Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 6. Übungsblatt: Numerische Quadratur

1) Integration von Interpolationspolynomen

Nach der Beschäftigung mit Interpolationsformeln drängt sich für die numerische Integration die folgende Idee geradezu auf. Kann man das Integral einer Funktion über ein Intervall nicht exakt bestimmen, so bestimmt man erst eine möglichst genaue Interpolationsfunktion, die man exakt integrieren kann.

a) Bestimmen Sie die Näherungsformel I_1 für das Integral $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, die sich durch die Integration des Interpolationspolynoms von Lagrange mit den zwei Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ ergibt!

b) Benutzen Sie die in Teilaufgabe a) entwickelte Formel, um die Integrale

i) $\int\limits_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\ \mathrm{d}x$, ii) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\ \mathrm{d}x$ und iii) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{d}x$

näherungsweise zu bestimmen!

c) Welche Näherung I_2 ergibt sich durch Hinzunahme einer dritten Stützstelle in der Mitte des Intervalls, das heißt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$?

d) Sei ein beliebiges Polynom 3. Grades $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{3} c_i x^i$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Näherungsformel I_2 aus Teilaufgabe b) die Gleichung

$$I_2(p) \quad = \quad \int\limits_0^1 p(x)\ \mathrm{d}x$$

stets erfüllt!

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_0^1 f(0)\cdot\frac{x-1}{0-1} + f(1)\cdot\frac{x-0}{1-0}\,dx \\ &= \int_0^1 f(0)\cdot(-x+1) + f(1)\cdot x\,dx \\ &= \left[f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= f(0)\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) + f(1)\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right) \end{aligned}$$

b)

	$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$I_1(f)$
i)	$\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)$	0	0	0
ii)	$\frac{\sin(\pi x)}{x}$	π	0	$\frac{\pi}{2}$
iii)	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{e}}$

Bei Aufgabe ii) muss die Regel von l’Hospital angewendet werden um den Grenzwert der Funktion an der Stelle $x=0$ zu bestimmen.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \pi$$

c)

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} &= (2x^2-3x+1) \\ L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} &= (-4x^2+4x) \\ L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} &= (2x^2-x) \\ I_2(f) &= \int_0^1\sum_{k=0}^{2} f(x_k)\cdot L_k(x)\,dx \\ &= f(0)\cdot\int_0^1 L_0(x)dx + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 L_1(x)dx + f(1)\cdot\int_0^1 L_2(x)dx \\ &= \frac{1}{6}\left(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)\right) \end{aligned}$$

d) Allgemeines Polynom 3. Grades aufstellen, an den Stützstellen auswerten, einsetzen, ausrechnen und mit analytischem Integral vergleichen!

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \\
p(0) &= c_0 \\
p(\frac{1}{2}) &= c_3/8 + c_2/4 + c_1/2 + c_0 \\
p(1) &= c_3 + c_2 + c_1 + c_0 \\
I_2(p) &= \frac{3c_3 + 4c_2 + 6c_1 + 12c_0}{12} \\
&= \left[\frac{c_3x^4}{4} + \frac{c_2x^3}{3} + \frac{c_1x^2}{2} + c_0x\right]_0^1 = \int_0^1 p(x)\,dx
\end{aligned}$$

2) Trapezregel und Trapezsumme

In dieser Aufgabe wollen wir zwei einfache Funktionen (Polynome) per Hand und mit den Formeln der Trapezregel und Trapezsumme aus der Vorlesung integrieren. Ziel der Berechnungen ist also der exakte Wert $I(f)$,

$$I(f) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

sowie die approximativen Werte $Q_{\mathrm{T}}(f)$ und $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$,

$$Q_{\mathrm{T}}(f) \;=\; H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

$$Q_{\mathrm{TS}}(f;h) \;=\; h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right), \tag{3}$$

wobei gilt: $H = b-a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -x^2 + 4$. Berechnen Sie $I(f)$ und $Q_{\mathrm{T}}(f)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = -2,\ b = 2$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(f;h)$ für $f(x) = -x^2 + 4$ nach der Formel (3) für $a = -2,\ b = 2$ und $n = 8$. Tip: Nützen Sie die Symmetrie von $f(x)$!
Geben Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(f;h)$ an nach der Formel

$$R_{\mathrm{TS}}(f;h) \;=\; h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{4}$$

c) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $I(g)$ und $Q_{\mathrm{T}}(g)$ nach den Formeln (1) - (2) für $a = 0,\ b = 4$.

d) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{TS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (3) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{TS}}(g;h)$ mit der Formel (4) ab!

