# Übung 11 - Numerisches Programmieren

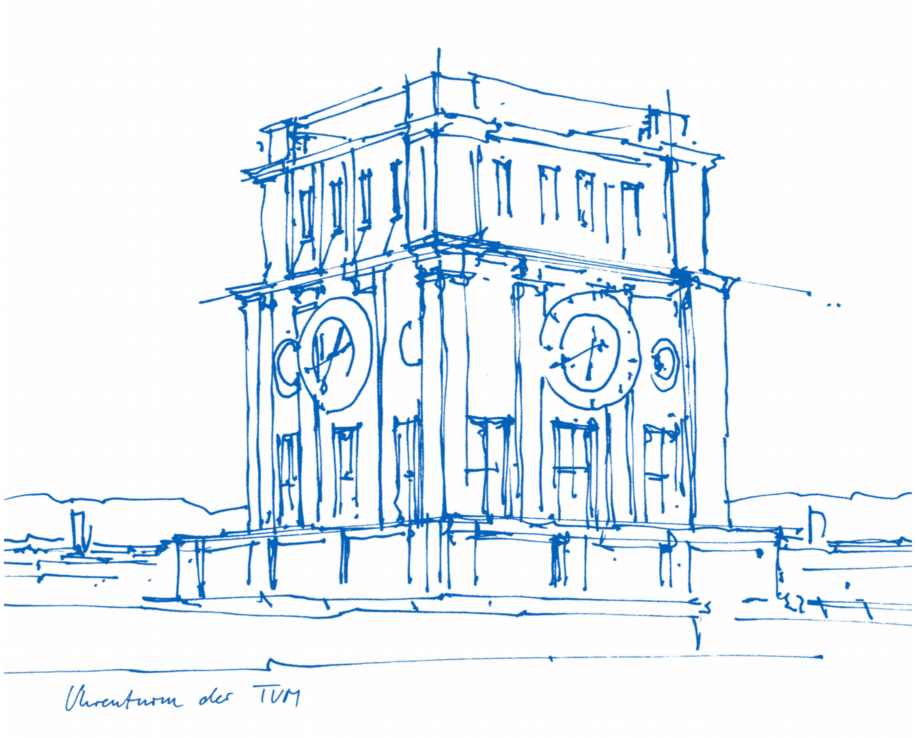
Michael Obersteiner

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

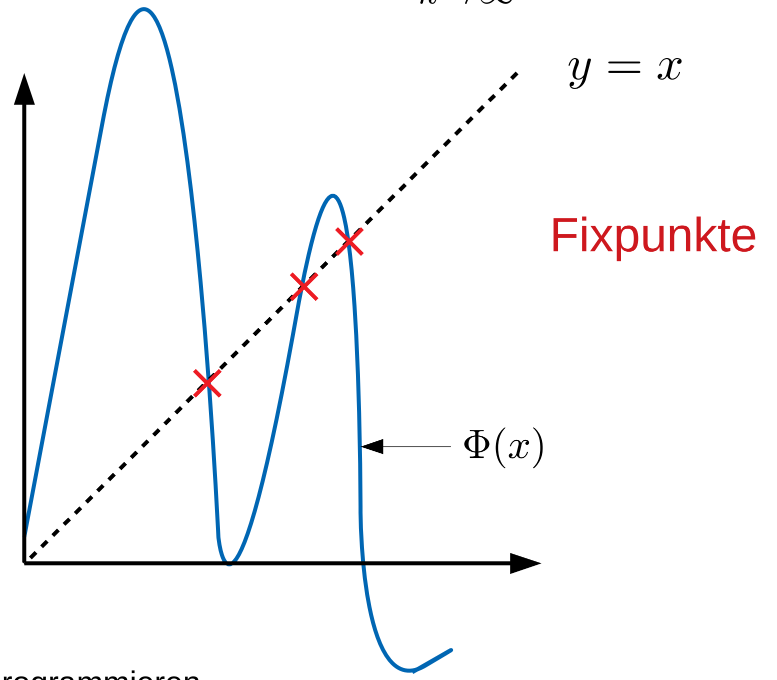
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 3. Februar 2021



