Übung 10 - Numerisches Programmieren

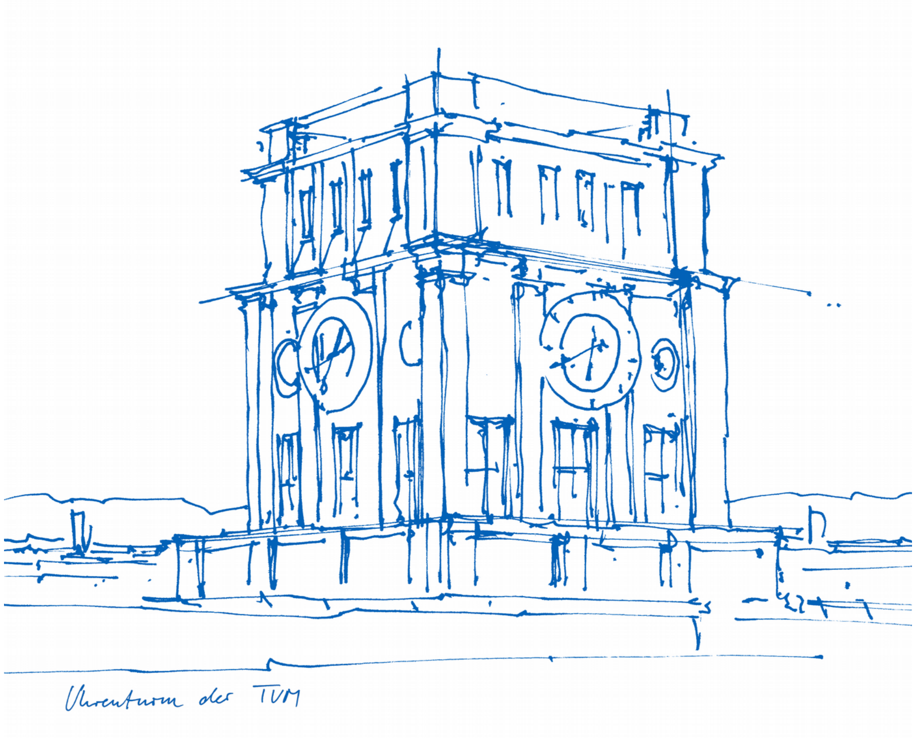
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

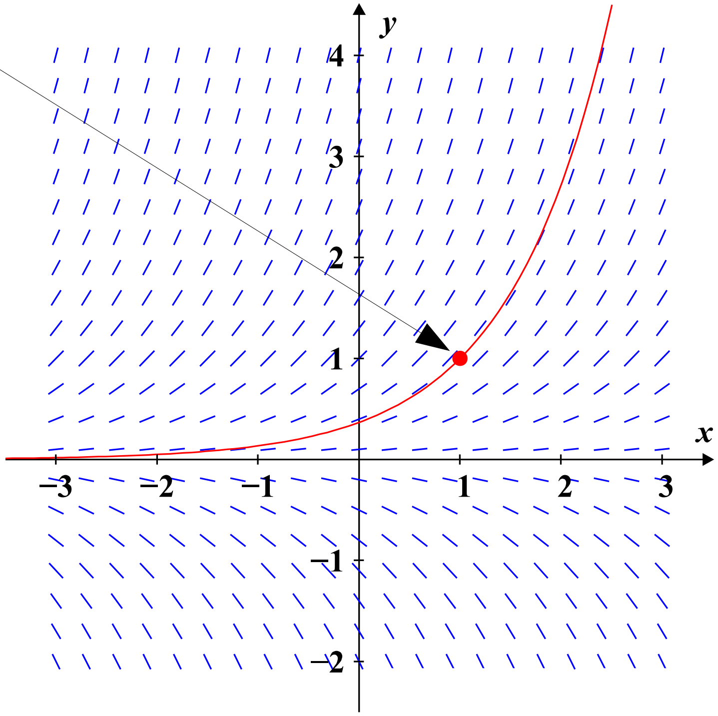
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 27. Januar 2021



Recap – Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Beschreiben Zusammenhang der Ableitung(en) zur Funktion
- Dient zur Beschreibung dynamischer Systeme (zum Beispiel in der Physik)
- Allgemein mit potenziell weiteren Ableitungen: $\dot{y}(t) = f(y(t), t, ...)$
- Bei uns Beschränkung auf 1. Ableitung: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$
- Eindeutig lösbar mit Anfangswert
- Beispiel: $\dot{y}(t) = y(t)$



