Documents et calculatrices interdits. Durée : 1 heure 30.
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1 *Questions de cours*

1. (a) Rappeler la définition d'une suite croissante.
   (b) Rappeler la définition d'une suite majorée.
   (c) Soit (u_n) une suite croissante majorée.
   Démontrer que (u_n) converge vers $\alpha = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2. Soit (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - \sqrt{5n}$.
   (a) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n < -99$.
   (b) Montrer, à l'aide de la définition, que (u_n) a pour limite $-\infty$.

Exercice 2

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

(a) $u_n = \dfrac{\sqrt{2}n^3 - 4n + 1}{3 + n^2 - 3n^3}$.

(b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n+k}}$.

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

(d) $u_n = \sqrt{4n^2 - n + 2} - \sqrt{4n^2 + n + 2}$.

(e) $u_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$.

(f) $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + 1}$.

Exercice 3 *Suite itérative*

Soit (u_n) définie par

$$u_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 3}.$$

Pour $x \in [-3, +\infty[$, on pose $f(x) = 2\sqrt{x+3}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 6$.
4. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ, puis déterminer ℓ.

Exercice 4 *Suites croisées*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   En déduire que $(v_n - u_n)$ converge et déterminer sa limite.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\quad \mathcal{P}_n \ : \quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
   On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.
   (b) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
   (c) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).
3. **Question bonus** : Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.