Übung 3 - Numerisches Programmieren

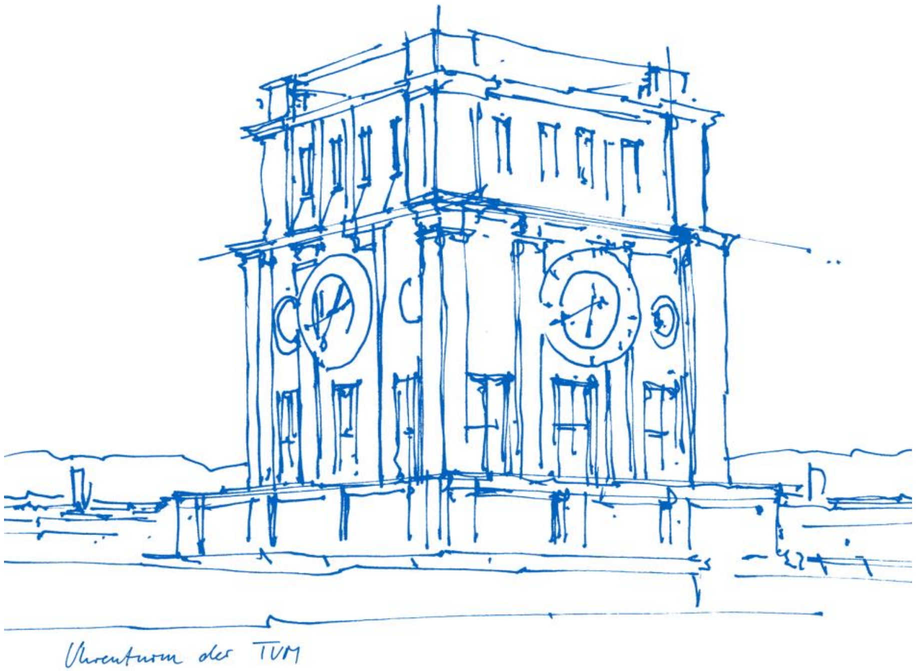
Hayden Liu Weng

Technische Universität München

Fakultät für Informatik

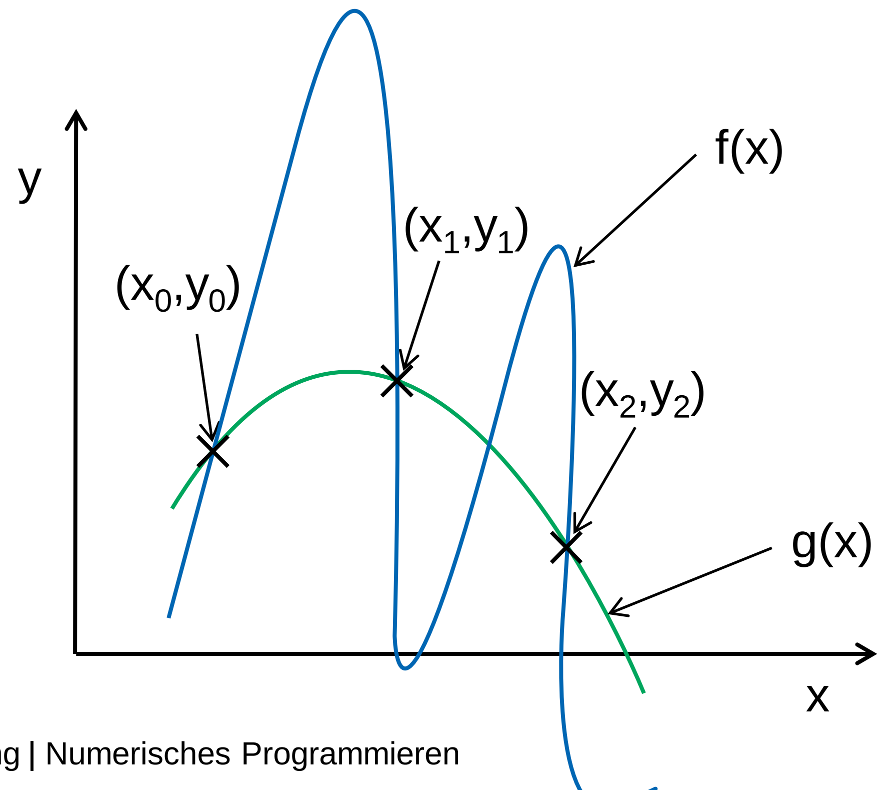
Lehrstuhl für Wissenschaftliches Rechnen

BigBlueButton, 10. Nov 2021



Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von $f(x)$
- Gesucht: $f(x)$
- Vorgehen: Konstruiere $g(x)$ mit $g(x_i) = f(x_i)$ und idealerweise $g(x) \approx f(x)$



Interpolation

- Gegeben: Stützpunkte (x_i, y_i) als Samples von $f(x)$
- Gesucht: $f(x)$
- Vorgehen: Konstruiere $g(x)$ mit $g(x_i) = f(x_i)$ und idealerweise $g(x) \approx f(x)$

- Ansatz: $g(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \cdot c_i$

- Lösung: $\boldsymbol{A}c = y \qquad A_{i,j} = g_j(x_i)$

- Typische Wahl für Basisfunktionen bei Polynominterpolation:
  - Monome: $g_i(x) = x^i$
  - Newtonverfahren: $g_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$
  - Lagrangepolynome: $g_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Monom Basis

b) Trigonometrische Basis

c) Tchebycheff Basis

d) Lagrange Basis

Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpolation

Bearbeitung Aufgabe 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Interpolation: Vergleich Basisfunktionen

