NumProg WS 20/21 : Tutorübung 10

1. Begriffe aus der Vorlesung
2. Wiederholung AWP von ODEs + Quadratur
3. Anwendung Euler-Verfahren: Zinsberechnung
4. Mehrschrittverfahren

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

lokaler Diskretisierungsfehler:

globaler Diskretisierungsfehler:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

lokaler Diskretisierungsfehler:

Fehler zwischen analytischer und approximierter

Lösung eines ODEs nach einem Zeitschritt:

$|y_{k+1} - y(t_{k+1})|$,   wobei $y_k = y(t_k)$!

globaler Diskretisierungsfehler:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

lokaler Diskretisierungsfehler:

Fehler zwischen analytischer und approximierter

Lösung eines ODEs nach einem Zeitschritt:

$|y_{k+1} - y(t_{k+1})|$, wobei $y_k = y(t_k)$!

globaler Diskretisierungsfehler:

Größter Fehler zwischen den Approximationen

und analytischen Lösungen für alle Zeitschritte:

$\max\{|y_k - y(t_k)|\}$ *oder*

Der Fehler im letzten Zeitschritt (Ende Intervall):

$|y_N - y(t_N)|$, wobei $I \coloneqq [0, N]$

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

lokaler Diskretisierungsfehler:

Fehler zwischen analytischer und approximierter Lösung eines ODEs nach einem Zeitschritt:

$|y_{k+1} - y(t_{k+1})|$, wobei $y_k = y(t_k)$!

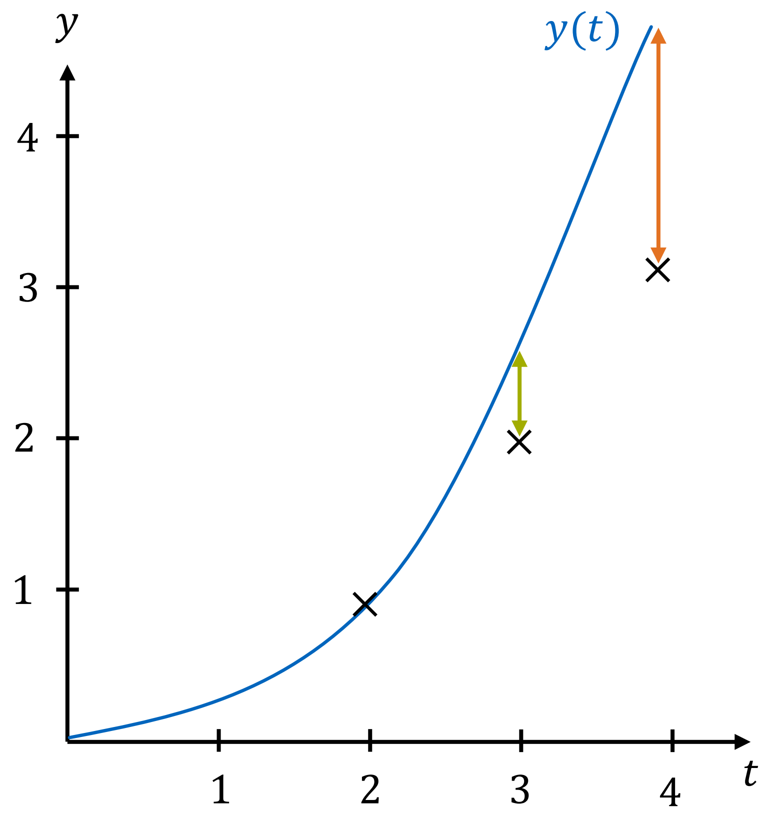
globaler Diskretisierungsfehler:

Größter Fehler zwischen den Approximationen und analytischen Lösungen für alle Zeitschritte:

$\max\{|y_k - y(t_k)|\}$ *oder*

Der Fehler im letzten Zeitschritt (Ende Intervall):

$|y_N - y(t_N)|$, wobei $I := [0, N]$



Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz:

Konsistenz:

Stabilität:

Steifheit:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner globaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz:

Stabilität:

Steifheit:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner globaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner lokaler Diskretisierungsfehler

Stabilität:

Steifheit:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner globaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner lokaler Diskretisierungsfehler

Stabilität: Die Summe kleiner lokaler Fehler ergibt einen kleinen globalen Fehler

(Kein Verstärken kleiner lokaler Fehler)

Steifheit:

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner globaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner lokaler Diskretisierungsfehler

Stabilität: Die Summe kleiner lokaler Fehler ergibt einen kleinen globalen Fehler (Kein Verstärken kleiner lokaler Fehler)

Steifheit: Gelten Konvergenz, Konsistenz und Stabilität nur für sehr kleine δt, so nennt man das dazugehörige ODE steif.

Wichtige Begriffe aus der Vorlesung

Konvergenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner globaler Diskretisierungsfehler

Konsistenz: kleine Zeitschritte $\delta t \rightarrow$ kleiner lokaler Diskretisierungsfehler

Stabilität: Die Summe kleiner lokaler Fehler ergibt einen kleinen globalen Fehler (Kein Verstärken kleiner lokaler Fehler)

Steifheit: Gelten Konvergenz, Konsistenz und Stabilität nur für sehr kleine δt, so nennt man das dazugehörige ODE steif.

