NumProg WS 20/21 : Tutorübung 09

1. Differentialgleichungen, Anfangswertproblem & Separation der Variablen
2. Einschrittverfahren
    i. Explizites Euler-Verfahren
    ii. Heun-Verfahren
    iii. Runge-Kutta-Verfahren
3. Implizites Euler-Verfahren (Rückwärts-Euler)

Differentialgleichungen

Wir betrachten erstmal nur „gewöhnliche“ Differentialgleichungen, auch genannt **ODEs** („ordinary differential equation“).

Diese **beschreiben** eine Funktion **durch ihre Ableitung**:

$$y'(t) = \varphi(y, t)$$

Die Lösung eines solchen Systems ist am Ende die Funktion $y(t)$.

Differentialgleichungen

Wir betrachten erstmal nur „gewöhnliche“ Differentialgleichungen, auch genannt **ODEs** („ordinary differential equation“).

Diese **beschreiben** eine Funktion **durch ihre Ableitung**:

$$y'(t) = \varphi(y, t)$$

Die Lösung eines solchen Systems ist am Ende die Funktion $y(t)$.

→ ***Wie löst man nun ODEs?***

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	**Beispiel:** $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	
2.	Separieren	
3.	Integrieren	
4.	Integrale lösen	
5.	Nach y auflösen	

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	**Beispiel: $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$**
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	$\frac{dy}{dt} = y$
2.	Separieren	
3.	Integrieren	
4.	Integrale lösen	
5.	Nach y auflösen	

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	Beispiel: $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	$\frac{dy}{dt} = y$
2.	Separieren	$\frac{dy}{y} = dt$
3.	Integrieren	
4.	Integrale lösen	
5.	Nach y auflösen	

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	Beispiel: $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	$\frac{dy}{dt} = y$
2.	Separieren	$\frac{dy}{y} = dt$
3.	Integrieren	$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} d\tau$
4.	Integrale lösen	
5.	Nach y auflösen	

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	Beispiel: $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	$\frac{dy}{dt} = y$
2.	Separieren	$\frac{dy}{y} = dt$
3.	Integrieren	$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} d\tau$
4.	Integrale lösen	$\ln \left\| \frac{y}{y_0} \right\| = t - t_0$
5.	Nach y auflösen	

Differentialgleichungen lösen

Separation der Variablen

	Schritt	Beispiel: $\boldsymbol{y'(t) = y(t)}$
1.	System in Leibniz-Notation umschreiben	$\frac{dy}{dt} = y$
2.	Separieren	$\frac{dy}{y} = dt$
3.	Integrieren	$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta} d\eta = \int_{t_0}^{t} d\tau$
4.	Integrale lösen	$\ln \left\lvert \frac{y}{y_0} \right\rvert = t - t_0$
5.	Nach y auflösen	$y = \pm\, y_0 \cdot e^{t-t_0}$

$\rightarrow$ $t_0 \coloneqq$ (meistens) Startzeitpunkt

$y_0 \coloneqq$ Startwert der Funktion im Zeitpunkt t_0

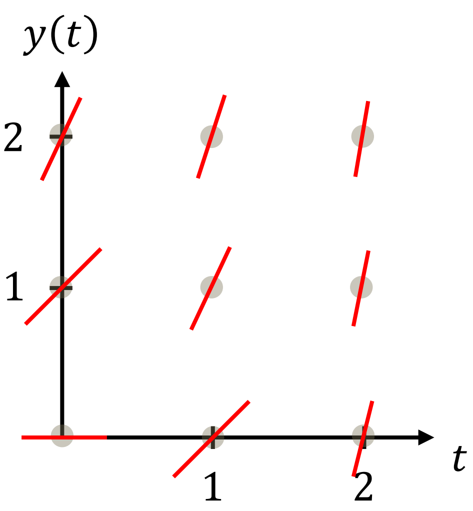
Explizierte Einschrittverfahren

Mithilfe von (expliziten) **Einschrittverfahren** können wir ODEs **schrittweise annähern**.

Dabei stellt δt die Schrittweite in der Zeit t dar. Durch ein **graphisches Verständnis** sehen wir, warum die Ableitungen so wichtig sind:

Explizierte Einschrittverfahren

Mithilfe von (expliziten) **Einschrittverfahren** können wir ODEs **schrittweise annähern**.
Dabei stellt δt die Schrittweite in der Zeit t dar. Durch ein **graphisches Verständnis** sehen wir, warum die Ableitungen so wichtig sind:



Wir können durch ein ODE ohne Probleme an jedem Punkt die Ableitung berechnen und sie in ein sogenanntes **Richtungsfeld** (siehe links) eintragen.
Dadurch entsteht eine Art „Strom“, der auf die Stammfunktion schließen lässt.

Beispielfunkion für dieses Richtungsfeld: $y'(t) = t^2 + y(t)$

Explizites Euler-Verfahren

1. Ordnung

Hier wird die Steigung im aktuellen Punkt t_k benutzt, um die nächste Annäherung y_{k+1} zu berechnen.

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)$$

Wobei $f(t_k, y_k)$ die Ableitung am Punkt t_k mit Hilfe von y_k beschreibt.

Verfahren von Heun

2. Ordnung

Erinnert ihr euch noch an die Trapenzregel bei der Quadratur?

Hier machen wir etwas Ähnliches: Wir nehmen uns noch eine weitere Steigung zu unserer aktuellen dazu und berechnen daraus den Mittelwert.

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\delta t}{2} \cdot \left(f(t_k, y_k) + f\left(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)\right)\right)$$

Wobei $f(t_k, y_k)$ die Ableitung am Punkt t_k mit Hilfe von y_k beschreibt.

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

4. Ordnung

Ähnlich wie damals von Trapez zu Simpsonregel: Wir benutzen weitere Steigungen als Stützpunkte, um eine bessere Annäherung zu erhalten.

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\delta t}{6} \cdot (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)$$

$$T_1 = f(t_k, y_k) \qquad T_2 = f\left(t_k + \frac{\delta t}{2}, y_k + \frac{\delta t}{2} T_1\right)$$

$$T_3 = f\left(t_k + \frac{\delta t}{2}, y_k + \frac{\delta t}{2} T_2\right) \qquad T_4 = f(t_{k+1}, y_k + \delta t T_3)$$

Wobei $f(t_k, y_k)$ die Ableitung am Punkt t_k mit Hilfe von y_k beschreibt.

Implizites Euler-Verfahren

1. Ordnung

Hier benutzen wir die Steigung im nächsten Schritt, um die aktuelle Iteration zu berechnen (deswegen auch Rückwärts-Euler)

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta t$$

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Das können wir umstellen, um daraus ein Nullstellenproblem zu machen:

$$0 = \delta t \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) - y_{k+1} + y_k$$

Dann muss nur noch nach y_{k+1} mit Hilfe von z.B. pq-Formel aufgelöst werden.