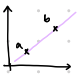
NUMPROG ZSMF. TEIL 3

(POLYNOM) INTERPOLATION, NEWTON, AITKEN-NEVILLE, HERMITE/SPLINES IP

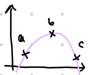
Zusammenfassung aller Interpolations-Verfahren ☺

POLYNOM INTERPOLATION:



$a \cdot 1 + b \cdot x$

Lineare Interpolation
→ Gerade durch 2 Punkte



hier Grad 2
$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2$

Polynom-Interpolation
→ durch n Punkte

$f(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots$

Verfahren:
1. Matrix aufstellen
2. Gauß
3. Ins Polynom einsetzen

die Matrix ☺

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \ldots & g_{n-1}(x_0) \\ g_0(x_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ g_0(x_n) & \cdots & & g_{n-1}(x_{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

BSP: $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(2) = 1$ ($x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$)

$g_0(x) = 1$; $g_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; $g_2(x) = \cos(\pi x)$

1. Matrix aufstellen:

Funktionen, y-Werte, x-Werte

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & \cos(\frac{\pi x}{2}) & \cos(\pi x) \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

3. Polynom aufstellen:

$G(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ldots$

$G(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 \cdot \cos(\pi x)$
$= 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos(\pi x)$

III $-2c_1 = -2$, $c_1 = 1$
II $-1 \cdot 1 + (-2)c_2 = -3$, $c_2 = 1$
I $c_0 + 1 + 1 = 3$, $c_0 = 1$

weiteres Bsp: $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$

$g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$G(x) = 3 + (-5)x + 2x^2$
$= 3 - 5x + 2x^2$

$c_0 = 3$
$c_1 = -5$
$c_2 = 2$

NEWTONSCHE DIVIDIERTE DIFFERENZ

NEWTON SCHEMA / VERFAHREN

↳ warum is die so nice? 🤔?
→ Man kann neue Punkte einfügen und ganz leicht neue Diagonalen ausrechnen

$c_{i,0} = f(x_i) = y_i$

$$c_{i,k} = \frac{c_{i+k,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$$

oder leichter/visuell ausgedrückt:

$$[\text{neu}]c = \frac{f_{\text{links unten}} - f_{\text{links}}}{x_{\text{ganz links unten}} - x_{\text{links}}}$$

diese Tabelle ausfüllen

x_i	$i \backslash k$	0	1	2	
x_0	0	$c_{0,0}$	$c_{0,1}$	$c_{0,2}$	…
x_1	1	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	
x_2	2	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	
⋮	⋮	…			

1 Spalte = y-Werte

⇒ Dann Polynom aufstellen, nach:

$$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n-1} \cdot \prod_{i=0} (x - x_i)$$

d.h. man braucht die erste Zeile der Tabelle

$c_{0,0}$; $c_{0,1}$; $c_{0,2}$ …

BSP. $P_0 = (2,4)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,1)$ (x_0, x_1, x_2)

x_i	$i \backslash k$	0	1	2	
2	0	4	3	1	0
1	1	1	0	1	
−1	2	1	2		
3	3	9			

hocharbeiten

$c_{0,0} = f(2) = 4$
$c_{1,0} = f(1) = 1$
$c_{2,0} = f(-1) = 1$
y-Werte

f links unten, f links

$$c_{0,1} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = 3$$

x ganz links unten (auf Diagonalen), x links

$$c_{1,1} = \frac{1 - 1}{-1 - 1} = 0 \qquad c_{0,2} = \frac{0 - 3}{-1 - 2} = 1$$

⇒ Hinzufügen von nem neuen Punkt $\boxed{P_3(3,9)}$

$P(x) = c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + c_{0,2}(x - x_0)(x - x_1) + c_{0,3}(x - x_0)(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

↳ $P(x) = 4 + 3(x-2) + 1(x-2)(x-1) + 0 \cdot (x-2)(x-1)(x-1) =$
$= 4 + 3(x-2) + (x-2)(x-1)$

Aitken-Neville Verfahren

~ AITKEN-NEVILLE ~

(ähnliche Funktionsweise wie das Newton-Verfahren

x_i	i \ k	0	1	2
x_0	0	$P[0,0] = y_0$	$P[0,1]$	$P[0,2]$
x_1	1	$P[1,0] = y_1$	$P[1,1]$	...
x_2	2	$P[2,0] = y_2$	...	
		...		

$$P[i,k] = P[i,k-1] + \frac{x - x[i]}{x[i+k] - x[i]} \cdot (P[i+1,k-1] - P[i,k-1])$$

oder besser ☺

$$\boxed{P_{neu} = P_{links} + \frac{x - x_{links}}{x_{ganz\ links\ unten} - x_{links}} \cdot (P_{links\ unten} - P_{links})}$$

BSP: $P_0(2/4)$, $P_1(1/1)$, $P_2(-1/1)$ gesucht: Welchen Wert hat unsere Funktion an Stelle $x = 3$?

x_i	i \ k	0	1	2
2	0	4	7	9
1	1	1	1	
-1	2	1		

$P[0,1] = 4 + \frac{3-2}{1-2} \cdot (1-4) = 7$

$P[1,1] = 1 + \frac{3-1}{-1-1} \cdot (0) = 1$

3 = unser x

$P[0,2] = 7 + \frac{3-2}{-1-2} \cdot (1-7) = 9$

ebenfalls auf der Diagonalen

finales Ergebnis :)

