Exercice 1 *Questions de cours*

1. (a) Rappeler la définition d'une suite croissante.
   Une suite (u_n) est dite croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.

   (b) Rappeler la définition d'une suite majorée.
   Une suite (u_n) est dite majorée si l'ensemble $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, c'est-à-dire si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

   (c) Soit (u_n) une suite croissante majorée.
   Démontrer que (u_n) converge vers $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
   On définit l'ensemble $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Par définition, α est le plus petit des majorants de A.
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Alors $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A puisque $\alpha - \varepsilon < \alpha$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} > \alpha - \varepsilon$.
   De plus, (u_n) est croissante donc pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$.
   Finalement, on en déduit que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} & \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon \\ \text{donc} \quad & \alpha - \varepsilon < u_n < \alpha + \varepsilon \\ \text{donc} \quad & \boxed{|u_n - \alpha| < \varepsilon} \end{aligned}$$

   Donc (u_n) converge vers α.

2. Soit (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - \sqrt{5n}$.

   (a) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n < -99$.
   On cherche le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} u_n < -99 \quad & \Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{5n} < -99 \\ & \Leftrightarrow \quad -\sqrt{5n} < -100 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{5n} > 100 \\ & \Leftrightarrow \quad 5n > 10000 \\ & \Leftrightarrow \quad n > 2000 \\ & \Leftrightarrow \quad n \geqslant 2001 \end{aligned}$$

   donc on en déduit que $n_0 = 2001$.

   (b) Montrer, à l'aide de la définition, que (u_n) a pour limite $-\infty$.
   Soit $A \in \mathbb{R}$, on cherche un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} u_n < A \quad & \Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{5n} < A \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{5n} < A - 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{5n} > 1 - A. \quad (\star) \end{aligned}$$

   Si $1 - A < 0$ (c'est-à-dire si $A > 1$) alors $(\star)$ est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Si $1 - A \geqslant 0$ (c'est-à-dire si $A \leqslant 1$), alors

$$\begin{aligned} (\star) \quad & \Leftrightarrow \quad 5n > (1-A)^2 \\ & \Leftrightarrow \quad n > \frac{(1-A)^2}{5} \\ & \Leftrightarrow \quad n \geqslant E\left(\frac{(1-A)^2}{5}\right) + 1. \end{aligned}$$

   Finalement

$$n_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } A > 1 \\ E\left(\dfrac{(1-A)^2}{5}\right) + 1 & \text{si } A \leqslant 1. \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

(a) $u_n = \dfrac{\sqrt{2}n^3 - 4n + 1}{3 + n^2 - 3n^3}$.
On a un quotient de deux polynômes en n donc on procède par équivalents ce qui nous donne $u_n \sim \dfrac{\sqrt{2}n^3}{-3n^3} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{-3}$. Donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{-3}$.

(b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n+k}}$.
Pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
1 \leqslant k \leqslant n \quad &\Rightarrow \quad n+1 \leqslant n+k \leqslant 2n \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{n+k} \leqslant \sqrt{2n} \quad \text{(par croissance de la fonction racine carrée)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \text{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^{+*}\text{)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{n}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

On somme la dernière inégalité pour k allant de 1 à n, et on obtient

$$\frac{n^2}{\sqrt{n+1}} \geqslant u_n \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{2n}}.$$

De plus, on a $\dfrac{n^2}{\sqrt{2n}} = \dfrac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc on en déduit par théorème de comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.
Pour $k \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$, on a

$$\begin{aligned}
1 \leqslant k \leqslant 2n+1 \quad &\Rightarrow \quad n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+2n+1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} \geqslant \frac{1}{n^2+k} \geqslant \frac{1}{n^2+2n+1} \quad \text{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^{+*}\text{)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{n}{n^2+1} \geqslant \frac{n}{n^2+k} \geqslant \frac{n}{n^2+2n+1}
\end{aligned}$$

On somme la dernière inégalité pour k allant de 1 à $2n+1$, et on obtient

$$\frac{n(2n+1)}{n^2+1} \geqslant u_n \geqslant \frac{n(2n+1)}{n^2+2n+1}.$$

De plus, on a $\dfrac{n(2n+1)}{n^2+1} \sim \dfrac{2n^2}{n^2} \sim 2$ et $\dfrac{n(2n+1)}{n^2+2n+1} \sim \dfrac{2n^2}{n^2} \sim 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2n+1)}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(2n+1)}{n^2+2n+1} = 2$.