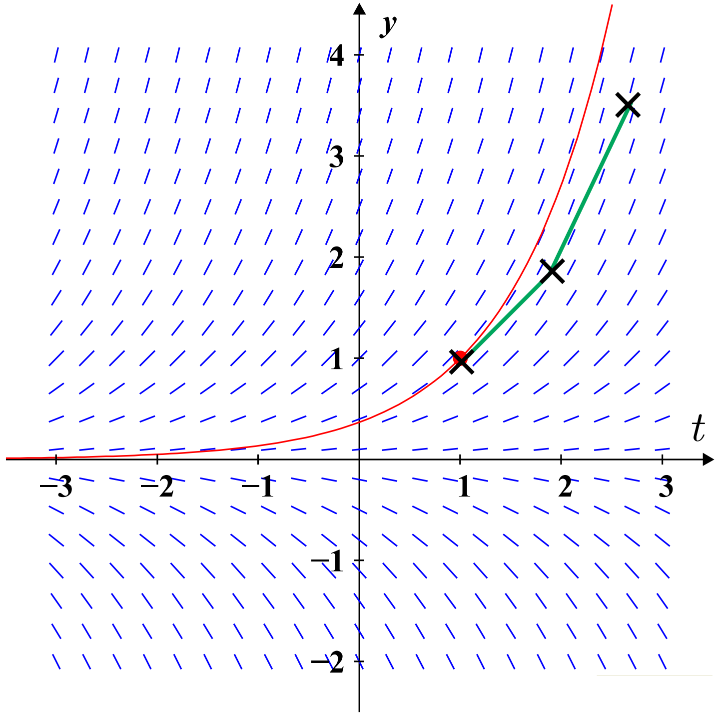
Recap – Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Beschreiben Zusammenhang der Ableitung(en) zur Funktion
- Dient zur Beschreibung dynamischer Systeme (zum Beispiel in der Physik)
- Allgemein mit potenziell weiteren Ableitungen: $\dot{y}(t) = f(y(t), t, ...)$
- Bei uns Beschränkung auf 1. Ableitung: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$
- Eindeutig lösbar mit Anfangswert
- Beispiel: $\dot{y}(t) = y(t)$
- Lösung: Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= y(t) \\
\frac{dy}{dt} &= y && \text{Umformung} \\
\frac{1}{y} dy &= 1 dt && \text{Separation der Variablen} \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y} dy &= \int_{t_0}^{t} 1 dt && \text{Integration} \\
ln(|y|) - ln(|y_0|) &= t - t_0 \\
ln(\left|\frac{y}{y_0}\right|) &= t - t_0 \\
\left|\frac{y}{y_0}\right| &= e^{t-t_0} \\
y &= \pm y_0 e^{t-t_0} \\
y(t) &= y_0 e^{t-t_0} && \text{da } \; y(t_0) = y_0
\end{aligned}$$

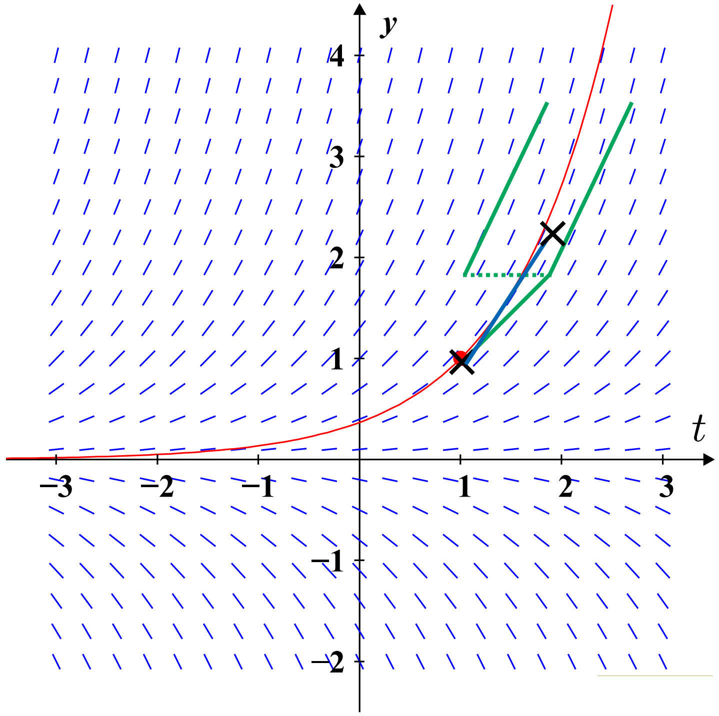
Recap – Numerik von ODEs: explizite Verfahren

- Euler Methode: Folge den Richtungungsfeld für bestimmtes x-Intervall
  → Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t f(y_k, t_k) \qquad y_0 = y(t_0)$