# Iterative Verfahren

- Keine direkte Berechnung → Iterative Annäherung an Lösung
- Anfang mit Startwert $x_0$ (Beliebig gewählt oder „educated guess“)
- Berechnungsvorschrift $\Phi(x_k) = x_{k+1}$
- Stopp wenn ausreichend nah an Lösung: $x_0 \xrightarrow{\Phi} x_1 \xrightarrow{\Phi} \dots \xrightarrow{\Phi} x_n$
- Idee: Fixpunkt bei unendlich vielen Iterationen: $\lim_{k\to\infty} x_k = x^* = \Phi(x^*)$

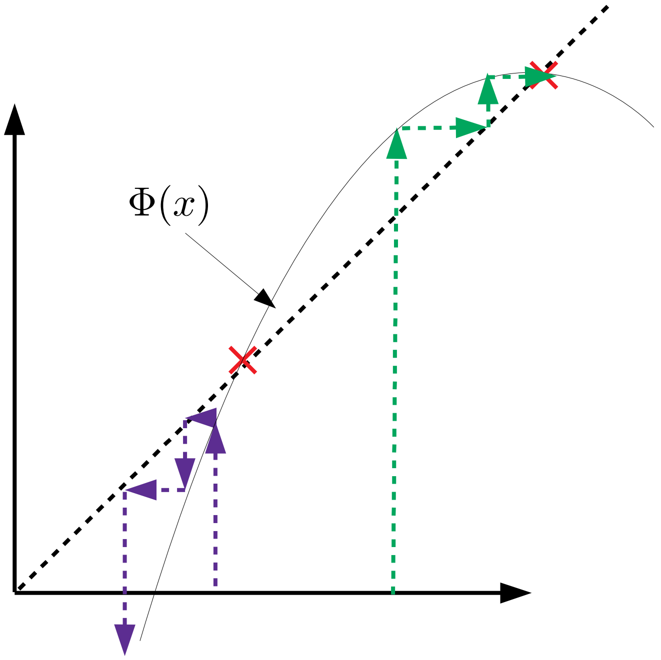


# Fixpunkteigenschaften

Wann konvergiert eine Folge zu einem Fixpunkt $x^*$ ?

Abhängig von Startwert und Fixpunktvorschrift $\Phi(x)$:

- Ableitung $|\Phi'(x^*)|$ :
  - $\boxed{< 1}$ : anziehend
  - $\boxed{> 1}$ : abstoßend
  - = 1 : keine Aussage




- Startwert:
  - Fixpunkt muss nicht global anziehend sein
  - Startwert muss im Konvergenzbereich liegen (bei dem z.B. Ableitung < 1)

- Formelle Analyse mit dem Banach‘schen Fixpunktsatz

# Iterative Verfahren

**Anwendung:** lineare Gleichungssysteme $Ax = b$

- Splitting Verfahren:
  - $\Phi(x) = x + M^{-1}(b - \boxed{Ax})$ $\boxed{O(N^2)}$
  - Fehlerschätzung durch Residuum: $r^{(k)} = b - Ax_k = Ax - Ax_k = A(x - x_k) = A\epsilon$
  - Je „ähnlicher" M zu A desto schneller Konvergenz
  - Je teurer Invertierung von M desto teurer Iteration
  - Beispiele:
    - M = diag(A) → Jacobi Verfahren
    - M = L(A) (linke untere Dreiecksmatrix inklusive Diagonale) → Gauss-Seidel

- Verfahren des steilsten Abstiegs:
  - Gradientenverfahren zur Approximation der Lösung x

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 1**

a) Zeige das Fixpunkt auch Lösung des LGS

b) Welche Wahl von M geeignet? (I, A, D)

c) Code für M = D

d) Verbesserung von c möglich?

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 1**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 1**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 1**

# Jacobi Verfahren

- Iterationsvorschrift:

$$\Phi(x) = x + D^{-1}(b - Ax)$$

$$\boxed{\Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}(b - Ax^{(k)})}$$

Leichter per Hand

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{A_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j^{(k)})}$$

Leichter zu Coden

- Fehlerschätzer:
  - $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
  - Nichte exakt! (A mal Fehler!)
  - Vektor → Abbruchkriterium z.B. Norm über Residuum (Max, L1,  L2, ...)

