Polynômes et fractions rationnelles

M. Varvenne

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Polynômes

1.1 Structure de $\mathbb{K}[X]$

1.1.1 Opérations et degré

Définition 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **polynôme** P est une expression de la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés **coefficients du polynôme** P et X est appelée **l'indéterminée**.

Le **degré** du polynôme P est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$, on le note $\deg(P)$. Le coefficient a_k correspondant est appelé **coefficient dominant** de P.
Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

Notation 1.2. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1.3. *Un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1 *est dit* ***unitaire***.

Définition 1.4. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $n \leqslant m$. On définit les opérations suivantes :

- $$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k \quad + \quad \underbrace{\sum_{n+1}^{m} b_k X^k}_{\text{n'apparaît que si } n < m.} \quad ,$$
- $$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k,$$
- $$P \times Q = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

On définit aussi le **polynôme dérivé** de P, que l'on note P',

$$P' = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k a_k X^{k-1} & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

Proposition 1.5. *Soient* $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$, *alors*

- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\ \deg(P),\ \deg(Q)\ )$,
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
- $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & si \quad \deg(P) > 0 \\ -\infty & si \quad \deg(P) \leqslant 0. \end{cases}$

Proposition 1.6. *Soient* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$.
Alors $P = Q$ *si et seulement si :*

$$\deg(P) = \deg(Q) \text{ et les coefficients sont égaux 2 à 2, c-à-d : } \forall k, a_k = b_k.$$

Proposition 1.7 (Dérivées successives)**.**
Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $\deg(P) = n$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Alors,*

$$P^{(p)} = \begin{cases} 0 & si \quad p > n \\ \sum_{k=p}^{n} k(k-1)\ldots(k-p+1)X^{k-p} = \sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} X^{k-p} & si \quad p \leqslant n. \end{cases}$$

Remarque 1.8. *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *alors*

$$(\lambda P + Q)^{(k)} = \lambda P^{(k)} + Q^{(k)}.$$

Proposition 1.9 (Formule de Leibniz)**.** *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

1.1.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 1.10. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que B **divise** A et on note $B \mid A$ si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = B \times Q.$$

On dit que A et B sont **associés** si $A \mid B$ et $B \mid A$.

Proposition 1.11. *Soient* $A, B \in \mathbb{K}[X]$. *Alors* A *et* B *sont associés si et seulement si il existe* λ *dans* $\mathbb{K}^*$ *tel que* $A = \lambda B$.

Théorème 1.12 (Division euclidienne)**.** *Soient* $A, B \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$. *Alors il existe un unique couple* $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ *tel que*

$$\begin{cases} A = B \times Q + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Remarque 1.13. *Avec les notations du théorème ci-dessus, on en déduit que* $B \mid A$ *si et seulement si* $R = 0$.

Définition-Théorème 1.14. *Soient* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
- *Tout diviseur commun de* P *et* Q *de degré maximal est appelé* ***pgcd de*** P ***et*** Q. *Tous les pgcd de* P *et* Q *sont associés. En particulier, un seul est unitaire, on l'appelle parfois* ***le*** *pgcd de* P *et* Q.
- P *et* Q *sont dits* ***premiers entre eux*** *si leur pgcd unitaire vaut* 1.

Définition 1.15. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que P est **irréductible** si et seulement si P est non constant et

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad P = AB \quad \Rightarrow \quad A \in \mathbb{K} \text{ ou } B \in \mathbb{K}.$$

1.2 Racines d'un polynôme

Définition 1.16. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une **racine** de P si

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0.$$

Théorème 1.17. *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est une racine de } P \quad &\Longleftrightarrow \quad (X - \alpha) \mid P \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P(X) = (X - \alpha) Q(X). \end{aligned}$$

Définition 1.18. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P.
On appelle **ordre de multiplicité** de α le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X - \alpha)^k \mid P$.

