NumProg WS 20/21 : Tutorübung 04

1. Stückweise Hermite-Interpolation
2. Interpolation mit kubischen Splines

Hermite-Interpolation

Bei der Hermite-Interpolation benutzen wir zusätzlich zu x_i und $f(x_i)$ auch noch die Punkte in der **Ableitung** $\boldsymbol{f'(x_i)}$ als **weitere Stützstellen**.

Zwischen jeweils 2 Stützstellen wird ein kubisches Polynom erstellt.

(Polynom Grad 3 bei 4 Unbekannten, 2 y-Werte, 2 y'-Werte)

Diese Polynome werden dann an **Verknüpfungsstellen** zu einer Interpolationsfunktion **„verklebt“**.

Zusatzeffekt: an der Verknüpfungsstelle zweier Polynome ist 1. Ableitung jeweils identisch

→ Interpolationsfunktion ist **C1-stetig**

Hermite-Interpolation

Allgemeine Funktion für kubische Polynome: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Deren Ableitung: $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

4 bekannte Punkte einsetzen: y_0, y_1 in $p(t)$

y_0', y_1' in $p'(t)$

- LGS aufstellen, um a_0, a_1, a_2, a_3 zu lösen.
- LGS lösen und a_i in $p(t)$ einsetzen
- $p(t)$ so umstellen, dass

$$\boldsymbol{p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) \cdot y_1' \cdot H_3(t)}$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Allgemeine Funktion für kubische Polynome: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Deren Ableitung: $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

$$p(x_0) = y_0 \qquad p(x_1) = y_1$$

$$p'(x_0) = y_0' \qquad p'(x_1) = y_1'$$

mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$

Punkte in $p(t)$ und $p'(t)$ einsetzen:

$$y_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y_0' = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 = a_1$$

$$y_1' = a_1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Allgemeine Funktion für kubische Polynome: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Deren Ableitung: $p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$

$$p(x_0) = y_0 \qquad p(x_1) = y_1$$

$$p'(x_0) = y_0' \qquad p'(x_1) = y_1'$$

mit $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$

Punkte in $p(t)$ und $p'(t)$ einsetzen:

$$y_0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = a_0$$

$$y_1 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$y_0' = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 = a_1$$

$$y_1' = a_1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

Matrix aufstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_0' \\ y_1' \end{bmatrix}$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Matrix auflösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_1 - y_0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_1' - y_1 + y_0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + {y_0}' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3y_1 - 3y_0 - 2y_0' - {y_1}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + y_0' \end{array}\right)$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Matrix auflösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_1 - y_0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_1' - y_1 + y_0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + y_0' \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3y_1 - 3y_0 - 2y_0' - y_1' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + y_0' \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Matrix auflösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_1 - y_0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & y_1' \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 2 & y_1' - y_1 + y_0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_1 - y_0 - y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + {y_0}' \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3y_1 - 3y_0 - 2y_0' - {y_1}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1' - 2y_1 + 2y_0 + y_0' \end{array}\right) & \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

In Funktion $p(t)$ einsetzen:

$$p(t) = y_0 + y_0' \cdot t + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1') \cdot t^2 + (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1') \cdot t^3$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Funktion $p(t)$ nach y_0, y_1, y_0', y_1' umstellen:

$$\begin{aligned}
p(t) &= y_0 + y_0' \cdot t + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1') \cdot t^2 + (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1') \cdot t^3 \\
&= y_0 + y_0' t - 3y_0 t^2 + 3y_1 t^2 - 2y_0' t^2 - y_1' t^2 + 2y_0 t^3 - 2y_1 t^3 + y_0' t^3 + y_1' t^3 \\
&= y_0 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + y_1 \cdot (3t^2 - 2t^3) + y_0' \cdot (t - 2t^2 + t^3) + y_1' \cdot (-t^2 + t^3)
\end{aligned}$$

