ВМиК, 4-й курс, 3-й поток
Конспекты курса по функциональному анализу [1]

Косовец Дмитрий   Петрушкина Анастасия
Ручкин Дмитрий
под редакцией Иванова Олега и Талгата Даулбаева [2]

2008 год
(ред. 2014 год)

[1]Версия 0.4 — полный курс (лекции 1-13, параграфы 1-14)

[2]Отдельное спасибо тем, кто давал полезные советы и помогал исправлять ошибки: Гусейнову Алексею, Деревенцу Егору, Картавцу Евгению, Козлову Кириллу, Кунцьо Степану, Маслову Дмитрию, Соловьёву Антону и др.

Литература по курсу:

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк "Основы математического анализа, часть 2 М., 1973.

2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин "Элементы теории функций и функционального анализа М., 1976.

3. Л.А. Люстерник, В.И. Соболев "Элементы функционального анализа М., 1951

§1. Открытые и замкнутые множества на прямой

Рассматриваем пространство действительных чисел - $\mathbb{R}$.
Множество $E \subset \mathbb{R}$.

Операции над множествами:

- Объединение: $F = E_1 \cup E_2$;
- Пересечение: $F = E_1 \cap E_2$;
- Разность: $F = E_1 \setminus E_2$;
- Симметрическая разность: $F = E_1 \Delta E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$
- Дополнение: $\complement E = \mathbb{R} \setminus E$.

Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку.

Точка x называется *предельной точкой* множества E, если в любой окрестности содержится хотя бы одна точка множества E, отличная от точки x. Если точка x множества E не является его предельной точкой, то она называется *изолированной точкой* множества E.

Множество всех предельных точек E называется его *производным множеством* и обозначается E'.

Возможны такие ситуации:

- $E' \subset E$, тогда E — *замкнутое* множество;
- $E \subset E'$, тогда E — *плотное в себе* множество;
- $E = E'$, тогда E — *совершенное* множество.

Определение. Множество $\bar{E} = E \cup E'$ называется *замыканием* множества E.

Примеры:

1. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{1}{n}\right\}, \qquad E' = \{0\},$
   E — не замкнуто, не плотное в себе, никакое;

2. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \cup \{0\}, \qquad E' = \{0\}$
   E — замкнуто, не плотное в себе;

3. $E = (a, b), \qquad E' = [a, b]$
   E — не замкнуто, плотное в себе;

4. $E = [a, b], \qquad E' = [a, b]$
   E — совершенное;

5. $E = \mathbb{Q}, \qquad E' = \mathbb{R}$
   E — не замкнуто, плотное в себе;

6. $E = \mathbb{R}, \qquad E' = \mathbb{R}$
   E — совершенное;

7. $E = \varnothing, \qquad E' = \varnothing$
   E — совершенное;

Для любого множества E производное множество E' и замыкание $\bar{E}$ всегда будут являться замкнутыми. Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество, бесконечного числа — не всегда. Например:

$$E_n = \left[\frac{1}{n}; 1\right]; \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1].$$

Точка X множества E называется *внутренней*, если она принадлежит E вместе с некоторой своей окрестностью.
$\mathrm{int}E$ — множество всех внутренних точек E.
Множество E называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

Пересечение бесконечного числа открытых множеств, вообще говоря, открытым не является:

$$E_n = \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right); \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\}.$$

Утверждение. E - замкнутое множество $\Rightarrow \complement E$ — открытое множество.
Доказательство. Возьмём произвольную точку $x \in \complement E$. E — замкнутое множество $\Rightarrow$ оно содержит все свои предельные точки. $E \not\ni x \Rightarrow x$ не является предельной точкой E. Это означает, что существует окрестность $v(x)$, целиком принадлежащая $\complement E$. Таким образом, точка x является внутренней точкой $\complement E$. В силу произвольности выбора x в $\complement E$ это множество является открытым. $\square$

Утверждение. E — открытое множество $\Rightarrow \complement E$ — замкнутое множество.
Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда существует точка x_0, предельная для $\complement E$, но не принадлежащая ему. Следовательно, $x_0 \in E$. E — открытое множество, $x_0 \in E \Rightarrow$ существует окрестность $v(x_0)$, целиком принадлежащая E. Это противоречит тому, что x_0 — предельная точка $\complement E$. Значит, наше предположение неверно $\Rightarrow \complement E$ — замкнутое множество. $\square$

Объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.
Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

$E = \bigcap_\alpha E_\alpha \quad \Rightarrow \quad \complement E = \cup_\alpha \complement E_\alpha$

Утверждение. Если A — открытое множество, а B — замкнутое, то $A \setminus B$ — открытое множество, $B \setminus A$ — замкнутое множество.
Доказательство. $A \setminus B = A \cap \complement B$. $\square$

Теорема 1. Любое открытое множество на прямой может быть представлено в виде конечного или счетного объединения попарно непересекающихся интервалов.
$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.

Доказательство.
Возьмем произвольную точку $x \in E$.
Рассмотрим $I(x)$ — объединение всех интервалов, содержащих x и содержащихся в E.
$I(x)$ — открытое множество.
$a = \inf I(x)$, $b = \sup I(x)$.
Так как E — открытое, то $x \in intE$. Значит, $a < x < b$.

Докажем, что $I(x) = (a, b)$
Рассмотрим любую точку $y \in (a, b)$. Не ограничивая общности, положим $a < y < x$. По определению точной нижней грани, $\exists y'$: $a < y' < y < x$.
По определению точной нижней грани $\exists (c, d) \subset I(x)$, такое что $y' \in (c, d)$.
Из $y' \in (c, d)$ и $x \in (c, d)$ следует $y \in (c, d)$. Значит, $y \in I(x)$. В силу произвольности выбора y, $I(x) = (a, b)$.

Тогда для любого $y \in I(x)$ выполняется $I(x) = (a, b) \subset I(y)$. Значит, $x \in I(y)$, из чего следует, что $I(y) = I(x)$ для любого $y \in I(x)$.
Тогда $I(x_1)$ и $I(x_2)$ либо не имеют общих точек, либо совпадают. $\square$

Следствие 1. Любое замкнутое множество на прямой получается удалением из прямой конечного или счетного числа интервалов.

Следствие 2. Любое совершенное множество на прямой получается удалением из прямой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, концы которых не совпадают.

Пример (совершенное Канторово множество).
Рассмотрим сегмент [0, 1]:

$$G = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \cup \dots$$

$$K = [0; 1] \setminus G$$

$$\frac{1}{3} + 2 * \frac{1}{9} + 4 * \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 1$$

Любое число x из отрезка $[0; 1]$ может быть представлено в троичной системе следующим образом:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots,$$

где числа a_i могут принимать значения 0, 1 и 2. У числа может быть не одно такое представление ($0.1222..._3 = 0.2_3$). Заметим, что у чисел из множества K существует хотя бы одно троичное представление, в котором числа $a_i \neq 1$ $\forall i$. Ведь в множество K не входят интервалы $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left\{\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right), (\frac{7}{9}; \frac{8}{9})\right\}$ и так далее, числа которых как раз соответствуют троичным представлениям, где часть коэффициентов равна единице. А для некоторых "граничных"чисел, входящих в K и имеющих троичное представление с одним единичным коэффициентом (например, $\frac{1}{3}$), существуют соответствующие троичные представления, где нет единичных коэффициентов:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \dots + \frac{0}{3^n} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

Таким образом, каждой точке множества K можно поставить в соответствие последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, где $a_i = \{0; 2\}$. Совокупность таких последовательностей образует множество мощности континуума $\Rightarrow$ множество K имеет мощность континуума, хотя длина его равна 0. Кроме того, оно замкнуто и является совершенным (по следствию 2).

Множество K называется *канторовым множеством.*

§2. Измеримые множества

$$\Delta = (a, b), \ |\Delta| = b - a$$

Считаем, что допустимы не только $a, b \in \mathbb{R}$, но и $a = -\infty$, $b = \infty$. В большинстве теорем это не влияет не доказательство, иначе такие случаи будут рассматриваться отдельно.

Определение 1. *Покрытием множества E на прямой* называется конечная или счетная система интервалов, объединение которых содержит E.

$$s(E) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

Длина покрытия $s(E)$:

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|$$

Внешняя мера множества E:

$$|E|^* = \inf_{s(E)} \sigma(s)$$

Внешняя мера не обладает ни конечной, ни счётной аддитивностью.

Свойства внешней меры:

1. $E_1 \subset E_2 => |E_1|^* \leqslant |E_2|^*$.
   Этот факт следует из того, что любое покрытие E_2 будет одновременно являться покрытием и для E_1.

2. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |E|^* \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |E_n|^*$.
   Доказательство. Если мера $|E|^* = \infty$ или $|E_n|^* = \infty$, то свойство очевидно. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению меры как точной нижней грани, для любого номера n найдётся покрытие $s_n(E_n)$ множества E_n системой интервалов $\{\Delta_k^n\}$ такое, что

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k^n| < |E_n|^* + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

   Рассмотрим $s = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} s_n(E_n)$. s является покрытием множества E, поэтому

   $$|E|^* \leqslant \sigma(s) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k^n| < \sum_{n=1}^{\infty}(|E_n|^* + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|^* + \varepsilon.$$

   Устремив ε к 0, получим требуемое неравенство. □

   Введём понятие *расстояния между множествами*:

   $$\rho(E_1, E_2) \stackrel{def}{=} \inf_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} \rho(x, y) = |x - y|.$$

3. $\rho(E_1, E_2) > 0 => |E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$
   Доказательство. $d = \rho(E_1, E_2)$. Из определения меры как точной нижней грани следует, что

   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists s(E_1 \cup E_2) = \{\Delta_n\}: \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < |E_1 \cup E_2|^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

Разобьём каждый интервал покрытия $s(E_1 \cup E_2)$ на интервалы длины, меньшей $\frac{d}{2}$, а концы этих новых интервалов ("точки соприкосновения"), в свою очередь, покроем интервалами, общая сумма длин которых меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \widetilde{s}(E_1 \cup E_2) = \{\widetilde{\Delta}_n\} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_n| < |E_1 \cup E_2|^* + \varepsilon, \quad |\widetilde{\Delta}_n| < \frac{d}{2}\ \forall n$$

Поскольку $|\widetilde{\Delta}_n| < \frac{d}{2}\ \forall n$, то интервалы $\widetilde{\Delta}_n$, покрывающие точки E_1, не содержат точек E_2, а интервалы, покрывающие точки E_2, не содержат точек E_1. А это значит, что покрытие $\widetilde{s}(E_1 \cup E_2)$ распадается на два непересекающихся покрытия $\widetilde{s_1}(E_1)$ и $\widetilde{s_2}(E_2)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_n| = \sigma(\tilde{s}) = \sigma(\tilde{s_1}) + \sigma(\tilde{s_2}) \geqslant |E_1|^* + |E_2|^*.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_n| < |E_1 \cup E_2|^* + \varepsilon.$$

Следовательно, $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E_1 \cup E_2|^*$. Но по второму свойству внешней меры верно и неравенство $|E_1|^* + |E_2|^* \geqslant |E_1 \cup E_2|^*$. Итак, получаем, что $|E_1|^* + |E_2|^* = |E|^*$. $\square$

4. $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall E\ \exists G$ — открытое, $G \supset E :\ |G|^* < |E|^* + \varepsilon$

   Доказательство. В качестве G можно взять объединение всех интервалов, составляющих такое покрытие $s(E)$ множества E, что $\sigma(s) < |E|^* + \varepsilon$

Определение 2. Множество E называется *измеримым* (по Лебегу), если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G \setminus E|^* < \varepsilon$. При этом $|E| \equiv |E|^*$ называется *мерой* измеримого множества E.

Из определения меры Лебега и свойства 4 внешней меры следует, что мера множества равна нулю тогда и только тогда, когда внешняя мера множества равна нулю ($|E| = 0 \Leftrightarrow |E|^* = 0$).

Теорема 1. Любое открытое множество на прямой измеримо, а его мера равна сумме длин (мер) составляющих его попарно не пересекающихся интервалов.

Доказательство. Достаточно взять $G = E$. Поскольку множество E — открытое, $\inf \sigma(s(E))$ будет достигнут на покрытии, совпадающем с разбиением E на попарно непересекающиеся интервалы. $\square$

Теорема 2. Объединение конечного или счётного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

Доказательство. Пусть $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

E_n измеримо $\forall n$, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall E_n\ \exists G_n \text{ — открытое, } G_n \supset E_n,\ |G_n \setminus E_n|^* < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Рассмотрим $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Получаем, что $E \subset G$. G — открытое. Кроме того, если $x \in (G \setminus E)$, то $x \notin E_n$ $\forall n$ и $\exists k:\ x \in G_k \Rightarrow x \in (G_k \setminus E_k)$. Поэтому $(G \setminus E) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$.

Из свойства 2 внешней меры получаем, что

$$|G \setminus E|^* \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 3. Любое замкнутое множество F измеримо на прямой.

Доказательство.

а) Сначала рассмотрим случай, когда множество F ограничено. По свойству 4 внешней меры $\forall \varepsilon > 0\ \exists G$ — открытое, такое что $F \subset G$, $|G|^* < |F|^* + \varepsilon$. Множество F — замкнутое, поэтому множество $(G \setminus F)$ является открытым. А это значит, что оно представимо в виде суммы $G \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ попарно не пересекающихся интервалов Δ_n.

Для любого $\Delta = (a, b)$ за Δ^α будем обозначать интервал $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$, а за $\overline{\Delta}^\alpha$ — сегмент $\overline{\Delta}^\alpha = [a + \alpha, b - \alpha]$ (имеется в виду, что $\alpha < \frac{b-a}{2}$, в противном случае получаем пустые множества). Для каждого номера m определим множества $E_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} \Delta_n$, $E_m^\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{m} \Delta_n^\alpha$ и $\overline{E}_m^\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{m} \overline{\Delta}_n^\alpha$.

Так как $\forall \alpha > 0$ и для всех m множество $\overline{E}_m^\alpha$ не имеет общих точек с множеством F, то в силу свойства 3 внешней меры

$$|\overline{E}_m^\alpha \cup F|^* = |\overline{E}_m^\alpha|^* + |F|^*.$$

Кроме того, $\forall\alpha > 0$ и для всех m множество $\overline{E}_m^\alpha \cup F$ содержится в G, поэтому

$$|\overline{E}_m^\alpha \cup F|^* \leqslant |G|^*.$$

Получаем, что

$$|\overline{E}_m^\alpha|^* + |F|^* \leqslant |G|^* < |F|^* + \varepsilon.$$

Так как мы рассматриваем случай ограниченного F, то $|F|^* < \infty$. Таким образом, $|\overline{E}_m^\alpha|^* < \varepsilon$ ($\forall\alpha > 0$ и для всех m). Последовательно переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0+0$ и $m \to \infty$, получим, что $|G \setminus F|^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon$. А это означает, что F измеримо.

б) Если множество F не является ограниченным, то мы можем представить его в виде суммы $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_n = F \cap [-n; n]$. F — замкнутое $\Rightarrow$ множество $F \cap [-n; n]$ тоже является замкнутым. Получаем, что каждое F_n замкнуто и ограничено, а значит, и измеримо в силу пункта а). Но тогда и само множество F тоже является измеримым по теореме 2. Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 4. Если множество E измеримо, то и его дополнение $\complement E$ измеримо.

Доказательство. По определению измеримости $\forall n \in \mathbb{R},\ n > 0$ найдётся открытое множество G_n, содержащее E и такое, что $|G_n \setminus E|^* < \dfrac{1}{n}$. Тогда $F_n = \complement G_n$ — замкнутое множество.

Заметим, что $\forall A,\ \forall B \quad A \setminus B = \complement B \setminus \complement A$. Поэтому $\complement E \setminus F_n = \complement E \setminus \complement G_n = G_n \setminus E$. А это значит, что

$$|CE \setminus F_n|^* = |G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим множество $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Так как $\complement E \setminus F \subset \complement E \setminus F_n$, то $|\complement E \setminus F|^* \leqslant |\complement E \setminus F_n|^* < \dfrac{1}{n}$. Поскольку это верно для любого n, то $|\complement E \setminus F|^* = 0$, а, следовательно, это множество измеримо и $|\complement E \setminus F| = 0$.

Получаем, что $\complement E = (\complement E \setminus F) \cup F$. Множество $(\complement E \setminus F)$ измеримо, множество F также измеримо в силу теорем 2 и 3. Следовательно, $\complement E$ является измеримым множеством. $\square$

Следствие. Для того, чтобы множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $|E \setminus F|^* < \varepsilon$.

Доказательство. Из теоремы следует, что измеримость множества E эквивалентна измеримости множества $\complement E$, то есть эквивалентна требованию

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists G \text{ — открытое, } G \supset \complement E, \ |G \setminus \complement E|^* < \varepsilon.$$

В силу того, что $\complement E_1 \setminus \complement E_2 \equiv E_2 \setminus E_1$, это эквивалентно требованию

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists F = \complement G \text{ — замкнутое, } F \subset E, \ |E \setminus F|^* = |\complement F \setminus \complement E|^* = |G \setminus \complement E|^* < \varepsilon,$$

а это выполняется по условию следствия. $\square$

Теорема 5. Пересечение конечного или счётного числа измеримых множеств измеримо.

Доказательство. Пусть даны измеримые множества $E_1, E_2, \ldots$, их пересечение — $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда верно равенство $\complement E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \complement E_n$, а, следовательно, и равенство $E = \complement(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \complement E_n)$. Для любого n $\complement E_n$ измеримо по теореме 4 $\Rightarrow$ по теореме 2 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \complement E_n$ измеримо $\Rightarrow$ по теореме 4 измеримо $E = \complement \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \complement E_n$. $\square$

Теорема 6. Если множества A и B измеримы, то множество $A \setminus B$ также измеримо.

Доказательство. Вытекает из теорем 4, 5 и тождества $A \setminus B \equiv A \cap \complement B$. $\square$

Теорема 7 (σ-аддитивность меры). Пусть измеримое множество E представимо в виде конечного или счётного объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Тогда его мера равна сумме мер этих множеств.

Доказательство.

а) Сначала рассмотрим случай, когда все E_n ограничены.

По следствию из теоремы 4 для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого номера n найдётся замкнутое множество $F_n \subset E_n$ такое, что $|E_n \setminus F_n| < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ (все фигурирующие в доказательстве множества измеримы, поэтому вместо внешней меры будем писать просто меру). Все множества F_n ограничены, замкнуты и попарно не пересекаются. Более того, из-за замкнутости расстояние между ними больше 0. Поэтому в силу свойства 3 внешней меры для любого конечного m выполняется равенство

$$\left|\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right| = \sum_{k=1}^{m} |F_k|.$$

Так как сумма всех множеств F_k содержится в E, то для любого номера m

$$\sum_{k=1}^{m} |F_k| = \left|\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right| \leqslant |E|.$$

С другой стороны, $E_n = (E_k \setminus F_k) \cup F_k$, поэтому $|E_k| \leqslant |E_k \setminus F_k| + |F_k| < |F_k| + \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Получаем, что

$$\sum_{k=1}^{m} |E_k| < \sum_{k=1}^{m} |F_k| + \varepsilon \leqslant |E| + \varepsilon.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \leqslant |E|.$$

С другой стороны, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$, поэтому в силу свойства 2 внешней меры

$$\sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \geqslant |E|.$$

Из двух последних неравенств следует, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_k| = |E|$, а это и требовалось доказать.

б) Пусть теперь множества E_n не обязательно являются ограниченными. Тогда введём в рассмотрение множества $E_n^k = E_n \cap (k-1 \leqslant |x| < k)$, которые будут являться ограниченными.

Так как $E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} E_n^k$, то

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Определение 3. Множество G называется *множеством типа* G_δ, если оно представимо в виде пересечения счётного числа открытых множеств G_n ($G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$), и *множеством типа* F_σ, если E представимо в виде объединения счётного числа замкнутых множеств F_n ($F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$).

Теорема 8. Для любого измеримого множества E существует множество E_1 типа G_δ и множество E_2 типа F_σ такие, что $E_1 \supset E \supset E_2$ и $|E_1| = |E| = |E_2|$.
Доказательство. В силу измеримости E и следствия из теоремы 4 для любого номера $n \in \mathbb{N}$ $\exists G_n \supset E$, $\exists F_n \subset E$ такие, что

$$|G_n \setminus E| < \frac{1}{n}, \quad |E \setminus F_n| < \frac{1}{n}.$$

Положим $E_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $E_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Так как для любого номера n

$$E_1 \setminus E \subset G_n \setminus E,\ E \setminus E_2 \subset E \setminus F_n,$$

то верны неравенства

$$|E_1 \setminus E| < \frac{1}{n}, \quad |E \setminus E_2| < \frac{1}{n}.$$

В силу произвольности n это означает, что $|E_1 \setminus E| = 0$ и $|E \setminus E_2| = 0$, а, значит, $|E_1| = |E| = |E_2|$.

$E \subset E_1 \subset G_n$, значит $|E| \leqslant |E_1| \leqslant |G_n| = |(G_n \setminus E) \cup E| = |G_n \setminus E| + |E| < \dfrac{1}{n} + |E|$

$\square$

Пример неизмеримого множества.
Рассмотрим единичную окружность.
Выберем $\alpha > 0$.
Φ_β — множество всех точек, которые можно совместить друг с другом поворотом на $\Pi n\alpha$, содержащее точку β. В этом классе счетное число точек. Выберем такое множество B, что для любых двух $\beta_1, \beta_2 \in B$ классы не совпадают ($\Phi_{\beta_1} \neq \Phi_{\beta_2}$).

Φ_0 содержит по одной точке из каждого класса Φ_β. Поскольку B имеет мощность континуум, то Φ_0 тоже имеет мощность континуум.
Очевидно, что вся окружность C представима как $C = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n$, где Φ_n — поворот множества Φ_0 на $\Pi n\alpha$.
Если Φ_0 измеримо, то

$$2\Pi = |C| = |\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi_0|$$

что приводит нас к противоречию.

§3. Измеримые функции

Обозначим символом $E[f(x) > a]$ множество

$$E[f(x) > a] = \{x \in E : \ f(x) > a\}.$$

В дальнейшем мы рассматриваем только функции, определённые на измеримых множествах, и допускаем, что они могут принимать значения $-\infty, +\infty$.

