition des Gleichungssystems

- Definiert über Matrixnorm: $\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$
- Kondition: $cond(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$
- Bei Diagonalmatrizen: $\|A\|_2 = \max_{i \in [n]} |A_{i,i}|$
- Bei symmetrischen Matrizen: $\|A\|_2 = \max_{i \in [n]} |\lambda_i| \,; \lambda_i \text{ sind Eigenwerte}$
- Allgemein maximaler Singulärwert: $\|A\|_2 = \max_{i \in [n]} \sigma_i; \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$
- Eigenwerte der Inversen: $\lambda_i(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda_i(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_i}$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 3+4

3) Zeige dass Spektralnorm einer diagonal Matrix $\|D\|_2 = \max_i |d_{ii}|$

4) Orthogonale Matrizen

a) Zeige $det(Q) = \pm 1$

b) Zeige $\|Q\|_2 = 1$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 3+4

3) Zeige dass Spektralnorm einer diagonal Matrix $\|D\|_2 = \max_i |d_{ii}|$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 3+4

3) Zeige dass Spektralnorm einer diagonal Matrix $\|D\|_2 = \max_i |d_{ii}|$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 3+4

4) Orthogonale Matrizen

a) Zeige $det(Q) = \pm 1$

b) Zeige $\|Q\|_2 = 1$

Lineare Gleichungssysteme

Bearbeitung Aufgabe 3+4

4) Orthogonale Matrizen

a) Zeige $det(Q) = \pm 1$

b) Zeige $\|Q\|_2 = 1$