# NumProg WS 20/21 : Tutorübung 08

1. Gauß-Elimination & Pivotsuche
2. LR-Zerlegung
3. Matrixnorm
4. Orthogonale Matrizen

# Wiederholung Gauss-Elimination

Mithilfe der Gauss-Elimination können wir lineare Gleichungssysteme lösen.

Wir benutzen zum Berechnen die **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & y_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & y_3 \end{array}\right)$$

# Wiederholung Gauss-Elimination

Mithilfe der Gauss-Elimination können wir lineare Gleichungssysteme lösen.

Wir benutzen zum Berechnen die **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & y_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & y_3 \end{array}\right)$$

Zuerst bringen wir sie in Dreiecksform mit Hilfe von **elementaren Umformungen**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{13} & \tilde{y}_1 \\ 0 & \tilde{x}_{22} & \tilde{x}_{23} & \tilde{y}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_{33} & \tilde{y}_3 \end{array}\right)$$

# Wiederholung Gauss-Elimination

Mithilfe der Gauss-Elimination können wir lineare Gleichungssysteme lösen.

Wir benutzen zum Berechnen die **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & y_2 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & y_3 \end{array}\right)$$

Zuerst bringen wir sie in Dreiecksform mit Hilfe von **elementaren Umformungen**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \tilde{x}_{13} & \tilde{y}_1 \\ 0 & \tilde{x}_{22} & \tilde{x}_{23} & \tilde{y}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{x}_{33} & \tilde{y}_3 \end{array}\right)$$

Danach lösen wir das System nach und nach mit **Rückwärtssubstitution**.

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Als **Pivotelement** bei der Gauß-Pivotsuche bezeichnen wir das Element, welches sich **ganz links oben** befindet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{p} & \cdots & x_{1m} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} & y_n \end{array}\right)$$

Ist das Pivotelement betragsmäßig klein, führt dies zu Instabilität (siehe Aufgabe 1)

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Als **Pivotelement** bei der Gauß-Pivotsuche bezeichnen wir das Element, welches sich **ganz links oben** befindet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{p} & \cdots & x_{1m} & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} & y_n \end{array}\right)$$

Ist das Pivotelement betragsmäßig klein, führt dies zu Instabilität (siehe Aufgabe 1)

Bei der **Pivotsuche vertauschen** wir am Anfang und bei jedem einzelnen Schritt **die Zeilen** so, dass das **Pivotelement maximal** ist.

→ dies führt zu maximaler Stabilität

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ \color{red}{5} & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ \color{red}{5} & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} \color{red}{5} & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & \color{red}{2} & -5 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & \color{red}{2} & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & \color{red}{2} & -5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

# Gauß-Elimination mit Pivotsuche

Beispiel Pivotsuche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

# LR-Zerlegung

**Idee:** Statt schrittweise Zeilenoperationen (wie bei Gauß), um eine Dreiecksmatrix aus $\boldsymbol{A}$ zu erhalten, multiplizieren wir eine **Matrix $\boldsymbol{B}$** mit $\boldsymbol{A}$, was die **Dreiecksform** ergibt.

**Matrix $\boldsymbol{B}$** nennen wir $\boldsymbol{L^{-1}}$

Die **Dreiecksmatrix** nennen wir $\boldsymbol{R}$

# LR-Zerlegung

**Idee:** Statt schrittweise Zeilenoperationen (wie bei Gauß), um eine Dreiecksmatrix aus $\boldsymbol{A}$ zu erhalten, multiplizieren wir eine **Matrix** $\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{A}$, was die **Dreiecksform** ergibt.

**Matrix** $\boldsymbol{B}$ nennen wir $\boldsymbol{L^{-1}}$

Die **Dreiecksmatrix** nennen wir $\boldsymbol{R}$

**Somit gilt:**

$$\boldsymbol{L^{-1}} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$$

$$\leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{L}$ ist eine Dreiecksmatrix, die **rechts oben mit Nullen** gefüllt ist.

$\boldsymbol{R}$ ist eine Dreiecksmatrix, die **links unten mit Nullen** gefüllt ist.