- Komplexität für Lösung des Gleichungssystems:
  - Monome → Vandermonde Matrix → $O(n^3)$
  - Newton → Dreiecks Matrix → $O(n^2)$
  - Lagrange → Identitätsmatrix Matrix → $O(1)$ (trivial)
- Komplexität für Auswertung von g(x):
  - Monome (Hornerschema) → $O(n)$
  - Newton (Hornerschema) → $O(n)$
  - Lagrange → $O(n^2)$

→ Kosten-Nutzen: am besten bei Newton Verfahren

- Sonderfall Aitken-Neville Methode:
  - Ähnlich wie Newton aber nur einzelne Funktionsauswertungen

    → Nur bei wenigen Auswertungen rentabel (sonst Newton)

Newton Verfahren zur Interpolation

- Initialisierung: $$c_{i,0} = f(x_i) = y_i \tag{1}$$
- Iterationsvorschrift: $$c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}. \tag{2}$$
- Darstellung:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & c_{0,0} = y_0 & \rightarrow & c_{0,1} & \rightarrow & c_{0,2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & c_{1,0} = y_1 & \rightarrow & c_{1,1} & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & c_{2,0} = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

- Polynom: $$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)\ . \tag{3}$$

Interpolation mit Newton Verfahren

Bearbeitung Aufgabe 2

$$P_0 = \binom{0}{3}, P_1 = \binom{1}{0}, P_2 = \binom{2}{1} \qquad P_3 = \binom{1{,}5}{0}$$

a) Berechne Newton Polynom für P_0 bis P_2

b) Weiterer Punkt P_3

$$P_0 = \binom{0}{3}, P_1 = \binom{1}{0}, P_2 = \binom{2}{1} \qquad P_3 = \binom{1,5}{0}$$

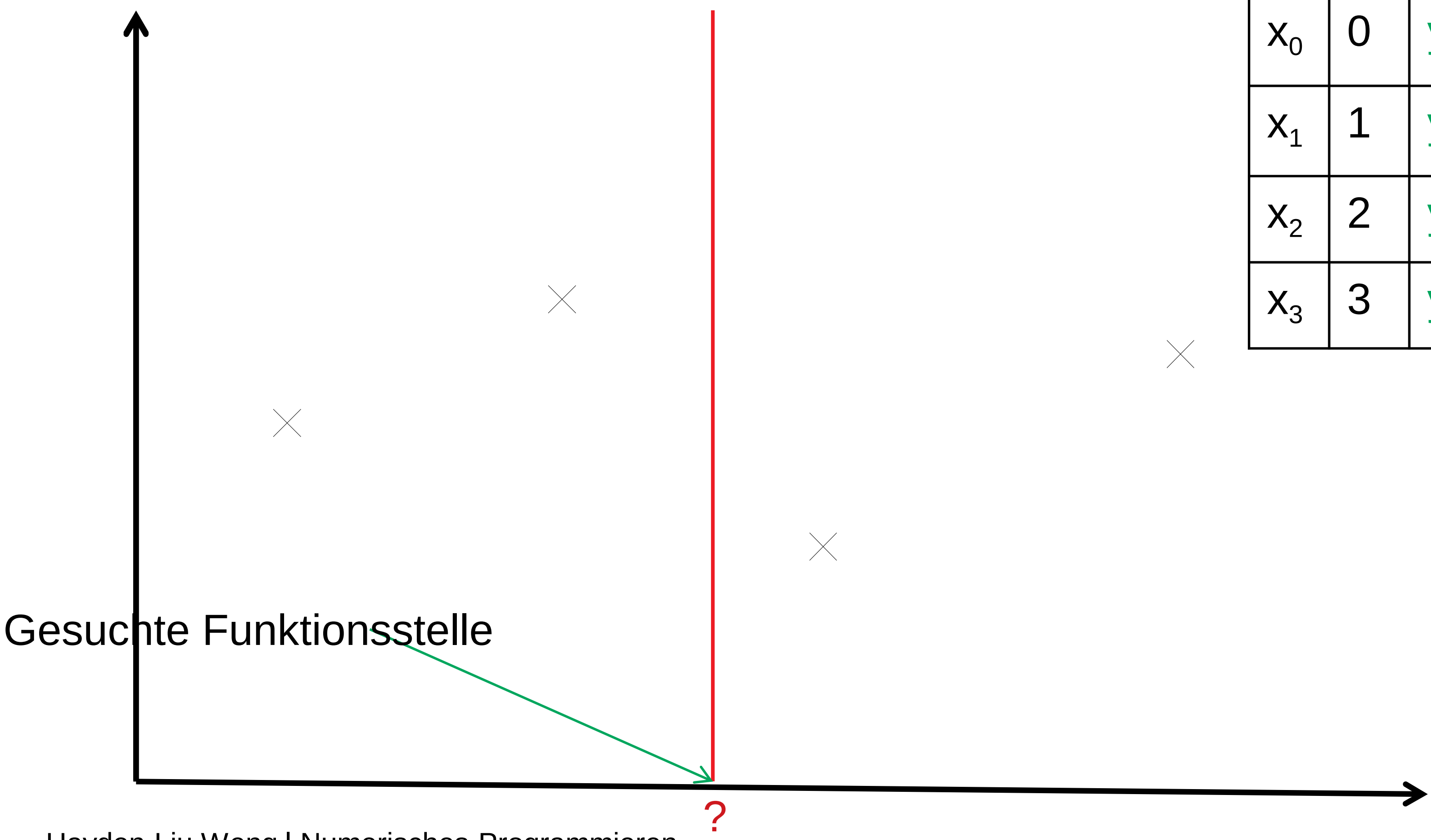
Newton Verfahren zur Interpolation

- Initialisierung: $$c_{i,0} = f(x_i) = y_i \tag{1}$$
- Iterationsvorschrift: $$c_{i,k} = \frac{c_{i+1,k-1} - c_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}. \tag{2}$$
- Darstellung:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & c_{0,0} = y_0 & \rightarrow & c_{0,1} & \rightarrow & c_{0,2} & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & c_{1,0} = y_1 & \rightarrow & c_{1,1} & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & c_{2,0} = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