Hermite-Interpolation : Herleitung

Funktion $p(t)$ nach y_0, y_1, y_0', y_1' umstellen:

$$\begin{aligned} p(t) &= y_0 + y_0' \cdot t + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1') \cdot t^2 + (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1') \cdot t^3 \\ &= y_0 + y_0' t - 3y_0 t^2 + 3y_1 t^2 - 2y_0' t^2 - y_1' t^2 + 2y_0 t^3 - 2y_1 t^3 + y_0' t^3 + y_1' t^3 \\ &= y_0 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + y_1 \cdot (3t^2 - 2t^3) + y_0' \cdot (t - 2t^2 + t^3) + y_1' \cdot (-t^2 + t^3) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{H_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3}$

$\boldsymbol{H_1(t) = 3t^2 - 2t^3}$

$\boldsymbol{H_2(t) = t - 2t^2 + t^3}$

$\boldsymbol{H_3(t) = -t^2 + t^3}$

⟵ kubische Basispolynome des Hermite-Ansatzes

$$\boldsymbol{p(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t)}$$

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0; 1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0;1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

$p(x_i) = \_\_$ $\qquad p(x_{i+1}) = \_\_$

$p'(x_i) = \_\_$ $\qquad p'(x_{i+1}) = \_\_$

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0; 1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

$$p(x_i) = y_i \qquad p(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$p'(x_i) = y_i' \qquad p'(x_{i+1}) = y_{i+1}'$$

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0; 1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

$$p(x_i) = y_i \qquad p(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$p'(x_i) = y'_i \qquad p'(x_{i+1}) = y'_{i+1}$$

Jetzt müssen wir einen Input $\boldsymbol{x}$ im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$ auf das Intervall $[\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ mappen:

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0; 1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

$$p(x_i) = y_i \qquad p(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$p'(x_i) = y_i' \qquad p'(x_{i+1}) = y_{i+1}'$$

Jetzt müssen wir einen Input $\boldsymbol{x}$ im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$ auf das Intervall $[\mathbf{0}; \mathbf{1}]$ mappen:

$$t_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i} \in [0; 1] \quad \text{mit} \quad h_i \coloneqq \text{Intervallgröße}$$

stückweise Hermite-Interpolation

Bisher: nur Intervall $[0; 1]$ bzw. $[x_0; x_1]$ betrachtet

Jetzt: beliebiges Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ betrachten

Welche 4 Bedingungen gelten für das lokale kubische Polynom im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$?

