Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

10. Übungsblatt: Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE) II

1) Begriffe

Was versteht man unter den folgenden Begriffen:

a) lokaler Diskretisierungsfehler,

b) globaler Diskretisierungsfehler,

c) Konvergenz,

d) Konsistenz,

e) Stabilität,

f) Steifheit?

Machen Sie sich insbesondere den Unterschied zwischen lokalem und globalem Diskretisierungsfehler klar. Nutzen Sie hierfür eine Skizze!

2) Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Gegeben sei das folgende AWP:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -12(y(t))^2 \qquad \forall\, t \geq 1, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Dabei ist bekannt, dass $y(t) > 0$ für alle $t \geq 1$ gilt. Gesucht ist eine Näherungslösung $y_1 \approx y(t_1)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 1.5$.

a) Lösen Sie das AWP analytisch mit Hilfe der Separation der Variablen und berechnen Sie die exakte Lösung $y(1.5)$!

b) Berechnen Sie y_1 mit Hilfe des expliziten Eulers.

c) Wenden Sie nun das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

zur Berechnung von y_1 an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit b).

3) Quadratur und AWP-Lösung

In dieser Aufgabe wollen wir uns noch einmal die Analogie von Quadratur und numerischer Lösung von Anfangswertproblemen (AWP) verdeutlichen. Wie in der Vorlesung definieren wir ein AWP durch eine gewöhnliche Differentialgleichung (1) und einen Anfangswert (2)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \tag{1}$$

$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Ziel ist die Approximation y_i der zugehörigen Lösungsfunktion $y(t_i)$ zu bestimmten Zeitpunkten t_i. Wenn wir **Ein**schrittverfahren verwenden, interessiert uns immer ein Teilintervall $[t_k; t_{k+1}]$, um aus **einem** alten Wert y_k den neuen y_{k+1} zu berechnen. Dabei können wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzen, der uns folgenden Zusammenhang liefert:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) \quad = \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{y}(t)\ dt \overset{(1)}{=} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\ dt\ . \tag{3}$$

Um nun approximierte Werte y_k und y_{k+1} auf der linken Seite von (3) zu erhalten, integriert man die rechte Seite numerisch.

a) Benutzen Sie die im Folgenden definierte »dumme Rechtecksregel«, um aus (3) das explizite Euler-Verfahren herzuleiten!
Die »dumme Rechtecksregel« arbeitet wie die normale Rechtecksregel, nur wird die Funktion am linken Rand des Intervalls ausgewertet und nicht in der Mitte:

$$\int_a^b f(t)\ dt \quad \approx \quad (b-a) \cdot f(a)\ .$$

b) Benutzen Sie die Trapezregel sowie einen zusätzlichen Approximationsschritt, um aus (3) das Verfahren von Heun herzuleiten!

4) Instabilität der Mittelpunktsregel

Neben den bisher betrachteten Einschrittverfahren gibt es eine weitere Klasse der sogenannten Mehrschrittverfahren. Deren Grundidee ist, die in früheren als dem letzten Schritt bereits berechneten Approximationen nicht wegzuwerfen sondern mitzunutzen.
Ein einfacher Vertreter der Mehrschrittverfahren ist die Mittelpunktsregel (MPR). Die MPR ist ein Zweischrittverfahren der folgenden Form:

$$y_{k+1} \quad = \quad y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k), \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

Damit ein Mehrschrittverfahren konvergiert, ist zusätzlich zur Konsistenz nun auch eine Stabilitätsbedingung notwendig. Wir wollen in dieser Aufgabe an der MPR beobachten, was passiert, wenn diese Stabilität verletzt wird.

Dazu betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Zu Beginn des Verfahrens liegt nur der Anfangswert y_0 vor. Somit benötigen wir noch einen weiteren Wert y_1, bevor die Mittelpunktsregel gestartet werden kann. Typischerweise benutzt man zur Erzeugung dieses Wertes einfache Einschrittverfahren. Im Folgenden wollen wir daher y_1 mit Hilfe eines Schrittes des expliziten Euler-Verfahrens berechnen.

a) Berechnen Sie die analytische Lösung des AWPs (4)!

b) Wenden Sie die Mittelpunktsregel für $t \in [0; 6]$, $N = 3$ und $\delta t = 2$ auf das AWP (4) an! Was stellen Sie im Vergleich mit der analytischen Lösung fest?

c) Berechnen Sie nun die Ergebnisse mit halber Schrittweite ($N = 6$ und $\delta t = 1$) und vergleichen Sie sie wieder mit der analytischen Lösung!