- Polynom: $$p(x) = c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + \ldots + c_{0,n} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) \ . \tag{3}$$

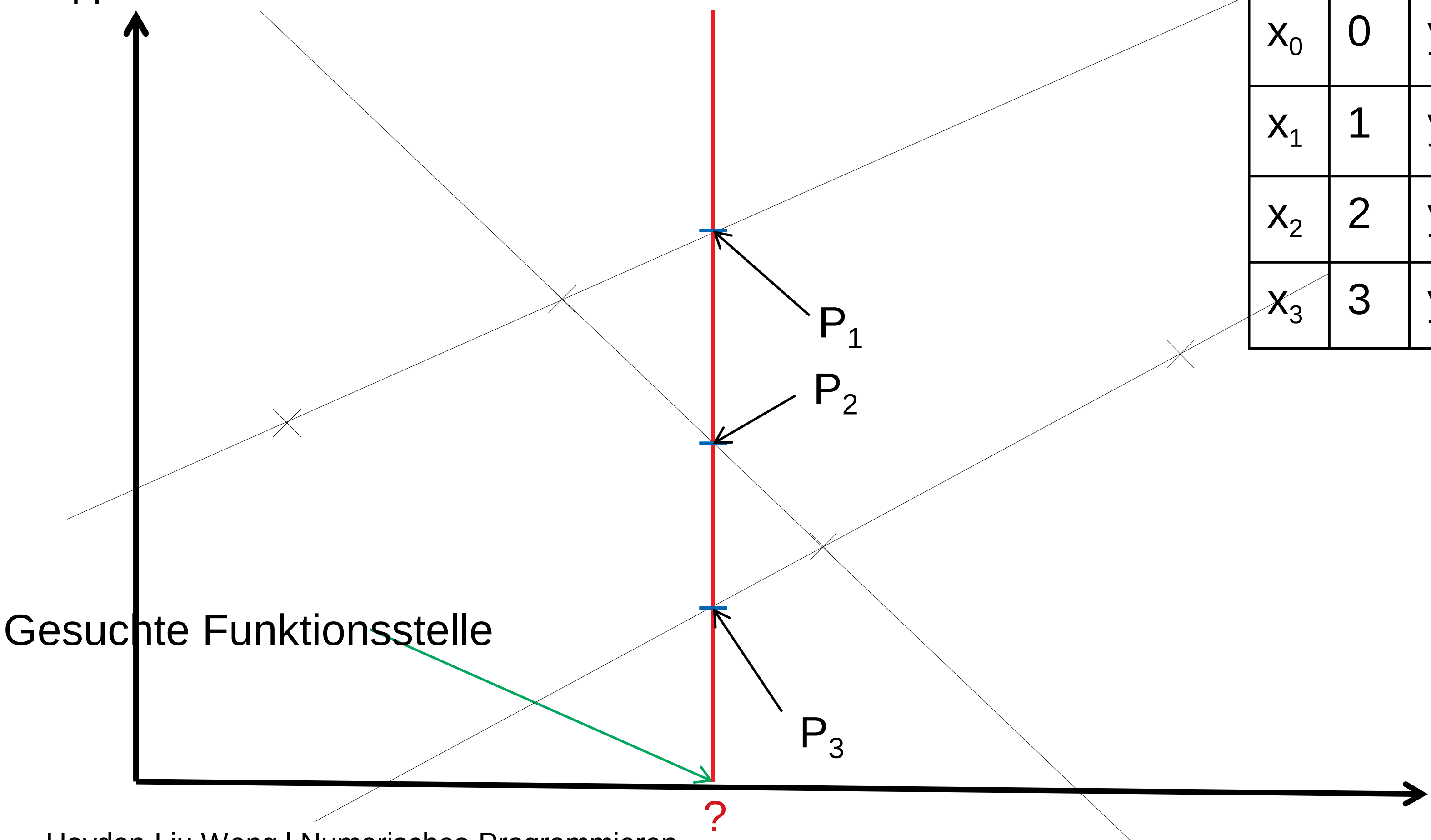
Aitken-Neville graphisch



x_i	i\k	0	1	2	3
x_0	0	y_0			
x_1	1	y_1			
x_2	2	y_2			
x_3	3	y_3			

Aitken-Neville graphisch

Approximation durch Geraden

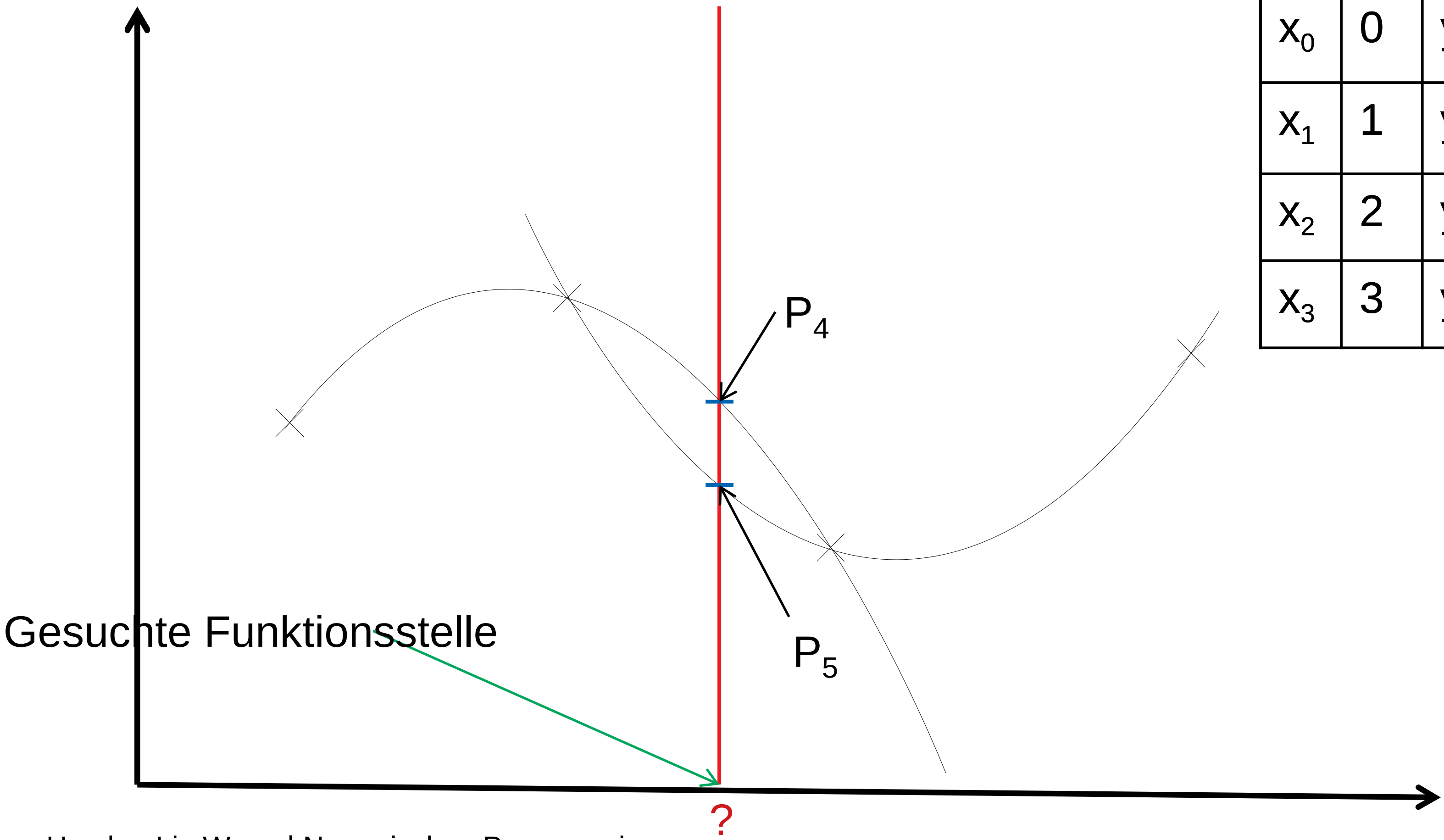


x_i	i\k	0	1	2	3
x_0	0	y_0	P_1		
x_1	1	y_1	P_2		
x_2	2	y_2	P_3		
x_3	3	y_3			

Aitken-Neville graphisch

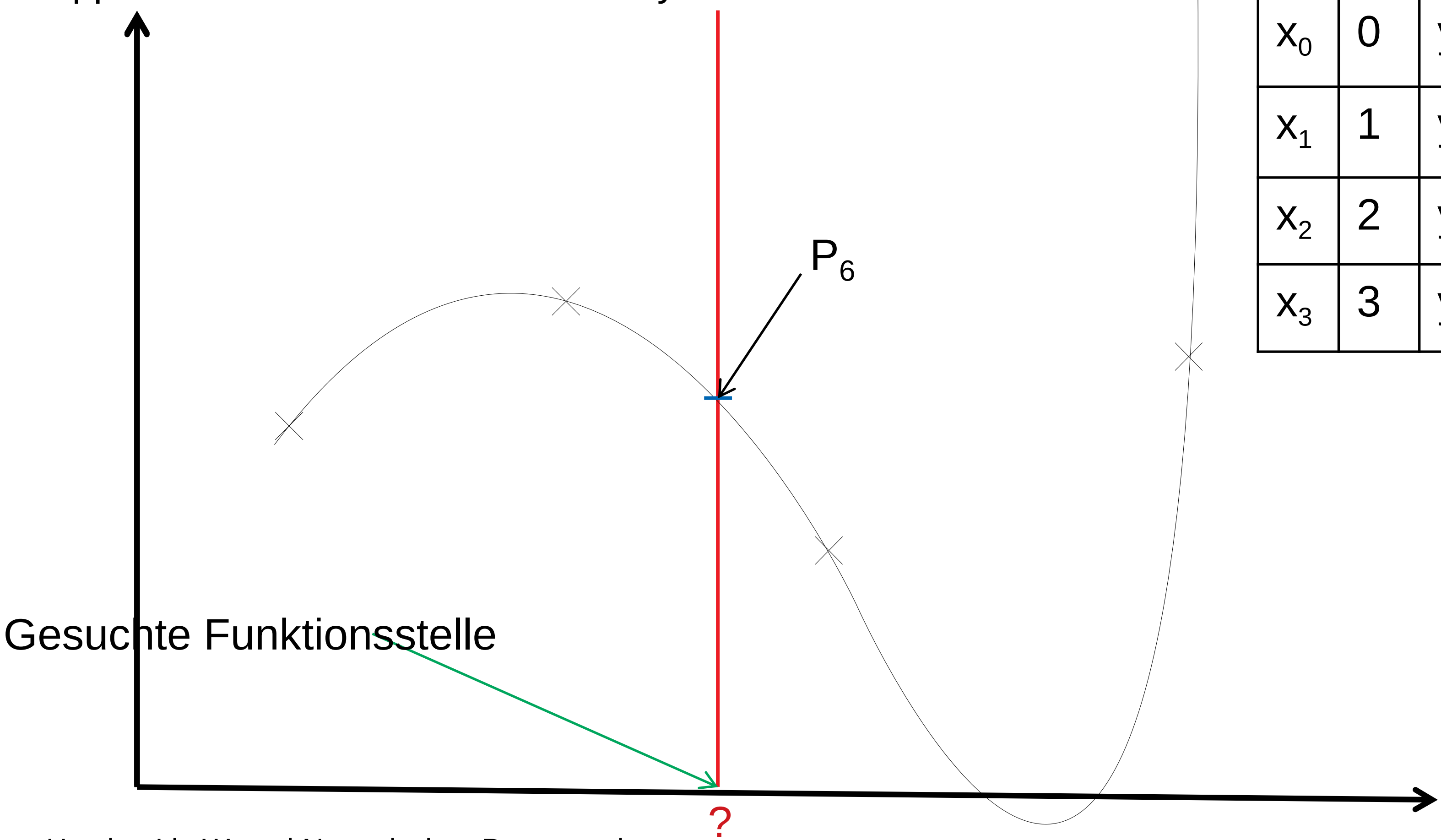
x_i	i\k	0	1	2	3
x_0	0	y_0	P_1	P_4	
x_1	1	y_1	P_2	P_5	
x_2	2	y_2	P_3		
x_3	3	y_3			

Approximation durch Parabel



Aitken-Neville graphisch

Approximation durch kubisches Polynom



x_i	i\k	0	1	2	3
x_0	0	y_0	P_1	P_4	P_6