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой на* E, если $\forall a \in \mathbb{R}$ $E[f(x) \geqslant a]$ — измеримое множество.

Свойства измеримых функций:

1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была измеримой на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ одно из множеств

   $$E[f(x) > a], \qquad E[f(x) \leqslant a], \qquad E[f(x) < a]$$

   было измеримо.
   Доказательство.
   Тот факт, что измеримость $\forall a \in \mathbb{R}$ множества $E[f(x) > a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E, следует из следующих соотношений:

   $$E[f(x) > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f(x) \geqslant a + \frac{1}{n}],$$

$$E[f(x) \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f(x) > a - \frac{1}{n}].$$

Тот факт, что измеримость $\forall a \in \mathbb{R}$ множества $E[f(x) \leqslant a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E, следует из соотношения

$$E[f(x) \leqslant a] = E \setminus E[f(x) > a].$$

Тот факт, что измеримость $\forall a \in \mathbb{R}$ множества $E[f(x) < a]$ является необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ на множестве E, следует из соотношения

$$E[f(x) < a] = E \setminus E[f(x) \geqslant a]. \quad \square$$

2. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любом измеримом подмножестве $E_1 \subset E$.
   Доказательство. Это непосредственно следует из тождества

$$E_1[f(x) \geqslant a] \equiv E[f(x) \geqslant a] \cap E_1.$$

3. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E_k (при всех номерах k), то она измерима и на их объединении $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.
   Доказательство. Это непосредственно следует из тождества

$$E[f(x) \geqslant a] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k[f(x) \geqslant a].$$

4. Любая функция измерима на множестве меры 0 (так как любое подмножество меры 0 имеет меру 0 и измеримо).

Определение 2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными на множестве E, если $|E[f(x) \neq g(x)]| = 0$.

5. Если $f(x)$ измерима на множестве E, то и любая эквивалентная ей на E функция $g(x)$ измерима на E.
   Доказательство. Рассмотрим множества $E_0 = E[f(x) \neq g(x)]$ и $E_1 = E \setminus E_0$. В силу свойства 2 $f(x)$ измерима на E_1, $f(x) = g(x)$ на $E_1 \Rightarrow g(x)$ измерима на E_1. С другой стороны, по свойству 4 $g(x)$ измерима на E_0, так как это множество имеет меру 0 (в силу эквивалентности $f(x)$ и $g(x)$). Получаем, что $g(x)$ измерима на всём E

(в силу свойства 3). $\square$

Определение 3. Говорят, что какое-то свойство выполняется почти всюду на множестве E, если множество точек, на которых это свойство не выполняется, имеет меру 0.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то она измерима на этом множестве.
Доказательство. Обозначим через $R \subset E$ подмножество всех точек разрыва $f(x)$. Поскольку $f(x)$ непрерывна на E почти всюду, R имеет меру 0. Поэтому в силу свойств 3 и 4 достаточно доказать измеримость $f(x)$ на множестве $E_1 = E \setminus R$. В силу теоремы 8 §2 существует множество E_2 типа F_σ, содержащееся в E_1 и такое, что $|E_2| = |E_1| = |E|$. Опять же, в силу свойств 3 и 4 достаточно доказать, что $f(x)$ измерима на множестве E_2. Но E_2 является множеством типа F_σ, поэтому оно представимо в виде счётной суммы замкнутых множеств F_n. На каждом из F_n функция $f(x)$ является непрерывной $\Rightarrow$ при любом вещественном a множество $F_n[f(x) \geqslant a]$ замкнуто, а значит, и измеримо. Таким образом, $f(x)$ измерима на всех F_n, поэтому она измерима и на E_2. Свойство доказано. $\square$

Замечание. Эквивалентность $f(x)$ на множестве E некоторой непрерывной функции следует отличать от непрерывности $f(x)$ почти всюду на E. Например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке, но эквивалентна на сегменте $[0;1]$ непрерывной функции $g(x) \equiv 0$ (поскольку на этом сегменте $D(x) \neq g(x)$ только на множестве рациональных точек, которое счётно и потому имеет меру 0) и, следовательно, является измеримой на $[0;1]$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E. Тогда функции $|f(x)|$, $c \cdot f(x)$, $f(x) + c$ (где с = const) также измеримы на E. Множество $E[f(x) > g(x)]$ измеримо в том случае, если $g(x)$ — измеримая функция.
Доказательство.
1) Достаточно рассмотреть следующие соотношения, выполняющиеся

для любого вещественного a:

$$E[|f(x)| \geqslant a] = \begin{cases} E[f(x) \geqslant a] \cup E[f(x) \leqslant -a], & \text{если } a \geqslant 0 \\ E, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$E[f(x) + c \geqslant a] = E[f(x) \geqslant a - c],$$

$$E[c \cdot f(x) \geqslant a] = \begin{cases} E[f(x) \geqslant \frac{a}{c}], & \text{если } c > 0 \\ E[f(x) \leqslant \frac{a}{c}], & \text{если } c < 0 \end{cases}$$

Из них следует, что $E[|f(x)| \geqslant a]$ и $E[f(x)+c \geqslant a]$ являются измеримыми множествами, множество $E[c \cdot f(x) \geqslant a]$ измеримо при $c \neq 0$, поэтому соответствующие функции измеримы на E (при $c = 0$ функция $c \cdot f(x) \equiv 0$ и также является измеримой).

2) Занумеруем все рациональные числа r_k действительной оси, тогда

$$E[f(x) > g(x)] = \bigcup_{r_k} (E[f(x) > r_k] \cap E[g(x) < r_k]).$$

Поэтому в случае измеримости функции $g(x)$ множество $E[f(x) > g(x)]$ также будет являться измеримым. $\square$

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x) \neq 0$) также измеримы на множестве E.

Доказательство. Рассмотрим следующее соотношение:

$$E[f(x) \pm g(x) \geqslant a] = E[f(x) \geqslant \mp g(x) + a].$$

В силу теоремы 1 из него следует, что функции $f(x) \pm g(x)$ измеримы на множестве E.

$$E[f^2(x) > a] = \begin{cases} E[|f(x)| > \sqrt{a}], & \text{если } a \geqslant 0 \\ E, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Из этого неравенства вытекает, что функция $f^2(x)$ является измеримой на E.

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2]$$

Так как измеримость квадрата измеримой функции только что была доказана, функция $f(x) \cdot g(x)$ также измерима на E.

Если $g \neq 0$, то

$$E[\frac{1}{g(x)} > a] = \begin{cases} E[g(x) > 0] \cap E[g(x) < \frac{1}{a}], & \text{если } a > 0 \\ E[g(x) > 0], & \text{если } a = 0 \\ E[g(x) > 0] \cup E[g(x) < \frac{1}{a}], & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Из этих соотношений вытекает измеримость функции $\dfrac{1}{g(x)} \Rightarrow$ функция $f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также является измеримой на E. $\square$

Теорема 3. Пусть E — измеримое множество, на котором определена последовательность измеримых функций $f_n(x)$. Тогда $\underline{f}(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и $\overline{f}(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ этой последовательности — измеримые функции.
Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi(x) = \inf_n f_n(x), \qquad \psi(x) = \sup_n f_n(x).$$

Они являются измеримыми на множестве E, так как

$$E[\varphi(x) < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n(x) < a],$$

$$E[\psi(x) > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n(x) > a].$$

Теперь представим функции $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ в виде

$$\underline{f}(x) = \sup_{n\geqslant 1}\{\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\}, \qquad \overline{f}(x) = \inf_{n\geqslant 1}\{\sup_{k\geqslant n} f_k(x)\}.$$

В силу измеримости функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции $\underline{f}(x)$ и $\overline{f}(x)$ также являются измеримыми на E. $\square$

Теорема 4. Пусть E — измеримое множество, и на нем определена последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$. Пусть $\{f_n(x)\}$ почти всюду сходится к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ измерима на E.
Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на E всюду, кроме множества E_0 меры 0. Получаем, что $f(x)$ измерима на множестве $E \setminus E_0$ (в силу теоремы 3, поскольку на $E \setminus E_0$ функция $f(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$) и измерима на множестве E_0, так как оно имеет

меру 0. Следовательно, $f(x)$ измерима на $(E \setminus E_0) \cup E_0 = E$. $\square$

Определение 4. Пусть E — измеримое множество, $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$, $f(x)$ — измеримые, почти всюду конечные на множестве E функции. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *по мере* на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]| = 0,$$

то есть если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon, \delta)$ такой, что при любом номере $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|E[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]| < \delta.$$

Теорема 5 (теорема Лебега). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере на множестве E.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$A = E[|f(x)| = +\infty],$$

$$A_n = E[|f_n(x)| = +\infty],$$

$$B = E \setminus E[\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)],$$

$$C = A \cup B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Тогда по условию теоремы $|C| = 0$ и всюду на множестве $E \setminus C$ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$, а все функции $f_n(x)$ и $f(x)$ имеют конечные значения.

Фиксируем произвольное ε. Рассмотрим множества

$$E_n = E[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon],$$

$$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \qquad R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Поскольку $E_n \subset R_n$, справедливо неравенство $|E_n| \leqslant |R_n|$, и для доказательства теоремы достаточно доказать, что $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сначала докажем, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. По построению $R_{n+1} \subset R_n$ для каждого номера n, поэтому для любого n

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}).$$

Заметим, что суммируемые множества попарно не пересекаются. Поэтому для каждого n

$$|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|.$$

В силу того, что множество E имеет конечную меру, $|R_n \setminus R| < \infty$. Поэтому ряд

$$|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|$$

сходится, а его остаток $|R_n \setminus R| \to 0$ при $n \to \infty$. В силу того, что $R_n = (R_n \setminus R) \cup R$, выполняется равенство $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$. Поскольку $|R_n \setminus R| \to 0$ при $n \to \infty$, то $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать, что $|R| = 0$. В силу того, что $|C| = 0$, достаточно доказать, что $R \subset C$.

Пусть x_0 — любая точка, не принадлежащая C. Тогда для произвольного фискированного нами $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = N(x_0, \varepsilon)$ такой, что при любом $n \geqslant N$ верно неравенство $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Это означает, что при $n \geqslant N$ точка $x_0 \notin E_n \Rightarrow$ при $n \geqslant N$ точка $x_0 \notin R_n \Rightarrow$ точка $x_0 \notin R$.

Итак, любая точка, не принадлежащая C, не принадлежит и R. Это означает, что $\complement C \subset \complement R$. Следовательно, $R \subset C$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Ключевым в теореме Лебега является ограничение конечности меры множества E. На множестве бесконечной меры из сходимости почти всюду сходимость по мере, вообще говоря, не следует. Пример:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Получаем, что

$$f_n(x) \to f(x) = 0 \text{ на } \mathbb{R}, \text{ но при этом } |E[|f_n(x) - 0| > \frac{1}{2}]| = 1.$$

Замечание 2. Из сходимости по мере, вообще говоря, не следует сходимость почти всюду. Например, рассмотрим такую систему сегментов:

$$I_1 = [0;1]$$

$$I_2 = \left[0; \frac{1}{2}\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$I_4 = \left[0; \frac{1}{4}\right],\ I_5 = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right],\ I_6 = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right],\ I_7 = \left[\frac{3}{4}; 1\right] \text{ и так далее.}$$

Определим на сегменте $[0;1]$ последовательность функций $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in I_n \\ 0 & \text{если } x \in [0;1] \setminus I_n \end{cases}$$

Получаем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке сегмента $[0;1]$, но при этом сходится к функции $f(x) \equiv 0$ по мере на этом же сегменте.

Теорема 6 (теорема Рисса). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E. Тогда, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, то из неё можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на множестве E.
Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что функции $f_n(x)$ и $f(x)$ принимают конечные значения всюду на множестве E (если это не так, то мы можем, как в доказательстве теоремы 5, исключить из рассмотрения множество меры 0, где эти функции не конечны).

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, поэтому для любого номера $k \in \mathbb{N}$ найдётся номер n_k такой, что для меры множества $E_k = E[|f_{n_k} - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}]$ справедливо неравенство $|E_k| < \frac{1}{2^k}$. Положим $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k,\ R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$. Тогда $|R_n| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{\infty} |E_k| < \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Таким образом, $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Как и в теореме 5, доказываем, что $|R_n| \to |R|$ при $n \to \infty$. Тем самым мы получаем, что $|R| = 0$. Докажем, что подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится к $f(x)$ всюду на множестве $E \setminus R$. Пусть x — произвольная точка $E \setminus R$. Тогда x не принадлежит R_N при некотором $N = N(x)$. Но это означает, что x не принадлежит множеству E_k при всех $k \geqslant N(x)$. Таким образом, для всех

$k \geqslant N(x)$ $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \dfrac{1}{k}$, то есть подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ сходится к $f(x)$. $\square$

Теорема 7. Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$, $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и к $g(x)$ по мере на E. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны.
Доказательство. Тогда в силу соотношения

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E[|f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon] \subset \\ \subset \left(E\left[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup E\left[|f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]\right),$$

для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|E[|f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon]| \leqslant \\ \leqslant \left|E\left[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]\right| + \left|E\left[|f_n(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]\right| \to 0.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |E[|f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon]| = 0.$$

Далее, из соотношения

$$E[f(x) \neq g(x)] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[|f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right]$$

следует, что

$$|E[f(x) \neq g(x)]| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left|E\left[|f(x) - g(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right]\right|.$$

Все суммируемые нормы в правой части равенства равны 0, поэтому $|E[f(x) \neq g(x)]| = 0$, а это означает, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны. $\square$

Теорема 8 (теорема Егорова). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на E. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что $|E_\delta| > |E| - \delta$ и на множестве E_δ последовательность

$\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно.

Теорема 9 (теорема Лузина). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функция $f(x)$ измерима и почти всюду конечна на множестве E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что $|E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon$, а функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(x) = f(x)$ на E_ε ("сужение" функции $f(x)$ на множество E_ε), является непрерывной на E_ε.

§4. Интеграл Лебега

4.1. Интеграл Лебега от ограниченной функции на измеримом множестве конечной меры

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad |E| < +\infty.$$

Назовем *разбиением множества* E конечный набор T его подмножеств, попарно не пересекающихся и составляющих его в объединении:

$$E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j; \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k = E; \quad T = \{E_k\}_{k=1}^{n}.$$

Рассмотрим на измеримом множестве E конечной меры произвольную ограниченную функцию $f(x)$. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества E обозначим символами M_k и m_k соответственно *точную верхнюю* и *точную нижнюю грани* функции $f(x)$ на множестве E_k:

$$M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in E_k} f(x).$$

Кроме того, определим *верхнюю интегральную сумму* S_T и *нижнюю интегральную сумму* s_T разбиения T следующим образом:

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k|, \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|.$$

Очевидно, что $s_T \leqslant S_T$ при любом разбиении T.

Для любой ограниченной на множестве конечной меры E функции $f(x)$ как множество всех верхних интегральных сумм $\{S_T\}$, так и множество всех нижних интегральных сумм $\{s_T\}$ (отвечающих всевозможным разбиениям T множества E) ограничено. Поэтому существует $\inf\limits_T S_T = \overline{I}$, который мы назовём *верхним интегралом Лебега*, и существует $\sup\limits_T s_T = \underline{I}$, который мы назовём *нижним интегралом Лебега.*

Определение 1. Если $\overline{I} = \underline{I} = I$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве E.При этом I называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается

$$I = \int\limits_E f(x)dx.$$

Разбиение $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ будем называть *измельчением* разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, если для любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant m$, найдётся номер $\nu(i)$ такой, что $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$ и $E_i^* \subset E_{\nu(i)}$. При этом, очевидно, выполняется равенство $\bigcup\limits_{\nu(i)=k} E_i^* = E_k$.

Точная верхняя грань подмножества $E_i^* \subset E_k$ всегда не превосходит точную верхнюю грань всего множества E_k, поэтому для всех номеров i, для которых $\nu(i) = k$, справедливо неравенство $M_i^* \leqslant M_k$. Применим это неравенство:

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^m M_i^*|E_i^*| = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu(i)=k} M_i^*|E_k^*| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{\nu(i)=k} M_k|E_i^*| = \sum_{k=1}^n M_k \sum_{\nu(i)=k} |E_i^*| = \sum_{k=1}^n M_k|E_k| = S_T.$$

Таким образом, выполняются неравенства $S_{T^*} \leqslant S_T, s_{T^*} \geqslant s_T$ (доказательство второго неравенства проводится аналогично).

Разбиение T будем называть *произведением* множеств T_1 и T_2, если оно состоит из множеств, являющихся пересечениями всевозможных пар элементов T_1 и T_2.

Очевидно, что T является измельчением T_1 и T_2. Таким образом, для двух произвольных разбиений T_1, T_2 и их произведения T справедливы неравенства $s_{T_1} \leqslant s_T, S_T \leqslant S_{T_2}$. Кроме того, $s_T \leqslant S_T$. Из этих неравенств следует, что $s_{T_1} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_{T_2}$, то есть $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$ для любых двух произвольных разбиений T_1, T_2.

Фиксируем произвольное разбиение T_2. Так как для любого разбиения T_1 выполняется неравенство $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, то S_{T_2} является одной из верхних граней множества $\{s_{T_1}\}$, поэтому $\sup\limits_T s_{T_1} = \underline{I} \leqslant S_{T_2}$. Но так как

$\underline{I} \leqslant S_{T_2}$ для произвольного фиксированного нами разбиения T_2, то $\underline{I}$ является одной из нижних граней множества $\{S_{T_2}\}$, а это означает, что $\inf\limits_{T} S_{T_2} = \overline{I} \geqslant \underline{I}$.

Итак, верхний и нижний интегралы Лебега связаны соотношением $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a;b]$, то она интегрируема по Лебегу на этом сегменте, причем интегралы Лебега и Римана от $f(x)$ совпадают.

Доказательство. Римановское разбиение — частный случай разбиения Лебега; точная верхняя грань подмножества не превосходит точной верхней грани всего множества, точная нижняя грань множества не превосходит точной нижней грани подмножества, поэтому

$$\underline{I}_R \leqslant \underline{I}_L \leqslant \overline{I}_L \leqslant \overline{I}_R.$$

Интегрируемость функции $f(x)$ по Риману означает, что $\underline{I}_R = \overline{I}_R = I_R$. Из этого следует, что

$$\underline{I}_L = \overline{I}_L = \underline{I}_R = \overline{I}_R = I_L = I_R. \quad \square$$

Пример. Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \cap [0;1] \\ 1, & \text{если } x \in [0;1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Она не интегрируема по Риману на сегменте $[0;1]$, так как $\underline{I}_R = 0, \overline{I}_R = 1$. Разобьем сегмент $[0;1]$ на два множества:

$$E_1 = \mathbb{Q} \cap [0;1], \quad E_2 = [0;1] \setminus E_1$$

Тогда $m_1 = M_1 = 0$, $m_2 = M_2 = 1$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{c} S = \sum_{i=1}^{2} M_i|E_i| = 1 \\ s = \sum_{i=1}^{2} m_i|E_i| = 1 \end{array}\right| => I_L = 1.$$

Таким образом, функция $f(x)$ не интегрируема по Риману на сегменте $[0;1]$, но является интегрируемой по Лебегу на этом же сегменте.

Теорема 2. Любая ограниченная и измеримая на измеримом множестве E конечной меры функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на этом множестве.

Доказательство. Положим $m = \inf\limits_{E} f(x)$, $M = \sup\limits_{E} f(x)$. С помощью точек $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = M$ разобьём сегмент $[m, M]$ на частичные полуинтервалы $(y_{k-1}, y_k]$ $(k = 2,\ 3, \ldots,\ n)$ и сегмент $[y_0, y_1]$ введём обозначение

$$\delta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (y_k - y_{k-1}).$$

Разобьём множество E на сегменты

$$E_1 = E[y_0 \leqslant f(x) \leqslant y_1],$$

$$E_k = E[y_{k-1} < f(x) \leqslant y_k],\ k = \overline{2, n}.$$

Такое разбиение $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества E называется *лебеговским разбиением* E. Верхняя и нижняя суммы S_T и s_T, соответствующие лебеговскому разбиению T, называются *лебеговскими верхней и нижней суммой.*

Заметим, что для любого номера k, $1 \leqslant k \leqslant n$, справедливы неравенства

$$y_{k-1} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k.$$

Получаем, что

$$0 \leqslant S_T - s_T = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|E_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})|E_k| \leqslant \delta |E|.$$

Для любого разбиения T справедливы неравенства

$$s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T,$$

поэтому

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} \leqslant S_T - s_T \leqslant \delta |E|.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ из этого следует, что $\overline{I} = \underline{I} = I$. $\square$

Свойства интеграла Лебега:

1. $$\int\limits_{E} 1\ dx = |E|.$$

   Для доказательства достаточно заметить, что при $f(x) \equiv 1$ $s_T = S_T = |E|$ для любого разбиения T множества E.

2. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на множестве E конечной меры и α — произвольное вещественное число, то и функция $\alpha f(x)$ интегрируема на множестве E, причём

$$\int\limits_E \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx.$$

Доказательство. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}$ множества E обозначим верхнюю и нижнюю суммы функции $f(x)$ символами S_T и s_T, а верхнюю и нижнюю суммы функции $\alpha f(x)$ — символами $S_T^{(\alpha)}$ и $s_T^{(\alpha)}$. Тогда

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha S_T & \text{при } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha s_T & \text{при } \alpha < 0 \end{cases}, \quad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha s_T & \text{при } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha S_T & \text{при } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Обозначим через $\overline{I}$ и $\underline{I}$ верхний и нижний интегралы функции $f(x)$, а через $\overline{I}^{(\alpha)}$ и $\underline{I}^{(\alpha)}$ верхний и нижний интегралы функции $\alpha f(x)$. Тогда

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \overline{I} & \text{при } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha \underline{I} & \text{при } \alpha < 0 \end{cases}, \quad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \underline{I} & \text{при } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha \overline{I} & \text{при } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Так как $f(x)$ интегрируема на E, справедливо равенство

$$\overline{I} = \underline{I} = \int\limits_E f(x)dx.$$

А это значит, что

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \int\limits_E f(x)dx. \quad \square$$

3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы по Лебегу на множестве конечной меры E, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, причём

$$\int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_E f_1(x)dx + \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Доказательство. Положим $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Пусть $T = \{E_k\}$ — произвольное разбиение множества E. Для функции $f(x)$ обозначим через M_k и m_k точные грани на множестве E_k, через S_T и s_T

— верхнюю и нижнюю суммы разбиения T, через $\overline{I}$ и $\underline{I}$ — верхний и нижний интеграл Лебега. Аналогичные величины для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обозначим теми же символами, но с верхними индексами (1) и (2) соответственно.