$$p(x_i) = y_i \qquad p(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

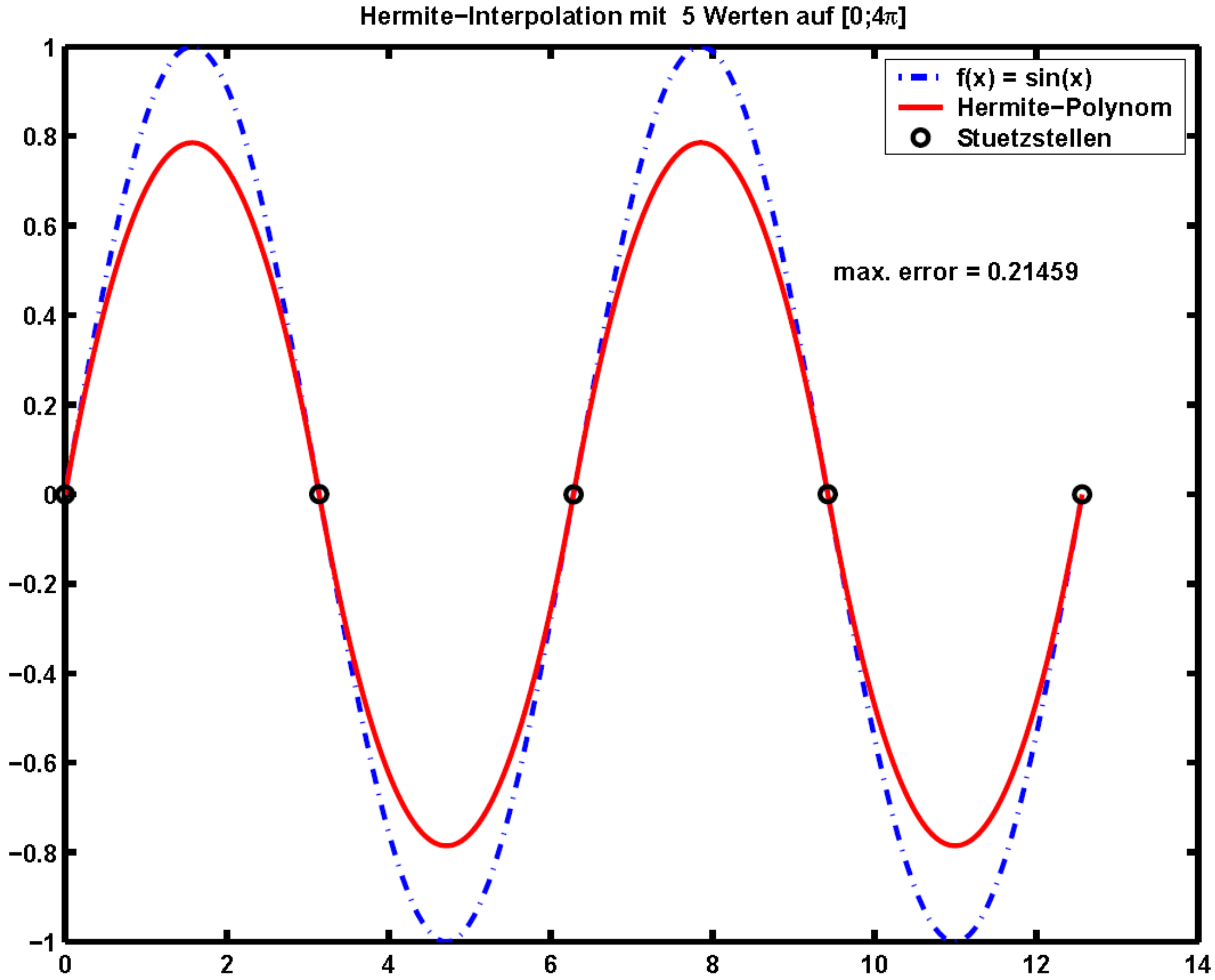
$$p'(x_i) = y_i' \qquad p'(x_{i+1}) = y_{i+1}'$$

Jetzt müssen wir einen Input $\boldsymbol{x}$ im Intervall $[\boldsymbol{x_i}; \boldsymbol{x_{i+1}}]$ auf das Intervall $[\boldsymbol{0}; \boldsymbol{1}]$ mappen:

$$t_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i} \in [0; 1] \quad \text{mit} \quad h_i \coloneqq \text{Intervallgröße}$$

$$\Rightarrow p_i\big(t_i(x)\big) = y_i \cdot H_0\big(t_i(x)\big) + y_{i+1} \cdot H_1\big(t_i(x)\big) + \boldsymbol{h_i} \cdot y_i' \cdot H_2\big(t_i(x)\big) + \boldsymbol{h_i} \cdot y_{i+1}' \cdot H_3\big(t_i(x)\big)$$

Hermite-Interpolation : graphisch



kubische Splines

Stückweise Interpolation, bei der wir den zu interpolierenden Bereich in sogenannte „Splines“ unterteilen.

Ähnlich wie Hermite; wir wollen wieder gleichen Polynomgrad erreichen.

Aber anders als bei der Hermite-Interpolation haben wir **keine Ableitungen** $f'(x_i)$ gegeben und die interpolierende Funktion $s(x)$ soll **C2-stetig** sein.