x_1	1	y_1	P_2	P_5	
x_2	2	y_2	P_3		
x_3	3	y_3			

Aitken-Neville Berechnung

- Initialisierung: $p[i,0] = f(x_i) = y_i$
- Iterationsvorschrift:

$$p[i,k] := p[i,k-1] + (x - x[i])/(x[i+k] - x[i]) * (p[i+1,k-1] - p[i,k-1])$$

- Darstellung:

$$
\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \backslash k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & p[0,0]=y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \boxed{\cdots} \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & p[1,0]=y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & p[2,0]=y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

- Interpolationswert an Stelle x: $p[0,n]$

Interpolation mit Aitken-Neville

Bearbeitung Aufgabe 3

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechne Funktionswert an x=0,5 für Interpolationspolynom für P_0 bis P_2

Aitken-Neville Berechnung

- Initialisierung: $p[i,0] = f(x_i) = y_i$

- Iterationsvorschrift:

$$p[i,k] := p[i,k-1] + (x - x[i])/(x[i+k] - x[i]) * (p[i+1,k-1] - p[i,k-1])$$

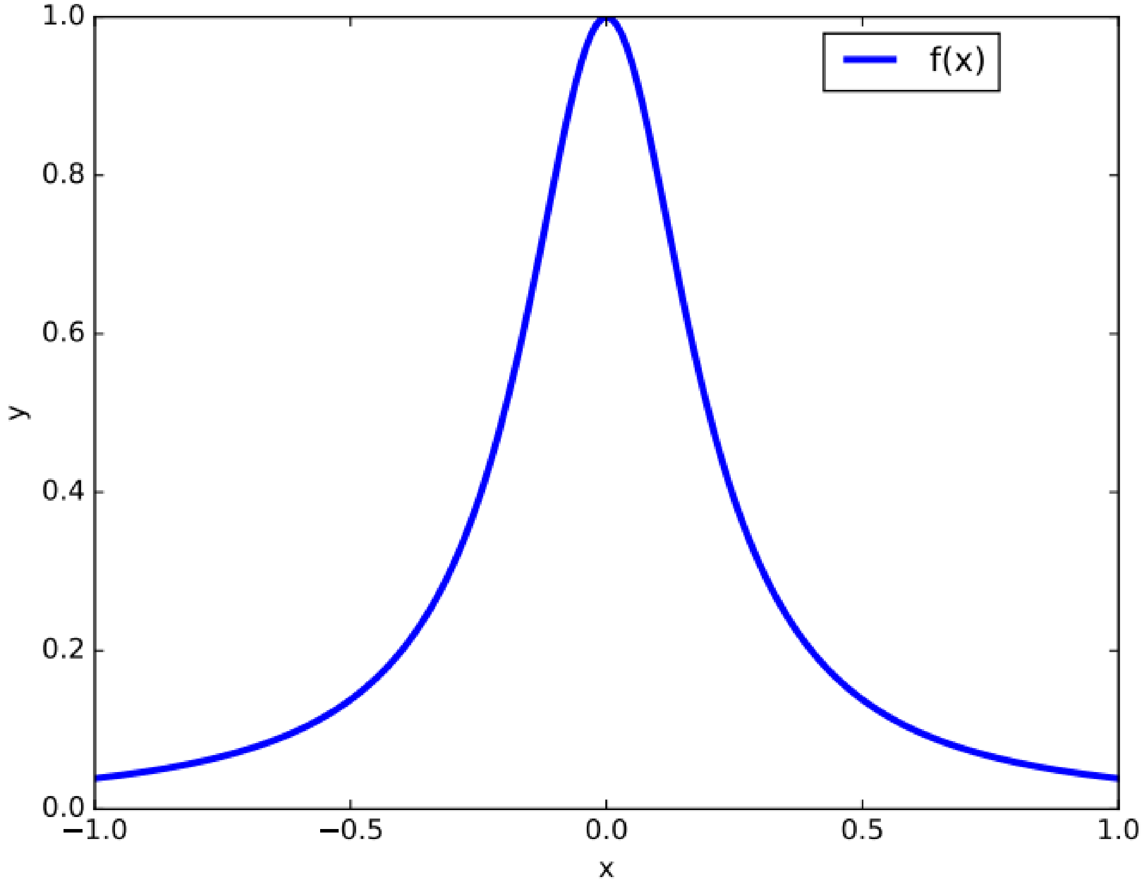
- Darstellung:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
x_i & i \setminus k & 0 & & 1 & & 2 & & \cdots \\
\hline
x_0 & 0 & p[0,0] = y_0 & \rightarrow & p[0,1] & \rightarrow & p[0,2] & \rightarrow & \cdots \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & 1 & p[1,0] = y_1 & \rightarrow & p[1,1] & \rightarrow & \vdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & & \\
x_2 & 2 & p[2,0] = y_2 & \rightarrow & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