Заметим, что точная верхняя грань суммы не больше суммы точных верхних граней слагаемых, а точная нижняя грань суммы не меньше суммы точных нижних граней слагаемых. Поэтому для любого номера k

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M_k^{(1)} + M_k^{(2)}.$$

Значит, для любого разбиения T

$$s_T^{(1)} + s_T^{(2)} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_T^{(1)} + S_T^{(2)}.$$

В свою очередь, это означает, что

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}.$$

В силу интегрируемости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на множестве E

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_E f_1(x)dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Из этого следует, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f_1(x)dx + \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Это и означает справедливость доказываемого свойства. $\square$

4. Если множество E представимо в виде $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 — измеримые непересекающиеся множества конечной меры, функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множествах E_1 и E_2, то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и на множестве E, причём

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Доказательство. Заметим, что объединение произвольного разбиения T_1 множества E_1 и произвольного разбиения T_2 множества

E_2 образует разбиение T множества $E = E_1 \cup E_2$. Обозначим верхние суммы $f(x)$, отвечающие разбиениям T_1, T_2 и T, соответственно через S_{T_1}, S_{T_2} и S_T, а нижние суммы $f(x)$, отвечающие разбиениям T_1, T_2 и T, соответственно через s_{T_1}, s_{T_2} и s_T. Тогда

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2}, \quad s_T = s_{T_1} + s_{T_2}.$$

Обозначим верхний и нижний интегралы функции $f(x)$ на множестве E_1 через $\overline{I}^{(1)}$ и $\underline{I}^{(1)}$, на множестве E_2 — через $\overline{I}^{(2)}$ и $\underline{I}^{(2)}$, на множестве E — через $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Тогда

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}.$$

В силу интегрируемости функции $f(x)$ на множествах E_1 и E_2

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_{E_1} f(x)dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Из этого следует, что

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Это и означает справедливость доказываемого свойства. $\square$

5. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы на множестве конечной меры E, и почти всюду на E $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_E f_1(x)dx \geqslant \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Доказательство. При любом разбиении T множества E нижняя интегральная сумма функции $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ будет неотрицательна, поэтому $\underline{I} \geqslant 0$. В силу свойств 2 и 3 функция $F(x)$ интегрируема на E, причём

$$\int\limits_E F(x)dx = \int\limits_E f_1(x)dx - \int\limits_E f_2(x)dx.$$

Получаем, что

$$\int\limits_E f_1(x)dx - \int\limits_E f_2(x)dx \geqslant 0,$$

что и означает справедливость доказываемого свойства. $\square$

4.2. Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции на измеримом множестве конечной меры

$$|E| \leqslant +\infty, f(x) \geqslant 0$$

Для любого $N > 0$ положим

$$f_N(x) = min\{N, f(x)\} = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N \\ N, & \text{если } f(x) > N \end{cases}.$$

Функция $f_N(x)$ называется *срезкой* функции $f(x)$. Заметим, что для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ её срезка также будет измеримой, поскольку для любого вещественного a является измеримым множество

$$E[f_N(x) > a] = \begin{cases} E[f(x) > a] & \text{при } a < N \\ \varnothing & \text{при } a \geqslant N \end{cases}.$$

Поэтому для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ существует интеграл

$$I_N = \int\limits_E f_N(x)dx.$$

Определение 2. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{N\to\infty} I_N$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве конечной меры E, а указанный предел называется *интегралом* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается

$$I = \lim_{N\to+\infty} I_N = \int\limits_E f(x)dx.$$

Убедимся в том, что неотрицательная интегрируемая на множестве E функция $f(x)$ может обращатся в $+\infty$ только на подмножестве $E_0 \subset E$, имеющем меру 0. Положим $E_0 = E[f(x) = +\infty]$. В силу свойств 4 и 5 предыдущего пункта выполняются неравенства

$$I_N = \int\limits_E f_N(x)dx \geqslant \int\limits_{E_0} f_N(x)dx = \int\limits_{E_0} Ndx \geqslant N|E_0|.$$

Поскольку $f(x)$ интегрируема на множестве E, существует конечный предел $I = \lim\limits_{N\to\infty} I_N$, поэтому из записанных неравенств следует, что

$|E_0| = 0.$

Отметим, что для неотрицательных интегрируемых функций справедливы свойства 2–5, установленные в пункте 4.1 для ограниченных неотрицательных интегрируемых функций (доказательства проводятся аналогично, с использованием функций срезки, которые являются ограниченными).

Теорема 3 (о полной аддитивности). Пусть $|E| < +\infty$, $f(x) \geqslant 0$ и измерима на E, E представимо в виде $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

1. Если $f(x)$ интегрируема на E, то $f(x)$ интегрируема на E_k и справедливо равенство

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \qquad (*)$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на E_k и ряд в правой части $(*)$ сходится, то $f(x)$ интегрируема на E и $(*)$ выполняется.

Доказательство.
a) Сначала докажем утверждения 1 и 2 для ограниченной неотрицательной интегрируемой функции $f(x)$. Пусть существует константа M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ всюду на E. Положим

$$R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k, \quad \text{тогда } |R_n| = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} |E_k|.$$

Ряд

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} |E_k| = |E| \text{ — сходится,}$$

поэтому его остаток $|R_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда на основании свойств 1, 4 и 5

$$\int_E f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{E_k} f(x)dx = \int\limits_{R_n} f(x)dx \leqslant M \int\limits_{R_n} dx \leqslant M|R_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это и означает правильность утверждений 1 и 2 в случае ограниченной $f(x)$.

б) Пусть теперь $f(x)$ — произвольная неотрицательная интегрируемая функция. Суммируемость $f(x)$ на каждом из множеств E_k напрямую следует из неравенства

$$\int\limits_{E_k} f_N(x)dx \leqslant \int\limits_{E} f_N(x)dx$$

и неубывания по N интеграла в левой части этого неравенства. Заметим, что функция срезки $f_N(x)$ является ограниченной, поэтому в силу пункта а)

$$\int\limits_{E} f_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_N(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\int\limits_{E} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

С другой стороны, для любого номера m

$$\int\limits_{E} f_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_N(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} f_N(x)dx.$$

Последовательно переходя к пределу сначала при $N \to \infty$, а затем при $m \to \infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{E} f dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx$$

Из двух полученных нами неравенств следует, что

$$\int\limits_{E} f dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx,$$

что и доказывает правильность утверждения 1.

Правильность утверждения 2 следует из неравенства для функции $f_N(x)$:

$$\int\limits_E f_N(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_N(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Так как ряд в правой части этого неравенства сходится, функция $f(x)$ будет являться суммируемой на множестве E, а следовательно, для неё будет выполняться равенство $(*)$. $\square$

Теорема 4 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Пусть $|E| < +\infty$, $f(x)$ — неотрицательная, интегрируемая на множестве E по Лебегу функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любого подмножества $e \subset E$, $|e| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$\int\limits_e f(x)dx < \varepsilon.$$

Доказательство.
а) Сначала проведём доказательство в случае, когда функция $f(x)$ ограничена, то есть существует константа M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ всюду на E. Тогда

$$\int\limits_e f(x)dx \leqslant M \int\limits_e dx = M|e| < M\delta < \varepsilon \text{ при } \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

б) Пусть теперь $f(x)$ — произвольная неотрицательная, интегрируемая на E функция. В силу интегрируемости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\int\limits_E (f(x) - f_N(x))dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$\int\limits_e f(x)dx = \int\limits_e (f(x) - f_N(x))dx + \int\limits_e f_N(x)dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + N \int\limits_e dx = \frac{\varepsilon}{2} + N|e| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \varepsilon \quad \text{при } \delta < \frac{\varepsilon}{2N(\varepsilon)}.$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 5. Пусть множество E имеет конечную меру, функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема по Лебегу на E, а $\int\limits_E f(x)dx = 0$. Тогда функция $f(x)$ эквивалентна тождественному нулю (то есть множество, на котором $f(x) \neq 0$, имеет меру 0).

Доказательство. Для любого $a > 0$ положим $E_a = E[f > a]$. Тогда

$$\int\limits_E f(x)dx \geqslant \int\limits_{E_a} f(x)dx \geqslant a|E_a|.$$

Следовательно, для любого $a > 0$

$$|E_a| \leqslant \frac{1}{a}\int\limits_E f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad |E_a| = 0.$$

Заметим, что

$$E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\left[f > \frac{1}{k}\right]$$

Поэтому

$$|E[f(x) > 0]| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left|E\left[f > \frac{1}{k}\right]\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad |E[f(x) > 0]| = 0.$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. Пусть множество E имеет конечную меру, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — неотрицательные, измеримые на E функции и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Тогда, если функция f_1 интегрируема по Лебегу на E, то и f_2 интегрируема по Лебегу на E и

$$\int\limits_E f_2(x)dx \leqslant \int\limits_E f_1(x)dx$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_E f_{2_N}(x)dx \leqslant \int_E f_{1_N}(x)dx \leqslant \int_E f_1(x)dx.$$

Интеграл в левой части неравенства является неубывающим по N, поэтому функция $f_2(x)$ интегрируема на E. Справедливость неравенства

$$\int\limits_E f_2(x)dx \leqslant \int\limits_E f_1(x)dx$$

напрямую следует из свойства 5. $\square$

4.3. Интеграл Лебега для неограниченной функции любого знака

Рассматриваем измеримое множество E конечной меры и измеримую функцию $f(x)$, не являющуюся, вообще говоря, ограниченной на множестве E и принимающую на этом множестве значения любых знаков. Введём в рассмотрение две неотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

Очевидно, что

$$f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|, \quad f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на множестве E, если на этом множестве интегрируемы функции $f^+(x)$, $f^-(x)$. При этом *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E называется

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+dx - \int\limits_E f^-dx.$$

Определение. Совокупность всех интегрируемых на множестве E функций обозначают символом $L(E)$ или $L^1(E)$. Запись $f(x) \in L(E)$ ($f(x) \in L^1(E)$) означает, что функция $f(x)$ измерима и интегрируема на множестве E.

Метрика — интеграл модуля разности. Сходимость определеняется по ней.

Из сходимости в $L(E)$ вытекает сходимость по мере. Обратное неверно:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{если } x \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Утверждение. Измеримая на множестве E функция $f(x)$ интегрируема на E тогда и только тогда, когда функция $|f(x)|$ интегрируема на этом множестве.

Доказательство.

Необходимость:

$$f(x) \in L(E) \quad \Rightarrow \quad f^+(x), f^-(x) \in L(E) \quad \Rightarrow \quad f^+(x) + f^-(x) = |f(x)| \in L(E).$$

Достаточность: пусть функция $|f(x)| \in L(E)$. Так как функции $f^+(x) < |f(x)|$ и $f^-(x) < |f(x)|$, то в силу теоремы 6 пункта 4.3 $f^+(x), f^-(x) \in$

$L(E)$. Следовательно, $f^+(x) - f^-(x) = f(x) \in L(E)$. $\square$

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на множестве $[0, 1]$. Как известно, $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно. Поэтому $\int\limits_E |f(x)|dx$ не существует. Следовательно, функция $f(x)$ не интегрируема по Лебегу на множестве E.

Для неограниченных интегрируемых функций произвольного знака справедливы свойства 2–5, установленные в пункте 4.1 для ограниченных неотрицательных интегрируемых функций (доказательства проводятся аналогично, с использованием функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$, которые являются неотрицательными, и для которых свойства 2-5 тоже верны).

Теорема 7 (о полной аддитивности). Пусть множество E представимо в виде $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, множества E_k измеримы и $E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

1. Если $f(x)$ интегрируема на множестве E, то $f(x)$ интегрируема и на каждом из множеств E_k, причём справедливо равенство
$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \qquad (*)$$

2. Если функция $f(x)$ измерима и интегрируема на каждом из множеств E_k и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|dx$, то $f(x)$ интегрируема на E и выполняеся равенство $(*)$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве E, то по определению неотрицательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ также интегрируемы на E, а следовательно, к ним применима теорема 3. Поэтому функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$ являются интегрируемыми на каждом из множеств E_k и для них справедливы равенства
$$\int\limits_E f^+(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx, \quad \int\limits_E f^-(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^-(x)dx.$$

Тогда по определению функция $f(x)$ интегрируема на каждом из множеств E_k и справедливо равенство

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+ dx - \int\limits_E f^- dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^+(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f^-(x)dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f^+(x) - f^-(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Таким образом, мы доказали справедливость первой части теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Так как функция $f(x)$ измерима и интегрируема на каждом из множеств E_k, то в силу доказанного выше утверждения функция $|f(x)|$ также интегрируема на каждом из множеств E_k. Тогда, поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|dx$ сходится, для функции $|f(x)|$ справедливо второе утверждение теоремы 3. Следовательно, $|f(x)|$ интегрируема на всём множестве E. Тогда в силу доказанного выше утверждения и функция $f(x)$ интегрируема на всём E, а следовательно, справедливо равенство $(*)$. $\square$

Теорема 8 (об абсолютной непрерывности). Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве E, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого подмножества $e \subset E$, $|e| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$\left| \int\limits_e f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ интегрируема на множестве E, неотрицательная функция $|f(x)|$ также интегрируема на E. Тогда к $|f(x)|$ применима теорема 4 и справедливо неравенство $\int\limits_e |f(x)|dx < \varepsilon$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_e f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|dx < \varepsilon. \quad \square$$

Определение 2. Говорят, что последовательность интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к интегрируемой на E функции

$f(x)$ в $L(E)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E |f_n(x)-f(x)|dx=0.$$

Замечание 1. Из определения непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E f(x)dx. \quad (**)$$

Замечание 2. Если последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой и интегрируемой на E функции $f(x)$ в $L(E)$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и по мере на E.
Доказательство. Для любого $\varepsilon>0$ положим

$$E_n=E[|f(x)-f_n(x)|\geqslant\varepsilon].$$

Тогда

$$\int\limits_E |f_n(x)-f(x)|dx\geqslant\int\limits_{E_n}|f_n(x)-f(x)|dx\geqslant\varepsilon|E_n|.$$

Следовательно, $|E_n|\to 0$ при $n\to\infty$, что и означает сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере на E. $\square$

Пример. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f(x)=\begin{cases} n, & \text{если } x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right]\\ 0, & \text{если } x\in\left(\dfrac{1}{n},1\right]. \end{cases}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}|E[|f_n(x)-0|\geqslant\varepsilon]|=0$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)\equiv 0$ по мере на множестве $E=[0,1]$. С другой стороны,

$$\forall n \int\limits_E f_n(x)dx=1, \quad \int\limits_E 0\ dx=0,$$

поэтому сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)\equiv 0$ в $L(E)$ нет. Однако при некоторых дополнительных условиях из сходимости по мере на E всё-таки следует сходимость в $L(E)$, что доказывает следующая теорема.

Теорема 9 (теорема Лебега). Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой на E функции

$f(x)$ по мере на E и существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в $L(E)$.
Доказательство. В силу теоремы 6 параграфа 3 из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1,\ 2, \dots)$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на E. Тогда, переходя в неравенстве $|f_{n_k}(x)| \leqslant F(x)$ к пределу при $k \to \infty$, получим, что для почти всех точек E справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant F(x)$. Значит, почти всюду на E справедливо и неравенство $f(x) \leqslant F(x)$, а следовательно, в силу теоремы 6 функция $f(x)$ интегрируема на множестве E.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$E_n = E[|f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon].$$

Тогда

$$\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|dx = \int\limits_{E_n} |f(x) - f_n(x)|dx + \int\limits_{E \setminus E_n} |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \int\limits_{E_n} 2F(x)dx + \varepsilon|E|.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на E, поэтому $|E_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, в силу теоремы 8 для любого $\theta > 0$

$$\left|\int\limits_{E_n} F(x)dx\right| < \theta \quad \text{при } n \to \infty,$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} F(x)dx = 0$. Второе слагаемое также можно устремить к 0 в силу произвольности ε. Таким образом, $\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|dx \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $n \to \infty$. Из этого следует, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в $L(E)$. $\square$

Следствие. Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на E и существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех

номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то функция $f(x)$ суммируема на E и справедливо равенство (**).
Доказательство. Так как последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на E, то в силу теоремы 4 параграфа 3 функция $f(x)$ также будет измерима на E. Следовательно, по теореме 5 параграфа 3 из сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E следует сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере на E. Но тогда в силу теоремы 9 функция $f(x)$ суммируема на E, $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на E и выполняется требуемое равенство (**). $\square$

Теорема 10 (теорема Леви). Пусть $\{f_n(x)\}$ - последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций, и пусть для всех номеров n и для почти всех точек множества E справедливо неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Пусть существует константа M такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\left|\int\limits_E f_n(x)dx\right| \leqslant M$. Тогда для почти всех точек $x \in E$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причём предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство (**).
Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что все $f_n(x) \geqslant 0$ почти всюду на E (в противном случае вместо функций $f_n(x)$ можно рассматривать функции $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, которые по условию будут являться неотрицательными для почти всех точек E).

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ почти всюду на E не убывает, то почти во всех точках E определена предельная функция $f(x)$, которая принимает в этих точках либо конечные значения, либо равна $= \infty$. Если мы докажем, что $f(x)$ интегрируема на E, то из этого будет следовать, что $f(x)$ является конечной почти всюду на E, а следовательно, почти всюду на E будет существовать конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и выполняться равенство (**).

Итак, для доказательства теоремы достаточно установить интегрируемость предельной функции $f(x)$ на множестве E.

Заметим, что для любого $N > 0$ последовательность $\{(f_n)_N(x)\}$ почти всюду на E сходится к функции $(f)_N(x)$, причём для всех номеров n и почти всех точек E справедливо неравенство $(f_n)_N(x) \leqslant (f)_N(x)$. Кроме того, функция $(f_n)_N(x)$ является измеримой и ограниченной, а следовательно, и интегрируемой на множестве E. Поэтому применимо следствие из теоремы 9, в силу которого

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E (f_n)_N(x)dx = \int\limits_E (f)_N(x)dx.$$

Из этого соотношения и очевидного неравенства

$$\int\limits_E f_n(x)dx \geqslant \int\limits_E (f_n)_N(x)dx$$

заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx \geqslant \int\limits_E (f)_N(x)dx.$$

Кроме того, по условию существует такая константа M, что для всех номеров n

$$\int\limits_E f_n(x)dx \leqslant M.$$

Следовательно, и

$$\int\limits_E (f)_N(x)dx \leqslant M.$$

Интеграл в левой части этого неравенства является неубывающим по N, поэтому существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_E (f)_N(x)dx = f(x),$$

а это и означает, что функция $f(x)$ интегрируема на множестве E. □

Следствие (формулировка теоремы Леви в терминах функциональных рядов). Если каждая функция $u_n(x)$ неотрицательна почти всюду на множестве E, измерима и интегрируема на этом множестве, и если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_E u_n(x)dx,$$

то почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

причём сумма $S(x)$ этого ряда интегрируема на множестве E и удовлетворяет условию

$$\int_E S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)dx.$$

Теорема 11 (теорема Фату). Если последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует константа A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\int_E |f_n(x)|dx \leqslant A$, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на множестве E и для неё справедливо неравенство $\int_E |f(x)|dx \leqslant A$.

Доказательство. Введём в рассмотрение функции

$$g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} |f_k(x)|.$$

Заметим, что последовательность $\{g_n(x)\}$ является неубывающей и почти всюду на E сходится к $|f(x)|$, а каждая функция $g_n(x)$ неотрицательна и является измеримой в силу теоремы 3 параграфа 3. Кроме того, для любого n справедливо неравенство $g_n(x) \leqslant |f_n(x)|$, из которого в силу теоремы 6 следует интегрируемость функций $g_n(x)$ на множестве E. Наконец, справедливо неравенство

$$\int_E g_n(x)dx \leqslant \int_E |f_n(x)|dx \leqslant A.$$

Получаем, что к последовательности $\{g_n(x)\}$ применима теорема 10. Следовательно, предельная функция $|f(x)|$ интегрируема (откуда сразу следует интегрируемость функции $f(x)$) и выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)dx = \int_E |f(x)|dx.$$

Так как для любого номера n

$$\int_E g_n(x)dx \leqslant A,$$

то верно и неравенство

$$\int_E |f(x)|dx \leqslant A.$$

Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 12 (теорема Лебега). Пусть измеримое множество E имеет конечную меру. Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на множестве E по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима.

Доказательство. Достаточность доказана в теореме 2. Докажем необходимость.

Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E. Следовательно, её верхний и нижний интегралы Лебега совпадают, а это значит, что существует последовательность разбиений $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ множества E такая, что соответствующие последовательности верхних $\{S_n\}$ и нижних $\{s_n\}$ сумм удовлетворяют условию $S_n - s_n < \frac{1}{n}$, причём каждое последующее разбиение $T_{n+1} = \{E_k^{(n+1)}\}$ является измельчением предыдущего разбиения $T_n = \{E_k^{(n)}\}$. (Для построения такой последовательности разбиений достаточно там, где это необходимо, брать произведение вводимых разбиений.)

