Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Hans-Joachim Bungartz
Hayden Liu Weng
Sebastian Wolf
Michael Obersteiner

WiSe 2021/22

Numerisches Programmieren, Übungen

Musterlösung 11. Übungsblatt: Iterative Verfahren I

1) Iterative Verfahren für lineare Gleichungssyteme

Für große lineare Gleichungssyteme kann es unter Effizienzgesichtspunkten interessant sein, anstelle der direkten Gauss-Elimination, ein iteratives Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems zu verwenden. Die vielleicht einfachsten Varianten iterativer Löser werden u.a. als **Splitting-Verfahren** bezeichnet.

a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, M \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}^n$, der den Splitting-Verfahren zugrundeliegenden Iterationsfunktion

$$\Phi(x) := x + M^{-1}(b - Ax) \ , \tag{1}$$

auch die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ ist!

b) Durch Festlegung der Matrix M in Formel (1) erhält man unterschiedliche Splitting-Verfahren. Bei der Auswahl von M sollten folgende Kriterien berücksichtigt werden:

(i) M sollte möglichst schnell invertierbar sein und

(ii) M sollte die Matrix A möglichst gut approximieren!

Ordnen Sie die Vorschläge $M_1 = I_n$, $M_2 = A$ und $M_3 = \text{diag}(A)$ nach dem Grad der Erfüllung der beiden obigen Kriterien.

c) Entwickeln Sie einen Pseudo-Code für die Durchführung einer Iteration nach Formel (1) unter Verwendung von $M_3 = \text{diag}(A)$!

d) Das in Teilaufgabe c) entwickelte Verfahren wird Jacobi-Verfahren genannt. Es lässt sich hinsichtlich Konvergenzgeschwindigkeit und Speicherbedarf noch deutlich verbessern. Machen Sie einen Vorschlag zur Verbesserung des Verfahrens! Wie ändert sich dadurch die Iterationsvorschrift in Matrixnotation?

Lösung:

a) $x_* = x_* + M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
$0 = M^{-1}(b - Ax_*) \Leftrightarrow$
$0 = b - Ax_* \Leftrightarrow$
$Ax_* = b$

b)

Matrix	Invertierbarkeit	Approximation von A
I_n	schnell	schlecht
A	langsam	gut
$\text{diag}(A)$	mittel	mittel

c) $M_3 = \text{diag}(A)$
$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} + \text{diag}(A)^{-1}(b - Ax^{(k)})$
Betrachtet man nur eine Komponente von $x^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)}) - a_{ii} x_i^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, i \neq j}^{n} (a_{ij} x_j^{(k)}) \right) \end{aligned}$$

Daraus lässt sich folgender Pseudo-Code entwickeln:

```
function jacobi
   for i = 1:n
      summe = b(i);
      for l = 1:n
         if (l != i)
            summe -= a(i,l)*x_alt(l);
         end
      end
      x_neu(i) = summe/a(i,i);
   end
   return;
```

d) Idee: Alte Approximation sofort überschreiben.
Verfahren: Die Matrix M ist nun anstatt der Diagonalen von A das komplette linke, untere Dreieck (inklusive Diagonale) von A.

2) Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des linearen Gleichungssystems mittels Gauß-Elimination.

b) Führen Sie drei Schritte des Jacobi-Verfahrens durch um eine näherungsweise Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu erhalten. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)}$ den Nullvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

   Vergleichen Sie ihr Endergebnis $x^{(3)}$ mit der exakten Lösung aus Teilaufgabe a).

c) Führen Sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens durch um eine näherungsweise Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu erhalten. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)}$ wieder den Nullvektor.

   Vergleichen Sie abschließend ihr Endergebnis $x^{(2)}$ mit der exakten Lösung aus Teilaufgabe a) und mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

Lösung:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 \end{array}\right)$

Rückwärtssubstitution:

$x_3 = 0$
$\frac{3}{2}x_2 + 0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = -1$
$2x_1 + 1 + 0 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$

Endergebnis: $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) • $i = 0$:

$$\begin{aligned}
r^{(0)} &= b - Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(0)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
y_2^{(0)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
y_3^{(0)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(0)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(1)} &= x^{(0)} + y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $i = 1$:

$$\begin{aligned}
r^{(1)} &= b - Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\
y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(2)} &= x^{(1)} + y^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- $i = 2$:

$$\begin{aligned}
r^{(2)} &= b - Ax^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \\
y_1^{(2)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
y_2^{(2)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
y_3^{(2)} &= \frac{1}{a_{33}} r_3^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
x^{(3)} &= x^{(2)} + y^{(2)} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)
- $i = 0$:
  - $k = 1$:

$$\begin{aligned}
r_1^{(0)} &= b_1 - \sum_{j=1}^{0} a_{1j} x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{3} a_{1j} x_j^{(0)} = \\
&= -1 - (0) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0) = -1 \\
y_1^{(0)} &= \frac{1}{a_{11}} r_1^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \\
x_1^{(1)} &= x_1^{(0)} + y_1^{(0)} = 0 + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  - $k = 2$:

$$\begin{aligned}
r_2^{(0)} &= b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j^{(1)} - \sum_{j=2}^{3} a_{2j} x_j^{(0)} = \\
&= -1 - (-1 \cdot -\frac{1}{2}) - (2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0) = -\frac{3}{2} \\
y_2^{(0)} &= \frac{1}{a_{22}} r_2^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \\
x_2^{(1)} &= x_2^{(0)} + y_2^{(0)} = 0 + -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