# LR-Zerlegung

Für eine $3 \times 3$ Matrix sähe das dann z.B. so aus:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{A} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

Da wir $\boldsymbol{A}$ kennen, können wir die restlichen Einträge in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ füllen

**Vorgehen:**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

# LR-Zerlegung

Für eine $3 \times 3$ Matrix sähe das dann z.B. so aus:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{A} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

Da wir $\boldsymbol{A}$ kennen, können wir die restlichen Einträge in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ füllen

**Vorgehen:**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Zeile\ 1 \times Spalte\ 1:}$ $\boldsymbol{a} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$

# LR-Zerlegung

Für eine $3 \times 3$ Matrix sähe das dann z.B. so aus:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{A} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Da wir $\boldsymbol{A}$ kennen, können wir die restlichen Einträge in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ füllen

**Vorgehen:**

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{d}{a} & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

**Zeile 2 × Spalte 1:** $\boldsymbol{d = x \cdot a + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \longrightarrow x = \frac{d}{a}}$

# LR-Zerlegung

Für eine $3 \times 3$ Matrix sähe das dann z.B. so aus:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{A} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Da wir $\boldsymbol{A}$ kennen, können wir die restlichen Einträge in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ füllen

**Vorgehen:**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Zeile\ 1 \times Spalte\ 2:}$ $\quad \boldsymbol{b} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{y} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

# LR-Zerlegung

Für eine $3 \times 3$ Matrix sähe das dann z.B. so aus:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boldsymbol{A} & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \end{bmatrix}$$

Da wir $\boldsymbol{A}$ kennen, können wir die restlichen Einträge in $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ füllen

**Vorgehen:**

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \end{bmatrix}$$

$\textbf{Zeile } \dots \times \textbf{ Spalte } \dots \textbf{:}$ $\qquad \dots$

# LR-Zerlegung: Vorwärts- und Rückwärtssubst.

Mit der LR-Zerlegung können wir jedes beliebige LGS durch **Vorwärts-** und **Rückwärtssubstitution** (wie auch bei Gauß auch) lösen.

Ein LGS $Ax = b$ können wir nach der LR-Zerlegung umschreiben zu $LRx = b$.
Wobei wir $Rx = y$ substituieren.
Also können wir $x$ in insgesamt 3 Schritten bestimmen:

1. **Zerlegung der Matrix $A$:** $\boldsymbol{A = L \cdot R}$
2. **Vorwärtssubstitution:** $\boldsymbol{Ly = b}$
3. **Rückwärtssubstitution:** $\boldsymbol{Rx = y}$

# Matrix- und Vektornorm

Die **Matrix-Grenzen-Norm-2** (Spektralnorm) ist definiert als:

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

wobei die Vektornorm der **Euklidischen Länge** entspricht:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

**Fun Fact:** Die Spektralnorm einer Matrix $A$ entspricht der Wurzel des größten Eigenwertes von $A^T A$:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

# Matrix- und Vektornorm

**Rechenregeln** für die **Spektralnorm** bzw. **Euklidische Länge** mit Skalar $a$, Vektor $\vec{x}, \vec{y}$ und Matrix $A, B$:

$$\|a \cdot \vec{x}\|_2 = \|a\| \cdot \|\vec{x}\|_2$$

$$\|a \cdot A\|_2 = \|a\| \cdot \|A\|_2$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2$$

$$\|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2$$

$$\|A \cdot B\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$$

$$\|A \cdot \vec{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|\vec{x}\|_2$$

# Kondition einer Matrix

Wir können nun mithilfe der Spektralnorm die **Kondition** bzw. **Konditionszahl** einer **invertierbaren Matrix $\boldsymbol{A}$** bestimmen.

$$\mathrm{cond}(A) = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2$$

Mit dem Fun Fact von eben lässt sich die **Konditionszahl** außerdem auch über den **minimalen** und **maximalen Eigenwert** von $A$ berechnen:

$$\mathrm{cond}(A) = \left|\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}\right|$$

# Orthogonale Matrizen

Eine Matrix $\boldsymbol{Q}$ heißt **orthogonal**, wenn mit $I$ ≔ Einheitsmatrix gilt

$$QQ^T = Q^TQ = I$$

Außerdem gelten folgende Eigenschaften:

$$\det Q = \pm 1$$

$$\|Q\|_2 = 1$$