По определению

$$S_n = \sum_{k=1}^{m(n)} M_k^{(n)} |E_k^{(n)}|, \qquad \text{где } M_k^{(n)} = \sup_{E_k^{(n)}} f(x);$$
$$s_n = \sum_{k=1}^{m(n)} m_k^{(n)} |E_k^{(n)}|, \qquad \text{где } m_k^{(n)} = \inf_{E_k^{(n)}} f(x).$$

Определим две последовательности функций $\{\overline{f}_n(x)\}$ и $\{\underline{f}_n(x)\}$, где

$$\overline{f}_n(x) = M_k^{(n)} \text{на } E_k^{(n)},$$
$$\underline{f}_n(x) = m_k^{(n)} \text{на } E_k^{(n)}.$$

Для каждого номера n обе функции $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ измеримы на множестве E, так как они представляют собой линейные комбинации характеристических функций измеримых множеств $E_k^{(n)}$. Кроме того, последовательность $\{\overline{f}_n(x)\}$ не возрастает, а последовательность $\{\underline{f}_n(x)\}$ не убывает на множестве E, причём для любого номера n в каждой точке множества E справедливы неравенства

$$\underline{f}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}_n(x).$$

Положим

$$\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x), \quad \underline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(x),$$

тогда в каждой точке множества E

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x).$$

Из теоремы 10 (Леви) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E [\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)]dx = \int\limits_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]dx.$$

С другой стороны, из определения функций $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ вытекает, что

$$\int\limits_E \overline{f}_n(x)dx = S_n, \quad \int\limits_E \underline{f}_n(x)dx = s_n,$$

причём по построению $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]dx = 0.$$

Кроме того, функция $[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]$ ограничена и измерима, а значит, и интегрируема на множестве E. Кроме того, эта функция ещё и неотрицательна, поэтому в силу теоремы 5 $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ почти всюду на E. Следовательно, $\overline{f}(x) = f(x) = \underline{f}(x)$ почти всюду на E, и поэтому из измеримости функций $\overline{f}_n(x)$ и $\underline{f}_n(x)$ вытекает измеримость функции $f(x)$ на множестве E. $\square$

4.4. Случай $|E| = +\infty$

Мы рассматриваем случай, когда множество E имеет бесконечную меру, но может быть представлено в виде суммы счётного числа множеств конечной меры (в таком случае говорят, что мера множества E является *σ-конечной*).

Определение 1. Говорят, что последовательность множеств $\{E_n\}$ *исчерпывает множество* E с σ-конечной мерой, если для каждого номера n $|E_n| < +\infty$, $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Определение 2. Измеримая функция $f(x)$, определённая на множестве E с σ-конечной мерой, называется *интегрируемой* на E, если она интегрируема на каждом измеримом подмножестве $A \subset E$ конечной меры и если для каждой последовательности $\{E_n\}$, исчерпывающей множество E, предел

$$I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx$$

существует и не зависит от выбора этой последовательности. Тогда I называется *интегралом Лебега от* $f(x)$ *по множеству* E и обозначается символом $I = \int\limits_E f(x)dx$.

Теорема 1 (теорема Фубини). Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на $\Pi = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Тогда для почти всех $y \in [c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, для почти всех $x \in [a,b]$ существует $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ и

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Замечание. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример — функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{вне нуля} \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$ на множестве $K = [-1;1] \times [-1;1]$.

§5. Пространство L_p, $p \geqslant 1$.

Рассматриваем случай, когда E — измеримое множество.

Линейным (векторным пространством) над полем P называется непустое множество L, на котором введены следующие операции:

1. операция сложения: каждой паре элементов x, y множества L ставится в соответствие элемент L, обозначаемый $x + y$;

2. операция умножения на скаляр (элемен поля P): любому элементу $\lambda \in P$ и любому элементу $x \in L$ ставится в соответствие элемент L, обозначаемый λx.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in L$;

2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in L$;
3. $\exists \theta \in L: \; x + \theta = x \quad \forall x \in L$;
4. $\forall x \in L \; \exists (-x) \in L: \; x + (-x) = \theta$;
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall x \in L$;
6. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in L$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in L$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall x, y \in L$.

В дальнейшем будем рассматривать пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Линейное пространство L называется *нормированным*, если любому элементу $f \in L$ ставится в соответствие действительное число (называемое *нормой* этого элемента и обозначаемое символом $\|f\|_L$), и при этом выполняются следующие условия (*аксиомы*):

1. $\forall f \in L \quad \|f\| \geqslant 0, \qquad \|f\| = 0 \leftrightarrow f = 0$;
2. $\forall f \in L,\; \forall a \in \mathbb{R} \quad \|a \cdot f\| = |a|\|f\|$;
3. $\forall f, g \in L \quad \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_p(E)$, если $f(x)$ измерима на множестве E, а функция $|f(x)|^p$ интегрируема на E.

Введём в пространстве $L_p(E)$ норму с помощью следующим образом:

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_p = \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Линейность этого пространства очевидна; докажем, что оно является нормированным.

Рассмотрим первую аксиому: неотрицательность введённой нормы очевидна, равно как и справедливость выражения $f = 0 \Rightarrow \|f\| = 0$; справедливость выражения $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ следует из теоремы 5 параграфа

4. Таким образом, первая аксиома выполняется. Справедливость аксиомы 2 также очевидна. Остаётся доказать, что в пространстве $L_p(E)$ выполняется аксиома 3 (так называемое *неравенство треугольника*). Перед этим докажем несколько вспомогательных утверждений.

Неравенство Юнга. Пусть числа $p, q > 0$ и связаны соотношением $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Тогда для любых чисел $a \geqslant 0$ и $b > 0$ выполняется неравенство

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Psi(x) = x^\alpha - \alpha x,\ x \geqslant 0,\ \alpha \in (0,1)$. Тогда $\Psi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$. Получаем, что $\Psi'(x) > 0$ при $x \in (0;1)$ и $\Psi'(x) < 0$ при $x \in (1;+\infty)$. Следовательно,

$$\max_{x\geqslant 0} \Psi(x) = \Psi(1) \quad \Rightarrow \quad \Psi(x) \leqslant \Psi(1), \text{ или } x^\alpha \leqslant \alpha x + (1-\alpha).$$

Рассмотрим $x = \dfrac{a}{b},\ a \geqslant 0,\ b > 0$. Тогда $a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)b$. Положим $\alpha = \dfrac{1}{p}$, тогда $1-\alpha = \dfrac{1}{q}$. Подставляя эти значения в неравенство, получим

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad \square$$

Неравенство Гельдера. Пусть $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x) \in L_p(E)$, $g(x) \in L_q(E)$. Тогда $f(x) \cdot g(x)$ — интегрируемая функция, и

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Введём в рассмотрение функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}, \quad \gamma(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}.$$

Подставим в неравенство Юнга числа $a = |\varphi|^p$, $b = |\gamma|^q$:

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\ ;$$

$$|f(x)\cdot g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^{p-1}}\|g\|_q + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^{q-1}}\|f\|_p\ .$$

Так как в правой части неравенства стоит интегрируемая функция, функция $f(x)\cdot g(x)$ также является интегрируемой. Поэтому

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|dx \leqslant \int\limits_E \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^{p-1}}\|g\|_q + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^{q-1}}\|f\|_p\right) dx =$$

$$= \frac{\|f\|_p\|g\|_q}{p} + \frac{\|f\|_p\|g\|_q}{q} = \|f\|_p\|g\|_q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \|f\|_p\|g\|_q. \quad \square$$

Неравенство Минковского. Пусть $f(x), g(x) \in L_p(E)$, $p \geqslant 1$. Тогда $f(x)+g(x) \in L_p(E)$ и

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. Заметим, что

$$|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p+|g|^p) \quad \Rightarrow \quad f+g \in L_p(E) \quad \Rightarrow \quad |f+g|^{\frac{p}{q}} \in L_q(E).$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_E |f||f+g|^{\frac{p}{q}}dx \leqslant \|f\|_p\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$
$$\int\limits_E |g||f+g|^{\frac{p}{q}}dx \leqslant \|g\|_p\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\int\limits_E |f+g|^p dx = \int\limits_E |f+g||f+g|^{p-1}dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_E (|f|+|g|)|f+g|^{\frac{p}{q}}dx \leqslant$$
$$\leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Поделив это неравенство на $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, получим требуемое неравенство. $\square$

Таким образом, аксиома 3 также выполняется, поэтому $L_p(E)$ является линейным нормированным пространством.

Определение 2. Последовательность $\{f_n\}$ в нормированном пространстве называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_n - f_m\| = 0.$$

Линейное нормированное пространство E называется *полным (банаховым)*, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ пространства E найдется $f \in E$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Теорема 1. Пусть E — измеримое множество конечной меры, тогда пространство $L_p(E)$, $p \geqslant 1$ — банахово.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_n(x)\}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что при $n, m \geqslant N$ выполняется неравенство

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_p < \varepsilon.$$

Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер n_k, что при $n, m \geqslant n_k$ выполняется неравенство

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Это, в свою очередь, означает, что существует последовательность номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ такая, что

$$\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Запишем неравенство Гельдера для функций $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ и 1:

$$\int\limits_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leqslant \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_p |E|^{\frac{1}{q}} < \frac{|E|^{\frac{1}{q}}}{2^k}.$$

Суммируя по k от 1 до ∞ и учитывая тот факт, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx < |E|^{\frac{1}{q}}.$$

В силу конечности $|E|$ это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx$$

сходится. Следовательно, в силу следствия из теоремы Леви почти всюду на множестве E сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|,$$

а значит, сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right).$$

Добавим к этому ряду функцию $f_{n_1}(x)$. Получим, что последовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ почти всюду на E сходится к некоторой $f(x)$.

Рассмотрим последовательность $\{f_{n_k}(x) - f_m(x)\}$. В силу фундаментальности последовательности $\{f_n(x)\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что при $n_k, m > N$ справедливо неравенство

$$\|f_{n_k}(x) - f_m(x)\|_p \leqslant \varepsilon.$$

С другой стороны, последовательность $\{f_{n_k}(x) - f_m(x)\}$ почти всюду на E сходится к предельной функции $f(x) - f_m(x)$. Применяя теорему Фату (теорема 11 параграфа 4), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что при $m > N$ справедливо неравенство

$$\|f(x) - f_m(x)\|_p \leqslant \varepsilon,$$

поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \|f(x) - f_m(x)\|_p = 0.$$

Из этого следует, что пространство $L_p(E)$, $p \geqslant 1$, является банаховым. $\square$

Определение. Функция, принимающая конечное или счетное число значений, называется *простой*. Все различные значения простой функции можно обозначить как c_k, где $k = 1, 2, \ldots$.

Определение. *Характеристической функцией множества* E называют функцию

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что $\chi_E(x)$ измерима тогда и только тогда, когда измеримо само множество E.

Любую простую функцию можно представить в виде $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{E_k}(x)$, где для каждого x из области определения только одно слагаемое отлично от нуля.

Лемма 1. Пусть E — измеримое множество, функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на E. Тогда существует неубывающая последовательность простых функций, всюду сходящаяся к функции $f(x)$, причем на множестве конечных значений сходимость равномерна.

Доказательство. Введем в рассмотрение множества

$$E_k^{(n)} = E\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right], k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots;$$

$$E_\infty = E[f(x) = +\infty].$$

Тогда для любого номера $n \in \mathbb{N}$

$$E = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}\right] \cup E_\infty.$$

Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \quad \text{на } E_k^{(n)}.$$

Получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

то есть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ (причём на множестве конечных значений эта сходимость будет равномерной, поскольку верхняя оценка разности $f_n(x)$ и $f(x)$ не зависит от x).

Докажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ является неубывающей. Для этого каждое из множеств $E_k^{(n)}$ представим в виде

$$E_k^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} \cup E_{2k+1}^{(n+1)}$$

$$\left(\text{другими словами, } \left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}; \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}; \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)\right).$$

Получаем, что на $E_{2k}^{(n+1)}$

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x),$$

а на $E_{2k+1}^{(n+1)}$

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, последовательность $\{f_n(x)\}$ — неубывающая. $\square$

Замечание. В терминах доказанной теоремы рассмотрим последовательность $\{\tilde{f}_n(x)\}$, где

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} n, & f_n(x) > n; \\ f_n(x), & f_n(x) \leqslant n. \end{cases}$$

Все $\tilde{f}_n(x)$ являются простыми функциями, последовательность $\{\tilde{f}_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$. При этом функции $\tilde{f}_n(x)$ принимают лишь конечное число значений.

Теорема 2. Пусть E — (алт. множество конечной меры) ограниченное измеримое множество, $p \geqslant 1$. Тогда пространство непрерывных функций $C(E)$ всюду плотно в пространстве $L_p(E)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x) \in L_p(E)$ найдётся функция $\varphi(x) \in C(E)$ такая, что

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что функция $f(x)$ всюду конечна (так как $f(x) \in L_p(E)$, множество, на котором она принимает бесконечные значения, имеет меру 0) и неотрицательна (обобщить теорему можно, используя неотрицательные функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$).

Тогда в силу леммы 1 существует последовательность простых функций $\{f_n(x)\}$, всюду равномерно сходящаяся к функции $f(x)$ и неубывающая, причём все $f_n(x) \leqslant f(x)$. Следовательно, по теореме Леви для любого

$\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\|f_n(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$. При этом функции $f_n(x)$ принимают лишь конечное число значений.

Другими словами, функцию $f(x)$ можно с любой точностью приблизить простой функцией $f_{n_0}(x)$, принимающей лишь конечное число значений, то есть имеющей вид

$$f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k \chi_{E_k}(x).$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x) \in L_p(E)$ найдётся функция $\varphi(x) \in C(E)$ такая, что

$$\|f_{n_0}(x) - \varphi(x)\|_p < \varepsilon$$

(тогда в силу $\|f_{n_0}(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$ справедливо и $\|f(x) - \varphi(x)\|_p < 2\varepsilon$).

В силу следствия из теоремы 4 параграфа 2 и измеримости множества E_k для любого $\varepsilon_k > 0$ найдутся замкнутое множество $F_k \subset E_k$ и открытое множество $G_k \supset E_k$ такое, что $|G_k \setminus F_k| < \varepsilon_k$.
Введем $\psi_k(x) = \frac{\rho(x, \complement G_k)}{\rho(x, F_k) + \rho(x, \complement G_k)}$.

$$\|\chi_{E_k}(x) - \psi_k(x)\|_p^p = \int\limits_{G_k \setminus F_k} |\chi_{E_k}(x) - \psi_k(x)|^p dx \leqslant |G_k \setminus F_k| < \varepsilon_k$$

Таким образом, мы с наперед заданной точностью приближаем $\chi_{E_k}(x)$, что позволяет нам с любой наперед заданной точностью приблизить $f_{n_0}(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k \chi_{E_k}(x)$.

$$\|f(x)\|_{L_p(e)} = \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_E M^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = M|E|^{\frac{1}{p}} = |E|^{\frac{1}{p}} \|f(x)\|_{C(E)}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Рассмотренные в теореме функции $\varphi_k^{(n)}$ являются непрерывными на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. (алт. Можно заменить $C(E)$ на $C(R^m)$)

Теорема 3 (о непрерывности в метрике L_p). Пусть E — ограниченное измеримое множество. Тогда для любой функции $f(x) \in L_p(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ справедливо неравенство $\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon$, где функция $f(x)$ продолжена вне E тождественным нулем.
Доказательство. В силу того, что множество E ограничено, существует шар $S(0, r)$ (радиуса r и с центром в начале координат), содержащий E $(E \subset S(0, r))$.

Рассмотрим множество $E_1 = \overline{S(0, r+1)}$. Если $x \in E$, а $|h| < 1$, то $x + h \in E_1$. В силу теоремы 2 для любой функции $f(x) \in L_p(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi(x) \in C(E)$ такая, что $\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E_1)} < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{gathered}\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} \leqslant \\ \leqslant \|f(x+h) - \varphi(x+h)\|_{L_p(E)} + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} + \|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} \leqslant \\ \leqslant 2\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E_1)} + |E|^{\frac{1}{p}} \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{C(E_1)} < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{gathered}$$

(тут важна теорема Кантора: непрерывность является равномерной непрерывностью на замкнутом ограниченном множестве)
Теорема доказана. $\square$

§6. Метрические и нормированные пространства

Определение 1. Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре (x, y) элементов этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ (называемое *метрикой* или *расстоянием* между элементами x и y), удовлетворяющее следующим условиям (*аксиомам*):

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии)
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (так называемая *аксиома треугольника*)

Дискретная метрика: $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$

Определение 2. Элемент x метрического пространства M называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ (обозначается $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если $\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Сама последовательность $\{x_n\}$ называется тогда *сходящейся*.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при $n, m \geqslant n_0$ $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ (другими словами, $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$).

Последовательности в метрическом пространстве обладают следующими свойствами:

1. $x_n \to x, x_n \to y \quad \Rightarrow \quad x = y$.
   Для доказательства достаточно заметить, что в силу аксиомы 3 $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(y, x_n)$. $x_n \to x, x_n \to y$, поэтому при $n \to \infty$ $\rho(x, x_n) \to 0$ и $\rho(y, x_n) \to 0$. Следовательно, $\rho(x, y) = 0$, то есть $x = y$.

2. $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \to x$.

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ \rho(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow \forall n_k > N\ \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

3. $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad \rho(x_n, \theta) \leqslant K\ \forall \theta$.
   Опять же, в силу аксиомы треугольника для любого n верно неравенство $\rho(x_n, \theta) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, \theta) \leqslant L + \rho(x, \theta) = K$.

Введём следующие обозначения:

- *Шаром с центром в точке a и радиусом r* называется множество точек $S(a, r) = \{\rho(a, x) < r\}$;

- *Замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом r* называется множество точек $S(a, r) = \{\rho(a, x) \leqslant r\}$;

- Множество называется *ограниченным*, если оно содержится в каком-либо шаре;

- *Окрестностью точки a* называется любой шар $S(a, r)$;

- В метрическом пространстве M точка a называется *предельной точкой* множества X ($X \subset M$), если в любой окрестности точки a содержится хотя бы одна точка множества X, отличная от a, то есть если $\forall r\ S(a, r) \cap \{X \setminus \{a\}\} \neq \varnothing$;

- *Замыканием* множества X называется множество, полученное присоединением к X всех его предельных точек;
- Множество X называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием ($X = \overline{X}$);
- Множество X называется *открытым*, если замкнуто его дополнение $\complement X = M \setminus X$;
- Множество X называется *всюду плотным в метрическом пространстве* M, если $\overline{X} = M$;
- Множество X называется *нигде не плотным в метрическом пространстве* M, если любой шар пространства M содержит в себе шар без точек множества X.

  Пример. Любое конечное множество чисел.

Пример. Рассмотрим на множестве действительных чисел следующую метрику:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

В таком метрическом пространстве ни одно множество не будет иметь предельных точек, поэтому любое множество будет одновременно и замкнутым, и открытым.

Определение 3. Метрическое пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность в M сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом M.

Рассмотрим множество всех числовых последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$ $(p \geqslant 1)$. Для его элементов $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots)$ и $y = (\eta_1,\ \eta_2,\ \dots)$ определим расстояние по формуле

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Эта метрика удовлетворяет трём аксиомам метрического пространства. Полученное пространство называется *пространством* l_p.

Утверждение. l_p — полное пространство.
Доказательство. Рассмотрим в l_p произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (\xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)},\ \dots)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n, m \geqslant N \quad \rho_p(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \Rightarrow \quad |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \Rightarrow \quad |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon.$$

А это означает, что последовательность $\{\xi_i^{(n)}\}$ сходится к некоторому ξ_i. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots)$. Докажем, что $x \in l_p$.

Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p,$$

то для любого числа k будет верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p.$$

Устремляя к бесконечности сначала m, а затем k, а также возводя неравенство в степень $\frac{1}{p}$, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(|\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, при любом n $(x - x_n) \in l_p$. Кроме того, сами x_n также являются элементами l_p

Рассмотрим два числа, a и b. Очевидно, что $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Если $|a| > |b|$, то

$$|a + b| \leqslant 2|a| \quad \Rightarrow \quad |a + b|^k \leqslant 2^k |a|^k \leqslant 2^k(|a|^k + |b|^k).$$

Если же $|a| \leqslant |b|$, то

$$|a + b| \leqslant 2|b| \quad \Rightarrow \quad |a + b|^k \leqslant 2^k |b|^k \leqslant 2^k(|a|^k + |b|^k).$$

Таким образом, неравенство $|a+b|^k \leqslant 2^k(|a|^p + |b|^k)$ выполняется всегда. Положим $a = \xi_i - \xi_i^{(n)}$, $b = \xi_i^{(n)}$, $k = p$. Получаем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)} + \xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^p\bigl(|\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p + |\xi_i^{(n)}|^p\bigr)\right)^{\frac{1}{p}} = 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь применим то же самое неравенство для $a = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p$, $b = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p$, $k = \frac{1}{p}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

В силу того, что $(x - x_n)$ и x_n являются элементами l_p, справедливы неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \qquad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Но тогда справедливо и неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

а оно означает, что $x \in l_p$. $\square$

Теорема 1 (о вложенных шарах). Пусть в полном метрическом пространстве имеется последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

$$\overline{S_1(a_1, r_1)} \supset \overline{S_2(a_2, r_2)} \supset \ldots, \quad r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда существует одна и только одна точка, принадлежащая всем этим шарам.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ центров этих шаров. Так как $\overline{S}_{n+p} \subset \overline{S}_n$, то $a_{n+p} \in \overline{S}_n$. Следовательно, $\rho(a_{n+p}, a_n) < r_n$ и поэтому стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по всем p. Это означает, что последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной. Так как по условию задачи рассматриваемое метрическое пространство является полным, то $\{a_n\}$ сходится к некоторому элементу a этого же пространства.

Возьмём любой шар $\overline{S}_k$. Тогда точки $a_k,\ a_{k+1},\ \ldots$ принадлежат $\overline{S}_k$. Так как шар по условию замкнут, предел a последовательности $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ также принадлежит $\overline{S}_k$. Следовательно, предел a последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит всем шарам.

Допустим, что существует точка b, принадлежащая всем шарам и отличная от a (то есть $\rho(a, b) = \delta > 0$). Так как $a, b \in \overline{S}_n\ \forall n$, то справедливо неравенство

$$\delta = \rho(a, b) \leqslant \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leqslant 2r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Мы получили противоречие; следовательно, всем шарам принадлежит только одна точка. $\square$

Определение 4. Множество X метрического пространства M называется *множеством 1-й категории*, если его можно представить в виде не более чем счётного объединения нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством 1-й категории, называется *множеством 2-й категории.*

Множество рациональных точек на $\mathbb{R}$ является множеством 1-й категории, множество иррациональных точек — множеством 2-й категории.
Теорема 2 (теорема Бэра о категориях). Полное метрическое пространство является множеством 2-й категории.
Доказательство. Пусть это не так. Тогда рассматриваемое пространство M представимо в виде $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где множества X_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ нигде не плотны.

