Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

3. Übungsblatt: Interpolation

1) Interpolation mit unterschiedlichen Basisfunktionen

Die Ausgabewerte einer unbekannten Funktion f sind an den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ gegeben: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$. Im folgenden untersuchen wir Schätzungen für $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Geben Sie für die folgenden Basisfunktionen jeweils

- das lineare Gleichungssystem für die Interpolation,
- die Interpolationsfunktion G,
- die Schätzung von $f\left(\frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right)$,

an.

a) Die Polynom-Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = x^2,$$

b) Die trigonometrischen Basisfunktionen:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), \qquad g_2(x) = \cos(\pi x),$$

c) Die Tchebycheff-Polynombasis:

$$g_0(x) = 1, \qquad g_1(x) = x, \qquad g_2(x) = 2x^2 - 1,$$

d) die Lagrange-Polynombasis l_0, l_1, l_2 für x_0, x_1, x_2 (berechnen Sie diese zuerst):

$$l_j(x) = \prod_{i=0;\ i\neq j}^{n-1} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Vergleichen Sie die Antworten zu a), c) und d).

2) Polynominterpolation nach Newton

Die Newtonschen dividierten Differenzen bieten eine effiziente Möglichkeit, ein Interpolationspolynom $p(x)$ analytisch zu beschreiben (d.h. seine Koeffizienten zu berechnen). Mit zu interpolierenden Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$ gelten die folgenden Formeln aus der Vorlesung:

$$c_{i,0} = f(x_i) = y_i \tag{1}$$

$$c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}. \tag{2}$$

Man ordnet die dividierten Differenzen in ein Dreiecksschema:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & c_{0,0} = y_0 & \rightarrow & c_{0,1} & \rightarrow & c_{0,2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & c_{1,0} = y_1 & \rightarrow & c_{1,1} & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & c_{2,0} = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Damit kann man in der ersten Zeile direkt die Koeffizienten $c_{0,k}$ des Interpolationspolynoms $p(x)$ in der folgenden Gestalt ablesen:

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \; . \tag{3}$$

In dieser Aufgabe soll zu den Punkten aus Aufgabe 1)

$$P_0 = (0, 3), \qquad P_1 = (1, 0) \quad \text{und } P_2 = (2, 1)$$

ein Interpolationspolynom bestimmt werden.

a) Berechnen Sie die Newtonschen dividierten Differenzen für das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den Gleichungen (1) - (2). Stellen Sie dazu auch das Dreiecksschema auf und berechnen Sie $p(x)$ mit Hilfe der Formel (3)!

b) Nun soll ein zusätzlicher Punkt $P_3 = (x_3, f(x_3)) = (1.5, 0)$ zur Interpolation hinzugenommen werden. Berechnen Sie die noch fehlenden dividierten Differenzen, erweitern Sie das Dreiecksschema aus Teilfaufgabe b) und geben Sie die Koeffizienten des neuen Gesamtpolynoms $q(x)$ nach Formel (3) an!

3) Polynominterpolation mit Aitken-Neville

Das Aitken-Neville Verfahren gibt uns eine Möglichkeit das Interpolationspolynom zu den Punkten $P_i = (x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ **direkt an einer Stelle x auszuwerten**, ohne die tatsächliche Koeffizienten des Polynomes zu berechnen:

```
for i=0:n; p[i,0]:=f_x[i]; end
for k=1:n
   for i=0:n-k
      p[i,k] := p[i,k-1] + (x-x[i])/(x[i+k]-x[i])*(p[i+1,k-1] - p[i,k-1]);
   end
end
```

Die sukzessive Berechnung der $p[i,k]$ ist hier im Vergleich zur Vorlesungsfolie äquivalent umgeformt und kann wieder mit einem Dreiecksschema veranschaulicht werden:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & p[0,0] = y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & p[1,0] = y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & p[2,0] = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Der Wert des Polynoms $p(x)$ an der Stelle x steht nach Abschluss des Algorithmus' in $p[0, n]$.

Berechnen Sie den Wert des quadratischen Interpolationspolynoms $p(x)$ an der Stelle $x = 0.5$ für die drei Punkte P_0, P_1, P_2 aus Aufgabe 2) mit dem Aitken-Neville-Algorithmus! Stellen Sie dabei auch das Dreiecksschema auf.

