Documents interdits. Durée : 1 heure 30.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *(Question de cours).* Rappeler et démontrer la formule de Moivre.
2. *(Application).* Développer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.
3. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

Exercice 2

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$

(b) $z_2 = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})^2}{1 - i}$

Exercice 3

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1 - 5i)z^2 - (7 + 4i)z + 3i - 3 = 0 \quad (E).$$

1. Montrer que i est solution de l'équation (E).
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que
$$z^3 + (1 - 5i)z^2 - (7 + 4i)z + 3i - 3 = (z - i)(z^2 + az + b).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \frac{-4}{1 - i\sqrt{3}}.$$

On détaillera les solutions.

Exercice 5

On munit le plan complexe $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

(a) $|3 - iz| = 2$

(b) $|\bar{z} + 2 - i| = |z - 4|$

(c) $\arg(z + 2 - 2i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 6

Soit T une transformation du plan complexe qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $z' = (1+i)z+2-2i$.

1. Déterminer l'image de $\Omega(2 + 2i)$ par T.
2. Déterminer la nature et les caractéristiques de T.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1 - i)$ et $B(3)$. Déterminer l'équation cartésienne (de la forme $y = ax + b$) de la droite $\mathcal{D}'$ image de la droite $\mathcal{D}$ par T.
Indication : on pourra commencer par déterminer A' et B' les images des points A et B par T.

Exercice 7 ***(Bonus)***

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$. Montrer que

$$\frac{3iz - 1}{z + 3i}$$

est un imaginaire pur si et seulement si z est un imaginaire pur.