Méthode de décomposition en éléments simples

On se propose ici d'expliquer les différentes étapes pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$. On s'appuiera tout le long sur un exemple précis :

$$F = \frac{X^4}{X^3 + X^2 + X + 1}.$$

Étape 1 : Trouver la partie entière de F.

Pour cela, on fait la division euclidienne du numérateur de F (ici X^4) par le dénominateur de F (ici $X^3 + X^2 + X + 1$) :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & & & & & X^3 + X^2 + X + 1 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -X^3 & -X^2 & -X & & X - 1 \\ \cline{1-5}
 & -X^3 & -X^2 & -X & & \\
 & +X^3 & +X^2 & +X & +1 & \\ \cline{2-5}
 & & & & 1 &
\end{array}$$

donc $X^4 = (X^3 + X^2 + X + 1)(X - 1) + 1$. La partie entière de F est le quotient de cette division euclidienne, c'est-à-dire $X - 1$. On a

$$F = \underbrace{X - 1}_{\text{partie entière de } F} + \frac{1}{X^3 + X^2 + X + 1}$$

Remarque : si le degré du numérateur de F est strictement inférieur au degré du dénominateur de F alors la partie entière de F vaut 0. On peut alors passer directement à l'étape 2.

Étape 2 : Factoriser le dénominateur de F en produit de polynômes irréductibles.

On pose $Q = X^3 + X^2 + X + 1$ le dénominateur de F.

On cherche les racines complexes de Q.
-1 est une racine évidente de Q car $Q(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.
Donc $X + 1$ divise Q (cf Théorème 1.17 du cours).

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +X^2 & +X & +1 & X + 1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & -X^2 & & & X^2 + 1 \\ \cline{1-4}
 & & X & +1 & \\
 & & -X & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $Q = (X + 1)(X^2 + 1)$.

Dans $\mathbb{R}[X]$, la décomposition est terminée car X^2+1 est irréductible : son discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, la décomposition n'est pas terminée, en effet :

$$X^2+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad X^2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad X=\pm i.$$

D'où la décomposition de Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

$$\boxed{Q=(X+1)(X-i)(X+i)}$$

Remarque : attention à ne pas oublier le coefficient dominant de Q à mettre en tête de la factorisation de Q. Ici le coefficient dominant de Q vaut 1.

Étape 3 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

On a donc

$$F = X-1+\frac{1}{(X+1)(X-i)(X+i)}.$$

On pose $\tilde{F} = \dfrac{1}{(X+1)(X-i)(X+i)}$.

Alors il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\tilde{F} = \frac{1}{(X+1)(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X+1}+\frac{b}{X-i}+\frac{c}{X+i} \qquad (\star)$$

Remarque : si dans la factorisation du dénominateur de $\tilde{F}$, on a un terme de la forme $(X-\beta)^\alpha$, avec $\beta \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$ alors dans la décomposition on aura

$$\frac{a_1}{X-\beta}+\frac{a_1}{(X-\beta)^2}+\cdots+\frac{a_\alpha}{(X-\beta)^\alpha}.$$

Pour déterminer a, on multiplie les deux membres de l'égalité $(\star)$ par $X+1$

$$\frac{1}{(X-i)(X+i)} = a+\frac{b(X+1)}{X-i}+\frac{c(X+1)}{X+i},$$

puis on évalue en $X=-1$:

$$a = \left[\frac{1}{(X-i)(X+i)}\right]_{X=-1} = \frac{1}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1}{2}.$$

De même, on obtient

$$b = \left[\frac{1}{(X+1)(X+i)}\right]_{X=i} = \frac{1}{-2+2i} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

et

$$c = \left[\frac{1}{(X+1)(X-i)}\right]_{X=-i} = \frac{1}{-2i-2} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i.$$

Remarque : la technique que nous venons d'utiliser fonctionne uniquement pour les coefficients au dessus des termes de la forme $(X-\beta)^\alpha$ où α est **maximal**.
Pour les coefficients restants à déterminer, on sera obligé d'utiliser l'une des techniques suivantes :

- évaluer en $X = x_0$ où x_0 est une valeur de notre choix mais **différente des racines du dénominateur de F**,
- multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$.

Finalement, on obtient la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

$$\boxed{F = X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-1-i}{4(X-i)} + \frac{-1+i}{4(X+i)}} \qquad (\star\star)$$

Étape 4 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

On part de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et on réunit les termes dont les **dénominateurs font intervenir des nombres complexes conjugués**. Ici, dans $(\star\star)$, nous allons donc mettre sous le même dénominateur les deux derniers termes de la décomposition :

$$\begin{aligned}
F &= X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-1-i}{4(X-i)} + \frac{-1+i}{4(X+i)} \\
&= X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{(-1-i)(X+i) + (-1+i)(X-i)}{4(X-i)(X+i)} \\
&= X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-X - i - iX + 1 + -X + i + iX + 1}{4(X^2+1)} \\
&= X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-2X+2}{4(X^2+1)}
\end{aligned}$$

Finalement, la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$\boxed{F = X - 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{-X+1}{2(X^2+1)}}$$

Remarque : bien sûr, on ne peut faire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ que si la fraction rationnelle de départ F est à coefficients réels, ce qui était le cas dans notre exemple.