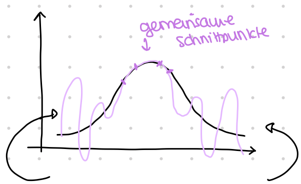
=> Prediction = 9

d.h. unsere Funktion hat den y-Wert = 9 an der Stelle x = 3

Runge-Effekt

=> Polynominterpolation liefert ein zu ungenaues Ergebnis (trifft ein, falls der Graph keinem Polynom ähnelt)

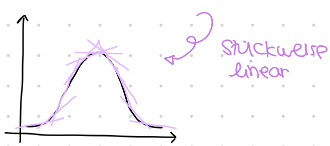
=> Durch Setzen von sehr vielen gemeinsamen Schnittpunkten => RUNGE EFFEKT



=> Mit steigender Anzahl an Schnittstellen => Runge Effekt, d.h. Erzeugtes Polynom schweift/schwingt nach außen immer mehr und stärker aus

=> Wie kann man ein besseres Interpolationsergebnis erzeugen?

① Stück für Stück interpolieren



② Tschebyschow-Polynome (Chebyshev-Polynomials)

③ Andere Polynome benutzen, die aus der richtigen Klasse stammen.

HERMITE-INTERPOLATION (Stückweise)

VORGEHEN:

1. LGS mithilfe von Stützstellen und deren Ableitungen aufstellen
2. LGS lösen
3. Ergebnis in die allg. Polynomialfunktion einsetzen
4. Nach allen y und y' sortieren, also sodass da $y_0 \cdot$ »irgendwas« $y_1 \cdot$ »irgendwas« + ... steht
5. Mithilfe von Koeffizientenvergleich auf Basisfunktion schließen, nach 4. entspricht das »irgendwas« den Basisfunktionen
6. Hermite-Funktion (sortieren mit kubischen Basispolynomen):

$$P(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t) \quad \in [0;1]$$

BSP:

Bedingungen:

$P(x_0) = y_0$, $P(x_1) = y_1$

$P'(x_0) = y_0'$, $P'(x_1) = y_1'$

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \qquad t \in [0;1]$$

$$P'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \qquad \overset{!}{=} [x_0;x_1]$$

einsetzen

$$\overset{t=0}{P(0)} = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 0^3 = a_0 = y_1$$

$$\overset{t=1}{P(1)} = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 1^3 = 1a_0 + 1a_1 + 1a_2 + 1a_3 = y_1$$

$$P'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 = a_1 = y_0'$$

$$P'(1) = a_1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2 = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 = y_1'$$

Koeffizienten in die Matrix

Matrix LGS aufstellen:

$$\begin{array}{cccc} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_0' \\ y_0 \end{pmatrix}$$

LGS Lösen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & y_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \end{array}\right) \mid \cdot(-1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & -y_1' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \end{array}\right) +(\cdot 3)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -y_1' + 3y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_0' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_0 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform ✓ :)

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= y_0' \\ a_2 &= -y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0 \\ a_3 &= y_1 - (-y_1' + 3y_1 - 2y_0' - 3y_0) - y_0' - y_0 \\ &= 2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1' \end{aligned}$$

⇩ da einsetzen

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

⇩

$$P(t) = y_0 + y_0' t + (-y_1' + 3y_1 + 2y_0' - 3y_0) t^2 + (2y_0 + y_0' - 2y_1 + y_1') t^3$$

⇩ zu dem umordnen

$$P(t) = y_0 \cdot H_0(t) + y_1 \cdot H_1(t) + y_0' \cdot H_2(t) + y_1' \cdot H_3(t) \quad \in [0;1]$$

⇩

$$P(t) = y_0 \cdot (1 - 3t^2 + 2t^3) + y_1 (3t^2 - 2t^3) + y_0' (t - 2t^2 + t^3) + y_1' \cdot (-t^2 + t^3)$$

PROBLEM BEI HERMITE-IP:

⇒ man kann nur zwischen [0;1] interpolieren

Lösung

SPLIMES-INTERPOLATION

Eigentlich wiedermal nur einsetzen und LGS lösen

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \cdot \begin{pmatrix} y_2 - y_0 \\ y_3 - y_1 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_n' \end{pmatrix}$$

die Matrix ist die halbe Miete

GANZ WICHTIG!

BSP: Bestimme die Spline Funktion $s(x)$ für die Stützpunkte

$P_0 = (-1,2)$, $P_1(0,0)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,3)$

und Randbedingung:

$S'(-1) = 9$, $S'(2) = 0$

h=1

Abstand zwischen zwei i's = h = 1

Hilfstabelle mit allen Werten aufstellen :)

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	2	0	2	3
y_i'	9	?	?	0

2 Unbekannte

⇒ Matrix aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \frac{3}{h} \cdot \begin{pmatrix} y_2 - y_0 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

peekaboo! Unsere zwei Unbekannte!

Werte (aus Tabelle) einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \frac{3}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -9 \\ 1 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \cdot 4 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 45 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{II} & 15 \cdot y_2' = 45 \rightarrow y_2' = 3 \\ \text{I} & 4y_1' + 3 = -9 \rightarrow y_1' = -3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in der Tabelle ergänzen :)