- $k=3$:

$$\begin{aligned} r_3^{(0)} &= b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(1)} - \sum_{j=3}^{3} a_{3j}x_j^{(0)} = \\ &= 0-(1\cdot -\frac{1}{2}+(-1)\cdot -\frac{3}{4})-(-2\cdot 0) = -\frac{1}{4} \\ y_3^{(0)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(0)} = -\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\ x_3^{(1)} &= x_3^{(0)}+y_3^{(0)} = 0+\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- $i=1$:
  - $k=1$:

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= b_1 - \sum_{j=1}^{0} a_{1j}x_j^{(2)} - \sum_{j=1}^{3} a_{1j}x_j^{(1)} = \\ &= -1-0-(2\cdot -\frac{1}{2}+(-1)\cdot -\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{8}) = -\frac{7}{8} \\ y_1^{(1)} &= \frac{1}{a_{11}}r_1^{(1)} = \frac{1}{2}\cdot -\frac{7}{8} = -\frac{7}{16} \\ x_1^{(2)} &= x_1^{(1)}+y_1^{(1)} = -\frac{1}{2}+-\frac{7}{16} = -\frac{15}{16} \end{aligned}$$

  - $k=2$:

$$\begin{aligned} r_2^{(1)} &= b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j}x_j^{(2)} - \sum_{j=2}^{3} a_{2j}x_j^{(1)} = \\ &= -1-(-1\cdot -\frac{15}{16})-(2\cdot -\frac{3}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{8}) = -\frac{5}{16} \\ y_2^{(1)} &= \frac{1}{a_{22}}r_2^{(1)} = \frac{1}{2}\cdot -\frac{5}{16} = -\frac{5}{32} \\ x_2^{(2)} &= x_2^{(1)}+y_2^{(1)} = -\frac{3}{4}+-\frac{5}{32} = -\frac{29}{32} \end{aligned}$$

  - $k=3$:

$$\begin{aligned} r_3^{(1)} &= b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}x_j^{(2)} - \sum_{j=3}^{3} a_{3j}x_j^{(1)} = \\ &= 0-(1\cdot -\frac{15}{16}+(-1)\cdot -\frac{29}{32})-(-2\cdot\frac{1}{8}) = \frac{9}{32} \\ y_3^{(1)} &= \frac{1}{a_{33}}r_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{32} = -\frac{9}{64} \\ x_3^{(2)} &= x_3^{(1)}+y_3^{(1)} = \frac{1}{8}+-\frac{9}{64} = -\frac{1}{64} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{16} \\ -\frac{29}{32} \\ -\frac{1}{64} \end{pmatrix}$$

3) Verfahren des steilsten Abstiegs

Führen Sie zwei Schritte des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* (steepest descent) aus, um eine iterative Lösung für das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Gesucht ist also $x^{(2)}$. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Jede Iteration des *Verfahrens des steilsten Abstiegs* entspricht dabei den folgenden drei Schritten:

1) Berechnung des aktuellen Residuums $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$
2) Berechnung der optimalen Schrittweite $\alpha^{(i)} = \frac{r^{(i)T} r^{(i)}}{r^{(i)T} A r^{(i)}}$
3) Berechnung des aktuellen Zwischenergebnisses $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha^{(i)} r^{(i)}$

Lösung: Erste Iteration:

$$\begin{aligned}
r^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\alpha^{(0)} &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \\
x^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zweite Iteration:

$$\begin{aligned}
r^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\alpha^{(1)} &= \frac{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \\
x^{(2)} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4) Spezielle Newton-Verfahren

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = mx + b$.

(i) Bestimmen Sie die Nullstelle von f auf direktem Weg!

(ii) Formulieren Sie für die Funktion f das Newton-Verfahren! Nach wievielen Iterationen hat das Verfahren die Nullstelle gefunden?

b) (i) Formulieren Sie das Newton-Verfahren für die Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (alternativ: $f(x) = x^2 - 8x + 15$)!

(ii) Berechnen Sie die ersten 4 Iterierten sowohl für den Startwert $x_0 = 2$ als auch für den Startwert $\tilde{x}_0 = -2$ (alternativ: $x_0 = 2$ und $\tilde{x}_0 = 6$)! Gegen welche Werte konvergieren die beiden Folgen der Iterierten?