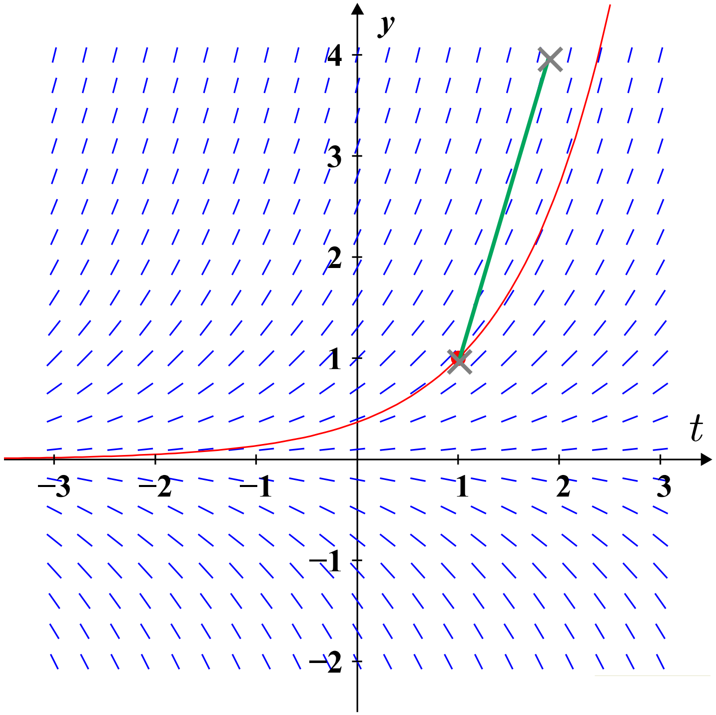
Recap – Numerik von ODEs: explizite Verfahren

- Heun Methode: Verwende Ableitung nach Euler Schritt und mittle mit aktueller Suchrichtung
- Analogie: Vorausschauendes Fahren
- Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t \frac{f(y_k, t_k) + f(y_k + \delta_t f(y_k, t_k), t_{k+1})}{2} \qquad y_0 = y(t_0)$



Recap – Numerik von ODEs: implizite Verfahren

- Euler Methode: Gehe Richtung des Punktes an dem man ankommt!
  → Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t f(y_{k+1}, t_{k+1}) \qquad y_0 = y(t_0)$



Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 1

<u>Definitionen</u>:

Lokaler Diskretisierungsfehler:

Globaler Diskretisierungsfehler:

Stabilität:

Konsistenz:

Konvergenz:

Steifheit:

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 1

<u>Definitionen</u>:

Lokaler Diskretisierungsfehler:

Globaler Diskretisierungsfehler:

Stabilität:

Konsistenz:

Konvergenz:

Steifheit:

Diskretisierungsfehler bei ODEs

- Lokaler Diskretisierungsfehler: Fehler durch einen Schritt

$$l(\delta t) = |y(t_{k+1}) - y_{k+1}|; \quad y(t_k) = y_k$$

- Globaler Diskretisierungsfehler: Fehler am Ende zur analytischen Lösung

$$e(\delta t, n) = |y(t_n) - y_n|; \quad y(t_0) = y_0$$

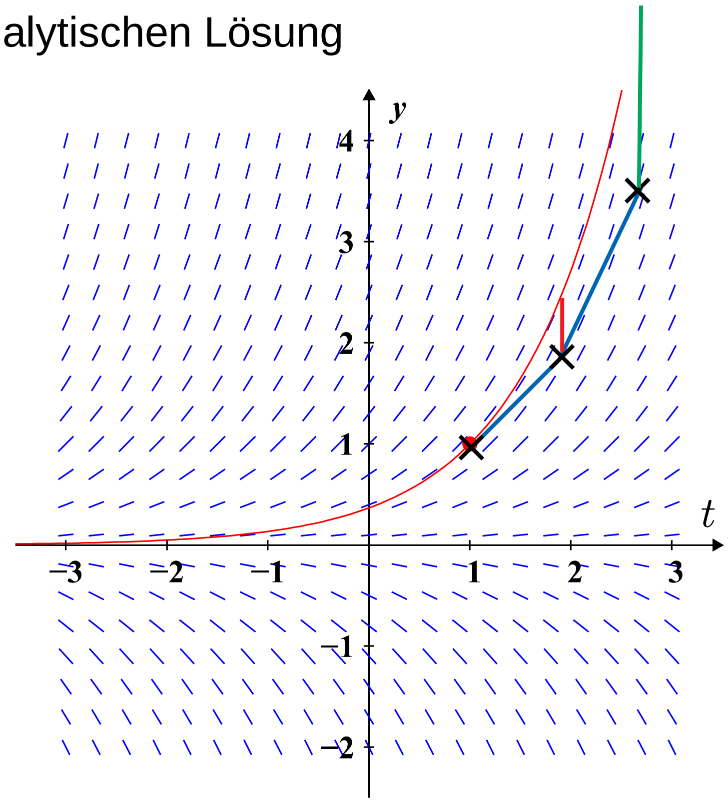
- Konsistenz: kleine Zeitschritte → kleiner lok. Fehler

$$\lim_{\delta t \to 0} l(\delta t) = 0$$

- Konvergenz: kleine Zeitschritte → kleiner glob. Fehler

$$\lim_{\delta t \to 0, n \to \infty} e(\delta t, n) = 0$$

- Stabilität: kein Verstärken kleiner lokaler Fehler
- Steifheit: ODE benötigt sehr kleine Zeitschritte
- Konsistenz + Stabilität → Konvergenz