# Gauss-Seidel Verfahren

- Iterationsvorschrift (verwende bereits verfügbare Werte der nächsten Iteration):

$$\Phi(x) = x + D^{-1}(b - Ax)$$

$$\boxed{\Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + L^{-1}(b - Ax^{(k)})}$$ Teuer (L invertiert)

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{A_{i,i}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{i,j} x_j^{(k)})}$$ Günstiger

- Fehlerschätzer:
  - $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
  - Nichte exakt! (A mal Fehler!)
  - Vektor → Abbruchkriterium z.B. Norm über Residuum (Max, L1,  L2, ...)

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

a) Lösung des LGS mit Gauss-Elimination

b) Jacobi Verfahren mit Startwert **0**

c) Gauss-Seidel Verfahren mit Startwert **0**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 2**

# Verfahren des steilsten Abstiegs

- Indirektes Lösen des Gleichungssystems über Optimierungsproblem:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

$$\nabla f(x) = Ax - b \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow Ax = b$$

- Wenn A symmetrisch und positiv definit (spd) dann ist Extremum ein Minimum!
  → Abstiegsverfahren zur Suche des Minimum (Funktioniert nur bei spd Matrix)
- Negativer Gradient zeigt in Richtung des steilsten Abstiegs
- Iterationsverfahren:

$$\Phi(x) = x + \alpha(b - Ax) \Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)})$$

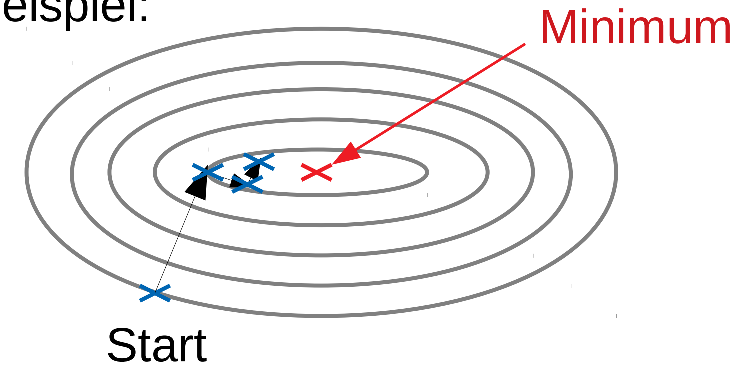
- Fehlerschätzer:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

- Optimale Schrittweite:

$$\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)^T} r^{(i)}}{r^{(i)^T} A r^{(i)}}$$

Beispiel:



# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 3**

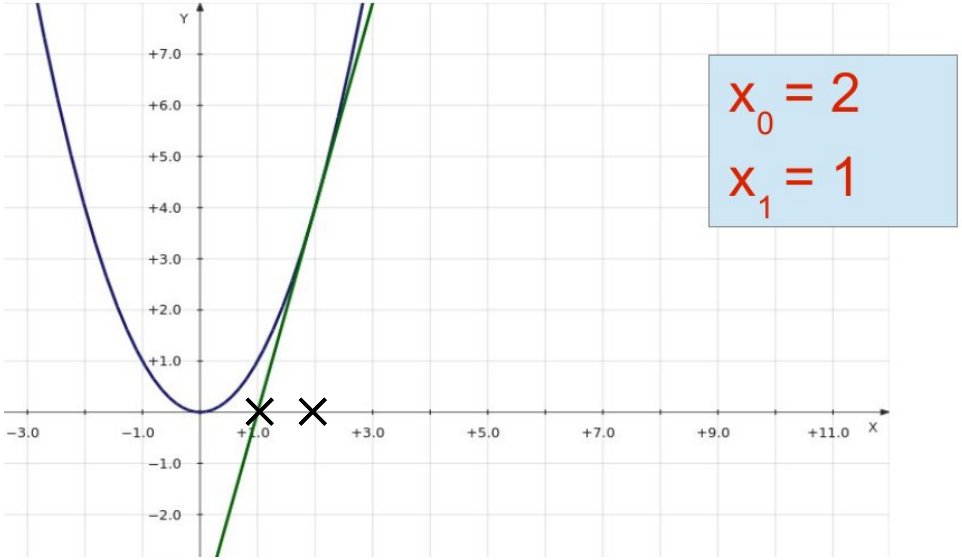
2 Schritte des Verfahren des steilsten Abstiegs