Рассмотрим шар $\overline{S(a,1)}$, где a — произвольная точка пространства. Так как множество X_1 нигде не плотно, то внутри шара $\overline{S(a,1)}$ найдётся подшар $\overline{S_1(a_1, r_1)}$ радиуса $r_1 < 1$, не содержащий точек X_1. Так как множество X_2 нигде не плотно, то внутри шара $\overline{S_1(a_1, r_1)}$ найдётся подшар $\overline{S_2(a_2, r_2)}$ радиуса $r_2 < \frac{1}{2}$, не содержащий точек X_2. Проводя аналогичные рассуждения дальше ($r_n < \frac{1}{n}$), получим последовательность замкнутых шаров, вложенных друг в друга:

$$\overline{S_1(a_1, r_1)} \supset \overline{S_2(a_2, r_2)} \supset \dots,$$

причём шар $\overline{S_k(a_k, r_k)}$ не содержит точек ни одного из множеств X_1, X_2, …, X_k. По теореме 1 существует точка $a \in M$, принадлежащая всем этим шарам. Но тогда эта точка не принадлежит ни одному из множеств X_n, объединением которых является $M \ni a$. Мы получили противоречие $\Rightarrow$ наше предположение неверно. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим оператор $A : M \to M$. Оператор A называется *сжимающим отображением (сжимающим оператором) на* M, если существует число $\alpha < 1$ такое, что для всех $x, y \in M$ справедливо неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y).$$

Неподвижной точкой оператора A называется точка, удовлетворяющая условию $Ax = x$.

Теорема 3 (Принцип сжимающих отображений). Пусть M — полное метрическое пространство, A — сжимающее отображение на M. Тогда A имеет единственную неподвижную точку в M.
Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $x_0 \in M$ и построим для него итерационную последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = Ax_{n-1}.$$

Заметим, что

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(Ax_1, Ax) \leqslant \alpha \rho(x_1, x_0) = \alpha \rho(Ax_0, x_0);$$
$$\dots$$
$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha^n \rho(Ax_0, x_0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+1}, x_n) + \rho(x_{n+2}, x_{n+1}) + \dots + \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) \leqslant \\ \leqslant \alpha^n \rho(Ax_0, x_0) + \alpha^{n+1} \rho(Ax_0, x_0) + \dots + \alpha^{n+p-1} \rho(Ax_0, x_0) = \\ = \frac{\alpha^n (1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} \rho(Ax_0, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(Ax_0, x_0). \end{aligned}$$

Так как $\alpha < 1$, то $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по всем p. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. По условию M — полное метрическое пространство; следовательно, существует точка $x \in M$, являющаяся пределом $\{x_n\}$ при $n \to \infty$. Докажем неподвижность x:

$$\begin{aligned}\rho(Ax, x) \leqslant \rho(Ax, x_n) + \rho(x_n, x) &= \\ &= \rho(Ax, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, x) \leqslant \\ &\leqslant \alpha\rho(x, x_{n-1}) + \rho(x_n, x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.\end{aligned}$$

Устремив n к бесконечности, получим, что $\rho(Ax, x) = 0$; следовательно, точка x действительно является неподвижной.
Утверждение о том, что неподвижная точка единственна, докажем от противного. Пусть существуют две неподвижных точки: $Ax = x, Ay = y$. Тогда

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) = 0,$$

то есть $x = y$. Теорема полностью доказана. $\square$

Пример. Одним из применений принципа сжимающих отображений является доказательство существования и единственности решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Пусть $K(s,t)$ — действительная функция, $K(s,t) \in L_2(\Pi)$, где Π — квадрат $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ (это условие, вообще говоря, можно заменить условием $\int\limits_a^b dt \int\limits_a^b K^2(s,t)ds < +\infty$), и пусть, кроме того, функция $f(s) \in L_2(a,b)$. Докажем, что тогда интегральное уравнение

$$x(s) = \lambda \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt + f(s)$$

имеет при достаточно малых значениях параметра λ единственное решение $x(s) \in L_2(a,b)$.

Рассмотрим соответствующий оператор

$$Ax = \lambda \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt + f(s) = \lambda A_1 x + f(s),$$

$$\text{где } A_1 x = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

Докажем, что оператор A переводит каждую функцию $x(s) \in L_2(a,b)$ в функцию, также принадлежащую $L_2(a,b)$. Так как $f(s) \in L_2(a,b)$, то достаточно доказать, что оператор A_1 обладает тем же свойством.

Так как $K(s,t) \in L_2(\Pi)$, то при каждом фиксированном $s \in [a,b]$ функция $K(s,t)$, являясь функцией $K(t)$, принадлежит пространству $L_2([a,b])$. Функция $x(t)$ также принадлежит $L_2([a,b])$. Но тогда и функции $(K(s,t)+x(t)), (K(s,t)-x(t)) \in L_2([a,b]) \Rightarrow$ функции $(K(s,t)+x(t))^2, (K(s,t)-x(t))^2$ интегрируемы по t на $[a,b] \Rightarrow$ функция $K(s,t)x(t) = \frac{1}{4}\left((K+x)^2-(K-x)^2\right)$ также является интегрируемой по t на $[a,b]$. Следовательно, для всех $s \in [a,b]$ существует интеграл

$$y(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

Применяем к $y^2(s)$ неравенство Коши-Буняковского:

$$y^2(s) = \left(\int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b K^2(s,t)dt \int\limits_a^b x^2(t)dt.$$

Интеграл $\int\limits_a^b x^2(t)dt$ представляет собой некоторую постоянную. Функция $K^2(s,t)$ интегрируема на Π, поэтому в силу теоремы Фубини функция $\int\limits_a^b K^2(s,t)dt$ интегрируема по s на $[a,b]$. Значит, и функция $y^2(s)$ является интегрируемой по s на $[a,b]$, причём справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b y^2(s)ds \leqslant \int_a^b \left(\int\limits_a^b K^2(s,t)dt \int\limits_a^b x^2(t)dt\right) ds.$$

Оценим теперь $\rho(Ax, Az)$:

$$\rho(Ax, Az) =$$

$$= \left(\int\limits_a^b \left[\lambda \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt - \lambda \int\limits_a^b K(s,t)z(t)dt \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \left(\int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K(s,t)[x(t) - z(t)]dt \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \left(\int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K^2(s,t)dt \right] \left[\int\limits_a^b [x(t) - z(t)]^2 dt \right] ds \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \left(\int\limits_a^b ds \int\limits_a^b K^2(s,t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^b [x(t) - z(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda| \left(\int\limits_a^b ds \int\limits_a^b K^2(s,t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \rho(x,z).$$

Таким образом, при

$$|\lambda| < \frac{1}{\left(\int\limits_a^b ds \int\limits_a^b K_2(s,t)dt \right)^{\frac{1}{2}}}$$

мы находимся в условиях применимости принципа сжимающих отображений, то есть у оператора A существует единственная неподвижная точка. А это и означает существование и единственность решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. $\square$

Задача. Рассмотрим в произвольном метрическом пространстве M оператор A:

$$A : M \to M, \quad \rho(Ax, Ay) < \rho(x, y).$$

Можно ли обобщить теорему о неподвижной точке (другими словами, в любых ли метрических пространствах оператор A имеет неподвижную точку)?
[Правильный ответ — нет]
Пример: $M = (0,1) \cup (1, \infty)$, $A(x) = \frac{1}{x}$.

Перейдём к рассмотрению нормированных пространств.

Линейным многообразием L в линейном пространстве X называется непустое подмножество пространства X, обладающее тем свойством, что для любых элементов $x, y \in L$ их линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ также принадлежит L.

Определение 4. Линейное многообразие в нормированном пространстве называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно сходимости по норме.

Теорема 4 (теорема Рисса). Пусть X — подпространство в нормированном пространстве M, не совпадающее с M. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдётся элемент $y \in M \setminus X$, $\|y\| = 1$ и такой, что $\forall x \in X$ $\|x-y\| > 1-\varepsilon$.
Доказательство. Выберем произвольный элемент $y_0 \in M \setminus X$ ($M \setminus X \neq \varnothing$, так как X — подпространство M, не совпадающее с M). Рассмотрим величину

$$d = \inf_{x \in X} \|x - y_0\|.$$

От противного доказывается, что $d > 0$ (если бы d равнялось нулю, то существовала бы последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, сходящаяся к $y_0 \notin X$; тем самым нарушалась бы замкнутость относительно сходимости по норме).

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент $x_0 \in X$ такой, что $0 < d \leqslant \|x_0 - y_0\| < d + d\varepsilon$. Тогда выберем элемент $y = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Очевидно, что $\|y\| = 1$. То, что $y \notin X$, доказывается от противного (если бы y принадлежал X, то и элемент $\|x_0 - y_0\| y + x_0 = y_0$ принадлежал бы X, а этого быть не может). Проверим, что он удовлетворяет требуемому неравенству (учитывая, что $x_0 - \|x_0 - y_0\| x \in X$):

$$\begin{aligned}\|x - y\| = \left\| x - \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} \right\| &= \\ &= \frac{\|y_0 - (x_0 - \|x_0 - y_0\| x)\|}{\|x_0 - y_0\|} > \frac{d}{d + d\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

§7. Линейные операторы

Определение 1. Оператор A, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y над одним и тем же полем чисел ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), называется *линейным оператором*, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X\ A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$;
2. $\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \in \mathbb{C})\ A\lambda x = \lambda A x_1$.

Эквивалентное условие.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})\ A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$$

Определение 2. Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если из сходимости по норме последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве X следует сходимость по норме последовательности $\{Ax_n\}$ к Ax в пространстве Y.

Определение 3. Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным (во всем пространстве)*, если он непрерывен в каждой точке.

Теорема 1. Для того, чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен хотя бы в одной точке.

Доказательство. Необходимость очевидна; докажем достаточность. Пусть в некоторой точке $x_0 \in X$ оператор A непрерывен: $x_n \to x_0 \ \Rightarrow\ Ax_n \to Ax_0$. Пусть теперь x — произвольная точка пространства X и $x_n \to x$. Тогда $x_n - x + x_0 \to x_0$, поэтому в силу непрерывности оператора A в точке x_0

$$A(x_n - x + x_0) = Ax_n - Ax + Ax_0 \to Ax_0.$$

Из этого следует, что $Ax_n \to Ax$. $\square$

(Следующий пример не проверял — ред.)

Пример. Рассмотрим линейное пространство непрерывных на сегменте $[0;1]$ функций и оператор $Af(t) = f(0)$ на нём.

1. Сначала введем метрику $C[0;1]:\ \|f(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. В этой метрике оператор A будет являться непрерывным, так как он непрерывен в нуле: если $\|f_n(t) - 0\| \to 0$, то $\|Af_n(t) - 0\| = \|Af_n(t)\| \to 0$.

2. Теперь введём метрику $L_1([0,1]):\ \|f(t)\| = \int\limits_0^1 |f(t)|dt$. Здесь непрерывности уже не будет. Например, возьмём последовательность функций следующего вида:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = 0 \\ -\frac{n^3}{2}x + n & \text{если } x \in (0; \frac{2}{n^2}) \\ 0, & \text{если } x \in [\frac{2}{n^2}, 1]) \end{cases}$$

Тогда в нуле получаем $\|f_n(t) - 0\| = \|f_n(t)\| \to 0$, но при этом $\|Af_n(t) - 0\| = \|f_n(0) - 0\| = n \not\to 0$.

Определение 4. Оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если найдётся константа M такая, что для всех $x \in X$ будет справедливо неравенство $\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X$. При этом минимальная из таких констант называется *нормой оператора* A: $\|A\| \equiv infM = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Теорема 2. Для того, чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.
Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что он не ограничен (то есть "универсальной"константы M не существует). Тогда найдётся последовательность элементов $\{x_n\}$ такая, что $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Введём в рассмотрение элементы

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}.$$

Тогда

$$\|\xi_n\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

С другой стороны,

$$\|A\xi_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1 \not\to 0 = \|A0\|.$$

Мы получили противоречие ($\{\xi_n\} \to 0$, но $\{A\xi_n\} \not\to A0$); следовательно, наше предположение неверно и оператор A является ограниченным.

Теперь докажем достаточность. Пусть линейный оператор A ограничен, то есть существует константа M такая, что для всех x справедливо $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$. Пусть $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то есть $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда

$$\|Ax - Ax_n\| = \|A(x - x_n)\| \leqslant M\|x - x_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то есть оператор A является непрерывным. $\square$

В дальнейшем будем рассмаривать ограниченные операторы.

Определение. *Нормой оператора* A называется наименьшая из таких ограничивающих констант M: $\|A\| = \inf\limits_{M:\|Ax\|\leqslant M\|x\|,\forall x\in X} M$.

Эквивалентные определения $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$.

Доказательство: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ очевидно следует из определения $\|A\| = \inf\limits_{M:\|Ax\|\leqslant M\|x\|,\forall x\in X} M = \inf\limits_{M:\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\leqslant M,\forall x\in X} M$.

Покажем, что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$

Действительно, если $\|x\| \leqslant 1$, то

$$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \leqslant \|A\|,$$

поэтому и

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент ξ_ε такой, что

$$\|A\xi_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|\xi_\varepsilon\|.$$

(рассматриваем случай $\|A\| \neq 0, \|\xi_\varepsilon\| \neq 0$). Возьмём

$$x_\varepsilon = \frac{\xi_\varepsilon}{\|\xi_\varepsilon\|}.$$

Тогда

$$\|Ax_\varepsilon\| = \frac{\|A\xi_\varepsilon\|}{\|\xi_\varepsilon\|} > \frac{(\|A\| - \varepsilon)\|\xi_\varepsilon\|}{\|\xi_\varepsilon\|} = \|A\| - \varepsilon.$$

Так как $\|x_\varepsilon\| = 1$, то

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_\varepsilon\| > \|A\| - \varepsilon,$$

поэтому $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|A\|$. Но перед этим мы получили неравенство $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|$. Эти два неравенства означают, что на самом деле $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \|A\|$. $\square$

Утверждение. Пусть даны два линейных нормированных пространства, X и Y. Тогда совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y (будем обозначать её $L(X \to Y)$) образует линейное нормированное пространство.

Доказательство. Линейность этого пространства очевидна (в качестве нулевого элемента выбирается нулевой оператор). Покажем, что выполняются аксиомы нормированного пространства. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant 0$; Если $\|A\| = 0$, то $\|Ax\| = 0$ для всех x таких, что $\|x\| \leqslant 1$. Но тогда $Ax = 0$ и для всех x, и, следовательно, $A = 0$. Получили, что первая аксиома выполняется.

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = |\lambda| \|Ax\|,$$

то есть вторая аксиома также выполняется.

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax + Bx\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Таким образом, выполняется и третья аксиома, то есть пространство является нормированным. $\square$

Теорема 3. Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — банахово пространство. Тогда $L(X \to Y)$ — банахово пространство.

Доказательство. Пусть дана фундаментальная последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}$:

$$\|A_m - A_n\| \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Тогда для любого x

$$\|A_m x - A_n x\| \leqslant \|A_m - A_n\| \|x\| \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Следовательно, при каждом фиксированном x последовательность $\{A_n x\}$ является фундаментальной; в силу полноты пространства Y это означает, что $\{A_n x\}$ имеет некоторый предел $y \in Y$. Таким образом, каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$, то есть задаётся некоторый оператор $A : X \to Y$.

Докажем его ограниченность. По условию $\|A_m - A_n\| \to 0$ при $m, n \to \infty$; значит,

$$|\|A_m\| - \|A_n\|| \leqslant \|A_m - A_n\| \to 0 \text{ при } m, n \to \infty,$$

то есть числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна, а поэтому и ограничена. Значит, существует такая константа C, что $\|A_n\| \leqslant C$ для всех n. Следовательно, для всех n справедливо и неравенство $\|A_n x\| \leqslant \|A_n\|\|x\| \leqslant C\|x\|$. Получаем, что

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant C\|x\|.$$

А это как раз и означает, что оператор A является ограниченным. Кроме того, оператор A, очевидно, линеен. Таким образом, A принадлежит рассматриваемому пространству линейных ограниченных операторов.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер m такой, что

$$\forall x \in X, \|x\| \leqslant 1 \quad \|A_m x - A_n x\| \leqslant \|A_m - A_n\|\|x\| < \varepsilon, \varepsilon > 0; m, n \geqslant N.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем, что

$$\forall x \in X, \|x\| \leqslant 1,\ \forall n \geqslant N \quad \|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда для $n \geqslant N$

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, линейный ограниченный оператор $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смысле сходимости по норме в рассматриваемом пространстве линейных ограниченных операторов, поэтому это пространство является банаховым. $\square$

Определение. Пространство $X^* = L(X, \mathbb{R})$ называется *сопряженным* для линейиного нормированного пространства X.
Следствие из теоремы 3. Пространство X^*, сопряжённое с линейным нормированным пространством X, является банаховым пространством.

Теорема 4 (теорема Банаха-Штейнгауза, принцип равномерной ограниченности). Пусть X и Y — банаховы пространства, на которых задана последовательность линейных ограниченных операторов: $\{A_n\} \in L(X \to Y)$. Тогда, если последовательность $\{\|A_n x\|\}$ ограничена для любого $x \in X$, то последовательность норм операторов также будет ограниченной, то есть найдётся константа C такая, что $\|A_n\| \leqslant C$.
Доказательство. Предположим обратное. Тогда множество $\{\|A_n x\|\}$ не ограничено на любом замкнутом шаре. Действительно, если $\|A_n x\| \leqslant c$ для всех n и всех x из некоторого замкнутого шара $\overline{S(x_0, \varepsilon)}$, то для любого $\xi \in X$, $\xi \neq 0$, элемент

$$\frac{\xi \cdot \varepsilon}{\|\xi\|} + x_0$$

принадлежит этому шару и, следовательно, для него при всех n выполняются неравенства $\|A_n x\| \leqslant M$. Тогда

$$\frac{\|A_n\xi\| \cdot \varepsilon}{\|\xi\|} - \|A_n x_0\| \leqslant \left\| \frac{\|A_n\xi\| \cdot \varepsilon}{\|\xi\|} + A_n x_0 \right\| \leqslant M.$$

Отсюда получаем, что

$$\|A_n\xi\| \leqslant \frac{M + \|A_n x_0\|}{\varepsilon} \|\xi\|.$$

Последовательность $\|A_n x\|$ ограничена, поэтому для всех n будет справедливо неравенство $\|A_n\xi\| \leqslant \frac{2M}{\varepsilon}\|\xi\|$. Но из него следует, что $\|A_n\| \leqslant \frac{2M}{\varepsilon}$, что противоречит сделанному нами предположению. Итак, при нашем предположении множество $\{\|A_n x\|\}$ не ограничено на любом замкнутом шаре.

Пусть теперь $\overline{S}_0(x_0, r_0)$ — произвольный замкнутый шар в X. Тогда в силу того, что $\{\|A_n x\|\}$ не ограничена на этом шаре, существуют номер n и элемент $x_1 \in \overline{S}_0$ такие, что $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. Так как оператор A_{n_1} непрерывен, то это неравенство выполняется в некотором замкнутом шаре $\overline{S}_1(x_1, r_1) \subset \overline{S}_0, r_1 < 1$. На $\overline{S}_1$ последовательность $\{\|A_n x\|\}$ снова не ограничена, поэтому снова найдутся номер $n_2 > n_1$ и элемент $x_2 \in \overline{S}_1$ такие, что $\|A_{n_2} x_2\| > 2$. Опять же, в силу непрерывности оператора A_{n_2} это свойство выполняется в некотором замкнутом шаре $\overline{S}_2(x_2, r_2) \subset \overline{S}_1, r_2 < \frac{1}{2}$ и так далее ($r_n < \frac{1}{n}$).

Таким образом, мы получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, будет существовать точка x, принадлежащая всем этим шарам. Но тогда в этой точке для всех k справедливо неравенство $\|A_{n_k} x\| > k$, а это противоречит условию теоремы о том, что для любого $x \in X$ последовательность $\|A_n x\|$ является ограниченной. Следовательно, наше предположение неверно. Теорема доказана. $\square$

Следствие. Пусть X и Y — банаховы пространства, задана последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in L(X \to Y)$ и существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\| \leqslant 1$, а $\|A_n x_n\| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда найдётся элемент $x \in X$, $\|x_0\| \leqslant 1$, такой, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|A_n x_0\| = +\infty$.

Доказательство. Пусть это не так, то есть для всех $x \in X$ с $\|x_0\| \leqslant 1$ последовательность $\{\|A_n x\|\}$ ограничена. Тогда при $\xi \neq 0$ элемент $x = \frac{\xi}{\|\xi\|}$

будет иметь норму $\|x\| = 1$, а также будет справедливо неравенство

$$\frac{\|A_n\xi\|}{\|\xi\|} = \|A_n x\| \leqslant M, \text{ где } M \text{ — некоторая константа.}$$

Следовательно, $\|A_n\xi\| \leqslant M\|\xi\|$, то есть для любого $\xi \in X$ последовательность $\{\|A_n\xi\|\}$ является ограниченной. Следовательно, в силу теоремы Банаха-Штейнгауза найдётся константа C такая, что $\|A_n\| \leqslant C$. Получаем, что

$$\|A_n x_n\| \leqslant \|A_n\|\|x_n\| \leqslant C,$$

что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно. □

Пример. Используя теорему Банаха-Штейнгауза, докажем существование непрерывной периодической функции, для которой ряд Фурье расходится. Итак, пусть $f(x) \in \mathbb{C}[-\pi;\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Сумма ряда Фурье этой функции имеет вид

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ktdt.$$

Перепишем $S_n(x)$:

$$\begin{aligned} S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos k(t-x) f(t)dt = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} f(t)dt. \end{aligned}$$

Определим функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{t}, & t \neq 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$S_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt f(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nt f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}f(t)dt + o(1), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Рассмотрим оператор

$$A_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nt}{t}f(t)dt.$$

Оператор A_n действует из пространства $\widetilde{C}$ (пространства непрерывных периодических функций) в пространство R_1 и любой функции $f(x) \in \widetilde{C}$ ставит в соответствие частичную сумму её ряда Фурье (с точностью до $O(1)$). Рассмотрим следующую последовательность функций f_n:

$$f_n(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sin nx, \quad \|f_n\| \leqslant 1.$$

Тогда

$$A_n f_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 nt}{|t|}dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^2 nt}{t}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi n}\frac{\sin^2 y}{y}dy > \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{1-\cos 2y}{y}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln \pi n - \frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{\cos 2y}{y}dy.$$

Интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{1}^{\pi n}\frac{\cos 2y}{y}dy$$

сходится, поэтому
$$A_n f_n = \frac{1}{\pi} \ln \pi n + O(1).$$
Получаем, что при $n \to \infty$ $A_n f_n \to \infty$. Следовательно, в силу следствия к теореме 4 существует такая функция $f_0(x) \in \widetilde{C}$, что $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n f_0(x) = +\infty$, то есть ряд Фурье этой функции в нуле расходится. $\square$

§8. Обратные операторы

Пусть есть два линейных нормированных пространства — X и Y. Рассмотрим оператор $A : X \to Y$ с областью определения $D(A) = X$ и областью значений $R(A) \subset Y$.

