Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *(Question de cours).* Rappeler et démontrer la formule de Moivre.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n.$$
   Démonstration : d'une part, on a
   $$|\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)| = \sqrt{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)} = 1 \quad \text{et} \quad \arg(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = n\theta \ [2\pi],$$
   d'autre part, on a
   $$|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)|^n = \left(\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}\right)^n = 1$$
   et
   $$\arg((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) = n\arg(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = n\theta \ [2\pi].$$
   On en déduit donc la formule de Moivre.

2. *(Application).* Développer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$.
   D'après le formule de Moivre, on a
   $$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3,$$
   donc $\cos(3\theta) = \mathcal{R}e((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3)$ et $\sin(3\theta) = \mathcal{I}m((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3)$.
   Or,
   $$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 &= \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i(3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)),\end{aligned}$$
   donc
   $$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

3. En déduire une expression de $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.
   $$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)}{\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)} = \frac{\frac{3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)}{\cos^3(\theta)}}{\frac{\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\cos^3(\theta)}} = \frac{3\tan(\theta) - \tan^3(\theta)}{1 - 3\tan^2(\theta)}.$$

Exercice 2

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$

$|z_1| = \sqrt{2}|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$.
On note $\theta_1 = \arg(z_1)\ [2\pi]$, alors
$$\cos(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Donc
$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

(b) $z_2 = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})^2}{1 - i}$

$|z_2| = \dfrac{|1 + i\sqrt{3}|^2}{|1 - i|} = \dfrac{2^2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
De plus,
$\arg(z_2) = 2 \times \arg(1 + i\sqrt{3}) - \arg(1 - i)\ [2\pi]$.
Or, $\arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$,
donc
$$\arg(z_2) = 2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}\ [2\pi].$$
Donc
$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right).$$

Exercice 3

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1-5i)z^2 - (7+4i)z + 3i - 3 = 0 \quad (E).$$

1. Montrer que i est solution de l'équation (E).
   On a
   $$i^3 + (1-5i)i^2 - (7+4i)i + 3i - 3 = -i - 1 + 5i - 7i + 4 + 3i - 3 = 0,$$
   donc i est bien solution de (E).
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{C}$ tels que
   $$z^3 + (1-5i)z^2 - (7+4i)z + 3i - 3 = (z-i)(z^2 + az + b).$$
   On a
   $$(z-i)(z^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ia)z - ib,$$
   donc par identification on doit avoir
   $$\begin{cases} a - i &= 1 - 5i \\ b - ia &= -7 - 4i \\ -ib &= 3i - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 - 4i \\ b &= -7 - 4i + ia = -7 - 4i + i + 4 = -3 - 3i \\ b &= -3 - 3i. \end{cases}$$
   Ainsi
   $$z^3 + (1-5i)z^2 - (7+4i)z + 3i - 3 = (z-i)(z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
   D'après la question précédente, $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E) si et seulement si
   $$z = i \quad \text{ou} \quad z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i = 0.$$
   Résolvons l'équation $z^2 + (1-4i)z - 3 - 3i = 0 \quad (E')$.
   Le discriminant vaut
   $$\Delta = (1-4i)^2 - 4(-3-3i) = 1 - 8i - 16 + 12 + 12i = -3 + 4i.$$
   On cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$, c'est-à-dire $x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i$. On a donc
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -3 & (1) \\ 2xy &= 4 & (2) \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5. & (3) \end{cases}$$
   $(1) + (3)$ nous donne : $2x^2 = 2$ donc $x^2 = 1$ donc $x = \pm 1$,
   $(3) - (1)$ nous donne : $2y^2 = 8$ donc $y^2 = 4$ donc $y = \pm 2$,
   et (2) nous indique que x et y sont de même signes. Donc, par exemple, $\delta = 1 + 2i$ est une racine carrée de Δ. Les solutions de (E') sont donc :
   $$z_1 = \frac{-(1-4i) - (1+2i)}{2} = -1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(1-4i) + (1+2i)}{2} = 3i.$$
   Finalement, les solutions de (E) sont i, $-1+i$ et $3i$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \frac{-4}{1 - i\sqrt{3}}.$$

