Задание к уроку №5.

№1

① $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x+3)-\ln x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x+3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)$

$=0$

② $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x+o(x))}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\frac{o(x)}{x}}{\arcsin 3x}=\frac{2}{0}=\infty$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\ln 7+o(x)-1}{1+x\ln 3+o(x)-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln 7+\frac{o(x)}{x}}{\ln 3+\frac{o(x)}{x}}=$

$=\frac{\ln 7}{\ln 3}=\log_3 7;$

④ $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a-x)\left((x+a)^2+(x+a)\cdot x+x^2\right)}{a}=$

$=\lim\limits_{a\to 0}\frac{a(x^2+2ax+a^2+x^2+ax+x^2)}{a}=\lim\limits_{a\to 0}(3x^2+3ax+a^2)=3x^2;$

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(5x-3)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3-5x^4-x^2}{25x^3+5x-15x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3-x^2}{25x^3-15x^2+5x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3-\frac{1}{x}}{25-\frac{15}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=-\frac{3}{25};$

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot \mathrm{tg}\, 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{(4x)^2}{2}-o((4x)^2)}{2x\cdot(2x+o(2x))}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2-o(x^2)}{4x^2+2x\cdot o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2-o(x^2)}{4x^2+2\,o(x^2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8-\frac{o(x^2)}{x^2}}{4+2\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}}=2;$

⑦ $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right) = \left| x\to\infty \quad t=\frac{1}{x}\to 0 \right| =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\sin t = \lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\cdot\left(t+o(t)\right)\right) =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{o(t)}{t}\right) = 1;$

⑧ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x} = \left| x\to 0;\ t=\operatorname{tg}x\to 0 \right| = \lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$

⑨ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left| \begin{matrix} x\to 0 \\ t=\sin^2 x\to 0 \end{matrix} \right| =$

$= \lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{2t}\cdot 2} = e^{2};$

⑩ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}\cdot x\sin x+o(x\sin x)-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cdot o(x\sin x)}{2x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+2\frac{o(x\sin x)}{x\sin x}\right)\cdot\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};$

№2.

Установить характер разрыва функции в точке x_0

① $f(x)=\frac{x^2-16}{x+4},\quad x_0=-4.$

$\lim\limits_{x\to -4-0}\frac{x^2+16}{x+4} = \left[x+4<0\ \forall x\in(-\infty;-4)\right] = \lim\limits_{x\to -4-}(x^2+16)\cdot\lim\limits_{x\to -4-}\frac{1}{x+4} =$

$= 32\cdot(-\infty) = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to -4+}\frac{x^2+16}{x+4} = \left[x+4>0\ \forall x\in(-4;+\infty)\right] =$

$= \lim\limits_{x\to -4+}(x^2+16)\cdot\lim\limits_{x\to -4+}\frac{1}{x^2+16} = 32\cdot(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -4-} \nexists$ и $\lim\limits_{x\to -4+} \nexists$ $\Rightarrow$ $x_0 = -4$ - точка разрыва 2-го рода.

② $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \left[x < 0 \ \forall x \in (-\infty; 0)\right] = \lim_{x\to 0-} \sin x \cdot \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} =$$

$$= 0 \cdot (-\infty) = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \left[x > 0 \ \forall x \in (0; +\infty)\right] = 0 \cdot (+\infty) = 0$$

$f(x_0) = f(0)$ - неопределенно

Значит $x_0 = 0$ - точка устранимого разрыва

№3.

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0

① $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-1}$, $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} \frac{2}{x-1} = \left[x - 1 < 0 \ \forall x \in (-\infty; 1)\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 1+} \operatorname{arctg} \frac{2}{x-1} = \left[x - 1 > 0 \ \forall x \in (1; +\infty)\right] = \lim_{x\to 1+} \operatorname{arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \operatorname{arctg} \frac{2}{1-1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \neq f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)$$

Значит $x_0 = 1$ - точка разрыва 1 рода и непрерывна справа.

② $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3-} \frac{1}{2^{x-3}-1} = \lim_{x\to 3-} \frac{1}{\frac{2^x}{8}-1} = \lim_{x\to 3-} \frac{8}{2^x-8} =$$

$$= \left[2^x - 8 < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 3) \right] = \frac{8}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{1}{2^{x-3}-1} = \lim_{x\to 3+} \frac{8}{2^x-8} = \frac{8}{+0} = \infty;$$

$\lim\limits_{x\to 3-} \nexists$ и $\lim\limits_{x\to 3+} \nexists$ $\Rightarrow$ $x_0 = 3$ - точка разрыва 2 рода

№ 4.

