# Algumas conclusões

$T(n)$ é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT no pior caso é $\mathrm{O}(n^2)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT é $\mathrm{O}(n^2)$.

# Quicksort no melhor caso

$M(n) :=$ consumo de tempo mínimo quando $n = r - p + 1$

$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + \Theta(n)$$

Versão simplificada:

$$M(0) = 1$$
$$M(1) = 1$$
$$M(n) = \min_{0 \le k \le n-1} \{M(k) + M(n-k-1)\} + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Mostre que $M(n) \geq$ n $\log_{10}$ n para todo $n \geq 1$.

Isto implica que no melhor caso o QUICKSORT é $\Omega(n \lg n)$,
que é o mesmo que dizer que o QUICKSORT é $\Omega(n \lg n)$.

# Mais algumas conclusões

$M(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do QUICKSORT
no melhor caso é $\Omega(n \log n)$.

Na verdade ...

O consumo de tempo do QUICKSORT
no melhor caso é $\Theta(n \log n)$.

# Análise de caso médio do Quicksort

Apesar ~~do~~ de o consumo de tempo de pior caso do QUICKSORT ser $\Theta(n^2)$, sua performance na prática é comparável (e em geral melhor) a de outros algoritmos cujo consumo de tempo no pior caso é $O(n \lg n)$.

Por que isso acontece? (Intuitivamente.)

# Exercício

Considere a recorrência

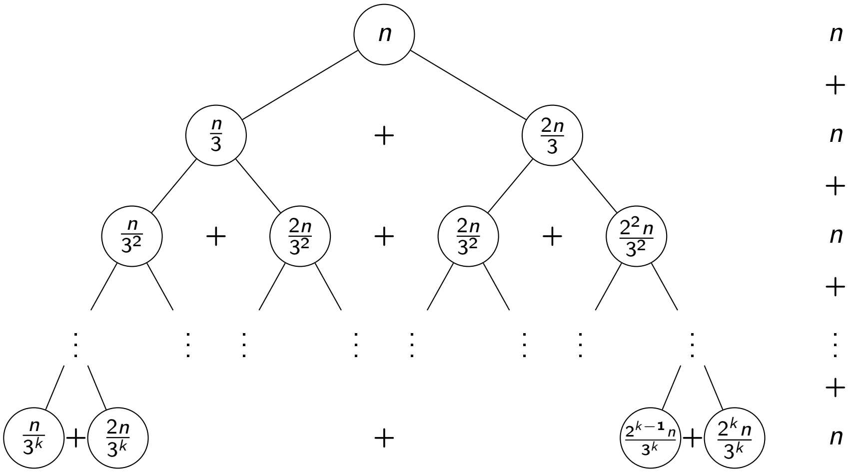
$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n
\end{aligned}
$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solução assintótica: $T(n)$ é $\mathrm{O}(???)$, $T(n)$ é $\Theta(???)$

Vamos olhar a árvore da recorrência.

# Árvore da recorrência




Os níveis da esquerda chegarão antes na base, ou seja, a árvore será inclinada para a direita.

# Árvore da recorrência

soma em cada horizontal $\leq n$

número de "níveis" $\leq \log_{3/2} n$

$T(n) =$ a soma de tudo

$$T(n) \;\leq\; n \log_{3/2} n \;+\; \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\log_{3/2} n}$$

$T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

# De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

| $n$ | $T(n)$ |
|---|---:|
| 1 | $1$ |
| 2 | $1+1+2=4$ |
| 3 | $1+4+3=8$ |
| 4 | $4+4+4=12$ |

# De volta a recorrência

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

| $n$ | $T(n)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | $1 + 1 + 2 = 4$ |
| 3 | $1 + 4 + 3 = 8$ |
| 4 | $4 + 4 + 4 = 12$ |

Vamos mostrar que $T(n) \leq 20\, n \lg n$ para $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

Para $n = 2$ temos $T(2) = 4 < 20 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Para $n = 3$ temos $T(3) = 8 < 20 \cdot 3 \cdot \lg 3$.

Suponha agora que $n > 3$. Então...

# Continuação da prova

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil \tfrac{n}{3} \rceil) + T(\lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor) + n \\
&\overset{\text{hi}}{\leq} 20\lceil \tfrac{n}{3} \rceil \lg \lceil \tfrac{n}{3} \rceil + 20\lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor \lg \lfloor \tfrac{2n}{3} \rfloor + n \\
&\leq 20\frac{n+2}{3} \lceil \lg \frac{n}{3} \rceil + 20\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\
&< 20\frac{n+2}{3} (\lg \frac{n}{3} + 1) + 20\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\
&= 20\frac{n+2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n \\
&= 20\frac{n}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20\frac{2}{3} \lg \frac{2n}{3} + 20\frac{2n}{3} \lg \frac{2n}{3} + n
\end{aligned}
$$

# Continuação da continuação da prova

$$
\begin{aligned}
&< 20n \lg \frac{2n}{3} + 14 \lg \frac{2n}{3} + n \\
&= 20n \lg n + 20n \lg \frac{2}{3} + 14 \lg n + 14 \lg \frac{2}{3} + n \\
&< 20n \lg n + 20n(-0.58) + 14 \lg n + 14(-0.58) + n \\
&< 20n \lg n - 11n + 14 \lg n - 8 + n \\
&= 20n \lg n - 10n + 14 \lg n - 8 \\
&< 20n \lg n - 10n + 7n - 8 \\
&< 20n \lg n
\end{aligned}
$$

# De volta à intuição

Certifique-se que a conclusão seria a mesma qualquer que fosse a proporção fixa que tomássemos. Por exemplo, resolva o seguinte...

Exercício: Considere a recorrência

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/10 \rceil) + T(\lfloor 9n/10 \rfloor) + n$$

para $n = 2, 3, 4, \ldots$ e mostre que $T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Note que, se o QUICKSORT fizer uma "boa" partição a cada, digamos, 5 níveis da recursão, o efeito geral é o mesmo, assintoticamente, que ter feito uma boa partição em todos os níveis.