→ Verknüpfungsstellen zwischen zwei Polynomen sind in 1. und 2. Ableitung identisch

→ um Hermite-Polynome auch hier benutzen zu können, müssen wir y_i' bestimmen

kubische Splines

Interpolationsbedingungen: $s(x_i) = \_\_$

Bedingungen durch C2-Stetigkeit: $s'(x_i) = \_\_$

$s''(x_i) = \_\_$

Hermite-Basispolynome

	$\boldsymbol{H(t)}$	$\boldsymbol{H'(t)}$	$\boldsymbol{H''(t)}$	$\boldsymbol{H''(0)}$	$\boldsymbol{H''(1)}$
$\boldsymbol{H_0(t)}$	$1 - 3t^2 + 2t^3$				
$\boldsymbol{H_1(t)}$	$3t^2 - 2t^3$				
$\boldsymbol{H_2(t)}$	$t - 2t^2 + t^3$				
$\boldsymbol{H_3(t)}$	$-t^2 + t^3$				

kubische Splines

Interpolationsbedingungen:	$s(x_i) = y_i \quad i \in [0; n]$	$n + 1$ Bedingungen
Bedingungen durch C2-Stetigkeit:	$s'(x_i) = y_i' \quad i \in [1; n-1]$	$n - 1$ Bedingungen
	$s''(x_i) = y_i'' \quad i \in [1; n-1]$	$n - 1$ Bedingungen

Hermite-Basispolynome

	$\boldsymbol{H(t)}$	$\boldsymbol{H'(t)}$	$\boldsymbol{H''(t)}$	$\boldsymbol{H''(0)}$	$\boldsymbol{H''(1)}$
$\boldsymbol{H_0(t)}$	$1 - 3t^2 + 2t^3$				
$\boldsymbol{H_1(t)}$	$3t^2 - 2t^3$				
$\boldsymbol{H_2(t)}$	$t - 2t^2 + t^3$				
$\boldsymbol{H_3(t)}$	$-t^2 + t^3$				

kubische Splines

Interpolationsbedingungen: $s(x_i) = y_i \quad i \in [0; n]$ $\quad n + 1$ Bedingungen

Bedingungen durch C2-Stetigkeit: $s'(x_i) = y_i' \quad i \in [1; n-1]$ $\quad n - 1$ Bedingungen