Wann ist die Berechnung mit Aitken-Neville vorteilhaft und wann nicht?

4) Runge-Effekt

Bisher haben wir uns mit Polynominterpolation mit gleichverteilten Stützpunkten beschäftigt. Hierfür wurde z.B. das Newtonverfahren verwendet, um ein eindeutiges Polynom $n-1$. Grades, oder geringer, zu konstruieren, welches durch alle n gegebenen Stützpunkte verläuft.

a) Überlegen Sie sich wie das Interpolationspolynom von $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (siehe auch Abb. 1) mit wachsender Zahl von Stüzstellen aussieht.

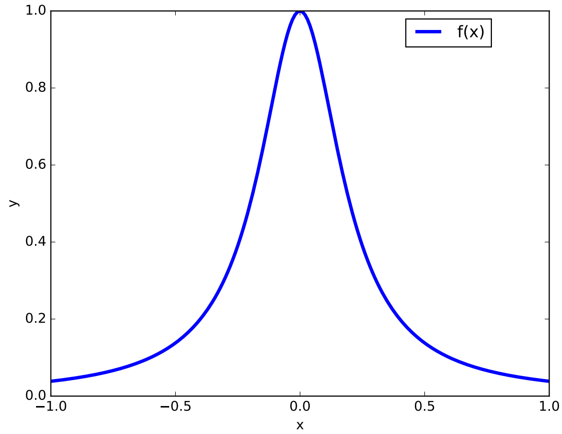

Abbildung 1: Runge Funktion f(x)

b) Was könnte man machen, um das Interpolationsergebnis zu verbessern?

c) Zeichnen Sie das Ergebnis der verbesserten Methoden in die Abbildung 1 ein!

5) Zusatzaufgabe: Fehlerabschätzung

Im Abbildung 2 links ist die tatsächliche Funktion f gezeichnet.

a) Zeichnen Sie das berechnete Interpolationspolynom von 1) dazu. Wie groß ist der Fehler an der Stelle $x = 0.5$?

b) Die Formel zur Abschätzung des Interpolationsfehlers $|f(x) - p(x)|$ für eine Funktion $f \in C^{n+1}$ lautet

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{D^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

mit $\xi \in [\min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, \ldots, x_n\}]$. Man wählt ξ in der Regel derart, dass die Fehlerabschätzung maximal wird.

Werten Sie den Fehler an der Stelle $x = 0.5$ aus! Verwenden Sie dazu

$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^3 f(\xi)| = 35.43,$$
$$\max_{\xi \in [0,2]} |D^4 f(\xi)| = 107.53.$$

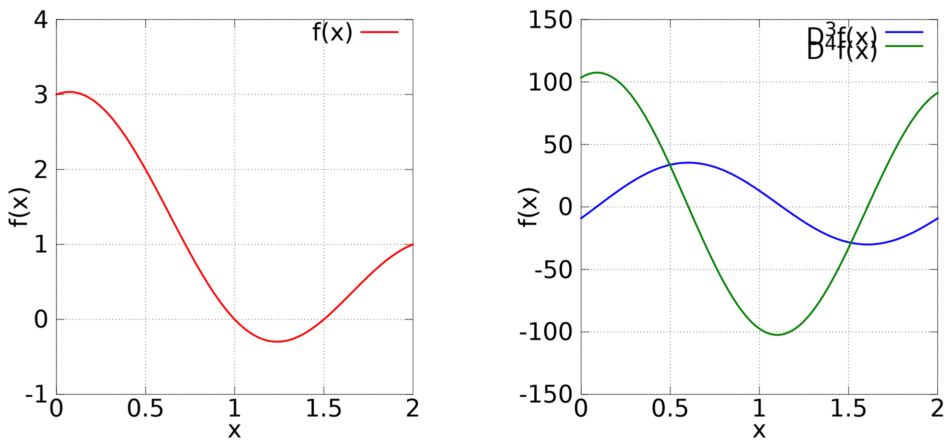

Abbildung 2: Die tatsächliche $f(x)$ und ihre dritte und vierte Ableitungen.