Analogie: ODE und Quadratur

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = Q(f)$$

- Beliebige Quadraturformel für Q(f) möglich.
- Oft weitere Modifikationen nötig (z.B. einsetzen von explizitem Euler bei Heun)

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 2

a) expliziter Euler mit Rechtecksregel

b) Heun mit Trapezregel + zusätzliche Approximation

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 2

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 2

Analogie: ODE und Quadratur

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt$$

$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = Q(f)$$

- Beliebige Quadraturformel für Q(f) möglich.
- Oft weitere Modifikationen nötig (z.B. einsetzen von explizitem Euler bei Heun)

- „Dumme Rechtecksregel“: Q(f) = f(a) (b-a)

$$y_{k+1} - y_k = \delta t \cdot f(t_k, y_k) \rightarrow y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)$$

→ expliziter Euler

- Trapezregel: Q(f) = 0.5(b-a)(f(a) + f(b))

$$y_{k+1} - y_k = 0.5\delta t \cdot (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

$$\rightarrow y_{k+1} = y_k + 0.5\delta t \cdot (f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$$

→ impliziter Heun

→ expliziter Heun durch Substituieren mit explizitem Euler für y_{k+1}

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 3

Bankverzinsung

a) jährliche Verzinsung mit explizitem Euler

b) Formulierung der ODE

c) analytische Lösung

d) vierteljährliche Verzinsung mit explizitem Euler

e) Vergleich

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 3

Diskretisierungsfehler bei ODEs

Bearbeitung Aufgabe 3

Diskretisierungsfehler bei ODEs

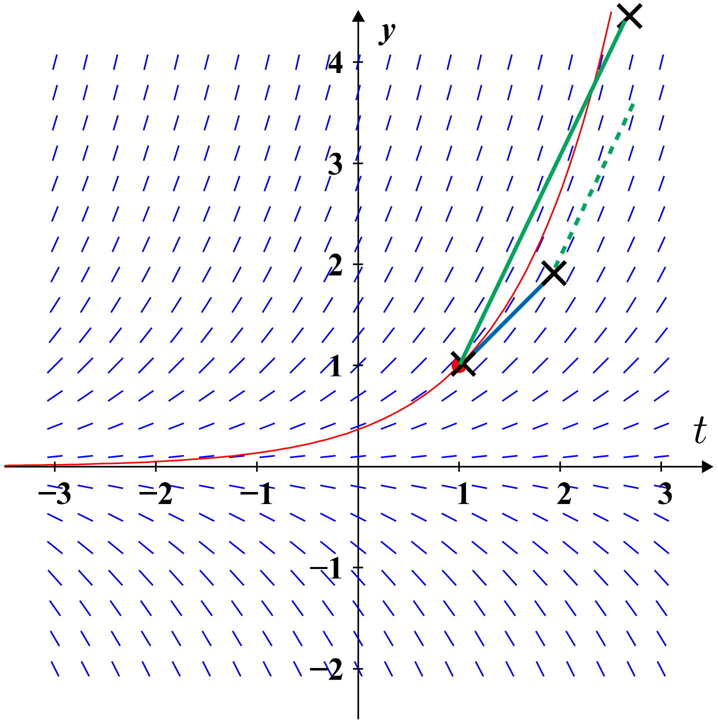
Bearbeitung Aufgabe 3

Mehrschrittverfahren

- Verwenden auch von älteren Schritten und nicht nur dem vorherigen
- Beispiel Mittelpunktregel (instabil):

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t f(t_k, y_k)$$

- Mehrere Startwerte müssen gegeben sein
oder durch andere Verfahren berechnet werden!
- Stabilität nötig für Konvergenz auch
wenn Konsistenz erfüllt!



Mehrschrittverfahren

Bearbeitung Aufgabe 4

a) analytische Lösung

b) Mittelpunktsregel

c) Mittelpunktsregel mit halber Schrittweite

Mehrschrittverfahren

Bearbeitung Aufgabe 4

Mehrschrittverfahren

Bearbeitung Aufgabe 4

Mehrschrittverfahren

Bearbeitung Aufgabe 4