$s''(x_i) = y_i'' \quad i \in [1; n-1]$ $\quad n - 1$ Bedingungen

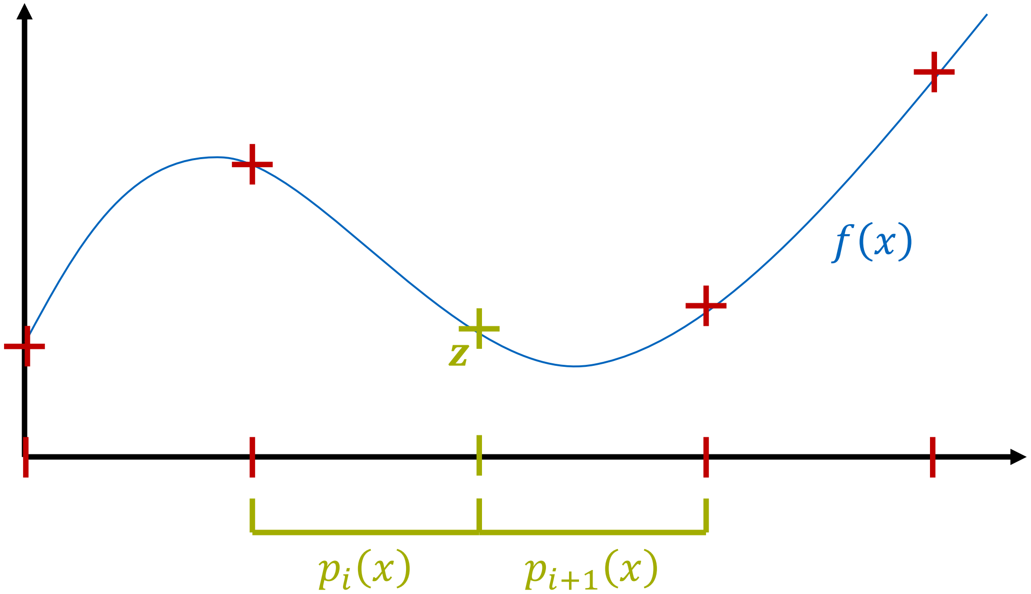
Hermite-Basispolynome

	$\boldsymbol{H(t)}$	$\boldsymbol{H'(t)}$	$\boldsymbol{H''(t)}$	$\boldsymbol{H''(0)}$	$\boldsymbol{H''(1)}$
$\boldsymbol{H_0(t)}$	$1 - 3t^2 + 2t^3$	$-6t + 6t^2$	$-6 + 12t$	-6	6
$\boldsymbol{H_1(t)}$	$3t^2 - 2t^3$	$6t - 6t^2$	$6 - 12t$	6	-6
$\boldsymbol{H_2(t)}$	$t - 2t^2 + t^3$	$1 - 4t + 3t^2$	$-4 + 6t$	-4	2
$\boldsymbol{H_3(t)}$	$-t^2 + t^3$	$-2t + 3t^2$	$-2 + 6t$	-2	4

kubische Splines : Herleitung

Wie bestimmen wir jetzt y_i' für $i \in [1; n-1]$, um erneut $p_i\big(t_i(x)\big)$ bilden zu können?

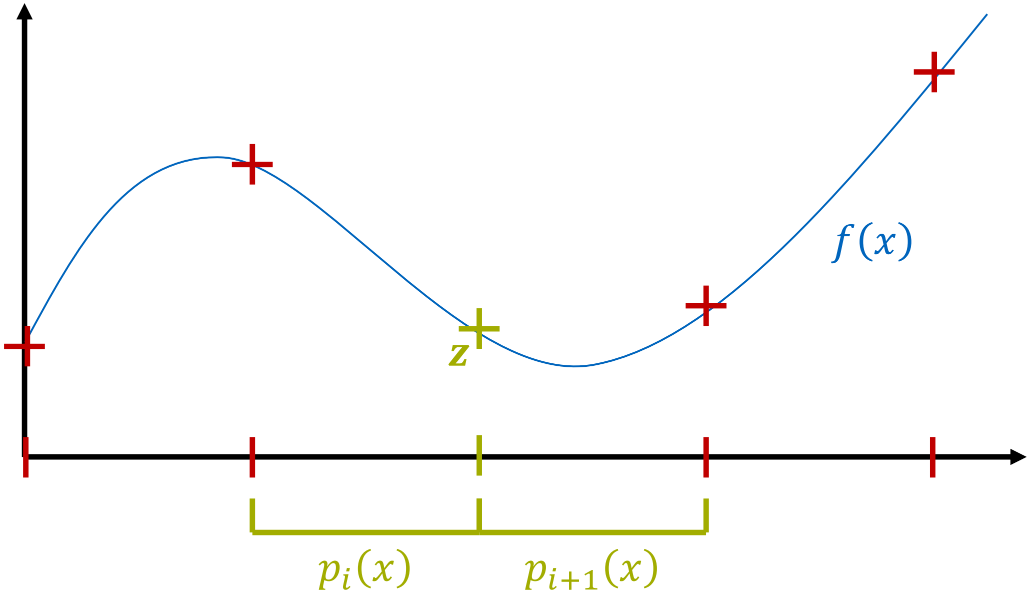
Idee:



kubische Splines : Herleitung

Wie bestimmen wir jetzt y'_i für $i \in [1; n-1]$, um erneut $p_i(t_i(x))$ bilden zu können?

Idee:



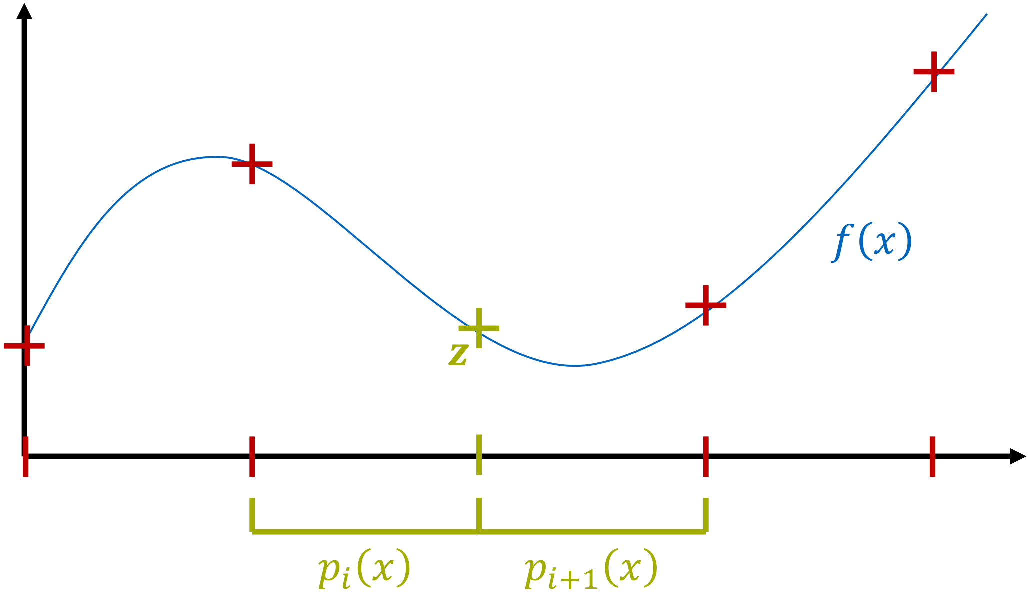
Da C2-Stetigkeit vorgegeben ist, wissen wir, dass

$$p''_i(z) = p''_{i+1}(z)$$

kubische Splines : Herleitung

Wie bestimmen wir jetzt y_i' für $i \in [1; n-1]$, um erneut $p_i\left(t_i(x)\right)$ bilden zu können?

Idee:



Da C2-Stetigkeit vorgegeben ist, wissen wir, dass

$$p_i''(z) = p_{i+1}''(z)$$

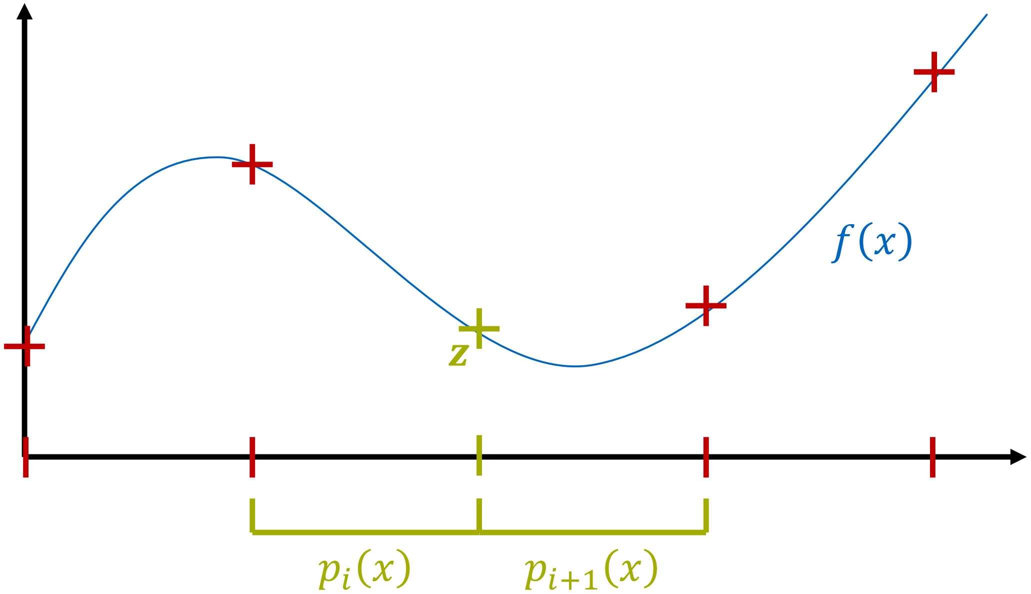
Da z der letzte Punkt in $p_i(t)$ und der erste Punkt in $p_{i+1}(t)$ ist, wissen wir, worauf z jeweils mit $t_i(x)$ gemappt wird:

$$t_i(z) = 1$$
$$t_{i+1}(z) = 0$$

kubische Splines : Herleitung

Wie bestimmen wir jetzt $\boldsymbol{y_i'}$ für $\boldsymbol{i \in [1; n-1]}$, um erneut $\boldsymbol{p_i\big(t_i(x)\big)}$ bilden zu können?