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{при } |x| \leq 1 \\ |x-1|, & \text{при } |x| \geq 1 \end{cases}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

точки разрыва $x = -1$; $x = 1$;

① $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1-} |x-1| = 2$$

$$f(-1) = 2$$

$$\lim_{x\to -1+} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$f(-1) = 0$$

$\Rightarrow f(-1) = \lim\limits_{x\to -1-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1+} f(x) = f(-1)$

$x = -1$ - это точка разрыва 1-го рода и функция непрерывна слева и справо

② $x = 1$

$$\lim_{x\to 1-} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

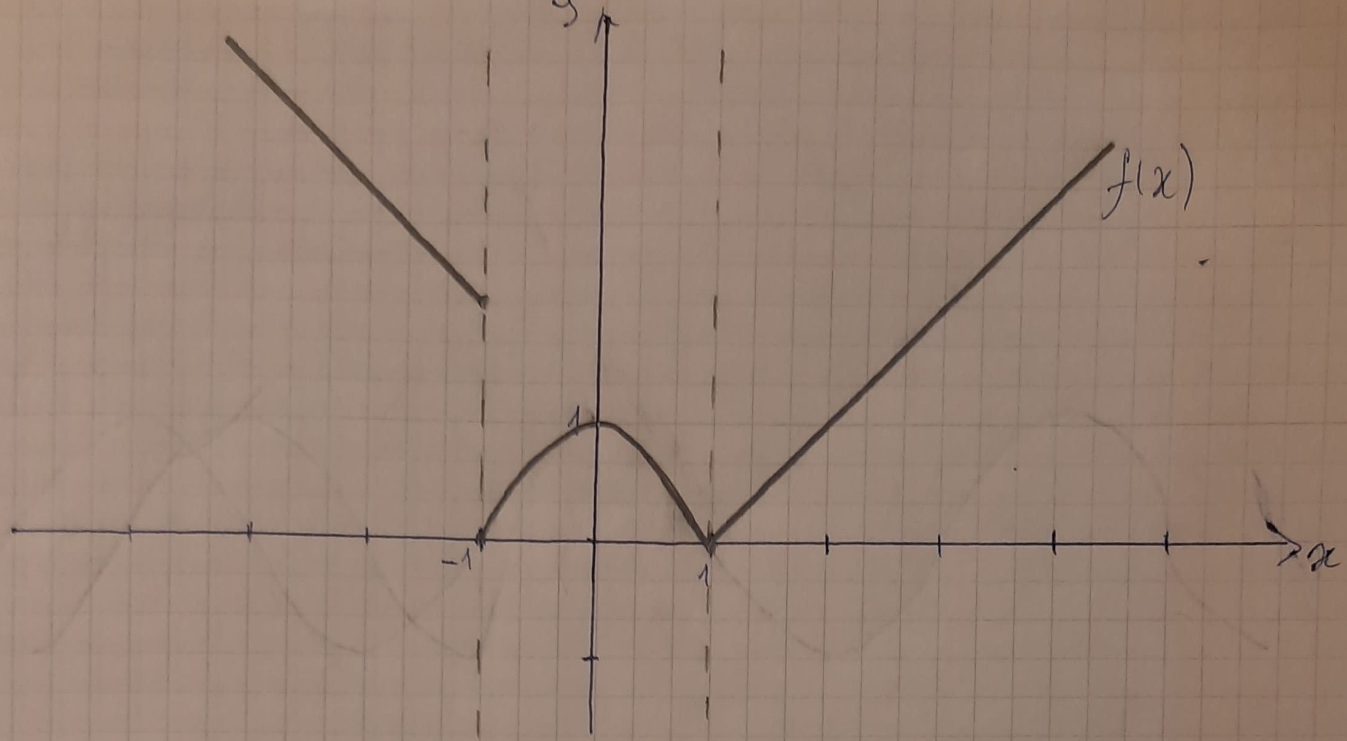
$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1+} |x-1| = 0$$

$$f(1) = 0$$

$f(1) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$



№5.

$$\lim \frac{\sin \sin tg\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\ln \cos 3x} = \lim \frac{\sin \sin\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(9x^2)\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right)}{\ln\left(1 + \left(o(9x^2) - \frac{9x^2}{2}\right)\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln\left(1 + \left(o\left(\frac{9x^2}{2}\right) - \frac{9x^2}{2}\right)\right)} =$$

$$= \lim \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln\left(1 + \left(o\left(\frac{9x^2}{2}\right) - \frac{9x^2}{2}\right)\right)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}{o\left(\frac{9x^2}{2}\right) - \frac{9x^2}{2} + o\left(o\left(\frac{9x^2}{2}\right) - \frac{9x^2}{2}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2}\right)}{o\left(\frac{9x^2}{2}\right) - \frac{9x^2}{2} + o\left(\frac{9x^2}{2}\right)} = \lim \frac{\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)}{-\frac{9x^2}{2} + o\left(\frac{9x^2}{2}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{9}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}};$$