- Interpolationswert an Stelle x: $p[0,n]$

Runge Effekt

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$



Runge Effekt bei Interpolation

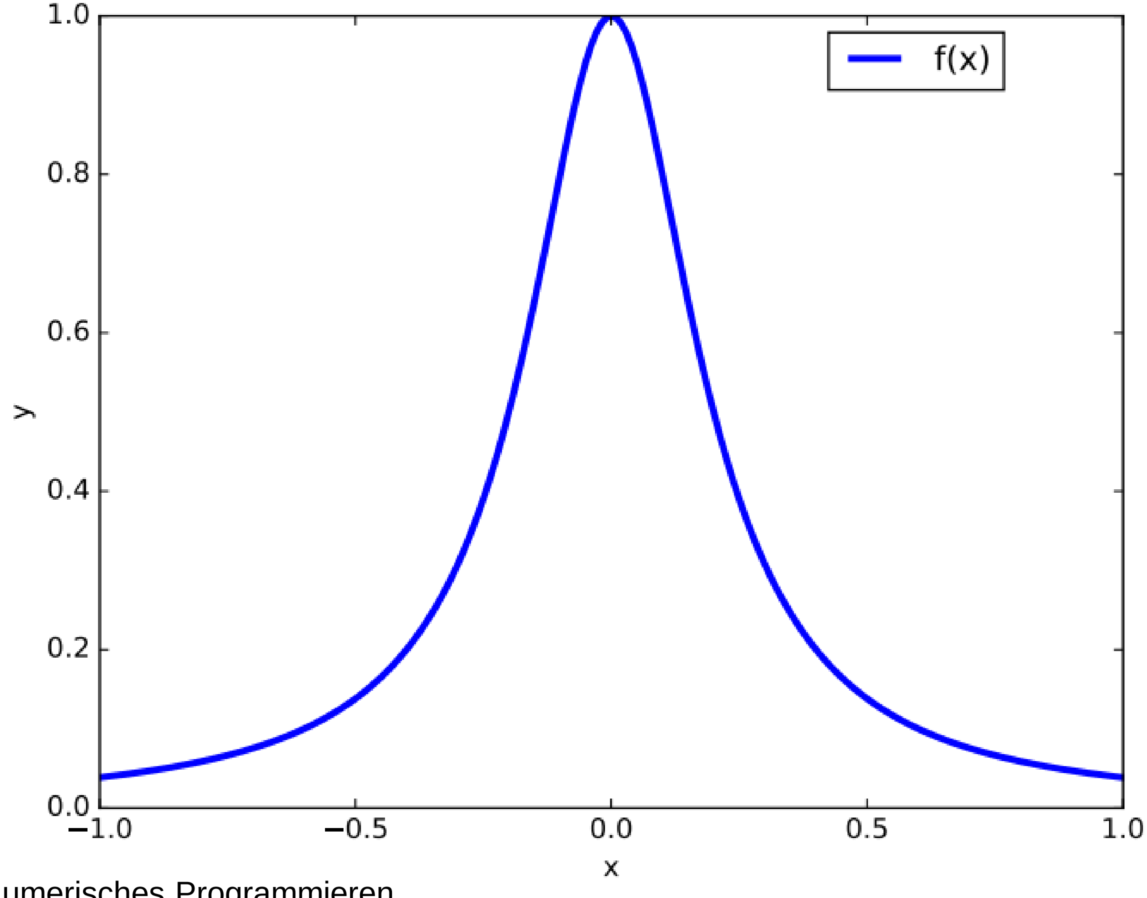
Bearbeitung Aufgabe 4

a) Wie verhält sich das Interpolationspolynom bei wachsender Zahl an Stützpunkten?