Idee:



Wir können also jetzt $t_i = 1$ in $p_i''\big(t_i(x)\big)$ und $t_{i+1} = 0$ in $p_{i+1}''\big(t_{i+1}(x)\big)$ einsetzen und beide Polynome gleichsetzen.

$$\boldsymbol{p_i''(1) = p_{i+1}''(0)}$$

Zuerst müssen wir aber noch $p_i''(t)$ bestimmen.

kubische Splines : Herleitung

$$p_i\big(t_i(x)\big) = y_i \cdot H_0\big(t_i(x)\big) + y_{i+1} \cdot H_1\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_i' \cdot H_2\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_{i+1}' \cdot H_3\big(t_i(x)\big)$$

$$p_i'\big(t_i(x)\big) = \frac{1}{h} \cdot y_i \cdot H_0'\big(t_i(x)\big) + \frac{1}{h} \cdot y_{i+1} \cdot H_1'\big(t_i(x)\big) + \frac{1}{h} \cdot h \cdot y_i' \cdot H_2'\big(t_i(x)\big) + \frac{1}{h} \cdot h \cdot y_{i+1}' \cdot H_3'\big(t_i(x)\big)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left[y_i \cdot H_0'\big(t_i(x)\big) + y_{i+1} \cdot H_1'\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_i' \cdot H_2'\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_{i+1}' \cdot H_3{}'\big(t_i(x)\big)\right]$$

$$p_i''\big(t_i(x)\big) = \frac{1}{h^2} \cdot \left[y_i \cdot H_0''\big(t_i(x)\big) + y_{i+1} \cdot H_1''\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_i' \cdot H_2''\big(t_i(x)\big) + h \cdot y_{i+1}' \cdot H_3''\big(t_i(x)\big)\right]$$

Merke: Innere Ableitung von $t_i(x)$ war ja $\frac{1}{h_i}$. Nach Aufgabenstellung ist $h_i = h = 1$

Jetzt können wir $H''(1)$ bzw. $H''(0)$ aus Teilaufgabe b) in Gleichung $p_i''(1) = p_{i+1}''(0)$ einsetzen.

kubische Splines : Herleitung

$$\frac{1}{h^2} \cdot [y_{\boldsymbol{i}} \cdot H_0''(1) + y_{\boldsymbol{i+1}} \cdot H_1''(1) + h \cdot y_{\boldsymbol{i}}' \cdot H_2''(1) + h \cdot y_{\boldsymbol{i+1}}' \cdot H_3''(1)]$$

$$= \quad \frac{1}{h^2} \cdot [y_{\boldsymbol{i+1}} \cdot H_0''(0) + y_{\boldsymbol{i+2}} \cdot H_1''(0) + h \cdot y_{\boldsymbol{i+1}}' \cdot H_2''(0) + h \cdot y_{\boldsymbol{i+2}}' \cdot H_3''(0)]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{h}{h^2} \cdot \left[y_i' \cdot (2) + y_{i+1}' \cdot \big(4 - (-4)\big) - y_{i+2}' \cdot (-2)\right]$$

$$= \quad \frac{1}{h^2} \cdot [-y_i \cdot (6) + y_{i+1} \cdot (-(-6) - 6) + y_{i+2} \cdot (6)]$$

$$\Longrightarrow \quad [y_i' + 4y_{i+1}' + y_{i+2}'] = \frac{3}{h} \cdot [y_{i+2} - y_i]$$

Daraus können wir jetzt ein LGS erstellen, um alle gesuchten y_i' mit $i \in [1; n-1]$ zu finden.

