Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

Mergesort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

Método: Divisão e conquista.

MERGESORT (A, p, r)
se $p < r$
    então $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
        MERGESORT (A, p, q)
        MERGESORT $(A, q+1, r)$
        INTERCALA (A, p, q, r)

Intercalação

Problema: Dados $A[p \mathinner{\ldotp\ldotp} q]$ e $A[q{+}1 \mathinner{\ldotp\ldotp} r]$ crescentes, rearranjar $A[p \mathinner{\ldotp\ldotp} r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

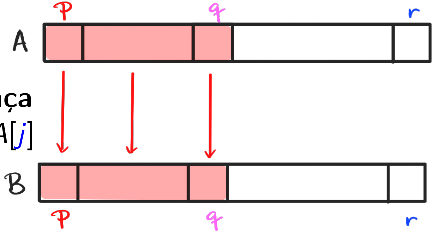
	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
para i ← p até q faça
    B[i] ← A[i]
para j ← q + 1 até r faça
    B[r + q + 1 − j] ← A[j]
i ← p
j ← r
para k ← p até r faça
    se B[i] ≤ B[j]
        então A[k] ← B[i]
              i ← i + 1
        senão A[k] ← B[j]
              j ← j − 1
```

Intercalação

```
INTERCALA (A, p, q, r)
  ▷ B[p . . r] é um vetor auxiliar
  para i ← p até q faça
      B[i] ← A[i]
  para j ← q + 1 até r faça
      B[r + q + 1 − j] ← A[j]
  i ← p
  j ← r
  para k ← p até r faça
      se B[i] ≤ B[j]
          então A[k] ← B[i]
                i ← i + 1
          senão A[k] ← B[j]
                j ← j − 1
```



Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p \,..\, r]$ é um vetor auxiliar

para $i \leftarrow p$ **até** q **faça**

  $B[i] \leftarrow A[i]$

para $j \leftarrow q+1$ **até** r **faça**

  $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$

$i \leftarrow p$

$j \leftarrow r$

para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**

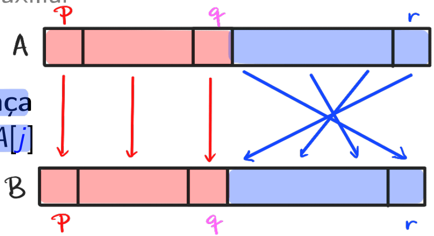
  se $B[i] \leq B[j]$

    então $A[k] \leftarrow B[i]$

      $i \leftarrow i+1$

    senão $A[k] \leftarrow B[j]$

      $j \leftarrow j-1$



Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p \,..\, r]$ é um vetor auxiliar

para $i \leftarrow p$ **até** q **faça**

  $B[i] \leftarrow A[i]$

para $j \leftarrow q+1$ **até** r **faça**

  $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$

$i \leftarrow p$

$j \leftarrow r$

para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**

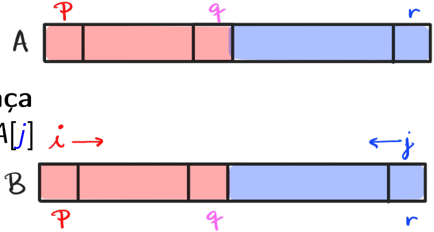
  se $B[i] \leq B[j]$

    então $A[k] \leftarrow B[i]$

      $i \leftarrow i+1$

    senão $A[k] \leftarrow B[j]$

      $j \leftarrow j-1$



Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p\,..\,r]$ é um vetor auxiliar

para $i \leftarrow p$ **até** q **faça**

  $B[i] \leftarrow A[i]$

para $j \leftarrow q+1$ **até** r **faça**

  $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$

$i \leftarrow p$

$j \leftarrow r$

para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**

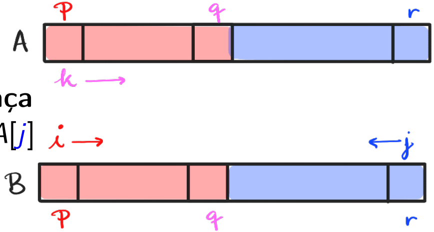
  se $B[i] \leq B[j]$

    então $A[k] \leftarrow B[i]$

      $i \leftarrow i+1$

    senão $A[k] \leftarrow B[j]$

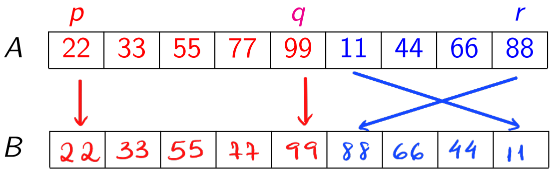
      $j \leftarrow j-1$



Simulação

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88
B									

Simulação



Simulação

	k								
A									

	i								j
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

		k							
A	11								
	i							j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

			k						
A	11	22							

		i						j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

				k					
A	11	22	33						

			i					j	
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

					k				
A	11	22	33	44					

			i				j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

						k			
A	11	22	33	44	55				
				i			j		
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

							k		
A	11	22	33	44	55	66			

				i		j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

								k	
A	11	22	33	44	55	66	77		

					i	j			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

									k
A	11	22	33	44	55	66	77	88	

					$i{=}j$				
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Simulação

A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

					j	i			
B	22	33	55	77	99	88	66	44	11

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p\,..\,r]$ é um vetor auxiliar