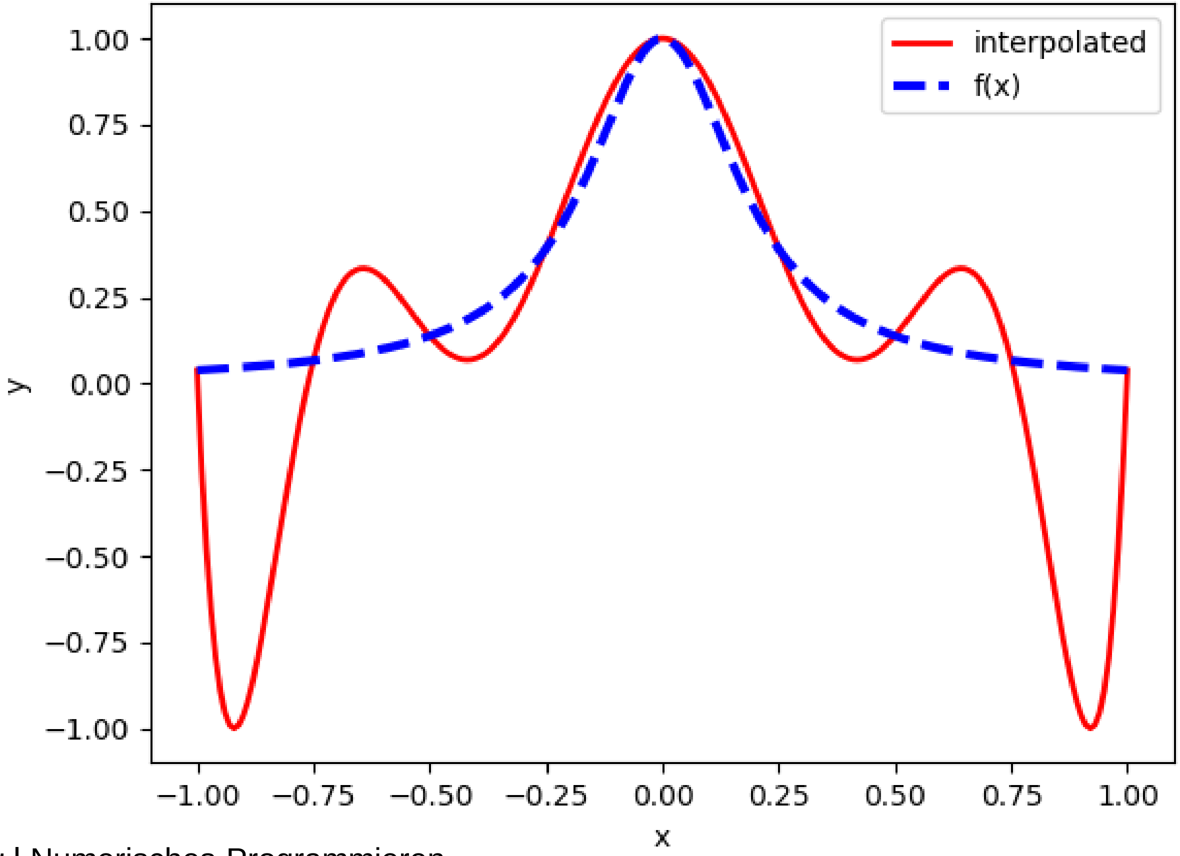
b) Wie könnte man dies verbessern?

c) Zeichnen Sie ihre Vermutungen ein.