On détaillera les solutions.
On a

$$\frac{-4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4e^{i\pi}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Les solutions de l'équation sont donc :

$$z_k = \sqrt[4]{2}\exp\left(i\left(\frac{4\pi}{3\times 4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), \qquad \text{pour } k \in \{0,1,2,3\}.$$

On a donc : $z_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

On munit le plan complexe $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

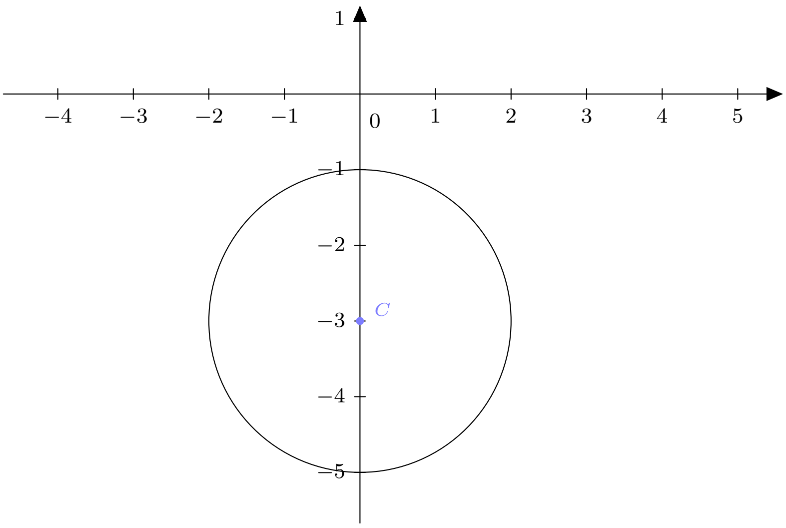
(a) $|3 - iz| = 2$

On a

$$|3 - iz| = \left|-i\left(z + \frac{3}{-i}\right)\right| = |-i| \times \left|z + \frac{3}{-i}\right| = 1 \times \left|z + \frac{3i}{-i\times i}\right| = |z - (-3i)|,$$

donc $|3 - iz| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |z - (-3i)| = 2$.

Donc les points M d'affixe z vérifiant $|3 - iz| = 2$ sont sur le cercle de centre C d'affixe $-3i$ et de rayon 2.



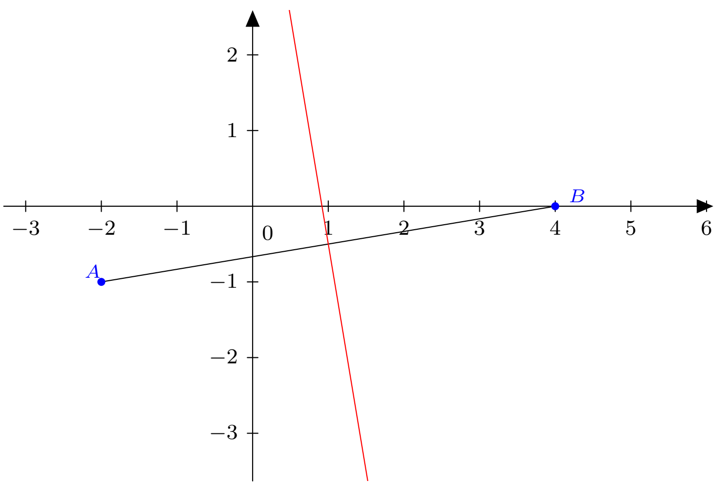
(b) $|\bar{z} + 2 - i| = |z - 4|$

On a

$$|\bar{z} + 2 - i| = |\overline{\bar{z} + 2 - i}| = |z + 2 + i| = |z - (-2 - i)|,$$

donc $|\bar{z} + 2 - i| = |z - 4| \quad \Leftrightarrow \quad |z - (-2 - i)| = |z - 4|$.

Donc les points M d'affixe z vérifiant $|\bar{z} + 2 - i| = |z - 4|$ sont sur la médiatrice du segment $[AB]$ où A a pour affixe $-2 - i$ et B a pour affixe 4.

