Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

9. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

1) Kondition von Anfangswertproblemen

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ der beiden folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) mithilfe der Separation der Variablen:

i) $\dot{y}(t) = 2y(t)$ ii) $\dot{y}(t) = -2y(t)$

b) Gegeben seien folgende Anfangswertbedingungen für die jeweiligen ODEs aus a). Berechnen Sie nun die analytische Lösung der daraus resultierenden Anfangswertprobleme (AWP):

i) $\dot{y}(t) = 2y(t),\ y(0) = 3,\ t \geq 0$ ii) $\dot{y}(t) = -2y(t),\ y(0) = y_0,\ t \geq 0.$

c) Diskutieren Sie jeweils die Kondition der beiden AWP aus b).

2) Einschrittverfahren

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = t \cdot y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die analytische Lösung $y(t)$ des AWPs mit Hilfe der Separation der Variablen!

b) Berechnen Sie im Intervall $[0; 4]$ numerische Lösungswerte y_k, welche die Lösung $y(t)$ in den Stellen t_k approximieren, d.h. $y_k \approx y(t_k)$. Rechnen Sie mit Schrittweite $t_{k+1} - t_k = \delta t = 1$ und verwenden Sie die folgenden Verfahren:

i) **Explizites Euler-Verfahren**:

Bei diesem Verfahren wird lediglich die Steigung im aktuellen Punkt t_k zur Berechnung der numerischen Lösung betrachtet:

$$\begin{aligned} t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\ y_{k+1} &= y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k); \end{aligned}$$

ii) **Verfahren von Heun**:

Analog zur Trapezregel bei der Quadratur wird bei diesem Verfahren im Vergleich zum Euler-Verfahren ein zweiter f-Wert zur numerischen Berechnung der Steigung hinzugezogen:

$$
\begin{aligned}
t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)) \right);
\end{aligned}
$$

iii) **Klassisches Runge-Kutta-Verfahren** (Zusatz):

Analog zur Fassregel werden hier Zwischenwerte T_i für die Näherung der Steigung berechnet und mit 1/6 gewichtet:

$$
\begin{aligned}
t_k &= t_0 + k \cdot \delta t; \\
T_1 &= f(t_k,\ y_k); \\
T_2 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_1); \\
T_3 &= f(t_k + \frac{\delta t}{2},\ y_k + \frac{\delta t}{2} T_2); \\
T_4 &= f(t_{k+1},\ y_k + \delta t T_3); \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot \left(T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4 \right);
\end{aligned}
$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse der einzelnen Verfahren mit der analytischen Lösung. Was stellen Sie fest und wie lässt sich dies deuten?

3) Zusatzaufgabe: Euler-Verfahren und Zinsberechnung

Die Verzinsung eines Guthabens, das am Anfang den Wert y_0 habe und pro Jahr $p\%$ Zinsen erhält, kann man als Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens auf ein Anfangswertproblem $\dot{y} = f(y)$ interpretieren.

a) Wiederholung: Wie sieht die Berechnungsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens mit Schrittweite δt für das AWP $\dot{y} = f(y)$ aus?

b) Die Diga-Bank schüttet Zinsen immer zum Jahresende aus. Geben Sie die rechte Seite $f(y)$ an, so dass das Eulerverfahren mit δt=1 (Jahr) gerade diese Verzinsung beschreibt.

c) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs!

d) Nun macht die Spaßkasse das Angebot, Zinsausschüttungen vierteljährlich statt nur am Ende des Jahres durchzuführen. Geben Sie die Euler-Formel für diese neue Schrittweite an und berechnen Sie daraus eine explizite Vorschrift, um direkt den Wert des Gesamtguthabens nach einem vollen Jahr (y_{end}) zu ermitteln.

e) Vergleichen Sie für den konkreten Fall eines Startguthabens von y_0 =100000 Euro und einer Verzinsung von $p = 2$ Prozent p.a. die verschiedenen Guthaben y_{end} nach einem Jahr bei der Diga-Bank, der Spaßkasse und einer virtuellen Bank mit Verzinsung nach der analytischen Lösung des AWPs! Was stellen Sie fest?