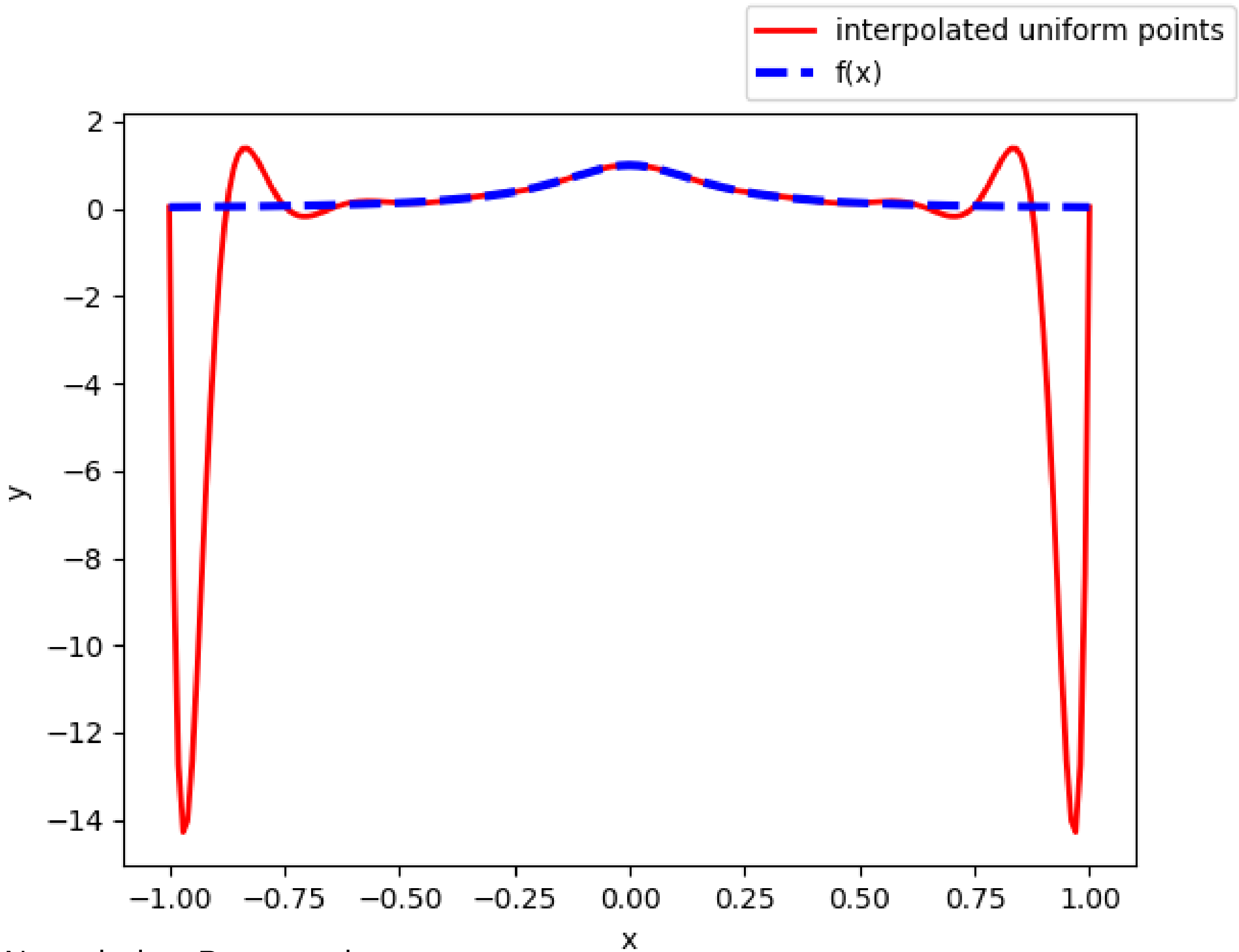
Runge Effekt



Runge Effekt



Runge Effekt



Runge Effekt bei Interpolation

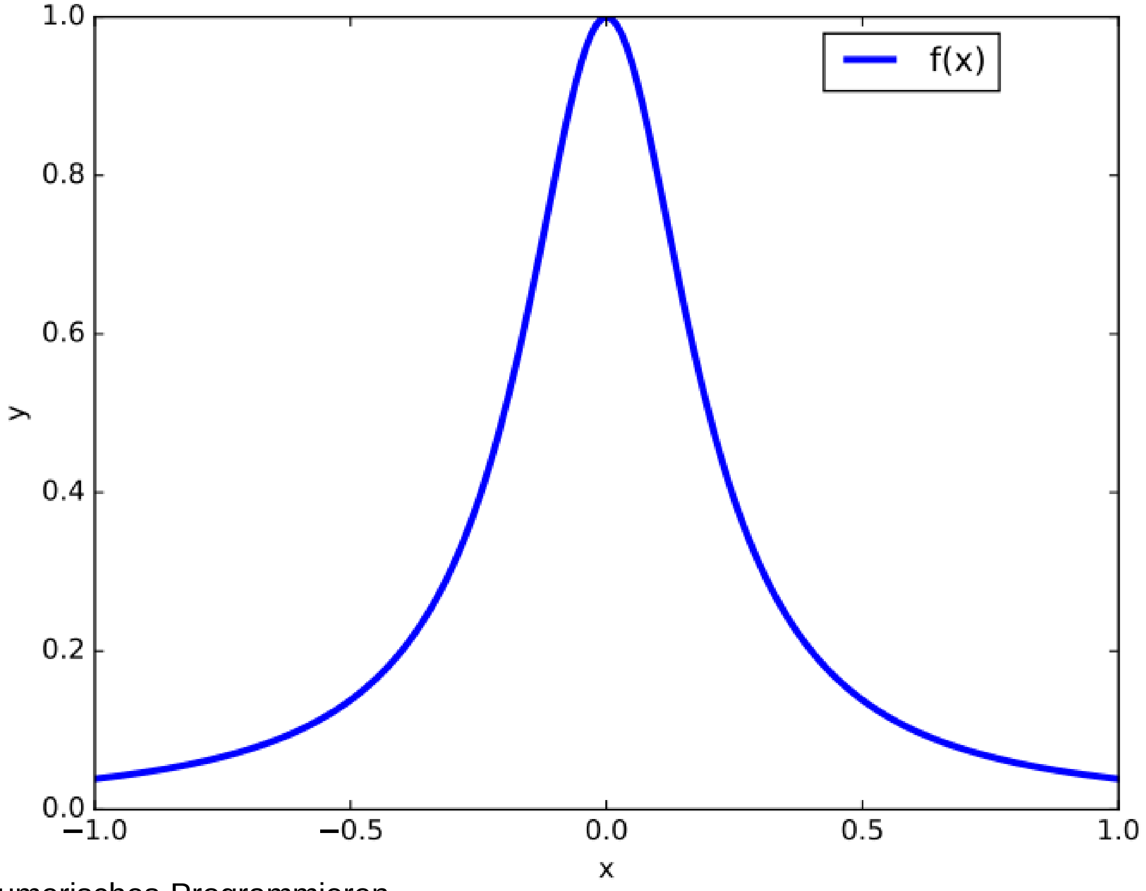
Bearbeitung Aufgabe 4

a) Wie verhält sich das Interpolationspolynom bei wachsender Zahl an Stützpunkten?

b) Wie könnte man dies verbessern?

c) Zeichnen Sie ihre Vermutungen ein.

Runge Effekt



Runge Effekt