# Iterative Verfahren

## Bearbeitung Aufgabe 3

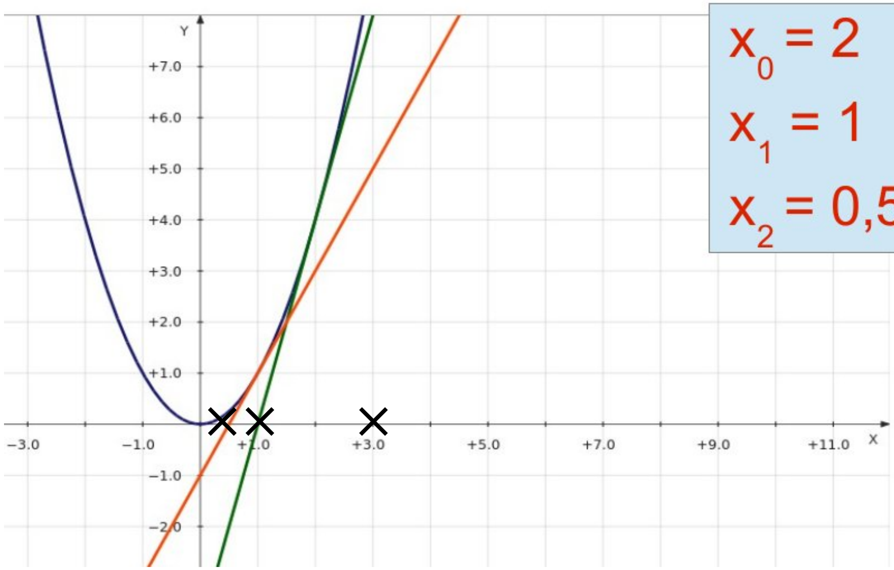
# Newton Verfahren

- Nullstellenberechnung einer (nicht-linearen) Funktion: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Idee: Approximation der Funktion mittels Tangente
  → Nullstelle der Tangente als nächste Annäherung
- Vorschrift: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



# Newton Verfahren

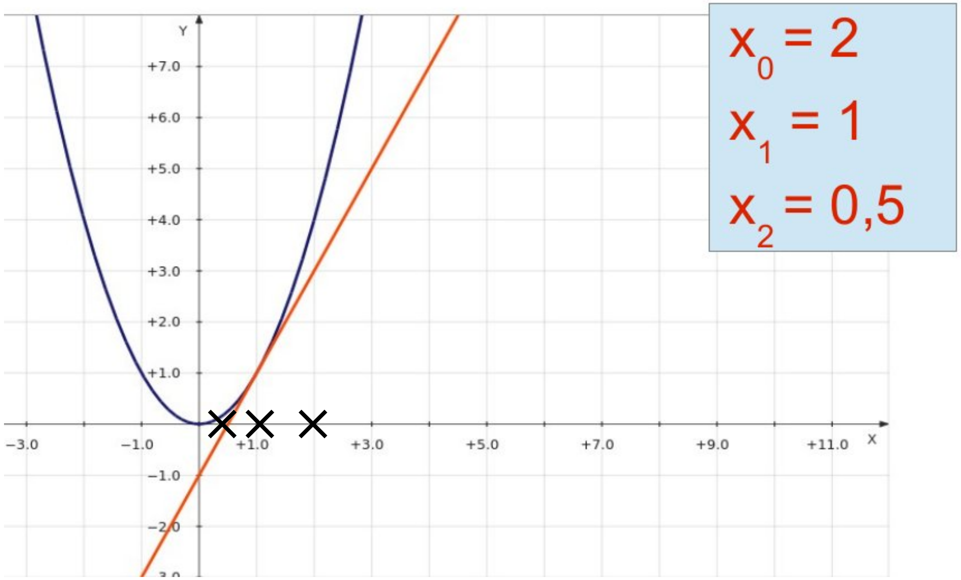
- Nullstellenberechnung einer (nicht-linearen) Funktion: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Idee: Approximation der Funktion mittels Tangente
  → Nullstelle der Tangente als nächste Annäherung
- Vorschrift: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$