Если для любого $y \in R(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение, то говорят, что определен *обратный оператор* $A^{-1} : R(A) \to X$, то есть $X = A^{-1}Y$. Очевидно, что $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$ — тождественные операторы на $R(A)$ и X соответственно.

Если для оператора $A : X \to Y$ существует оператор $A^{-1} : R(A) \to X$ такой, что
$$A^{-1}Ax = x, \quad AA^{-1}y = y,$$
то операторы A и A^{-1} называются *взаимно обратными*. Если выполняется только неравенство $A^{-1}Ax = x$, то оператор A^{-1} называется *левым обратным* оператором для A; если выполняется только неравенство $AA^{-1}y = y$, то оператор A^{-1} называется *правым обратным* оператором для A.

Легко показать, что оператор, обратный к линейному, также является линейным. Пусть оператор A является линейным. Рассмотрим
$$x = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha A^{-1} y_1 - \beta A^{-1} y_2.$$

Тогда
$$\begin{aligned} Ax = AA^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - A(\alpha A^{-1} y_1) - A(\beta A^{-1} y_2) = \\ = AA^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha AA^{-1} y_1 - \beta AA^{-1} y_2 = \\ = (\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha y_1 - \beta y_2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,
$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0,$$
то есть
$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$
Таким образом, оператор A^{-1} также является линейным.

Теорема 1. Пусть A — линейный оператор, отображающий линейное нормированное пространство X на линейное нормированное пространство Y, причём существует такая константа $m > 0$, что $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ для всех $x \in X$. Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}, $\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$.
Доказательство. Докажем, что уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Предположим, что их два: $y = Ax_1 = Ax_2$. Тогда $Ax_1 - Ax_2 = A(x_1 - x_2) = 0$. Следовательно,
$$m\|x_1 - x_2\| \leqslant \|Ax_1 - Ax_2\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$
Таким образом, существует обратный оператор A^{-1}. Он линеен в силу линейности оператора A и, кроме того, ограничен, так как для всех $y \in R(A)$ справедливо неравенство
$$\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m}\|y\|. \quad \square$$

Теорема 2 (теорема Неймана). Пусть X — банахово пространство, оператор $A \in L(X \to X)$, и пусть $\|A\| \leqslant q < 1$. Тогда оператор $(I - A)$ имеет обратный линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$, $\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$.
Доказательство. Определим операторы, являющиеся степенями оператора A, следующим образом:
$$A^0 = I, \quad A^n = A(A^{n-1}) \text{ при } n = 1,\ 2,\ \ldots.$$
Для линейных ограниченных операторов A и B в банаховом пространстве X справедливо неравенство $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, поскольку для любого $x \in X$ справедливо неравенство
$$\|ABx\| \leqslant \|A\|\ \|Bx\| \leqslant \|A\|\ \|B\|\ \|x\|.$$
Поэтому $\|AA\| \leqslant \|A\|\ \|A\| = \|A\|^2$, и аналогично $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n \leqslant q^n$ для всех n.

Введём оператор $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k$. Тогда

$$(I-A)S_n = (I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1}.$$

Но $A^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, так как $\|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1} \leqslant q^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$ в силу $q < 1$. Следовательно, существует обратный оператор $S = (I-A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$.

Легко заметить, что оператор S является линейным. Кроме того, он является ограниченным:

$$\|S\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}. \quad \square$$

Теорема 3. Пусть X — банахово пространство, $A, A^{-1} \in L(X \to X)$ и существует линейный ограниченный оператор ΔA такой, что $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$ имеет обратный оператор B^{-1}, причём

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|\|A^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta A\|\|A^{-1}\|}.$$

Доказательство. Представим оператор B в виде $A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A)$. Из условия задачи следует, что

$$\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1.$$

Следовательно, в силу теоремы Неймана у оператора $I + A^{-1}\Delta A$ существует обратный оператор $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$. Следовательно, произведение $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$ является обратным оператором к B, и при этом справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\|B^{-1} - A^{-1}\| &= \|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \\
&\leqslant \|A^{-1}\|\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} - I\| \leqslant \|A^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|(A^{-1}\Delta A)^n\| = \\
&= \|A^{-1}\| \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leqslant \|A^{-1}\| \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}. \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 4 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть X и Y — банаховы пространства, линейный ограниченный оператор A отображает всё пространство X на всё пространство Y взаимно однозначно.

Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}.
Доказательство. Так как линейный оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами пространств X и Y, то он, очевидно, будет иметь обратный оператор A^{-1}, также являющийся линейным. Остаётся доказать ограниченность оператора A^{-1}.

Введём в рассмотрение множества $Y_n = \{y \in Y : \ \|A^{-1}y\| \leqslant n\|y\|\}$. Любой элемент $y \in Y$ попадёт в множества Y_n при целочисленных $n > \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}$. Следовательно, все пространство Y можно представить в виде

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Пространство Y является банаховым, поэтому в силу теоремы Бэра о категориях оно не может быть представлено в виде счётного числа нигде не плотных множеств. Следовательно, найдётся хотя бы один номер n_0 такой, что множество Y_{n_0} не является нигде не плотным. Это значит, что существует шар $S(y_0, r_0)$, в котором множество $S(y_0, r_0) \cap Y_{n_0}$ является всюду плотным, то есть $\overline{S(y_0, r_0) \cap Y_{n_0}} = S(y_0, r_0)$. Производя замыкание левой и правой частей этого множества, получим $\overline{\overline{S(y_0, r_0) \cap Y_{n_0}}} = \overline{S(y_0, r_0) \cap Y_{n_0}} = \overline{S(y_0, r_0)}$.

Рассмотрим замкнутый шар $\overline{S(y_1, r_1)} \subset S(y_0, r_0)$ и такой, что $y_1 \in Y_{n_0}$. Тогда справедливо неравенство

$$\overline{Y_{n_0}} \supset \overline{S(y_0, r_0) \cap Y_{n_0}} = \overline{S(y_0, r_0)} \supset \overline{S(y_1, r_1)}.$$

Следовательно, $\overline{S(y_1, r_1)} \subset \overline{Y_{n_0}}$. Возьмём произвольный элемент y с нормой $\|y\| = r_1$. Тогда элемент $y + y_1 \in \overline{S(y_1, r_1)}$, так как $\|(y + y_1) - y_1\| = r_1$. В силу неравенства $\overline{S(y_1, r_1)} \subset \overline{Y_{n_0}}$ найдётся последовательность элементов $\{z^{(k)}\}$ из $S(y_1, r_1) \cap Y_{n_0}$ такая, что $z^{(k)} \to y + y_1$ при $k \to \infty$. Обозначим $y^{(k)} = z^{(k)} - y_1$, тогда $y^{(k)} \to y$ при $k \to \infty$. Кроме того, $\|y\| = r_1$, поэтому при $k \geqslant K$ справедливы неравенства $\frac{r_1}{2} \leqslant \|y^{(k)}\| \leqslant r_1$.

Так как $z^{(k)}$ и y_1 принадлежат Y_{n_0}, то

$$\begin{aligned}\|A^{-1}y^{(k)}\| &\leqslant \|A^{-1}z^{(k)}\| + \|A^{-1}y_1\| \leqslant \\ &\leqslant n_0(\|z^{(k)}\| + \|y_1\|) \leqslant n_0(\|y^{(k)}\| + 2\|y_1\|) \leqslant \\ &\leqslant \frac{2n_0}{r_1}(r_1 + 2\|y_1\|)\frac{r_1}{2} \leqslant \frac{2n_0}{r_1}(r_1 + 2\|y_1\|)\|y^{(k)}\|.\end{aligned}$$

Обозначим за N наименьшее целое число, превосходящее

$$\frac{2n_0}{r_1}(r_1 + 2\|y_1\|)\|y^{(k)}\|.$$

Тогда

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| \leqslant N\|y^{(k)}\|,$$

поэтому все $y^{(k)} \in Y_N$. Другими словами, любой элемент $y \in Y$ с нормой $\|y\| = r_1$, можно аппроксимировать элементами $y^{(k)} \in Y_N$ ($y^{(k)} \to y$ при $k \to \infty$). Возьмём теперь произвольный элемент $y \in Y$. Рассмотрим элемент

$$\xi = r_1 \frac{y}{\|y\|}.$$

Получаем, что $\|\xi\| = r_1$. Поэтому найдётся последовательность $\{\xi^{(k)}\} \subset Y_N$, сходящаяся к ξ. Но тогда последовательность

$$y^{(k)} = \xi^{(k)} \frac{\|y\|}{r_1} \to y.$$

При этом

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| = \frac{\|A^{-1}\xi^{(k)}\|\|y\|}{r_1} \leqslant N\|\xi^{(k)}\| \frac{\|y\|}{r_1} = N\|y^{(k)}\|,$$

то есть все $y^{(k)} \in Y_N$. Таким образом, пространство Y_N является всюду плотным в Y.

Возьмём произвольный элемент $y \in Y$; пусть $\|y\| = l$. Найдём элемент $y_1 \in Y_N$ такой, что

$$\|y - y_1\| \leqslant \frac{l}{2}, \quad \|y_1\| \leqslant l.$$

Это можно сделать в силу того, что $y \in \overline{S(0,l)}$ и множество $\overline{S(0,l)} \cap Y_N$ является всюду плотным в $\overline{S(0,l)}$. Аналогично найдём элемент $y_2 \in Y_N$ такой, что

$$\|(y - y_1) - y_2\| \leqslant \frac{l}{4}, \quad \|y_2\| \leqslant \frac{l}{2}.$$

Продолжая так далее, построим элементы $y_k \in Y_N$ такие, что

$$\|y - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)\| \leqslant \frac{l}{2^k}, \quad \|y_k\| \leqslant \frac{l}{2^{k-1}}.$$

Следовательно,

$$y = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_i.$$

Положим $x_k = A^{-1}y_k$, тогда

$$\|x_k\| \leqslant N\|y_k\| \leqslant \frac{Nl}{2^{k-1}}.$$

Это означает, что последовательность $\{s_k\}$, $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ в силу полноты пространства X сходится к некоторому пределу $x \in X$ при $k \to \infty$, так как является фундаментальной:

$$\|s_{k+p} - s_k\| = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \right\| < \frac{Nl}{2^{k-1}}.$$

Следовательно,

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Тогда

$$Ax = A\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} x_i\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} Ax_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y,$$

поэтому

$$\|A^{(-1)}y\| = \|x\| = \\ = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Nl}{2^{i-1}} = \\ = 2Nl = 2N\|y\|.$$

Это и означает, что оператор A^{-1} является ограниченным. $\square$

§9. Линейные функционалы

Линейный непрерывный оператор, значения которого принадлежат пространству $\mathbb{R}_1$, называется *линейным функционалом.*

$$L : X \to \mathbb{R}_1.$$

Теорема 1 (теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала). Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ - линейное многообразие, на котором задан линейный функционал $f(x)$. Тогда $f(x)$ можно продолжить на всё пространство X с сохранением нормы, то есть на X существует линейный функционал $F(x)$ такой, что:

1. $F(x) = f(x)$ на L;
2. $\|F\|_X = \|f\|_L$.

Доказательство. A) Возьмём элемент $x_0 \notin L$ и рассмотрим множество $L_0 = (L, x_0)$ элементов u вида $u = x + tx_0$, где $x \in L$, а $t \in \mathbb{R}$ — произвольное вещественное число. Очевидно,что L_0 является линейным многообразием. Докажем, что все его элементы однозначно представимы в виде $x + tx_0$. Допустим, имеются два представления

$$u = x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_2 x_0,$$

причём $t_1 \neq t_2$ (иначе из $x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_1 x_0$ следовало бы, что $x_1 = x_2$, то есть представление было бы единственным). Тогда

$$x_2 - x_1 = (t_1 - t_2)x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_2}.$$

Но $x_1, x_2 \in L$, поэтому и x_0 должен принадлежать L, что невозможно. Мы получили противоречие; следовательно, наше предположение неверно и представления элементов L_0 единственны.

Возьмём два элемента $x_1, x_2 \in L$. Имеем

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leqslant \|f\| \ \|x_1 - x_2\| \leqslant \|f\| \ [\|x_1 + x_0\| + \|x_2 + x_0\|].$$

Отсюда

$$f(x_1) - \|f\| \ \|x_1 + x_0\| \leqslant f(x_2) + \|f\| \|x_2 + x_0\|.$$

Поскольку x_1 и x_2 — произвольные элементы L, выбранные независимо друг от друга, то

$$\sup_{x \in L} \{f(x) - \|f\| \|x + x_0\|\} \leqslant \inf_{x \in L} \{f(x) + \|f\| \|x + x_0\|\}.$$

Следовательно, существует вещественное число c такое, что

$$\sup_{x \in L} \{f(x) - \|f\| \|x + x_0\|\} \leqslant c \leqslant \inf_{x \in L} \{f(x) + \|f\| \|x + x_0\|\}.$$

Возьмём теперь произвольный элемент $u \in L_0$. Он имеет вид $u = x + tx_0$, где $x \in L$ и $t \in \mathbb{R}$ однозначно определены. Введём новый функцинал $\varphi(u)$, определив его для элемента $u = x + tx_0$ равенством

$$\varphi(u) = f(x) - tc,$$

где c — вещественное число, удовлетворяющее приведённому выше двойному неравенству.

Очевидно, что функционал $\varphi(u)$ является аддитивным ($\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$), а на L совпадает с функционалом $f(x)$. Докажем, что $\varphi(u)$ ограничен и его норма совпадает с нормой $f(x)$.
Рассмотрим два случая:

1. $t > 0:$

$$\varphi(u) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leqslant t\ \|f\|\ \|\frac{x}{t} + x_0\| = \|f\|\ \|x + tx_0\| = \|f\|\ \|u\|.$$

2. $t < 0:$

$$\varphi(u) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leqslant -t\ \|f\|\ \|\frac{x}{t} + x_0\| = \|f\|\ \|u\|.$$

Таким образом, неравенство $\varphi(u) \leqslant \|f\|\ \|u\|$ справедливо для всех $u \in L_0$. Заменяя в нём u на $(-u)$, получим неравенство $-\varphi(u) \leqslant \|f\|\ \|u\|$. Следовательно, и $|\varphi(u)| \leqslant \|f\|\ \|u\|$. Это значит, что $\|\varphi\| \leqslant \|f\|$. Поскольку функционал φ является продолжением функционала f с L на L_0, верно и неравенство $\|\varphi\| \geqslant \|f\|$. Следовательно, $\|\varphi\| = \|f\|$.

Пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счётное всюду плотное множество.

Завершение доказательства теоремы проведём только для случая, когда пространство X является сепарабельным.

B) Так как X сепарабельно, в нем существует счётное всюду плотное множество. Возьмём все элементы этого множества, не попавшие в L, и перенумеруем их: $x_1,\ x_2,\ \ldots$. Построим соответствующие множества L_k следующим образом:

$$L_1 = (L_0; x_1),\ L_2 = (L_1; x_2),\ \ldots\ .$$

Эти множества являются линейными многообразиями, поэтому мы можем построить функционал $\varphi(u)$, являющийся продолжением функционала $f(x)$ с L на $\widehat{L} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L_k$, причём $\|\varphi\| = \|f\|$.

Продолжим функционал $\varphi(u)$ на всё пространство X по непрерывности. Если элемент $x \in X$, но $x \notin \widehat{L}$, то в силу того, что $\widehat{L}$ всюду плотно в

X, найдётся последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ элементов $\tilde{x}_k \in \widehat{L}$ такая, что при $n \to \infty$ $\tilde{x}_k \to x$ ($\|\tilde{x}_k - x\| \to 0$). Тогда

$$|\varphi(\tilde{x}_n) - \varphi(\tilde{x}_m)| = |\varphi(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m)| \leqslant \\ \leqslant \|\varphi\| \, \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| = \|f\| \, \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi(\tilde{x}_n)\}$ является фундаментальной, а потому сходится к некоторому пределу

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\tilde{x}_n).$$

Кроме того,

$$|\varphi(\tilde{x}_n)| \leqslant \|f\| \, \|\tilde{x}_n\| \quad \Rightarrow \quad |F(x)| \leqslant \|f\| \, \|x\|.$$

Из этого следует, что $\|F\| \leqslant \|f\|$. Но, с другой стороны, функционал $F(x)$ является продолжением функционала $f(x)$ с L на X, поэтому $\|F\| \geqslant \|f\|$. Следовательно, $\|F\| = \|f\|$. Искомый функционал построен. $\square$

Следствие 1. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0 \neq 0$ — произвольный элемент X. Тогда существует линейный функционал $f(x)$, определённый на всём пространстве X и такой, что

1. $\|f\| = 1$;
2. $|f(x_0)| = \|x_0\|$.

Доказательство. Рассмотрим линейное многообразие $L = \{tx_0\}$, где t пробегает всевозможные вещественные числа. Множество L является подпространством пространства X, определяемым элементом x_0. Определим на L функционал $\varphi(x)$ следующим образом: если $x = tx_0$, то

$$\varphi(x) = t\|x_0\|.$$

Очевидно, что

1. $\varphi(x_0) = \|x_0\|$;
2. $|\varphi(x)| = |t| \, \|x_0\| = \|x\|$, откуда $\|\varphi\| = 1$

Продолжая функционал $\varphi(x)$ по теореме Хана-Банаха на всё пространство X, получим функционал $f(x)$, имеющий требуемые свойства. $\square$

Следствие 2. Пусть X — линейное нормированное пространство, элементы $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда существует линейный функционал $f(x)$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\|f\| = 1$.
Доказательство. Положим $x_0 = x_1 - x_2$. Тогда существование требуемого функционала вытекает из следствия 1.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство, $\{x_n\}$ — последовательность элементов из X такая, что последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена для любого функционала $f \in X^*$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ ограничена в X, то есть существует константа $C > 0$ такая, что $\|x_n\| \leqslant C$.
Доказательство. Рассмотрим последовательность операторов A_n на X^*, таких что $A_n f = f(x_x)$.
Поскольку X^* всегда является банаховым пространством, то по теореме Банаха-Штейнгауза $\|A_n\| \leqslant M$.
$\|A_n\| = \sup\limits_{\|f'\|=1} |f'(x_n)|$.
По следствию из теоремы 1 существует функционал f_0, такой что $f_0(x_n) = \|x_n\|, \|f\| = 1$.
Тогда $\|x_n\| = f_0(x_n) \leqslant \|A_n\| \leqslant M$.
Теорема 3. Пусть X — банахово пространство, на котором задана последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$, причём при любом $x \in X$ последовательность $\{f_n\}$ является ограниченной. Тогда найдётся константа $C > 0$ такая, что $\|f_n\| \leqslant C$.
Доказательство. Частный случай теоремы Банаха-Штейнгауза.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства X называется слабо сходящейся к элементу $x \in X$, если для любого линейного функционала $f \in X^*$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$.

Утверждение. Слабый предел у последовательности может быть только один.
Доказательство. Вытекает из следствия 2 к теореме Хана-Банаха: для двух различных пределов существует линейный оператор, который принимает на них разные значения.

Следствие из теоремы 2. Слабо сходящаяся последовательность ограничена.

Из сильной сходимости вытекает слабая сходимость, в силу неравенства
$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\| \|x_n - x\|.$$

Из слабой сходимости, вообще говоря, сильная сходимость не вытекает (правда, в конечномерном пространстве эти сходимости равносильны, но в бесконечномерном пространстве это не так).

(Следующий пример не проверял — ред.)
Например, рассмотрим в пространстве l_p, $p > 1$, последовательность элементов $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, где единица стоит на позиции с номером n; $f(e_n) = c_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p$ сходится, поэтому $f(e_n) = c_n \to 0 = f(0)$ при $n \to \infty$, то есть последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к нулю. Но сильной сходимости здесь нет, так как последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной:

$$\|e_k - e_m\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \not\to 0 \text{ при } k, m \to \infty.$$

Теорема 4. Для того, чтобы слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X являлась сильно сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для всех $f \in X^*$, $\|f\| \leqslant 1$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходилась равномерно.
Доказательство. Сначала докажем необходимость. Если $\{x_n\}$ сильно сходится к некоторому x, то в единичном шаре $\|f\| \leqslant 1$ из неравенства

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f\| \, \|x_n - x\| \leqslant \|x_n - x\|$$

вытекает существование для любого числа $\varepsilon > 0$ номера $N = N(\varepsilon)$ такого, что при $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Но это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f(x_n)\}$ в единичном шаре $\|f\| \leqslant 1$.

Теперь докажем достаточность. Пусть последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится равномерно в единичном шаре $\|f\| \leqslant 1$, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant N$

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Применим следствие 1 из теоремы Хана-Банаха к элементу $x_0 = x_n - x$. В силу этого следствия существует функционал $f_0(x)$ такой, что $\|f_0\| = 1$, а $f_0(x_n - x_0) = \|x_n - x_0\|$. Но тогда

$$\|x_n - x_0\| = f_0(x_n - x_0) \leqslant \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(x_n) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

что и означает сильную сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x. $\square$

Рассмотрим линейные функционалы в различных нормированных пространствах.

1. Пусть $X = \mathbb{R}_n$ — конечномерное пространство, а $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в нём. Тогда любой элемент $x \in \mathbb{R}_n$ однозначно представим в виде

   $$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k,$$

   где ξ_k — некоторые коэфициенты. Следовательно, любой линейный функционал $f(x)$ в пространстве $\mathbb{R}_n$ однозначно представим в виде

   $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k,$$

   то есть $f(x)$ однозначно определяется числами $f(e_k) = f_k$, $k = \overline{1, n}$.