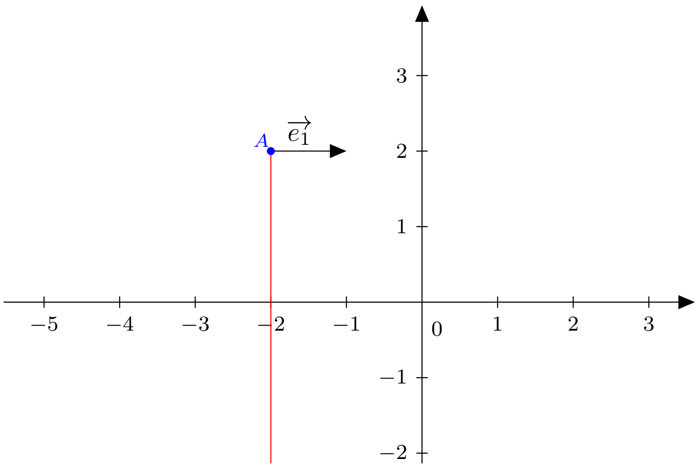


(c) $\arg(z+2-2i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit M d'affixe z vérifiant $\arg(z+2-2i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On définit A le point d'affixe $-2+2i$, alors

$$\arg(z+2-2i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Donc M se situe sur la demi-droite partant de A (avec A exclu) faisant un angle de $-\frac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\overrightarrow{e_1}$.



Exercice 6

Soit T une transformation du plan complexe qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $z' = (1+i)z+2-2i$.

1. Déterminer l'image de $\Omega(2+2i)$ par T.
   On a
   $$(1+i)(2+2i)+2-2i = 2+2i+2i-2+2-2i = 2+2i,$$
   donc $T(\Omega) = \Omega$.

2. Déterminer la nature et les caractéristiques de T.
   T est une similitude directe :
   - de centre $\Omega(2+2i)$,
   - de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$,
   - d'angle $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(1-i)$ et $B(3)$. Déterminer l'équation cartésienne (de la forme $y = ax+b$) de la droite $\mathcal{D}'$ image de la droite $\mathcal{D}$ par T.
   Indication : on pourra commencer par déterminer A' et B' les images des points A et B par T.
   On a $(1+i)(1-i)+2-2i = 4-2i$ donc $A' = T(A)$ a pour affixe $4-2i$,
   et $(1+i)3+2-2i = 5+i$ donc $B' = T(B)$ a pour affixe $5+i$.
   On cherche donc une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}' = (A'B')$ dans le plan complexe $\mathcal{P}$ de la forme $y = ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme A' et B' appartiennent à la droite, a et b doivent vérifier :
   $$\begin{cases} -2 &= 4a+b \\ 1 &= 5a+b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= -2-4a \\ 1 &= 5a+-2-4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b &= -2-4a = -14 \\ a &= 3. \end{cases}$$
   Une équation cartésienne de $\mathcal{D}'$ est donc $y = 3x-14$.

Exercice 7 ***(Bonus)***

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3i\}$. Montrer que

$$\frac{3iz-1}{z+3i}$$

est un imaginaire pur si et seulement si z est un imaginaire pur.

$$\begin{aligned}
\frac{3iz-1}{z+3i} \text{ est un imaginaire pur.} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{3iz-1}{z+3i}\right)} = -\frac{3iz-1}{z+3i} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{3iz-1}}{\overline{z+3i}} = \frac{-3iz+1}{z+3i} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-3i\bar{z}-1}{\bar{z}-3i} = \frac{-3iz+1}{z+3i} \\
&\Longleftrightarrow \quad (-3i\bar{z}-1)(z+3i) = (\bar{z}-3i)(-3iz+1) \\
&\Longleftrightarrow \quad -3iz\bar{z}+9\bar{z}-z-3i = -3iz\bar{z}+\bar{z}-9z-3i \\
&\Longleftrightarrow \quad 8\bar{z} = -8z \\
&\Longleftrightarrow \quad \bar{z} = -z \\
&\Longleftrightarrow \quad z \text{ est un imaginaire pur.}
\end{aligned}$$