# "Resolução" de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a $n$ potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \left(T(n/2^2) + 1\right) + 1 = T(n/2^2) + 2 \\
&= \left(T(n/2^3) + 1\right) + 2 = T(n/2^3) + 3 \\
&= \left(T(n/2^4) + 1\right) + 3 = \underbrace{T(n/2^4) + 4}
\end{aligned}$$

qual é o padrão após $k$ expansões?

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \big(T(n/2^2) + 1\big) + 1 \ = \ T(n/2^2) + 2 \\
&= \big(T(n/2^3) + 1\big) + 2 \ = \ T(n/2^3) + 3 \\
&= \big(T(n/2^4) + 1\big) + 3 \ = \ T(n/2^4) + 4 \\
&= \ \ldots \ = \ T(n/2^k) + k \quad \text{para } k = \lg n \\
&= T(1) + \lg n \ = \ 1 + \lg n \ = \ \Theta(\lg n).
\end{aligned}$$

exercício

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1 \quad \text{e} \quad T(n) \;=\; T(n-1) + n \text{ para } \underbrace{n \geq 2.}$$

não é preciso supor
que n é potência de 2
(por quê?)

# "Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1 \quad \text{e} \quad T(n) \;=\; T(n-1) + n \text{ para } n \geq 2.$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& T(n-1) + n \\
= \;& T(n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

exercício

# Resolução de recorrências

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + n \\
&= T(n-2) + (n-1) + n \\
&= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \ldots = T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= 3\left(3\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^2\left(3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \;=\; 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \underbrace{3^4\,T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n}_{\text{qual é o padrão após } k \text{ expansões?}}
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\left(3/2\right)^{\lg n} - 1\right) n
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,3^{\lg n} - 2n =
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n} T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1} n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,\underset{\substack{\| \\ 2^{\lg 3}}}{\boxed{3}}^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg n}\right)^{\lg 3} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,3^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg n}\right)^{\lg 3} - 2n \\
&= 3n^{\lg 3} - 2n = \Theta\left(n^{\boxed{\lg 3}}\right) \qquad \approx 1.585
\end{aligned}$$