

Numerisches Programmieren, Übungen

2. Übungsblatt: Kondition und Stabilität

1) Kondition

Anhand der »Kondition« beschreibt man die Abhängigkeit der Ausgabedaten von einer Störung der Eingabedaten eines Problems. Sie ist eher ein qualitativer Begriff - man redet von »guter« oder »schlechter« Kondition eines Problems.

Die »Konditionszahl« stellt ein qualitatives Maß dafür dar und entspricht dem asymptotisch ungünstigsten Faktor um den Störungen der Eingabe in der Ausgabe verstärkt werden.

Die (relative) Konditionszahl $\text{cond}(f, x)$ für reellwertige Funktionen f ist definiert als:

$$\text{cond}(f, x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|.$$

Berechnen Sie die relative Konditionszahl der folgenden Funktionen in Abhängigkeit von x :

$$\text{i) } f_1(x) = a \cdot x, \quad \text{ii) } f_2(x) = \frac{a-x}{b}, \quad \text{iii) } f_3(x) = 3e^x - 3.$$

Interpretieren Sie jeweils das Ergebnis!

Wie lautet die Konditionszahl von f_3 an der Stelle $x = 0$ (Grenzwertbetrachtung!)?

2) Beispiel für schlechte Kondition: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1 : y = x$$

$$g_2 : y = mx + 1,$$

deren Schnittpunkt berechnet werden soll. Der tatsächliche Eingabe-Parameter $m = 1.005$ wird dabei zu $\tilde{m} = 1.01$ aufgerundet. Wir wollen nun den dadurch entstandenen Fehler im x-Wert des Schnittpunktes untersuchen.

- Berechnen Sie den x-Wert des Schnittpunktes für ein allgemeines m , und stellen Sie diese Beziehung als Funktion $x = f(m)$ dar.
- Berechnen Sie die Konditionszahl des Problems aus a). Wann ist das Problem gut konditioniert? Wann nicht?
- Werten Sie die Konditionszahl aus b) an der gegebenen Stelle m aus.
- Wie sieht die tatsächliche Verstärkung des relativen Eingabefehlers aus?

3) Stabilität

Betrachten wir kurz nochmals die Menge G vom Übungsblatt 1 (1 Bit Vorzeichen, 5 Bits Exponent, 2+1 Bits Mantisse). Es gilt $1, 3, 8 \in G$, aber $1 + 8 = 9 \notin G$ und $3 \cdot 3 = 9 \notin G$. Es kommt oft vor, dass die Ausgabe einer (auch sehr einfachen) Operation op nicht in der Menge der Maschinenzahlen ist und dadurch eine Rundung benötigt:

$$\text{rd}_G(1 + 8) = \text{rd}_G(9) = \text{rd}_G(2^3 \cdot 1,00|100_2) = 2^3 \cdot 1,00_2 = 8.$$

Dadurch muss potenziell nach jeder Zwischenausgabe gerundet werden.

Ein **Verfahren** heißt **stabil**, wenn Rundungen von Zwischenergebnissen nicht zu einer großen Abweichung der Endergebnisse führen; ansonsten heißt es **instabil**. Um das Stabilitätsverhalten eines Verfahrens zu analysieren, verwenden wir **Epsilontik**.

Im Übungsblatt 1 haben wir gesehen, dass bei rd_G immer ein relativer Fehler $\leq \varepsilon_{\text{Ma}}$ entsteht:

$$\left| \frac{\text{rd}_G(x) - x}{x} \right| \leq \varepsilon_{\text{Ma}}. \quad (1)$$

Das heißt, man kann immer ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$, finden, damit

$$\text{rd}_G(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad (2)$$

$$-\varepsilon_{\text{Ma}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\text{Ma}} \quad (3)$$

gelten. Diese Eigenschaft verwenden wir bei der Epsilontik. Wir untersuchen den relativen Endergebnisfehler $\left| \frac{\text{rd}(f(x)) - f(x)}{f(x)} \right|$ anhand folgender Regeln:

- Bei der Ausführung jeder Maschinenoperation op_M wird einen neuen relativen Fehler ε_i erzeugt:

$$(a \text{ op}_M b) = \text{rd}_M(a \text{ op } b) = (a \text{ op } b) \cdot (1 + \varepsilon_i) \text{ mit } |\varepsilon_i| \leq \varepsilon_{\text{Ma}}.$$

- Terme höheren Ordnung werden vernachlässigt: $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \doteq 0 \quad \forall i, j$.

Untersuchen Sie die Stabilität von den Funktionen

$$\text{i) } f_1(x) = a \cdot x, \quad \text{ii) } f_2(x) = \frac{a-x}{b}, \quad \text{iii) } f_3(x) = 3e^x - 3.$$

mit Hilfe der Epsilontik. Hier nehmen wir an, dass die Eingabe x schon eine Gleitkommazahl ist und keine Rundung benötigt ($\text{rd}(x) = x$). Die Auswertung von e^x erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_{\text{Ma}}$.

4) Zusatzaufgabe: Klausuraufgabe SoSe 2014

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(x + 1)$, definiert für $x > -1$. Untersuchen Sie die Konditionszahl und die Stabilität von f für:

a) $x \rightarrow -1$

b) $x \rightarrow 0$

Die Auswertung von $\ln(x)$ erzeuge auch nur einen relativen Fehler $\leq \varepsilon_{\text{Ma}}$. Die Eingabe x ist schon gerundet ($\text{rd}(x) = x$).