2. Пусть $X = l_p$, $p > 1$, — бесконечномерное пространство, а $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормированный базис в нём. Тогда l_p представляет собой пространство элементов x таких, что

   $$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty.$$

   Следовательно, любой линейный функционал $f(x)$ в l_p имеет вид

   $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k,$$

   то есть $f(x)$ однозначно определяется числами $f(e_k) = c_k$, $k = \overline{1, \infty}$. Выясним свойства чисел c_k. Для этого рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ элементов

   $$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k, \qquad \text{где } \xi_k^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} c_k \cdot |c_k|^{q-1}, & k \leqslant n; \\ 0, & k > n \end{cases} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$\|f(x_n)\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \leqslant \|f\| \|x_n\| =$$

$$= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|,$$

поэтому $\|c\|_q \leqslant \|f\|$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \|c\|_q.$$

Отсюда следует, что $\|f\| \leqslant \|c\|_q$. Следовательно, $\|f\| = \|c\|_q$, то есть $l_p^* = l_q$.

3. Пусть $X = L_p(E)$, $p > 1$. Можно показать, что линейный функционал $f(x(t))$ в $L_p(E)$ будет иметь вид

$$f(x(t)) = \int_E x(t)g(t)dt,$$

где $g(t) \in L_q(E)$ — функция, однозначно определяемая по функционалу $f(x(t))$, причём $\|f\| = \|g\|_{L_q(E)}$, а $L_p^* = L_q$.

4. Пусть $X = C[a, b]$. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.
$\sup\limits_T \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < +\infty$ — функция с ограниченным изменением.
$F(g(t)) = \int\limits_a^b g(t)df(t)$.

§10. Гильбертовы пространства

Определение 1. Множество H называется *гильбертовым пространством*, если

1. H — линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел.

2. Каждой паре элементов $x, y \in H$ поставлено в соответствие число (x, y), комплексное или действительное, называемое *скалярным произведением* этих элементов и удовлетворяющее следующим аксиомам:

   а) $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in H$;

   б) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

   в) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in H$;

   г) $\forall x \in H \quad (x, x) \geqslant 0; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   Норма на H вводится через скалаярное произведение: число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ будем называть *нормой* элемента x.

3. H — полное в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$ пространство.

4. H — бесконечномерное пространство, то есть для любого натурального числа n в нём найдётся n линейно независимых элементов.

Пример. l_p и $L_p(E)$ при $p = 2$ являются гильбертовыми пространствами, если ввести скалярное произведение следующим образом:

1. В l_2 для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}.$$

2. В $L_2(E)$ для $x(t), y(t)$

$$(x(t), y(t)) = \int_E x(t)\overline{y(t)} dt.$$

Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно.

Утверждение 1. Пусть H — гильбертово пространство, тогда для любых $x, y \in H$ верно неравенство

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Доказательство. При $y = 0$ справедливость утверждения очевидна, поэтому далее в доказательстве положим $y \neq 0$. Для произвольного λ верно

$$0 \leqslant (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y).$$

Положив $\lambda = \dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, получим

$$0 \leqslant (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)},$$

откуда следует требуемое неравенство. □

Известно, что линейное нормированное пространство является гильбертовым тогда и только тогда, когда в нем выполняется соотношение, называемое *равенством параллелограмма*:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Доказательство следует из следующих соотношений:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x)+(y, x)+(x, y)+(y, y) = \|x\|^2+2\operatorname{Re}(x, y)+\|y\|^2;$$

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = (x, x)-(y, x)-(x, y)+(y, y) = \|x\|^2-2\operatorname{Re}(x, y)+\|y\|^2.$$

Равенство параллелограмма является, таким образом, критерием гильбертовости пространства. Если в линейном нормированном пространстве не выполнено равенство параллелограмма, то в нем нельзя ввести скалярное произведение таким образом, чтобы выполнялись все четыре аксиомы гильбертова пространства.

Пример. Рассмотрим пространство $C\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, норма в котором определена следующим образом:

$$\|x(t)\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}} |x(t)|.$$

Функции $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, очевидно, принадлежат этому пространству, причем $\|x\| = \|y\| = 1$. Рассмотрим функции

$$x(t) + y(t) = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ и}$$

$$x(t) - y(t) = \sin t - \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Очевидно, что $\|x(t) + y(t)\|^2 = 2$ и $\|x(t) - y(t)\|^2 = 1$. Но тогда равенство параллелограмма не выполнено, так как $4 \neq 3 \Rightarrow$ рассматриваемое пространство гильбертовым не является.

Определение 2. Множество W называется *выпуклым*, если

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad x, y \in W \;\Rightarrow\; \alpha x + (1 - \alpha) y \in W.$$

Теорема 1. В произвольном гильбертовом пространстве H любое замкнутое выпуклое множество содержит единственный элемент с наименьшей нормой.

Доказательство. Пусть W — замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H. Обозначим

$$d = \inf_{x \in W} \|x\|.$$

Тогда существует последовательность x_n элементов W таких, что

$$d = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|,$$

причем $\forall n$ $\|x_n\| \geqslant d$ (это следует из определения точной нижней грани).

Так как W — выпуклое множество, $\forall n, m$ $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in W$ и

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geqslant d \Rightarrow \|x_n + x_m\|^2 \geqslant 4d^2.$$

С другой стороны, $2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 \to 4d^2$ при $n, m \to \infty$, поэтому из последних двух соотношений и равенства параллелограмма для x_n, x_m

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2$$

следует, что $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то есть последовательность x_n фундаментальна. Тогда в силу полноты H и замкнутости W получаем, что существует предел этой последовательности $x_0 \in W$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0,$$

а так как $|\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\|$, то

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\| = d.$$

Таким образом, существование элемента с наименьшей нормой доказано. Докажем его единственность. Предположим, что существует другой элемент $x_1 \in W$, $\|x_1\| = d$. Тогда $\|x_0+x_1\| \geqslant 4d^2$ (аналогично $\|x_n+x_m\| \geqslant 4d^2$) и

$$\|x_0 - x_1\| = 2\|x_0\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|x_0 + x_1\|^2 \leqslant 0,$$

откуда следует $\|x_0 - x_1\| = 0 \Rightarrow x_0 = x_1$. Единственность доказана. $\square$

Определение. Два элемента называются *ортогональными* ($x \perp y$), если их скалярное произведение равно 0.

Определение. Элемент называется *ортогональным множеству* ($x \perp L$), если он ортогонален всем его элементам.

Свойство: $x \perp L \Rightarrow x \perp \overline{L}$ (замыкание).

Теорема 2 (Леви). Пусть H — гильбертово пространство, L — подпространство в H (замкнутое относительно сходимости по норме линейное многообразие). Тогда любой элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \perp L,$$

причем

$$\|x - y\| = \min_{u \in L} \|x - u\|.$$

Доказательство. Пусть $x \in H$ — произвольный элемент пространства. Рассмотрим следующее множество элементов H:

$$W = \{\, w = x - u \mid u \in L \,\}.$$

Легко проверить, что W является замкнутым выпуклым множеством. Следовательно, по теореме 1 в W существует элемент с наименьшей нормой:

$$\exists y \in L: \ \min_{u \in L} \|x - u\| = \|x - y\|.$$

Положим $z = x - y$. Докажем, что $z \perp L$; это будет означать, что нужное представление найдено. Рассмотрим множество элементов $z - \alpha v,\ v \in L$. Все такие элементы принадлежат множеству W; следовательно,

$$\|z\|^2 \leqslant \|z - \alpha v\|^2 = (z, z) - \alpha(v, z) - \overline{\alpha}(z, v) + |\alpha|^2(v, v).$$

Можем считать, что $v \neq 0$ (иначе рассматриваемые элементы совпадают с z). Положив

$$\alpha = \frac{(z, v)}{v, v},$$

получим
$$-\frac{|(z,v)|^2}{(v,v)} \geqslant 0 \ \Rightarrow \ z \perp v \ \forall v \in L \ \Rightarrow \ z \perp L.$$
Осталось доказать единственность полученного представления. Допустим, что существует два представления:
$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2, \ y_1, y_2 \in L, \ z_1, z_2 \perp L.$$
Тогда рассмотрим элемент $v = y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. С одной стороны, он принадлежит L, так как L — подпространство и $y_1 - y_2 \in L$. С другой стороны, он ортогонален любому вектору из L. Но тогда он ортогонален и самому себе $\Rightarrow v = 0$, откуда $y_1 = y_2$ и $z_2 = z_1$. Единственность доказана. $\square$

Определение 3. *Ортогональным дополнением* к подпространству L гильбертова пространства H называется множество всех элементов, ортогональных L:
$$L^{\perp} = \{\, z \in H \mid z \perp L \,\}.$$
Утверждение 2. $L = \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$. По теореме 2 элемент x представим в виде
$$x = y + z, \ y \in L, \ z \in L^{\perp}.$$
Тогда $(x, z) = 0$. Кроме того, $(x, z) = (y, z) + (z, z)$; следовательно,
$$(z, z) = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = y \in L,$$
то есть $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq L$. Обратно, пусть $x \in L$, тогда он представим в виде
$$x = y + z, \ y \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp}, \ z \in L^{\perp}.$$
Проводя аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что
$$x \in \left(L^{\perp}\right)^{\perp} \Rightarrow L \subseteq \left(L^{\perp}\right)^{\perp}.$$
Следовательно, $L = \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$. $\square$

Из теоремы 2 вытекает как следствие

Теорема 3. Пусть H — произвольное гильбертово пространство, L — подпространство в H. Тогда H представимо в виде суммы L и его ортогонального дополнения:
$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Определение. *Ортопроектором* на подпространство L называется оператор $Px = y$, где $x = y + z$, $y \in L$, $z \perp L$.

Определение 4. *Ядром* линейного функционала $f(x)$ называется множество всех элементов, для которых $f(x) = 0$:

$$\ker f = \{\, x \mid f(x) = 0 \,\}.$$

Лемма 1. $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$, если $f \neq 0$.
Доказательство. Для двух произвольных элементов $x_1, x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ рассмотрим элемент

$$x = x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1),$$

являющийся нетривиальной линейной комбинацией рассматриваемых элементов $(\ker f)^{\perp}$. Очевидно, $f(x) = 0$, тогда

$$x \in \ker f,\ x \perp x \Rightarrow x = 0.$$

Таким образом, любые два элемента $x_1, x_2 \in (\ker f)^{\perp}$ являются линейно зависимыми; следовательно,

$$\dim(\ker f)^{\perp} = 1. \quad \square$$

Теорема 3 (теорема Рисса — Фреше о представлении линейного функционала). Любой линейный функционал в гильбертовом пространстве H представим в виде

$$f(x) = (x, y),\ y \in H,$$

причем элемент y однозначно определяется по f и $\|f\| = \|y\|$.

Доказательство. По лемме 1 любой элемент $x \in (\ker f)^{\perp}$ представим в виде

$$(x, e)e,\ \|e\| = 1,\ e \in (\ker f)^{\perp}.$$

Кроме того, $\ker f$ является подпространством в H. В самом деле, $\ker f$ является линейным многообразием в силу линейности и однородности f, замкнутость следует из непрерывности f. Мы рассматриваем ограниченные (а следовательно, и непрерывные) функционалы, иначе нельзя говорить о норме функционала.

Следовательно, по теореме 2 для любого элемента $x \in H$ существует единственное представление

$$x = Px + (x, e)e,\ Px \in \ker f,\ \|e\| = 1,\ e \in (\ker f)^{\perp}.$$

Но тогда

$$f(x) = f(Px) + (x, e)f(e) = (x, \overline{f(e)}e).$$

Обозначим $y = \overline{f(e)}e$. Покажем, что y — искомый элемент. Для любого $x \in H$ верно

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\| => \|f\| \leqslant \|y\|.$$

С другой стороны, верно

$$f(y) = (y, y) = \|y\|^2 \Rightarrow \frac{\|f(y)\|}{\|y\|} = \|y\|,$$

откуда следует, что $\|f\| \geqslant \|y\|$. Из этого и предыдущего неравенств следует, что $\|f\| = \|y\|$.

Таким образом, существование требуемого представления получено. Докажем единственность. Допустим, что существует два элемента y_1 и y_2, удовлетворяющих требованиям теоремы. Тогда

$$\forall x \in H\ f(x, y_1) = f(x, y_2) \Rightarrow (x, y_1 - y_2) = 0.$$

Это значит, что $(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = 0$; следовательно, $y_1 = y_2$. Единственность доказана. $\square$

Лемма 2. Для того, чтобы линейное многообразие M было всюду плотно в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало никакого элемента H, кроме нулевого, ортогонального M.
Доказательство. Необходимость. Пусть линейное многообразие M имеет замыкание, совпадающее с H. Тогда для любого элемента $y \in H$ существует последовательность y_n элементов M таких, что

$$\rho(y_n, y) = \|y_n - y\| < \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим элемент $x \perp M, x \in H$. Тогда $x \perp y_n$ для любого номера n, и

$$\forall n\ (y, x) = (y - y_n, x) + (y_n, x) = (y - y_n, x) \leqslant \|y - y_n\|\|x\| < \frac{\|x\|}{n}.$$

Следовательно, $(y, x) = 0$. Таким образом, мы доказали, что верно

$$x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{M},$$

но тогда $x \perp H$. Следовательно, $x \perp x$. Отсюда вытекает, что $x = 0$.

Достаточность. Допустим, что $\overline{M} \neq H$. Рассмотрим элемент $x \notin \overline{M}$. Так как $\overline{M}$ — подпространство в H, по теореме 2 элемент x представим в виде

$$x = y + z, y \in \overline{M}, z \perp \overline{M},$$

причем $z \neq 0$ (иначе бы $x \in \overline{M}$). Так как элемент z ортогонален замыканию многообразия M, он ортогонален и самому многообразию M. Получили $z \neq 0$, $z \perp M$, что противоречит условию. Значит, $\overline{M} = H$. $\square$

Определение 5. Система $\{e_i\}$ в гильбертовом пространстве называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Любая система линейно независимых элементов может быть ортогонализирована по Шмидту. Суть процесса ортогонализации заключается в следующем. Предположим, что есть система линейно независимых элементов $h_1, h_2, \dots \in H$. Тогда в качестве первого элемента положим

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}.$$

Построим e_2. Сначала будем искать вектор g_2, ортогональный e_1, в виде $g_2 = h_2 - c_{2_1} e_1$:

$$(g_2, e_1) = 0 \Rightarrow c_{2_1} = (h_2, e_1).$$

Тогда в качестве e_2 возьмем вектор $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$. Предположим, что $k - 1$ элементов уже построено. Ищем k-й элемент в виде

$$g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{k_i} e_i.$$

Очевидно, если положить $c_{k_i} = (h_k, e_i)$, $\forall i \in 1 \dots k - 1$, то элемент g_k будет ортогонален всем $e_i, \forall i \in 1 \dots k-1$. Следовательно, осталось взять в качестве k-го элемента

$$e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|},$$

и мы получим $\{e_1, \dots, e_k\}$ — ортонормированную систему.

Продолжая этот процесс для всех номеров k, мы получим ортонормированную систему $e_1, e_2, \dots \in H$.

Выбирая взвешенные метрики в качестве скалярного произведения над пространством функций можно построить следующие ортонормированные системы из полинонов (т. е. $g_i = t^{i-1}$):

- $a = -1, b = 1, \rho(t) = 1$ — полиномы Лежандра.
- $a = 0, b = \infty, \rho(t) = e^{-t}$ — полиномы Эрмита.
- $a = -\infty, b = \infty, \rho(t) = e^{-t^2}$ — полиномы Чебышева.

Определение 6. Любая ортонормированная система $e_1, e_2, \dots$ в гильбертовом пространстве H называется *ортонормированным базисом*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает со всем пространством:

$$\overline{L(e_1, e_2, \dots)} = H.$$

Лемма. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Тогда $L(e_1, \dots, e_n)$ — подпространство в H.
Доказательство. То, что $L = L(e_1, \dots, e_n)$ является линейным многообразием, следует из определения линейной оболочки. Поэтому достаточно доказать, что L будет замкнутым относительно сходимости по норме множеством. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов L. В силу полноты пространства эта последовательность сходится к некоторому элементу из H, причем этот предел определен однозначно. Нужно показать, что этот предел будет принадлежать L.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\|x_m - x_k\| < \varepsilon, \qquad \forall m, k \geqslant N(\varepsilon).$$

Но так как $x_m, x_k \in L$, они представимы в виде

$$x_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi} e_i, \qquad x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} e_i;$$

следовательно,

$$\|x_m - x_k\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{mi} - \alpha_{ki}|^2 < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого номера $1 \leqslant i \leqslant n$ последовательность $\{\alpha_{p_i}\}$ является фундаментальной; следовательно,

$$\exists \lim_{p\to\infty} \alpha_{p_i} = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Но тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для любого номера $p \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|\alpha_{p_i} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{n}$$

одновременно для всех номеров i, $1 \leqslant i \leqslant n$ (достаточно взять максимальный из таких номеров по всем $1 \leqslant i \leqslant n$). Но тогда элемент $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ и является искомым пределом последовательности $\{x_n\}$, так как

$$\|x_m - x\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{mi} - \alpha_i|^2 < \varepsilon,$$

причем $x \in L = L(e_1, \ldots, e_n)$. Таким образом, $L(e_1, \ldots, e_n)$ является подпространством. $\square$

Теорема 4. В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует счетный ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда существует счетное всюду плотное множество элементов $g_1, g_2, \ldots \in H$:

$$\overline{L(g_1, g_2, \ldots)} = H.$$

В качестве первого элемента e_1 искомой системы положим

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}.$$

Соответствующая e_1 линейная оболочка

$$L(e_1) = \{\, \alpha e_1 \mid \alpha \in P \,\}$$

является подпространством в H, поэтому по теореме 2

$$g_{h_2} = h_2 + z_2, h_2 \in L(e_1), z_2 \perp L(e_1),$$

где g_{h_2} линейно независим с $L(e_1)$ (такой элемент существует в силу бесконечномерности пространства). Выберем в качестве второго элемента

$$e_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}, L(e_1, e_2) = \{\alpha e_1 + \beta e_2\}.$$

Аналогично, для выбора третьего элемента находим элемент g_{h_3}, линейно независимый с $L(e_1, e_2)$:

$$g_{h_3} = h_3 + z_3, h_3 \in L(e_1, e_2), z_3 \perp L(e_1, e_2).$$

В качестве e_3 выбираем элемент

$$e_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|},$$

и так далее.

По построению $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система. Она является базисом, поскольку, опять же, по построению

$$\overline{L(e_1, e_2, \ldots)} = \overline{L(g_1, g_2, \ldots)} = H. \quad \square$$

Определение 4. Ортонормированная система в гильбертовом пространстве называется *полной*, если не существует никакого элемента, кроме 0, ортогонального всем элементам системы. Система называется *замкнутой*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает со всем пространством.

Таким образом, замкнутость равносильна полноте (в силу леммы 2).

Лемма. Пусть $L \subset H$ — некоторое замкнутое подпространство, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в H. Тогда $\forall f \in L\ \forall \varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_i\}$ из поля, такие что выполняется $\|f - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 < \varepsilon$.

Доказательство.

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}(f, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, f) + \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j (e_i, e_j) =$$

$$= \{c_i = (f, e_i)\} = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i - \alpha_i|^2$$

Очевидно, что минимальная норма разности достигается при $\alpha_i = c_i$. Эти числа называются коэффициентами разложения в ряд Фурье.

Отсюда немедленно получаем неравенство Бесселя: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(f, e_i)|^2 \leqslant \|f\|^2$.

Использовав замкнутость L превращаем неравенство Бесселя в равенство Парсеваля: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(f, e_i)|^2 = \|f\|^2$.

Теорема 5. Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изометричны (существует биекция, сохраняющая расстояния) и изоморфны (существует биекция, сохраняющая линейные комбинации) между собой.
Доказательство. Пусть H_1, H_2 — произвольные гильбертовы пространства. Достаточно доказать, что H_1 и H_2 изометричны и изоморфны l_2, тогда они будут изоморфны и изометричны друг другу. Следовательно, достаточно доказать, что любое гильбертово пространство H изоморфно и изометрично l_2.

Возьмем произвольный элемент $x \in H$. По теореме 4 в H существует базис и верно соотношение

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

где c_k — коэффициенты Фурье разложения x по этому базису. Тогда в l_2 существует элемент

$$\tilde{x} = (c_1, c_2, \dots).$$

Очевидно, что $\|\tilde{x}\| = \|x\|$.

Обратно, покажем, что любому элементу в l_2 соответствует элемент в H, причем их нормы совпадают. Рассмотрим элемент $\tilde{x} = (c_1, c_2, \dots) \in l_2$. Рассмотрим в пространстве H последовательность

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Эта последовательность будет фундаментальной (так как $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \to 0, \quad n \to \infty$). В силу полноты H существует элемент $x \in H$, являющийся пределом этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

В силу непрерывности скалярного произведения, $(z, e_k) = c_k$ для любого номера k. Тогда $\|z\| = \|\tilde{x}\|$. $\square$

Теорема 6 (теорема Рисса — Фишера). l_2 и L_2 над одним полем изометричны и изоморфны.

Теорема 7 (о слабой компактности в H). Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_n\}$ — последовательность элементов H такая, что $\|x_n\| < C, \quad C > 0$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся слабо. (также последовательность $\{x_n\}$ называется слабо компактной)

Доказательство. По теореме 4 в H существует базис $\{e_k\}$. Рассмотрим последовательность $\{(x_n, e_1)\}$. Она ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_{n1}, e_1)\}$. Далее, можно выделить $\{x_{n2}\}$ — подпоследовательность $\{x_{n1}\}$, такую, что последовательность $\{(x_{n2}, e_2)\}$ будет сходящейся. Продолжая этот процесс, получим, что для любого номера m существует подпоследовательность $\{x_{nm}\}$ такая, что последовательность $\{(x_{nm}, e_m)\}$ будет сходящейся.

Выберем следующую (диагональную) подпоследовательность:

$$\tilde{x}_n = x_{nn}.$$

Для неё последовательность $\{(\tilde{x}_n, e_k)\}$ будет сходящейся для любого базисного элемента e_k.

