NUMPROG ZSMF. TEIL 8

BEGRIFF-DEFINITIONEN

♥ LOKALER DISKRETISIERUNGSFEHLER:

$$\boxed{\ell(\delta t) := \max_{a \le t \le b-\delta t} \left(\left| \frac{y(t+\delta t) - y(t)}{\delta t} - f(t, y(t)) \right| \right)}$$

= Fehler, den wir in einem Schritt haben, wenn man annimmt, dass der ursprüngliche Wert y_k korrekt wäre.
(also der Fehler von y_{k+1} zu der exakten Lösung mit Anfangswert y_k)
- Also quasi wie viele Fehler durch das Schrittverfahren in einem beliebigen Schritt hinzukommen können.

Fehler wird auch durch $y_k = y(t_k)$ als

$$\boxed{|y_{k+1} - y(t_{k+1})|}$$ beschrieben

♥ GLOBALER DISKRETISIERUNGSFEHLER:

= Tatsächlicher Fehler von einem y_k zu der eigentlichen Lösung mit Anfangswert y_0. Also um wieviel unterscheidet sich die exakte Lösung an einer bestimmten Stelle zu der von einem Einschrittsverfahren.
- Gibt also an wie gut unser Verfahren am Ende ist und damit relevanter als der lokale Diskretisierungsfehler.

$$\boxed{e(\delta t) = \max_{k=0,\dots,N} \left(|y_k - y_k(t_k)| \right)}$$

Fehler auch durch

$$\boxed{|y_n - y(t_n = b)|}$$ definiert

♥ KONSISTENZ:

Schrittverfahren = konsistent, falls der lokale Diskretisierungsfehler (DF) für kleine Zeitschritte gegen 0 geht.

$$\boxed{\lim_{\delta t \to 0} \ell(\delta t) = 0}$$

♥ KONVERGENZ:

Konvergent, falls der globale DF bei kleinen Zeitschritten gegen 0 geht. Konvergenz impliziert Konsistenz. (nicht umgekehrt)

$$\boxed{\text{Konvergenz} \Rightarrow \text{Konsistenz}}$$

♥ STABILITÄT:

Lösung = stabil, falls sie gegenüber kleine Störungen der Eingabe unempfindlich ist. Wenn kleine lokale Fehler nur zu kleinen globalen Fehlern aufsummieren => Verfahren = stabil.

$$\boxed{\text{Konsistenz} + \text{Stabilität} \Leftrightarrow \text{Konvergenz}}$$

♥ STEIFHEIT:

Eine Differenzialgleichung = steif, falls sie Eigenschaften der Konsistenz und/oder Konvergenz aufweist, diese jedoch nur für sehr kleine δt gelten

=> zu kleine δt (Zeitschritte) = unpraktikabel => STEIFHEIT

also Problem-attribut

LÖSUNG: implizite Verfahren

Explizite Eulerverfahren = Verfahren erster Ordnung, also gilt:

$$\ell(\delta t) = O(\delta t), \quad e(\delta t) = O(\delta t)$$

Heun → $O(\delta t^2)$ und Runge-Kutta → $O(\delta t^4)$

=> Alle 3 Verfahren sind konvergent & konsisten

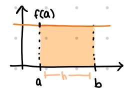
QUADRATUR & AWP-LÖSUNG - HERLEITUNG

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$
$$y(a) = y_0$$

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)\,dt \overset{(1)}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\,dt$$

a) Herleiten des expliziten Eulerverfahren durch „dumme Rechtecksregel"

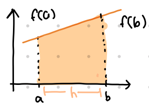
$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a) \cdot f(a)}$$



$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = (t_{k+1} - t_k) \cdot f(t_k, y_k)$$
$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)$$

b) Herleiten des Heun-Verfahren durch „Trapezregel"

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (f(a) + f(b))}$$



$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = (t_{k+1} - t_k) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$
$$y_{k+1} = \underbrace{y_k + \delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))}_{\text{implizit!}}$$

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)))$$

mit Eulerverfahren annähern