Donc on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

(d) $u_n = \sqrt{4n^2 - n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 2}$.
Pour lever l'indéterminée, on utilise la quantité conjuguée

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{4n^2 - n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 2} \\
&= \frac{(\sqrt{4n^2 - n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 2})(\sqrt{4n^2 - n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 2})}{\sqrt{4n^2 - n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 2}} \\
u_n &= \frac{-2n}{\sqrt{4n^2 - n + 2} + \sqrt{4n^2 + n + 2}},
\end{aligned}$$

puis on factorise par le terme dominant au numérateur et au dénominateur

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-2n}{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}} \\ &= \frac{-2n}{n\left(\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)} \\ u_n &= \frac{-2}{\sqrt{4-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-2}{2\sqrt{4}} = \dfrac{-1}{2}$.

(e) $u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$.
On a

$$u_n = \frac{5^n\left(1-\frac{3^n}{5^n}\right)}{5^n\left(1-\frac{3^n}{5^n}\right)} = \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}.$$

Or, $-1 < \dfrac{3}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(f) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + 1}$.
On a

$$u_n = \frac{n^3\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{\sin(n)}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{4+\frac{\sin(n)}{n^2}+\frac{1}{n^2}}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \sin(n) < 1$ donc $\dfrac{-1}{n^2} < \dfrac{\sin(n)}{n^2} < \dfrac{1}{n^2}$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n^2} = 0$.

On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
Finalement, cela nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3 *Suite itérative*

Soit (u_n) définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 3}.$$

Pour $x \in [-3, +\infty[$, on pose $f(x) = 2\sqrt{x+3}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.
   f est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.
   Pour tout $x \in [-2, +\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} > 0.$$
   Donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   Comme f est croissante on sait d'après le cours que (u_n) est monotone. De plus, $u_0 = -1$ et $u_1 = 2\sqrt{2}$ donc $u_1 > u_0$. On en déduit donc que (u_n) est croissante (et même strictement croissante).

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 6$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: $-1 \leqslant u_n \leqslant 6$.
   Initialisation : On a $u_0 = -1$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant 6$. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
On a

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant u_n \leqslant 6 \\ \text{donc} \quad & f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6) \quad (\text{car } f \text{ est croissante sur } [-2,+\infty[) \\ \text{donc} \quad & 2\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$ donc que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

4. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 6 donc elle converge vers un réel noté ℓ. De plus, comme f est continue sur $[-2,+\infty[$, on en déduit que ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire que ℓ est solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x+3} = x \quad & \Rightarrow \quad 4(x+3) = x^2 \\ & \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 12 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-12) = 16 + 48 = 64 = 8^2$ donc l'équation à deux solutions :

$$x_1 = \frac{4-8}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+8}{2} = 6.$$

Or, d'après la question précédente on sait que $\ell \in [-1,6]$ donc comme $x_1 \notin [-1,6]$, on en déduit que $\ell = 6$.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ *Suites croisées*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
En déduire que $(v_n - u_n)$ converge et déterminer sa limite.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n - (2u_n + v_n)}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3}(v_n - u_n).$$

Donc $(v_n - u_n)$ est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\quad \mathcal{P}_n \ : \quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.
   Comme on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, cela signifie que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
   Ainsi, les deux suites sont adjacentes donc elles convergent et ont la même limite, que l'on notera ℓ dans la suite.
   (b) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n + u_n + 2v_n}{3} = \frac{3(u_n + v_n)}{3} = u_n + v_n.$$

   Donc la suite $(u_n + v_n)$ est constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$.

(c) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).
Comme (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, on en déduit que $(u_n + v_n)$ converge vers 2ℓ. Or, c'est une suite constante égale à 3, donc finalement $2\ell = 3$, c'est-à-dire $\ell = \frac{3}{2}$.

3. **Question bonus** : Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Initialisation : On a $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $u_1 = \frac{4}{3}$, $v_1 = \frac{5}{3}$, donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Par hypothèse de récurrence, on a donc $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
Premièrement, cela donne

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + v_{n+1}}{3} = \frac{u_{n+1} + \overbrace{u_{n+1}}^{\leqslant v_{n+1}} + v_{n+1}}{3} \leqslant \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = v_{n+2}.$$

Deuxièmement, on a

$$u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + \overbrace{v_{n+1}}^{\geqslant u_{n+1}}}{3} \geqslant \frac{2u_{n+1} + u_{n+1}}{3} = u_{n+1}.$$

Enfin, on a

$$v_{n+2} = \frac{\overbrace{u_{n+1}}^{\leqslant v_{n+1}} + 2v_{n+1}}{3} \leqslant \frac{v_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = v_{n+1}.$$

En réunissant ces trois points on en déduit donc que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$ donc que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.