В силу замкнутости базиса $\{e_k\}$ для любого элемента $z \in H$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Psi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k, \|z - \Psi_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Кроме того, для любого номера k последовательность $\{(\tilde{x}_n, e_k)\}$ фундаментальна, так как она является сходящейся. Тогда найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что

$$|(\tilde{x}_p - \tilde{x}_n, e_k)| < \frac{\varepsilon}{2\max_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i m}$$

одновременно для всех $k, 1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда

$$|(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z)| =$$
$$= |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \Psi_\varepsilon) + (\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z - \Psi_\varepsilon) \leqslant |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \Psi_\varepsilon)| + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| \|z - \Psi_\varepsilon\| \leqslant$$
$$\leqslant |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k)| + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, e_k)| + \frac{\varepsilon}{2} <$$
$$< \max_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i m \cdot \frac{\varepsilon}{2 \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i m} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $(\tilde{x}_n, z)$ является фундаментальной для любого $z \in H$.

Рассмотрим функционал $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, z)$. По теореме Рисса-Фреше (теорема 3) существует единственный элемент $x_0 \in H$ такой, что

$$f(z) = (x_0, z) \quad \forall z \in H.$$

Тогда $f(z) = (x_0, z) = \lim\limits_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, z)$, то есть x_0 является слабым пределом последовательности $\{\tilde{x}_n\}$. $\square$

§11. Сопряженный оператор.

Определение 1. Пусть задан линейный оператор $A : X \to Y$, X и Y — линейные нормированные пространства. Тогда для любого линейного функционала $\varphi(y) \in Y^*$ определен функционал

$$f(x) = \varphi(Ax), f \in X^*.$$

Таким образом, можно определить отображение

$$A^* : Y^* \to X^*, \text{обозначается} \quad f = A^*\varphi,$$

называемое *сопряженным оператором.*

Если сопряженный оператор существует, то он является линейным:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*.$$

Теорема 1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и задан линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$. Тогда существует сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$, который также является линейным и ограниченным и $\|A^*\| = \|A\|$.
Доказательство. Существование и линейность следуют непосредственно из определения. Поэтому остается доказать, что сопряженный оператор ограничен и его норма совпадает с нормой оператора A.

С одной стороны,

$$|f(x)| = |\varphi(Ax)| \leqslant \|\varphi\|\|Ax\| \leqslant \|\varphi\|\|A\|\|x\|.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ верно неравенство

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|\varphi\|\|A\|;$$

но тогда

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|\varphi\|\|A\|$$

и $\|A^*\varphi\| \leqslant \|\varphi\|\|A\|$. Таким образом, сопряженный оператор ограничен и $\|A^*\| \leqslant \|A\|$.

С другой стороны, по следствию из теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала для любого элемента $x_0 \in X$ существует линейный функционал φ_0 такой, что

$$\|\varphi_0\| = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|.$$

Но тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \leqslant \\ \leqslant \|f_0\|\|x_0\| = \|A^*\varphi_0\|\|x_0\| \leqslant \\ \leqslant \|A^*\|\|\varphi_0\|\|x_0\| = \|A^*\|\|x_0\|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$. $\square$

Следствие. Если операторы A и A^* являются сопряженными в гильбертовом пространстве H, то для любых двух элементов $x, y \in H$ верно $(Ax, y) = (x, A^*y)$.
Доказательство следует из теоремы Рисса — Фреше.

Определение 2. *Образом* оператора $A : X \to Y$ называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{\, y \in Y \mid y = Ax \,\}.$$

Ядром оператора $A : X \to Y$ называется множество

$$\ker A = \{\, x \in X \mid Ax = 0 \,\}.$$

Теорема 2. Пусть H — гильбертово пространство, A — оператор, действующий в H, A^* — сопряженный к A оператор. Тогда

$$H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \ker A^*.$$

Замечание. Очевидно, $\ker A = \overline{\ker A}$, однако образ оператора, вообще говоря, замкнутым не является. В доказательстве же существенно используется тот факт, что $\overline{\operatorname{Im} A}$ является подпространством. Поэтому в формулировке фигурирует именно замыкание образа.
Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\ker A^* = \overline{\operatorname{Im} A}^{\perp},$$

так как $\overline{\operatorname{Im} A}$ — подпространство и для любого подпространства L $H = L \oplus L^{\perp}$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in \ker A^*$. Для него верно $A^*x = 0$. По следствию из теоремы 1 для любого элемента $y \in H$ справедливо $(Ay, x) = (y, A^*x)$. Значит, $x \in \operatorname{Im} A^{\perp}$, откуда следует, что $x \in \overline{\operatorname{Im} A}^{\perp}$ (доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2 параграфа 10). Следовательно, $\ker A^* \subseteq \overline{\operatorname{Im} A}^{\perp}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $x \in \overline{\operatorname{Im} A}^{\perp}$. Очевидно, $x \in \operatorname{Im} A^{\perp}$. Для любого элемента $y \in H$ справедливо $(Ay, x) = (y, A^*x)$. С другой стороны, $(Ay, x) = 0$, поэтому

$$\forall y \in H, (y, A^*x) = 0 \Rightarrow (A^*x, A^*x) = 0 \Rightarrow \|A^*x\|^2 = 0 \Rightarrow A^*x = 0.$$

Получаем, что $x \in \ker A^*$. Следовательно, $\overline{\operatorname{Im} A}^{\perp} \subseteq \ker A^*$. Таким образом, $\overline{\operatorname{Im} A}^{\perp} = \ker A^*$. $\square$

§12. Компактные и вполне непрерывные операторы.

Определение 1. Множество M линейного нормированного пространства X называется *компактным*, если любая последовательность элементов множества M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из пространства X.

Множество M называется *предкомпактным* или *относительно компактным*, если любая последовательность элементов M содержит фундаментальную подпоследовательность.

Если пространство полное, то любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства, тогда компактность и предкомпактность совпадают.
Определение 2. Линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, называется *компактным*, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Определение. Линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, называется *вполне непрерывным*, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.

В банаховом пространтсве компактность равносильна предкомпактности.
Лемма 1. Если последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X является слабо сходящейся и компактной, то она является сильно сходящейся.
Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x \in X$. Предположим, она не является сильно сходящейся, тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что для любого номера n_k будет верно

$$\|x_{n_k} - x\| \geqslant \varepsilon.$$

Так как исходная последовательность компактна, из последовательности $\{x_{n_k}\}$ можно выделить сильно сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_{k_l}} \to y.$$

Из сильной сходимости вытекает слабая:

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow{\text{сл.}} y.$$

Но если слабый предел существует, то он определен однозначно; следовательно, $y = x$. Тогда, с одной стороны,

$$x_{n_{k_l}} \to x,$$

а с другой стороны,

$$\|x_{n_{k_l}} - x\| \geqslant \varepsilon, \quad \forall n_{k_l}.$$

Получили противоречие. $\square$

Лемма 2. Пусть X и Y — банаховы пространства, A — компактный оператор, действующий из X в Y. Тогда он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся последовательность (то есть является вполне непрерывным)

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится к $x \in X$. Рассмотрим произвольный линейный функционал $\varphi(y) \in Y^*$:

$$\varphi(Ax) = f(x), f \in X^*.$$

По определению слабой сходимости

$$\varphi(Ax_n) \to \varphi(Ax) \quad \Rightarrow \quad Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax.$$

Последовательность $\{Ax_n\}$ ограничена в силу слабой сходимости, поэтому оператор A переводит ее в предкомпактную последовательность $\{Ax_n\}$. Тогда $\{Ax_n\}$ — предкомпактная и сходится слабо в банаховом пространстве $\Rightarrow$ по лемме 1 она является сильно сходящейся. $\square$

Таким образом, компактный оператор является вполне непрерывным в банаховом пространстве. Вполне непрервный оператор в банаховом пространстве переводит ограниченную последовательность в ограниченную последовательность.

Лемма 3. Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий из H в H, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда сопряженный оператор A^* также вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства H слабо сходится к $x \in H$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\|A^*(x_n - x)\|^2 = (A^*x_n - A^*x, A^*x_n - A^*x) = \\ = (x_n - x, AA^*(x_n - x)) \leqslant \|x_n - x\|\|AA^*(x_n - x)\|.\end{aligned}$$

Последовательность $\{x_n\}$ сходится слабо, поэтому она ограничена. Следовательно, $\|x_n - x\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$.

Так как A вполне непрерывен, он ограничен:

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \leqslant C \quad \Rightarrow \|Ax\| \leqslant C\|x\|, \quad \forall x \neq 0$$

(образ ограниченного множества является компактом, следовательно, он является ограниченным множеством.) Тогда A^* является ограниченным (по теореме 1 параграфа 11), а AA^* — вполне непрерывным оператором (как произведение вполне непрерывного и ограниченного). Следовательно,

$$\|AA^*(x_n - x)\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому $\|A^*x_n - A^*x\| \to 0, n \to \infty$. Таким образом, оператор A^* любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.

Для любого ограниченного множества $M \subset H$ рассмотрим его образ M' при действии оператора A^*:

$$M' = \{\, y \in H \mid y = A^*x, \quad x \in M \,\}.$$

Произвольная последовательность элементов множества M' имеет вид $\{A^*x_n\}$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, и по теореме 7 параграфа 10 из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которую оператор A^* переводит в $\{A^*x_{n_k}\}$ - сильно сходящуюся последовательность. Таким образом, из любой последовательности элементов M' можно выделить сильно сходящуюся подпоследовательность, но тогда M' — компактное множество по определению, и A^* является непрерывным оператором. Так как мы рассматриваем гильбертово пространство, A^* является и вполне непрерывным. $\square$

§13. Теория Фредгольма.

Ранее (см. параграф 6) с помощью аппарата сжатых отображений доказывалось утверждение о существовании и единственности решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \lambda \int\limits_E k(s,t)x(s)ds + f(t), \quad k(s,t) \in L_2((a;b)\times(a;b)), f(t) \in L_2(a;b)$$

при достаточно малых значениях λ. Однако в случае

$$x(t) - \int\limits_E k(s,t)x(s)ds = f(t)$$

этот метод не дает результата. Нужен другой подход.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Будем искать решения уравнения

$$Lx = f, \quad L = I - A, \quad x \in H, f \in H.$$

Очевидно, $L^* = I - A^*$.

Лемма 1. $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$.
Доказательство. Пусть есть последовательность $\{y_n\}$, сходящаяся к некоторому элементу y пространства:

$$y_n \in \operatorname{Im} L, \quad y_n \to y, \quad n \to \infty.$$

Надо доказать, что $y \in \operatorname{Im} L$. Заметим также, что $y_n = x_n - Ax_n = Lx_n$, и рассмотрим последовательность $\{x_n\}$.

Если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k} \in \ker L$ для любого n_k, то в силу замкнутости ядра

$$y_{n_k} = Lx_{n_k} = 0 \to y = 0 \in \operatorname{Im} L.$$

Поэтому мы можем считать, что, начиная с некоторого номера N, все x_n ортогональны ядру L. Таким образом, достаточно рассмотреть последовательность $\{x_n\}$, в которой

$$\forall n \; x_n \perp \ker L.$$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то есть $\|x_n\| \leqslant C$ для некоторого положительного C. Допустим, что это неверно; тогда можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности: $\|x'_n\| \to \infty$. В этом случае

$$\frac{\|y'_n\|}{\|x'_n\|} = \frac{\|x'_n - Ax'_n\|}{\|x'_n\|} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

поскольку все $\|y'_n\|$ ограничены (так как последовательность $\{y'_n\}$ сходится).

A — вполне непрерывный оператор, поэтому ограниченную последовательность $\dfrac{x'_n}{\|x'_n\|}$ он переводит в компактную $\dfrac{Ax'_n}{\|x'_n\|}$, в которой существует сходящаяся подпоследовательность $\dfrac{Ax''_n}{\|x''_n\|}$. Так как последовательности

$$\frac{x''_n - Ax''_n}{\|x''_n\|}, \quad \frac{Ax''_n}{\|x''_n\|}$$

сходятся, то будет сходиться и последовательность $\frac{x''_n}{\|x''_n\|}$:

$$z_n = \frac{x''_n}{\|x''_n\|} \to z \text{ при } n \to \infty.$$

При этом $\|z_n\| = 1$ для любого n, поэтому $\|z\| = 1$. По определению последовательности $\{z_n\}$

$$Lz_n \to 0, \quad z_n \perp \ker L,$$

но в силу непрерывности L

$$Lz_n \to Lz, \quad n \to \infty.$$

Поэтому $Lz = 0$ и $z \in \ker L$, но по построению $z \perp \ker L$ (так как $(\ker L)^\perp$ замкнуто), откуда $z = 0$. Получили противоречие с $\|z\| = 1$.

Полученное противоречие доказывает, что $\{x_n\}$ ограничена. Следовательно, A переводит ее в компактную, из которой можно выделить сходящуюся подпоследовательность $A\tilde{x}_n$. Но последовательность

$$\tilde{y}_n = \tilde{x}_n - A\tilde{x}_n$$

также сходится как подпоследовательность сходящейся $\{y_n\}$. Поэтому последовательность $\tilde{x}_n$ сходится к некоторому элементу $x \in H$, но тогда в силу непрерывности оператора A верно $A\tilde{x}_n \to Ax, \quad n \to \infty$. Получаем, что $y = x - Ax = Lx$. $\square$

Лемма 2. Пространство H разложимо в прямую сумму

$$H = \operatorname{Im} L \oplus \ker L^*.$$

Замечание. Или, что то же самое,

$$H = \operatorname{Im} L^* \oplus kerL.$$

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы 2 параграфа 11, в силу которой

$$H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \ker A^*$$

для любого линейного ограниченного оператора A. $\square$

Теорема 1 (первая теорема Фредгольма). Для того, чтобы операторное уравнение $Lx = f$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы f был ортогонален ядру сопряженного оператора:

$$f \perp y,\ L^*y = 0\ \forall y.$$

Доказательство. Данное утверждение является прямым следствием леммы 2. $\square$

Обозначим

$$\operatorname{Im} L = H^1, \ldots, \operatorname{Im} L^k = H^k.$$

Очевидно, выполнено соотношение $H = H^0 \supseteq H^1 \supseteq \ldots$.

Лемма 3. Существует такой номер k, что $H^k = H^{k-1}$.

Доказательство. Предположим, что такого номера k не существует. По лемме 1 образ оператора L — замкнутое множество, поэтому оно является подпространством. Применим теорему Леви:

$$H = H^1 \oplus (H^1)^\perp.$$

Тогда существует элемент $x_1 \in (H^1)^\perp$ такой, что $\|x_1\| = 1$ (иначе $H = H^1, k = 1$). Применим теорему Леви для H^1:

$$H^1 = H^2 \oplus (H^2)^\perp.$$

Аналогично предыдущему случаю, существует элемент $x_2 \in (H^2)^\perp, \|x_2\| = 1$, причем $x_1 \perp x_2$.

Так как по предположению не существует номера k, при котором наступает стабилизация, продолжая этот процесс по всем $k, k = 1, 2, \ldots$, получим счетную ортонормированную систему.

Рассмотрим теперь два элемента полученной системы x_l и x_k, где $l > k$. Справедливо равенство

$$Lx_k - Lx_l = x_k - x_l - Ax_k + Ax_l,$$

из которого следует, что

$$Ax_k - Ax_l = x_k - x_l - (Lx_k - Lx_l), \quad x_k \in (H^{k+1})^\perp, -x_l - (Lx_k - Lx_l) \in H^{k+1}.$$

Это означает, что

$$\|Ax_k - Ax_l\|^2 = \|x_k\|^2 + \|-x_l - (Lx_k - Lx_l)\|^2 \geqslant \|x_k\|^2 = 1,$$

поэтому из последовательности $\{Ax_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. Но это противоречит тому, что A является вполне непрерывным оператором. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение. $\square$

Лемма 4. Если ядро оператора L не содержит отличного от нуля элемента, то его образ совпадает со всем пространством:

$$\ker L = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} L = H.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $\operatorname{Im} L = H^1 \neq H$, тогда существует элемент $x_0 \in H \setminus H^1$. По лемме 3, существует номер k, такой что $H^k = H^{k+1}$. Следовательно,

$$L^k x_0 \in H^k \quad \text{и} \quad \exists y \in H, \quad L^{k+1} y = L^k x_0.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$L^k y = L^{k-1} x_0, \quad L^{k-1} y = L^{k-2} x_0, \quad \ldots, \quad Ly = x_0.$$

Получили $x_0 \in H^1$, что противоречит изначальному предположению $x_0 \in H \setminus H^1$. $\square$

Замечание. Аналогично доказывается, что $\ker L^* = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} L^* = H$.

Лемма 5. Если образ оператора L совпадает со всем пространством, его ядро содержит только нулевой элемент:

$$\operatorname{Im} L = H \quad \Rightarrow \quad \ker L = 0.$$

Доказательство. По лемме 2 H представимо в виде

$$H = \operatorname{Im} L \oplus \ker L^*.$$

Из этого разложения следует, что $\ker L^* = 0$. Следовательно, по лемме 4 $\operatorname{Im} L^* = H$. С другой стороны, H представимо в виде

$$H = \operatorname{Im} L^* \oplus \ker L,$$

откуда следует, что $\ker L = 0.\square$

Теорема 2 (вторая теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма). Либо операторное уравнение $Lx = f$ разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение $Lx = 0$ имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Допустим, что уравнение $Lx = f$ разрешимо при любой правой части. Это означает, что $\operatorname{Im} L = H$, и по лемме 5 $\ker L = 0$. То есть однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Если же уравнение $Lx = f$ разрешимо не для всех f, то $\operatorname{Im} L \neq H$. Следовательно, $\ker L \neq 0$ и однородное уравнение имеет нетривиальное решение. $\square$

Теорема 3 (третья теорема Фредгольма). Размерности ядра оператора L и сопряженного оператора L^* конечны и равны:

$$\dim \ker L = \dim \ker L^* < +\infty.$$

Доказательство. Обозначим

$$\dim \ker L = \nu, \quad \dim \ker L^* = \mu.$$

Если $\nu = +\infty$, то в $\ker L$ можно выбрать счетный ортонормированный базиз $\{e_k\}$. Но тогда

$$Ae_k = e_k \quad \text{для любого} \quad k \quad \text{и} \quad \|Ae_k - Ae_l\| = \|e_k - e_l\| = \sqrt{2},$$

то есть из $\{Ae_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности. Это противоречит компактности оператора A.

Аналогичным образом доказывается, что $\mu < +\infty$.

Предположим теперь, что $\mu > \nu$. Выберем в $\ker L$ ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$, а в $\ker L^*$ — ортонормированный базис $\{\psi_l\}$.

Рассмотрим следующий оператор:

$$Sx = Lx - \sum_{k=1}^{\nu} (x, \varphi_k)\psi_k.$$

Он будет являться вполне непрерывным. Если $Sx = 0$, то

$$(Lx, \psi_l) = \sum_{k=1}^{\nu} (x, \varphi_k)(\psi_k, \psi_l) = (x, \varphi_l) = 0.$$

Из последнего соотношения получаем, что все коэффициенты Фурье разложения элемента x по базису $\{\varphi_k\}$ равны нулю, поэтому $Lx = 0$ и одновременно выполнено $x \perp \ker L$ и $x \in \ker L$. Следовательно, $x = 0$.

Таким образом, если $Sx = 0$, то $x = 0$. По второй теореме Фредгольма в этом случае существует решение уравнения

$$Sy = Ly - \sum_{k=1}^{\nu}(x, \varphi_k)\psi_k = \psi_{\nu+1}.$$

Умножив скалярно обе части на $\psi_{\nu+1}$, получим $0 = 1$ (так как $\ker L^* = (\operatorname{Im} L)^\perp$ и в силу того, что $\{\psi_k\}$ — ортонормированная система). Следовательно, $\mu \leqslant \nu$.

Аналогичным образом рассматривая случай $\nu > \mu$, получим $\nu \leqslant \mu$. Следовательно, $\nu = \mu$. $\square$

§14. Спектральная теория в бесконечномерном пространстве.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор A, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y: $A \in L(X \to Y)$. Если $A \in L(X \to X)$, то для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ можем определить оператор $\lambda I - A$.

Определение 1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным значением* оператора A, если оператор $B = (\lambda I - A)^{-1}$ определен на всем пространстве X и является ограниченным:

- $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ (иначе не существует обратного)
- $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$ (чтобы действовал на всем пространстве)
- $\|(\lambda I - A)^{-1}\| < +\infty$

Если X — банахово, то из ограниченности A по теореме Банаха будет следовать ограниченность оператора B.

Определение. *Резольвентой* называется $P(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Определение 2. Множество всех регулярных значений оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A:
Определение 3. *Спектром* оператора A называется множество всех комплексных чисел, не являющихся регулярными значениями A:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Определение 4. Если $\ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$, то λ называется *собственным значением* оператора A.

Элемент $x \neq 0, \quad x \in \ker(\lambda I - A)$ называется в таком случае *собственным элементом* оператора A.

В конечномерном пространстве спектр состоит из собственных значений. Спектр в бесконечномерном пространстве может состоять не только из собственных значений. В доказательство можно привести следующий
Пример. Рассмотрим оператор $A(x(t)) = tx(t)$, действующий в пространстве $C[0;1]$. Для него верны следующие соотношения:

$$(\lambda I - A)x(t) = (\lambda - t)x(t);$$

$$(\lambda I - A)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{\lambda - t}.$$

Допустим, $x(t) \in \ker(\lambda I - A)$, тогда $(\lambda - t)x(t) \equiv 0$. Следовательно, $x(t) \equiv 0$. Это означает, что у оператора A нет ни одного собственного значения.

Посмотрим на спектр оператора A. Если оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует, то он имеет вид, указанный выше. Поэтому при любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0;1]$ он определен на всем пространстве. Следовательно, спектром оператора является отрезок $\sigma(A) = [0;1]$. При этом, как уже было показано выше, A не имеет ни одного собственного значения. $\square$

По определению спектра, если резольвентное множество открыто, то спектр будет являться замкнутым множеством.

Теорема 1 (Гильберта - Шмидта). Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H.

Если A является вполне непрерывным, то любой элемент $x \in \operatorname{Im} A$ представим в виде

$$x = \sum_{\lambda_k \neq 0} (x, e_k)e_k,$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора A, а $\{e_k\}$ — соответствующие им собственные элементы.