Konvergenz $\longrightarrow$ Konsistenz

Konvergenz $\longleftrightarrow$ Konsistenz + Stabilität

Quadratur und AWP-Lösung

Hauptsatz Integral-/ Differentialrechnung: $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt$

„Dumme Rechtecksregel": $\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a) \cdot f(a)$

Trapezregel: $\int_a^b f(t)\,dt \approx (b-a) \cdot \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$

Euler-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)$

Heun-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \frac{1}{2}\Big(f(t_k, y_k) + f\big(t_{k+1}, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k)\big)\Big)$

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) =$

analytische Funktion: $y(t) =$

Startkapital: $y_0 =$

Zinssatz: $\frac{p}{100} =$

Bank	**Verfahren**	**Schrittweite [Jahr]**	**Kontostand nach einem Jahr**
Diga-Bank			
Spaßkasse			
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) =$

Startkapital: $y_0 =$

Zinssatz: $\frac{p}{100} =$

Bank	**Verfahren**	**Schrittweite [Jahr]**	**Kontostand nach einem Jahr**
Diga-Bank			
Spaßkasse			
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 =$

Zinssatz: $\frac{p}{100} =$

Bank	Verfahren	Schrittweite [Jahr]	Kontostand nach einem Jahr
Diga-Bank			
Spaßkasse			
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 = 100.000€$

Zinssatz: $\frac{p}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Bank	Verfahren	Schrittweite [Jahr]	Kontostand nach einem Jahr
Diga-Bank			
Spaßkasse			
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 = 100.000€$

Zinssatz: $\frac{p}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Bank	Verfahren	Schrittweite [Jahr]	Kontostand nach einem Jahr
Diga-Bank	Euler-Verfahren	1	102.000,00€
Spaßkasse			
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 = 100.000€$

Zinssatz: $\frac{p}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Bank	**Verfahren**	**Schrittweite [Jahr]**	**Kontostand nach einem Jahr**
Diga-Bank	Euler-Verfahren	1	$102.000{,}00€$
Spaßkasse	Euler-Verfahren	$\frac{1}{4}$	$102.015{,}05€$
Virtuelle Bank			

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 = 100.000€$

Zinssatz: $\frac{p}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Bank	Verfahren	Schrittweite [Jahr]	Kontostand nach einem Jahr
Diga-Bank	Euler-Verfahren	1	$102.000{,}00€$
Spaßkasse	Euler-Verfahren	$\frac{1}{4}$	$102.015{,}05€$
Virtuelle Bank	Analytische Lösung	kontinuierlich	$102.020{,}13€$

Zinsberechnung

ODE: $y'(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)$

analytische Funktion: $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{pt}{100}}$

Startkapital: $y_0 = 100.000€$

Zinssatz: $\frac{p}{100} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Bank	**Verfahren**	**Schrittweite [Jahr]**	**Kontostand nach einem Jahr**
Diga-Bank	Euler-Verfahren	1	$102.000{,}00€$
Spaßkasse	Euler-Verfahren	$\frac{1}{4}$	$102.015{,}05€$
Virtuelle Bank	Analytische Lösung	kontinuierlich	$102.020{,}13€$

$\approx \Delta 15€$

$\approx \Delta 5€$

Mehrschrittverfahren

Bisher haben wir nur mit Einschrittverfahren gerechnet, also die analytische Lösung Zeitschritt für Zeitschritt approximiert.

Dabei wurde jede Lösung an einem Zeitschritt nur mit der Lösung im vorherigen Teilschritt berechnet, **alle anderen Lösungen davor wurden verworfen**.

Mehrschrittverfahren

Bisher haben wir nur mit Einschrittverfahren gerechnet, also die analytische Lösung Zeitschritt für Zeitschritt approximiert.
Dabei wurde jede Lösung an einem Zeitschritt nur mit der Lösung im vorherigen Teilschritt berechnet, **alle anderen Lösungen davor wurden verworfen**.

Bei **Mehrschrittverfahren** nutzen wir nicht nur die Lösung direkt vor dem aktuellen Zeitschritt, sondern auch noch **weitere Lösungen zuvor**.

Mehrschrittverfahren

Bisher haben wir nur mit Einschrittverfahren gerechnet, also die analytische Lösung Zeitschritt für Zeitschritt approximiert.
Dabei wurde jede Lösung an einem Zeitschritt nur mit der Lösung im vorherigen Teilschritt berechnet, **alle anderen Lösungen davor wurden verworfen**.

Bei **Mehrschrittverfahren** nutzen wir nicht nur die Lösung direkt vor dem aktuellen Zeitschritt, sondern auch noch **weitere Lösungen zuvor**.

Konkret behandeln wir hier in Aufgabe 4 ein Zweischrittverfahren, die Mittelpunktsregel.

Mittelpunktsregel

Die Mittelpunktsregel ist ein **Zweischrittverfahren**.

Wir benutzen die zwei Lösungen in den **vorherigen zwei Zeitschritten**, um die Lösung im **aktuellen Zeitschritt** zu berechnen.

Um starten zu können, benötigen wir neben y_0 auch noch y_1, welches wir durch ein einfacheres Einschrittverfahren (hier Euler) berechnen.

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta t$$

$$y_0 \text{ gegeben}$$

$$y_1 = y_0 + \delta t \cdot f(t_0, y_0) \qquad \text{expliziter Euler}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k) \qquad k \in [1, N-1]$$