para $i \leftarrow p$ **até** q **faça** $\Theta(n)$

    $B[i] \leftarrow A[i]$

para $j \leftarrow q+1$ **até** r **faça** $\Theta(n)$

    $B[r+q+1-j] \leftarrow A[j]$

$i \leftarrow p$ $\Theta(1)$

$j \leftarrow r$

para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**

    se $B[i] \leq B[j]$

        então $A[k] \leftarrow B[i]$ $\Theta(n)$

            $i \leftarrow i+1$

        senão $A[k] \leftarrow B[j]$

            $j \leftarrow j-1$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\Theta(n)$
2	$\Theta(n)$
3	$\Theta(n)$
4	$\Theta(n)$
5–6	$\Theta(1)$
7	$\Theta(n)$
8	$\Theta(n)$
9–12	$\Theta(n)$
total	$\Theta(7n+1) = \Theta(n)$

Conclusão

O algoritmo INTERCALA consome
$\Theta(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo INTERCALA consome
tempo $\Theta(n)$.

Mergesort

$\text{MERGESORT}\ (A, p, r)$

1 se $p < r$

2 então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

3 $\text{MERGESORT}\ (A, p, q)$

4 $\text{MERGESORT}\ (A, q + 1, r)$

5 $\text{INTERCALA}\ (A, p, q, r)$

linha	consumo máximo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Mergesort

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Naturalmente queremos alguma
função bem conhecida

Mergesort

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \underbrace{\Theta(n)}_{n}$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.

Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

se fosse $\Theta(n^2)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \underbrace{\Theta(n)}_{n}$$

tomaríamos n^2

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.

Mergesort

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \underbrace{\Theta(n)}_{n}$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2. ← para facilitar com

Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \underbrace{\Theta(n)}_{n}$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência para determinar um "chute" de solução.

veremos na aula 4

Mergesort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(n) \;=\; T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \underbrace{\Theta(n)}_{n}$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Receita:

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de 2.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Expansão

$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão

$$T(n) = T(\cancel{\lceil} n/2 \cancel{\rceil}) + T(\cancel{\lfloor} n/2 \cancel{\rfloor}) + n$$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão $T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão

$T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

.

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

pattern matching

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\left(2T(n/2^2) + n/2\right) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n
\end{aligned}$$

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n
\end{aligned}
$$

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n
\end{aligned}
$$

Expansão $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $\boxed{k} = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\bigl(2T(n/2^2) + n/2\bigr) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\bigl(2T(n/2^3) + n/2^2\bigr) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\bigl(2T(n/2^4) + n/2^3\bigr) + 3n \;=\; \underbrace{2^4 T(n/2^4) + 4n}_{\text{qual é o padrão após } \boxed{k} \text{ expansões?}}
\end{aligned}
$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\bigl(2T(n/2^2) + n/2\bigr) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\bigl(2T(n/2^3) + n/2^2\bigr) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\bigl(2T(n/2^4) + n/2^3\bigr) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^k T(n/2^k) + kn
\end{aligned}
$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$\Rightarrow 2^k = n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; \underbrace{2^k}_{n}T(\underbrace{n/2^k}_{=1}) + kn
\end{aligned}
$$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$\Rightarrow 2^k = n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; \underbrace{2^k}_{n} T(\underbrace{n/2^k}_{=1}) + kn
