Übung 11 - Numerisches Programmieren

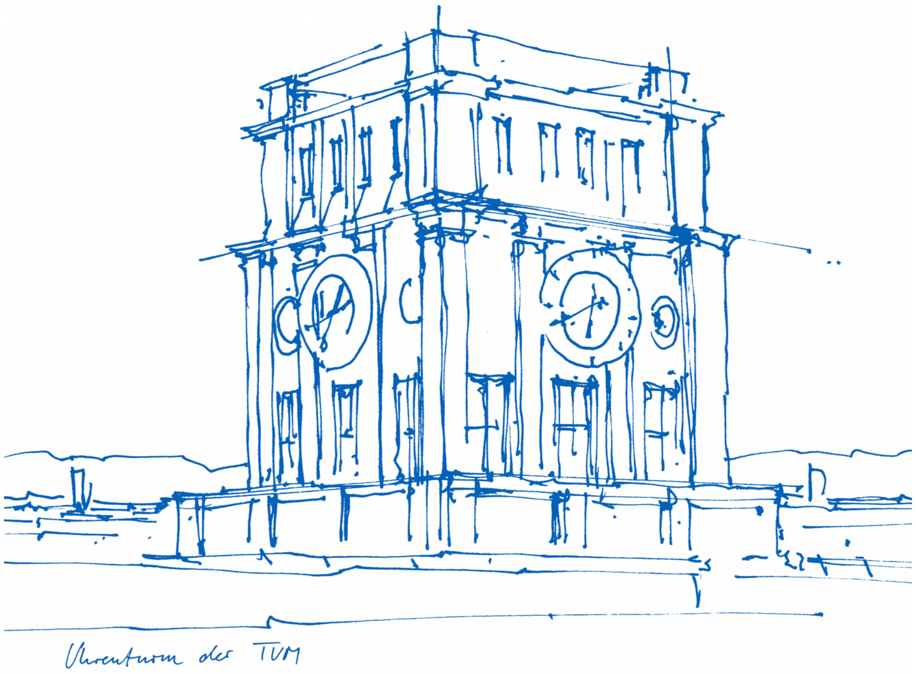
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

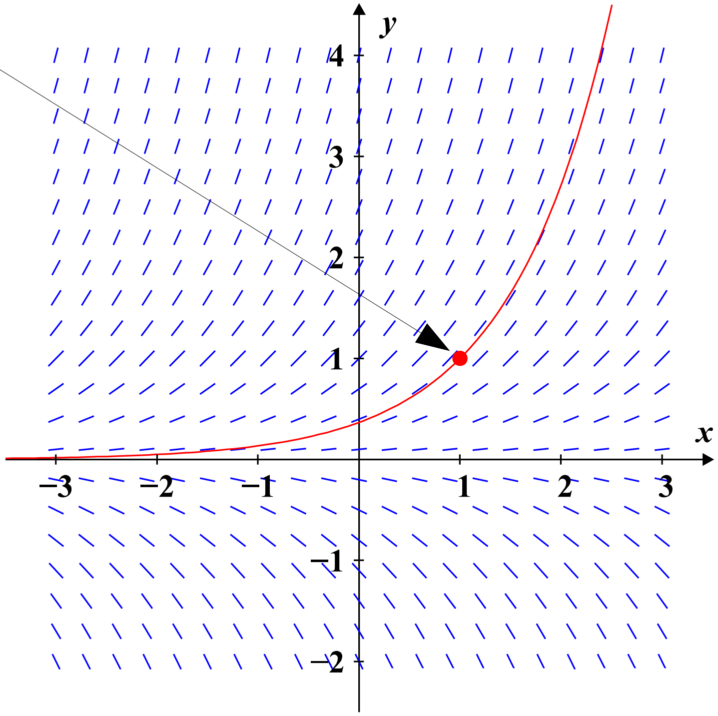
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 20. Januar 2021



Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Beschreiben Zusammenhang der Ableitung(en) zur Funktion
- Dient zur Beschreibung dynamischer Systeme (zum Beispiel in der Physik)
- Allgemein mit potenziell weiteren Ableitungen: $\dot{y}(t) = f(y(t), t, \ldots)$
- Bei uns Beschränkung auf 1. Ableitung: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$
- Eindeutig lösbar mit Anfangswert
- Beispiel: $\dot{y}(t) = y(t)$



Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Beschreiben Zusammenhang der Ableitung(en) zur Funktion
- Dient zur Beschreibung dynamischer Systeme (zum Beispiel in der Physik)
- Allgemein mit potenziell weiteren Ableitungen: $\dot{y}(t) = f(y(t), t, ...)$
- Bei uns Beschränkung auf 1. Ableitung: $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$
- Eindeutig lösbar mit Anfangswert
- Beispiel: $\dot{y}(t) = y(t)$
- Lösung: Separation der Variablen

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= y(t) && \\
\frac{dy}{dt} &= y && \text{Umformung} \\
\frac{1}{y}dy &= 1dt && \text{Separation der Variablen} \\
\int_{y_0}^{y} \frac{1}{y}dy &= \int_{t_0}^{t} 1dt && \text{Integration} \\
ln(|y|) - ln(|y_0|) &= t - t_0 && \\
ln(\left|\frac{y}{y_0}\right|) &= t - t_0 && \\
\left|\frac{y}{y_0}\right| &= e^{t-t_0} && \\
y &= \pm y_0 e^{t-t_0} && \\
y(t) &= y_0 e^{t-t_0} && \text{da} \quad y(t_0) = y_0
\end{aligned}
$$