Théorème 1.19. *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *Alors* α *est une racine d'ordre de multiplicité* k *si et seulement si*

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

1.3 Factorisation d'un polynôme

Théorème 1.20 (Théorème de d'Alembert Gauss)**.** *Tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *non constant admet au moins une racine complexe.*

Théorème 1.21. *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ se factorise de manière unique sous la forme suivante :*

- *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*
$$P = a(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2}\dots(X-\alpha_p)^{r_p} = a\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k},$$
*où $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont les racines **complexes** de P d'ordre de multiplicité $r_1,\dots,r_p \in \mathbb{N}^*$ respectivement.*
- *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,*
$$P = a\prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k}\prod_{j=1}^{q}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{s_j},$$
*où $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont les racines **réelles** de P d'ordre de multiplicité $r_1,\dots,r_p \in \mathbb{N}^*$ respectivement, et pour tout $j \in \{1,\dots,q\}$, $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.*

Remarque 1.22.
- *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $aX+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$.*
- *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont de la forme $aX+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$ et de la forme aX^2+bX+c avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\Delta = b^2-4ac < 0$.*

Définition 1.23. Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** si il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire :
$$P = \lambda(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n),$$
où $n \in \mathbb{N}^*$, et $(\lambda, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Théorème 1.24 (corollaire au théorème 1.21)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.*

Définition 1.25. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé de degré n. Pour $k \in \{1,2,\dots,n\}$, on définit les **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, x_2, \dots, x_n$, notées σ_k, par
$$\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}.$$

Proposition 1.26 (Relations coefficients-racines)**.** *Avec les mêmes notations que la définition ci-dessus, on a pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$,*
$$\sigma_k = (-1)^k\,\frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

2 Fractions rationnelles

2.1 Généralités

Définition 2.1. Une **fraction rationnelle** dans $\mathbb{K}$ est un élément de la forme

$$F = \frac{P}{Q}$$

où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $Q \neq 0$.
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 2.2.

- *On a $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$. En effet, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P = \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$.*
- *Pour $F \in \mathbb{K}(X)$, l'écriture sous la forme $F = \frac{P}{Q}$ n'est pas unique. Par exemple,*

$$F = \frac{X^3 + 2X^2 + 4X + 8}{X^2 + 7X + 10} = \frac{(X+2)(X^2+4)}{(X+2)(X+5)} = \frac{X^2+4}{X+5}.$$

Définition-Théorème 2.3. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $F = \frac{A}{B}$ avec B unitaire et A et B premiers entre eux.*
*Cette fraction $\frac{A}{B}$ s'appelle la **représentation irréductible** de F.*

La division euclidienne de A par B : $A = BQ + R$ avec $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg(B)$, nous donne

$$F = \frac{A}{B} = \underbrace{Q}_{\textbf{\textit{partie entière de } F}} + \frac{R}{B}.$$

2.2 Décomposition en éléments simples

Définition 2.4. Un **élément simple de** $\mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle de la forme

$$S = \frac{P}{Q^\alpha}$$

où

- Q est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$,
- P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) < \deg(Q)$,
- $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si $\deg(Q) = 1$, on dit que S est un élément simple de **première espèce** et si $\deg(Q) = 2$, on dit que S est un élément simple de **deuxième espèce**.

Remarque 2.5.

• *Dans* $\mathbb{C}(X)$*, il n'y a que des éléments simples de première espèce, donc de la forme*

$$\frac{\lambda}{(X-\beta)^{\alpha}}$$

avec $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}$*.*

• *Dans* $\mathbb{R}(X)$*, il y a des éléments simples de première et de deuxième espèce, respectivement de la forme*

$$\frac{\lambda}{(X-\beta)^{\alpha}} \quad et \quad \frac{aX+b}{(X^2+\beta X+\gamma)^{\alpha}}$$

avec $a, b, \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$*.*

Théorème 2.6. *Toute fraction rationnelle* F *irréductible peut se décomposer sous la forme*

$$F = E + \sum_{k=1}^{n} S_k$$

où $E \in \mathbb{K}[X]$ *est la partie entière de* F *et* S_k *est un élément simple de* $\mathbb{K}(X)$*.*

Exemple 1. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{C}(X)$

$$F = \frac{1}{(X-1)^2(X-i)(X+i)}.$$

On doit déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-i)} + \frac{d}{(X+i)}.$$

Exemple 2. *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$

$$F = \frac{1}{(X-1)^2(X^2+1)}.$$

On doit déterminer $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$F = \frac{\tilde{a}}{X-1} + \frac{\tilde{b}}{(X-1)^2} + \frac{\tilde{c}X+\tilde{d}}{X^2+1}.$$