\end{aligned}
$$

$T(1) = 1$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$\Rightarrow 2^k = n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2\,T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3\,T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4\,T(n/2^4) + 4n \\
&= \;\dots\; = \underbrace{2^k}_{n}\,T(\underbrace{n/2^k}_{=\,1}) + kn
\end{aligned}
$$

$\lg n$

$T(1) = 1$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$\Rightarrow 2^k = n$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2(2T(n/2^2) + n/2) + n = 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2(2T(n/2^3) + n/2^2) + 2n = 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3(2T(n/2^4) + n/2^3) + 3n = 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \dots = \underbrace{2^k}_{n} T(\underbrace{n/2^k}_{=1}) + \underbrace{k}_{\lg n}n = n \cdot 1 + n \lg n
\end{aligned}
$$

$T(1) = 1$

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2 T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3 T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4 T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^k T(n/2^k) + kn \\
&= n + n\lg n \;=\; \Theta(n\lg n).
\end{aligned}
$$

exercício

Expansão

Para n potência de 2 e $k = \lg n$, temos que

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n \\
&= 2\big(2T(n/2^2) + n/2\big) + n \;=\; 2^2T(n/2^2) + 2n \\
&= 2^2\big(2T(n/2^3) + n/2^2\big) + 2n \;=\; 2^3T(n/2^3) + 3n \\
&= 2^3\big(2T(n/2^4) + n/2^3\big) + 3n \;=\; 2^4T(n/2^4) + 4n \\
&= \ldots \;=\; 2^kT(n/2^k) + kn \\
&= \underbrace{n + n\lg n}_{\text{o "chute"}} \;=\; \Theta(n\lg n).
\end{aligned}$$

exercício

Conferência

Apenas

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1)$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

agora tentamos provar que o "chute" está certo

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad \text{(e, deixamos implícito, } T(1) = 1\text{)}$$

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $\underbrace{T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}}_{\text{hipótese de indução (H.I.)}}$.

Conferência $T(n) = 2T(n/2) + n$

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n \qquad$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$.

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Conferência

Para n potência de 2 e $k = \lg n$,

$T(n) \;=\; 2\,T(n/2) + n$ (e, deixamos implícito, $T(1) = 1$)

Afirmação: $T(n) = n + n \lg n$.

Prova por indução em k, onde $k = \lg n$.

Afirmação reescrita em termos de k: $T(2^k) = 2^k + k\,2^k$.

Para $k = 0$, temos que $T(2^0) = T(1) = 1 = 2^0 + 0 \cdot 2^0$.

Para $k \geq 1$, suponha que $T(2^{k-1}) = 2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}$. (H.I.)

Então $T(2^k) = 2\,T(2^{k-1}) + 2^k$ pela recorrência.

Logo

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2\,(2^{k-1} + (k-1)2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^k + (k-1)\,2^k + 2^k = 2^k + k\,2^k. \end{aligned}$$

$\square$

"Resolução" de recorrências

- Substitua a notação assintótica por função da classe.
- Restrinja-se a n potência de algo, se necessário.
- Estipule que na base o valor é 1.
- Use expansão ou árvore de recorrência
  para determinar um "chute" de solução.
- Confira se o chute está correto.

Exemplos:

- $T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$
- $T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(n) \;=\; 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$
- $T(n) \;=\; 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n^2)$

"Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

"Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \bigl(T(n/2^2) + 1\bigr) + 1 \;=\; T(n/2^2) + 2 \\
&= \bigl(T(n/2^3) + 1\bigr) + 2 \;=\; T(n/2^3) + 3 \\
&= \bigl(T(n/2^4) + 1\bigr) + 3 \;=\; \underbrace{T(n/2^4) + 4}_{\text{qual é o padrão após } k \text{ expansões?}}
\end{aligned}$$

"Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(1)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$ e $T(n) = T(n/2) + 1$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
