Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

12. Übungsblatt: Iterative Verfahren II

1) Kondition eines Eigenwertproblems

a) Finden Sie alle Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ und Eigenvektoren $v_i(\varepsilon)$ der Matrix.

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\cos(2/\varepsilon) & -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) \\ -\varepsilon\sin(2/\varepsilon) & 1 - \varepsilon\cos(2/\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

b) Wie verhalten sich $A(\varepsilon)$, $\lambda_i(\varepsilon)$, und $v_i(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$? Ist das Eigenwert- bzw. Eigenvektorproblem für kleine ε gut konditioniert?

2) Satz von Gerschgorin

a) Beweisen Sie den **Satz von Gerschgorin**:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Dann liegt jeder Eigenwert λ von A in mindestens einer der Kreisscheiben K_j, die durch

$$K_j := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}| \right\}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

definiert sind.

Hinweis: Betrachten Sie die $j$te Komponente der Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$, wobei x_j der maximale Eintrag von x ist.

b) Zeichnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gerschgorin-Kreise und finden Sie eine obere Schranke für die Kondition $\kappa_2(A)$. Hinweis: Benutzen Sie die Euklidische Norm.

3) Rayleigh Quotient

a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenwerte λ mit Hilfe des Rayleigh Quotienten berechnet werden können:

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

b) Sei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ der kleinste bzw. größte Eigenwert einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge gelten:

$$\lambda_{\min} = \min_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad , \qquad \lambda_{\max} = \max_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Hinweis: Wegen

$$\lambda_{\min} = \min_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_{x\neq 0} \left(\frac{1}{||x||_2} x\right)^T A \left(\frac{1}{||x||_2} x\right) = \min_{||y||_2=1} y^T A y$$

ist es ausreichend, folgende Zusammenhänge zu zeigen:

$$\lambda_{\min} = \min_{||x||_2=1} x^T A x \quad \text{and} \quad \lambda_{\max} = \max_{||x||_2=1} x^T A x.$$

4) Iterationsverfahren

a) Berechnen Sie analytisch alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Führen Sie zwei Iteration der direkten Vektoriteration (power iteration) für A

   a) ohne Shift,

   b) mit Shift $\mu = 1.5$ und

   c) mit Shift $\mu = 3.5$

   durch und berechnen Sie die zugehörige Eigenwertapproximation. Benutzen Sie dazu $x_0 = (1, 0)^T$ als Startvektor. Gegen welchen Eigenwert konvergiert die Iteration? Wie ist die Konvergenzrate für den jeweiligen Fall?

c) Für welchen Shift μ konvergiert die direkte Vektoriteration (power iteration) gegen den ersten bzw. zweiten Eigenwert von A? Was passiert, falls $\mu = 3$ gewählt wird?