Lösung:

a) $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2$

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = [-\frac{1}{3}x^3 + 4x]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{8}{3} + 8 - (\frac{8}{3} - 8) = 16 \cdot \frac{2}{3} = 10.\bar{6} \\ Q_{\mathrm{T}}(f) &= H \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} = H \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

b) Berechnung der Trapezsumme für $f(x) = -x^2 + 4,\ a = -2,\ b = 2,\ n = 8$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$

$f(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. $f(x) = f(-x)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f_i	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$	4	$\frac{15}{4}$	3	$\frac{7}{4}$	0

$$
\begin{aligned}
T_i &= (x_{i+1} - x_i) \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2}\right) = h \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{2}\right) \\
\Rightarrow Q_{\mathrm{TS}}(f;h) &= \sum_{i=0}^{n-1} T_i = h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) \\
&= h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + \frac{f_8}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{7}{4} + 3 + \frac{15}{4} + 4 + \frac{15}{4} + 3 + \frac{7}{4} + 0\right) = \frac{1}{2} \cdot 21 = 10.5
\end{aligned}
$$

Restglied:

$$
R_{\mathrm{TS}}(f;h) = h^2 \cdot H \cdot \frac{f^{(2)}(\xi)}{12} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6} = 10.5 - 16 \cdot \frac{2}{3} = Q_{\mathrm{TS}}(f;h) - I(f)
$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Trapezsumme.

c) $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$
\begin{aligned}
I(g) &= \int_a^b g(x)\ dx = \int_0^4 x^4\ dx = [\frac{1}{5}x^5]_0^4 \\
&= \frac{1024}{5} = 204,8 \\
Q_{\mathrm{T}}(g) &= H \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = 2 \cdot (0 + 256) = 512
\end{aligned}
$$

d) Berechnung der Trapezsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$
$\Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
g_i	0	1	16	81	256

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{TS}}(g;h) &= h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2}\right) \\
&= (0 + 1 + 16 + 81 + 128) = 226
\end{aligned}
$$

Restglied:

$$
\begin{aligned}
|R_{\mathrm{TS}}(g;h)| &= \left|h^2 \cdot H \cdot \frac{g^{(2)}(\xi)}{12}\right| = \left|1 \cdot 4 \cdot \frac{12 \cdot \xi^2}{12}\right| = 4\left|\xi^2\right| \\
&\overset{\xi\in[0,4]}{\leq} 4 \cdot 16 = 64
\end{aligned}
$$

3) Keplersche Fassregel und Simpson-Summe

Analog zur Aufgabe 2) wollen wir jetzt Integrationsformeln nutzen, die aus Interpolationspolynomen mit einer Ordnung mehr (quadratisch) entstehen. Ziel der Berechnungen sind nun die approximativen Werte $Q_{\mathrm{F}}(g)$ und $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ der Fassregel und der Simpson-Summe:

$$Q_{\mathrm{F}}(g) = H \cdot \frac{g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)}{6} \tag{5}$$

$$Q_{\mathrm{SS}}(g;h) = \frac{h}{3} \cdot \left(g_0 + 4g_1 + 2g_2 + 4g_3 + \ldots + 2g_{n-2} + 4g_{n-1} + g_n\right), \tag{6}$$

wobei wieder gilt: $H = b - a$, $h = \frac{b-a}{n}$, $g_i = g(x_i)$, $x_i = a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$ bei n Teilintervallen.

a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x^4$. Berechnen Sie $Q_{\mathrm{F}}(g)$ nach der Formel (5) für $a = 0,\ b = 4$.

b) Berechnen Sie $Q_{\mathrm{SS}}(g;h)$ für $g(x) = x^4$ mit der Formel (6) für $a = 0,\ b = 4$ und $n = 4$. Schätzen Sie dann das Restglied $R_{\mathrm{SS}}(g;h)$ mit folgender Formel ab:

$$R_{\mathrm{SS}}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} \quad \text{mit } \xi \in [a,b]. \tag{7}$$

Lösung:

a) Berechnung der Fassregel für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4$

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{F}}(g) &= h\left(\frac{f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}\right) \\ &= \frac{4}{6}(0 + 4 \cdot 16 + 256) = \frac{2}{3} \cdot 320 = 213.\bar{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Fassregel besser als Trapezregel und Trapezsumme (für $n = 4$)

b) Simpsonsumme für $g(x) = x^4,\ a = 0,\ b = 4,\ n = 4$ Entspricht zwei Fassregeln, da fuer eine Fassregel zwei Intervalle benötigt werden.

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{SS}}(g;h) &= \frac{h}{3} \cdot (g_0 + 4 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2 + 4 \cdot g_3 + g_4) \\ &= \frac{h}{3}(0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 81 + 256) = \frac{1}{3} \cdot 616 = 205.\bar{3} \end{aligned}$$

Restglied:

$$R_{\mathrm{SS}}(g;h) = h^4 \cdot H \cdot \frac{g^{(4)}(\xi)}{180} = 4 \cdot \frac{24}{180} = \frac{8}{15}$$

$\Rightarrow$ Das Restglied beschreibt in diesem Fall exakt den Fehler der Simpsonsumme