&= \big(T(n/2^2) + 1\big) + 1 \;=\; T(n/2^2) + 2 \\
&= \big(T(n/2^3) + 1\big) + 2 \;=\; T(n/2^3) + 3 \\
&= \big(T(n/2^4) + 1\big) + 3 \;=\; T(n/2^4) + 4 \\
&= \ldots \;=\; T(n/2^k) + k \quad \text{para } k = \lg n \\
&= T(1) + \lg n \;=\; 1 + \lg n \;=\; \Theta(\lg n).
\end{aligned}$$

exercício

"Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1 \;\text{ e }\; T(n) \;=\; T(n-1) + n \text{ para } \underbrace{n \geq 2}.$$

não é preciso supor
que n é potência de 2
(por quê?)

"Resolução" de recorrências

$$T(n) \;=\; T(n-1) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$$T(1) = 1 \;\text{ e }\; T(n) \;=\; T(n-1) + n \text{ para } n \geq 2.$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) = \;& T(n-1) + n \\
= \;& T(n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& T(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& \ldots \;=\; T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
= \;& 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n \;=\; \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2).
\end{aligned}$$

exercício

Resolução de recorrências

Por expansão:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= T(n-2) + (n-1) + n \\ &= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \ldots = T(1) + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-2) + n = \frac{(n+1)n}{2} = \Theta(n^2). \end{aligned}$$

$$T(n) \ = \ 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Versão simplificada da recorrência acima:

$T(1) = 1$
$T(n) = 3\,T(n/2) + n$ para $n \geq 2$ potência de 2.

Por expansão:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= 3\left(3T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\ &= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \;=\; 3^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}n + n \end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n = 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \underbrace{3^4\,T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n}_{\text{qual é o padrão após } k \text{ expansões?}}
\end{aligned}
$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4\,T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^3\,T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= 3^4\,T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 n + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + \left(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left((3/2)^{\lg n} - 1\right) n
\end{aligned}$$

$$T(n) \;=\; 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n)
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \left(\frac{(\frac{3}{2})^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2\,T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}\,n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}\,n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\,T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,3^{\lg n} - 2n =
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= \;\ldots\; = \; 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(3^{\lg n} - n\right) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,\underset{\substack{\shortparallel \\ 2^{\lg 3}}}{3}^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg n}\right)^{\lg 3} - 2n
\end{aligned}$$

$$T(n) = 3\,T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n \;=\; 3^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{3}{2}n + n \\
&= \ldots \;=\; 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} n + \cdots + \frac{3}{2}n + n \qquad \text{para } k = \lg n \\
&= 3^{\lg n}\, T(1) + \left(\sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{3}{2}\right) n \;=\; 3^{\lg n} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\, n \\
&= 3^{\lg n} + 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1\right) n \;=\; 3^{\lg n} + 2\left(\frac{3^{\lg n}}{n} - 1\right) n \\
&= 3^{\lg n} + 2\,(3^{\lg n} - n) \\
&= 3^{\lg n} + 2\,3^{\lg n} - 2n \\
&= 3\,3^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg 3}\right)^{\lg n} - 2n = 3\left(2^{\lg n}\right)^{\lg 3} - 2n \\
&= 3n^{\lg 3} - 2n = \Theta\left(n^{\lg 3}\right)
\end{aligned}$$

≈ 1.585