kubische Splines : Herleitung

LGS, um alle gesuchten y_i' mit $i \in [1; n-1]$ zu finden.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{bmatrix} = \frac{3}{h} \begin{bmatrix} y_2 - y_0 - \boldsymbol{\frac{h}{3} y_0'} \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} - y_{n-3} \\ y_n - y_{n-2} - \boldsymbol{\frac{h}{3} y_n'} \end{bmatrix}$$

Merke: Die Randfälle $\boldsymbol{y_0'}$ **und** $\boldsymbol{y_n'}$ können wir nicht berechnen, sie **müssen vorgegeben sein**. Da sie deshalb nicht in die Berechnung auf der linken Seite miteinfließen, müssen wir sie auf der rechten Seite wieder abziehen.

kubische Splines : Bestimmung von $s(x)$

i	0	1	...	$n-1$	n
x_i	x_0	x_1	...	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_{n-1}	y_n
y'_i	gegeben	???	...	???	gegeben

$$s(x) = \begin{cases} p_0\big(t_0(x)\big) & \text{für } x \in [x_0, x_1) & \text{mit } t_0(x) = \dfrac{x - x_0}{h} \\ p_1\big(t_1(x)\big) & \text{für } x \in [x_1, x_2) & \text{mit } t_1(x) = \dfrac{x - x_1}{h} \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ p_{n-1}\big(t_{n-1}(x)\big) & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n] & \text{mit } t_{n-1}(x) = \dfrac{x - x_{n-1}}{h} \end{cases}$$

kubische Splines : Bestimmung von $s(x)$

$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	…	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	…	y_{n-1}	y_n
$\boldsymbol{y'_i}$	y'_0	y'_1	…	y'_{n-1}	y'_n

$$s(x) = \begin{cases} \boldsymbol{p_0(x) = y_0 \cdot H_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \cdot H_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_0 \cdot H_2\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_1 \cdot H_3\left(\frac{x-x_0}{h}\right)} \\ \qquad x \in [x_0, x_1) \end{cases}$$

kubische Splines : Bestimmung von $s(x)$

$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	…	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	…	y_{n-1}	y_n
$\boldsymbol{y'_i}$	y'_0	y'_1	…	y'_{n-1}	y'_n

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = y_0 \cdot H_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \cdot H_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_0 \cdot H_2\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_1 \cdot H_3\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ \boldsymbol{p_1(x) = y_1 \cdot H_0\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + y_2 \cdot H_1\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y'_1 \cdot H_2\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y'_2 \cdot H_3\left(\frac{x-x_1}{h}\right)} \\ \qquad x \in [x_1, x_2) \end{cases}$$

kubische Splines : Bestimmung von $s(x)$

$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	…	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	…	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	…	y_{n-1}	y_n
$\boldsymbol{y'_i}$	y'_0	y'_1	…	y'_{n-1}	y'_n

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = y_0 \cdot H_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \cdot H_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_0 \cdot H_2\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y'_1 \cdot H_3\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ p_1(x) = y_1 \cdot H_0\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + y_2 \cdot H_1\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y'_1 \cdot H_2\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y'_2 \cdot H_3\left(\frac{x-x_1}{h}\right) \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

kubische Splines : Bestimmung von $s(x)$

$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	...	$\boldsymbol{n-1}$	$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	...	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	...	y_{n-1}	y_n
$\boldsymbol{y_i'}$	y_0'	y_1'	...	y_{n-1}'	y_n'

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x) = y_0 \cdot H_0\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + y_1 \cdot H_1\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y_0' \cdot H_2\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + h \cdot y_1' \cdot H_3\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \\ p_1(x) = y_1 \cdot H_0\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + y_2 \cdot H_1\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y_1' \cdot H_2\left(\frac{x-x_1}{h}\right) + h \cdot y_2' \cdot H_3\left(\frac{x-x_1}{h}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{p_{n-1}(x) = y_{n-1} \cdot H_0\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right) + y_n \cdot H_1\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right) + h \cdot y_{n-1}' \cdot H_2\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)} \\ \qquad \boldsymbol{+h \cdot y_n' \cdot H_3\left(\frac{x-x_{n-1}}{h}\right)} \qquad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

kubische Splines : graphisch