Lösung:

a) (i) $x_* = -\frac{b}{m}$

(ii) $x_{k+1} = -\frac{b}{m}$ beschreibt direkt die Nullstelle!
(direktes Einsetzen in Funktion liefert 0)

b) (i)

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 3}{2x_k - 2}$$

und alternativ:

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 - 15}{2x_k - 8}$$

(ii)

	$x_{k+1} = \frac{x_k^2+3}{2x_k-2}$		$x_{k+1} = \frac{x_k^2-15}{2x_k-8}$	
x_0	2	-2	2	6
x_1	$3,5$	$-1,16667$	$2,75$	$5,25$
x_2	$3,05$	$-1,00641$	$2,975$	$5,025$
x_3	$3,0006$	$-1,000010$	$2,9997$	$5,0030$
x_4	$3,00000$	$-1,0$	$3,000000$	$5,0000000$

Man beobachtet lokale Konvergenz zu jeweils beiden Nullstellen beider Parabeln, da die angegebenen Startwerte entsprechend gewählt sind.

Zum Abschluss dieses Übungsblattes folgt eine Aufgabe zum tieferen Verständnis der Konvergenz des Verfahrens des steilsten Abstiegs. Sie wird weder im Tutorium besprochen noch ist sie klausurrelevant. Jedoch stellt sie einen interessanten Zusammenhang zwischen der Konvergenzgeschwindigkeit und der Kondition der betrachteten Systemmatrix her.

5) Vertiefung: Konvergenz des Verfahrens des steilsten Abstiegs

a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$||x^* - x^{(k+1)}||_A \le \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)} \right) ||x^* - x^{(k)}||_A,$$

wobei $||x||_A := \sqrt{x^T A x}$ gilt. x^* bezeichnet das Minimum von (**??**).

Hinweise:

- Betrachten Sie den Ausdruck
$$\frac{||x^* - x^{(k+1)}||_A^2}{||x^* - x^{(k)}||_A^2}$$
und setzen Sie die Iterationsvorschrift ein.
- Um den Ausdruck zu vereinfachen, beachten Sie die Beziehung zwischen dem Fehler $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$ und dem Residuum $r^{(k)} = b - A\,x^{(k)}$:
$$r^{(k)} = -A\,e^{(k)}.$$
- Verwenden Sie abschließend die **Ungleichung von Kantorovic** für symmetrisch positiv definite Matrizen A:
$$\frac{x^T A x \cdot x^T A^{-1} x}{(x^T x)^2} \le \frac{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2}{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}.$$
Ein Beweis der Ungleichung ist nicht notwendig.

b) Für symmetrisch positiv definite Matrizen gilt

$$\kappa_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) die folgende Fehlerabschätzung für die Methode des steilsten Abstiegs:

$$||x^* - x^{(k)}||_A \le \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A.$$

Was bedeutet dies für die Konvergenz des Verfahrens im Fall von Matrizen A mit sehr großen Konditionszahlen $\kappa_2(A)$?

Lösung:

a) Nutzen wir die Beziehungen

$$A(x^* - x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)}, \qquad x^* - x^{(k)} = A^{-1}r^{(k)}, \qquad e^{(k)} = -A^{-1}r^{(k)}$$

(da A symmetrisch positiv definit und damit invertierbar ist) sowie die optimale Schrittweite

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}},$$

(vgl. Augabe 3) aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{||x^* - x^{(k+1)}||_A^2}{||x^* - x^{(k)}||_A^2} &= \frac{(x^* - x^{(k+1)})^T A (x^* - x^{(k+1)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\
&= \frac{(x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(x^* - x^{(k)})^T A (x^* - x^{(k)})} \\
&= \frac{(-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})^T A (-e^{(k)} - \alpha_k r^{(k)})}{(-e^{(k)})^T A (-e^{(k)})} \\
&= \frac{((A^{-1} r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})^T A ((A^{-1} r^{(k)}) - \alpha_k r^{(k)})}{((A^{-1} r^{(k)}))^T A (A^{-1} r^{(k)})} \\
&= \frac{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} - 2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{2\alpha_k (r^{(k)})^T r^{(k)} + \alpha_k^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{2\frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}} (r^{(k)})^T r^{(k)} - \left(\frac{(r^{(k)})^T r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A r^{(k)}}\right)^2 (r^{(k)})^T A r^{(k)}}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)}} \\
&= 1 - \frac{((r^{(k)})^T r^{(k)})^2}{(r^{(k)})^T A^{-1} r^{(k)} \cdot (r^{(k)})^T A r^{(k)}} \\
&\overset{\text{Kantorovic}}{\leq} 1 - \frac{4\lambda_{\max}(A)\lambda_{\min}(A)}{(\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A))^2} \\
&= \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen (alle Terme sind positiv, so dass kein Betrag notwendig ist!) liefert schließlich

$$||x^* - x^{(k+1)}||_A \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}\right) ||x^* - x^{(k)}||_A.$$

b) Wenden wir die Ungleichung k Mal an (für jeden Iterationsschritt ein Mal), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
||x^* - x^{(k)}||_A &\leq \left(\frac{\lambda_{\max}(A) - \lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(A)}\right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A \\
&= \left(\frac{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} - 1}{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} + 1}\right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A \\
&= \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1}\right)^k ||x^* - x^{(0)}||_A,
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für die Kondition von Matrizen, die symmetrisch positiv definit sind, gilt:

$$\kappa_2(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \lambda_{\max}(A) \cdot \lambda_{\max}(A^{-1}) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$