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 1

Anwendung der Separation der Variablen und Betrachtung der Kondition

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

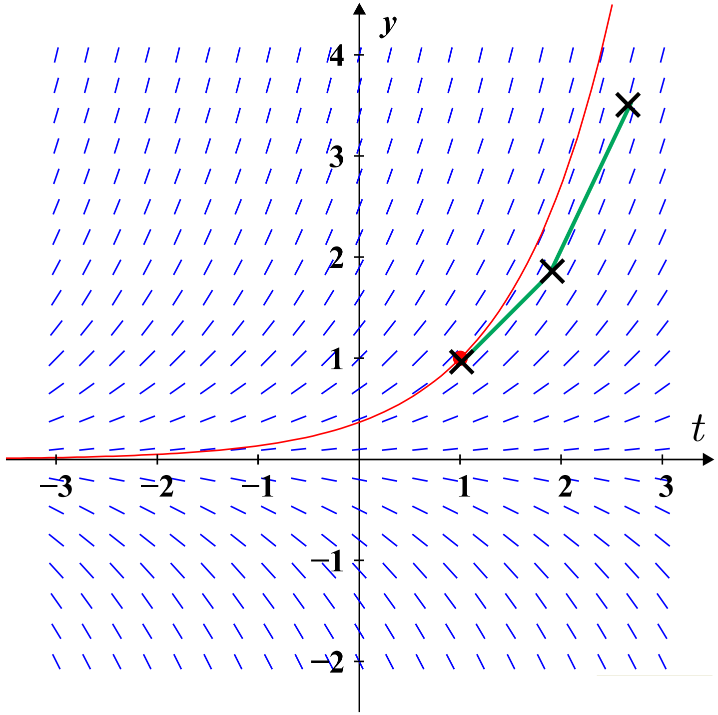
Bearbeitung Aufgabe 1

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 1

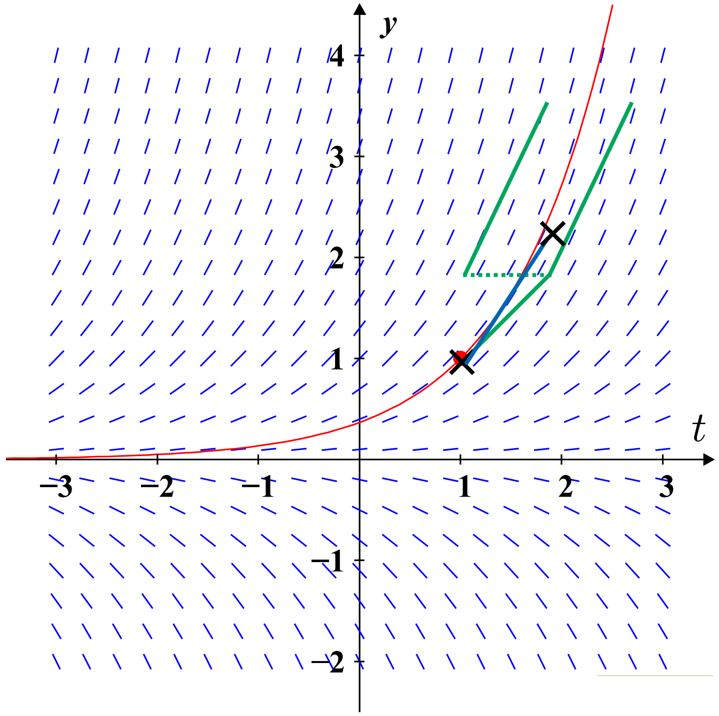
Übung 11 – Numerik von ODEs: explizite Verfahren

- Euler Methode: Folge den Richtungungsfeld für bestimmtes x-Intervall
  → Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t f(y_k, t_k) \qquad y_0 = y(t_0)$



Übung 11 – Numerik von ODEs: explizite Verfahren

- Heun Methode: Verwende Ableitung nach Euler Schritt und mittle mit aktueller Suchrichtung
- Analogie: Vorausschauendes Fahren
- Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t \frac{f(y_k, t_k) + f(y_k + \delta_t f(y_k, t_k), t_{k+1})}{2} \qquad y_0 = y(t_0)$



Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 2

a) Analytische Lösung mit Separation der Variablen

b) Numerische Lösungsmethoden

i) Numerische Lösung mit explizitem Euler Verfahren

ii) Numerische Lösung mit explizitem Heun Verfahren

iii) Numerische Lösung mit explizitem Runge-Kutta Verfahren

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 2

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

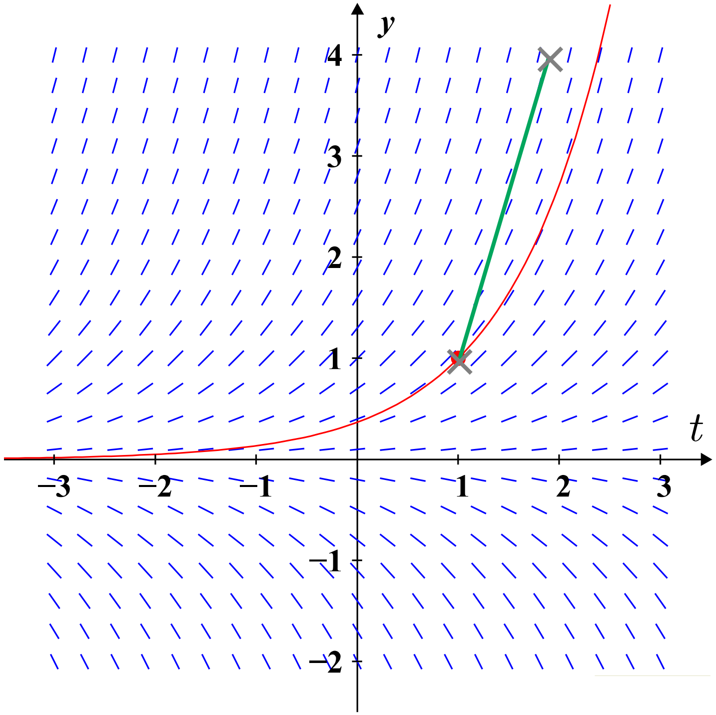
Bearbeitung Aufgabe 2

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 2

Übung 11 – Numerik von ODEs: implizite Verfahren

- Euler Methode: Gehe Richtung des Punktes an dem man ankommt!
  → Iteration: $y_{k+1} = y_k + \delta_t f(y_{k+1}, t_{k+1}) \qquad y_0 = y(t_0)$



Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 2

a) Analytische Lösung mit Separation der Variablen

b) Expliziter Euler

c) Impliziter Euler

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 3

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 3

Übung 11 – Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bearbeitung Aufgabe 3