$x_0 = 2$
$x_1 = 1$
$x_2 = 0,5$

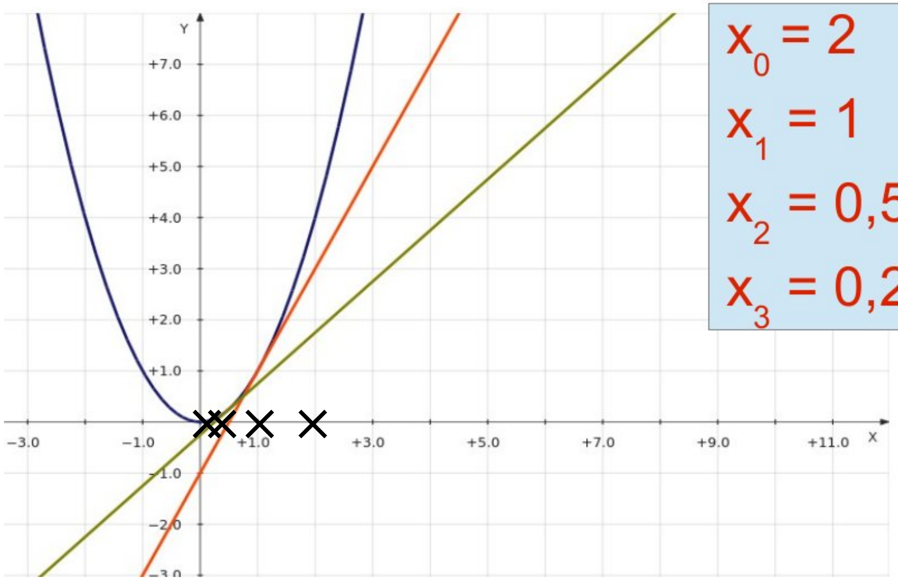
# Newton Verfahren

- Nullstellenberechnung einer (nicht-linearen) Funktion: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Idee: Approximation der Funktion mittels Tangente
  → Nullstelle der Tangente als nächste Annäherung
- Vorschrift: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



# Newton Verfahren

- Nullstellenberechnung einer (nicht-linearen) Funktion: $f(x) \stackrel{!}{=} 0$
- Idee: Approximation der Funktion mittels Tangente
  → Nullstelle der Tangente als nächste Annäherung
- Vorschrift: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$




$x_0 = 2$

$x_1 = 1$

$x_2 = 0,5$

$x_3 = 0,25$

# Newton Verfahren

- Nullstellenberechnung einer (nicht-linearen) Funktion: $f(x) \overset{!}{=} 0$
- Idee: Approximation der Funktion mittels Tangente
  → Nullstelle der Tangente als nächste Annäherung
- Iterationsvorschrift: $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
- Vorteile:
  - Quadratische Konvergenz bei einfacher Nullstelle (da $\Phi'(x^*) = 0$)
  - Bei mehrfachen Nullstellen existieren Modifikationen (siehe Skript)
- Nachteil:
  - Nur lokale Konvergenz (Startpunkt „muss bereits in der Nähe liegen“)
    → guter Anfangspunkt bekannt oder Annäherung mit anderem Verfahren

# Newton Verfahren

- Iterationsvorschrift Herleitung aus Tangentengleichung:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \overset{!}{=} 0$$
$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \Phi(x_k)$$

- Quadratische Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) = &\quad 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \Rightarrow \Phi'(x^*) = 0 \\
\text{Taylor:}\quad \Phi(x_k) = &\quad \Phi(x^*) + \Phi'(x^*)(x_k - x^*)/1! + \Phi''(x^*)(x_k - x^*)^2/2! + \ldots \\
\Phi(x_k) - \Phi(x^*) = &\quad x_{k+1} - x^* = \Phi'(x^*)(x_k - x^*)/1! + \Phi''(x^*)(x_k - x^*)^2/2! + \ldots \\
x_{k+1} - x^* = &\quad \Phi''(x^*)(x_k - x^*)^2/2! + \ldots
\end{aligned}$$

# Newton Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 4**

a) Newton Verfahren bei Gerade

b) Beispielrechnung für andere Funktionen

# Newton Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 4**

# Newton Verfahren

**Bearbeitung Aufgabe 4**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Zusatzaufgabe**

# Iterative Verfahren

**Bearbeitung Zusatzaufgabe**