

动态规划进阶（二）练习题题解

马玉坤

哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院

2017 年 8 月 18 日

Magic Trick

POJ 2282

题意：给你一个区间，求这个区间内各个数位上，数字 0-9 分别出现的次数。

设 $dp(i, j, k, l)$ 表示枚举到第 i 位的满足题意的数目的个数， j 表示之前确定的高位是否已达到上限， k 表示高位是否全为 0， l 表示统计的是 0-9 哪个数字。

减少转移的做法：当 $j=0$ (高位未达到上限) 时，第 i 位已经更低位可以随便填，这时候 0-9 是均匀分布的。

Round Numbers

POJ 3252

题意：求区间 $[L, R]$ 中所有满足二进制表示中 1 的个数等于 0 的个数的数的个数。

设 $f(i, j, k, l)$ 表示枚举到第 i 位， j 表示高位是否达到限制， k 表示高位是否全为 0（该题在统计时不能加入签到零）， l 等于已确定的位中 1 的个数与 0 的个数的差。

windy 数

BZOJ 1026

题意：求区间 $[L, R]$ 内有多少个 windy 数。windy 数的定义为：不含签到零且相邻两个数字之差至少为 2 的正整数。

设 $f(i, j, k, l)$ 表示枚举到第 i 位， j 表示高位是否达到限制， k 表示高位是否全为 0（该题在统计时不能加入签到零）， l 表示第 i 位填的数。

Just Too Lucky

NEERC 2008 J

题意：求小于等于 n 的所有满足能整除各位数之和的数。比如 $42 \bmod 6 = 0$ 。

其实各位数之和最小为 1，最大也就到 $9 \times 12 = 108$ ，所以可以枚举各位数之和（设各位数之和为 j ），然后 dp 求各位数之和为 j 且能整除 j 的数的个数。

设 $f(i, k, mod)$ 表示枚举到第 i 位，已经确定的位数对刚才枚举的 j 取模后的结果为 mod 的数字的个数， k 表示高位是否达到上限。（本题目可以添加前导零。）

Periodical Numbers

Codeforces 215 E

题意：求区间 $[L, R]$ 内的周期二进制数个数。周期二进制数指的是能找到循环周期的二进制数，比如 01110111。

枚举位数 L ，然后枚举周期长度 P （周期长度需要满足整除位数），然后找小于等于 n 的位数为 L ，周期长度为 P 的二进制数个数。

设 $f(i, j)$ 。 i 表示枚举到第 i 位， j 表示高位是否达到上限。该题有前导零限制，但是由于我们手动枚举位数（也就是第一个 1 的位置），所以不需设置前导零标记。

注意，在 dp 过程中，我们需要检查是否违反了低位的限制。比如 $n=111000$ ，如果我们高三位已经确定为 111，这时候是不合法的；当然高三位如果是 110，这时候就是合法的。

Painter's Problem

POJ 1681

题意：给定一个矩阵，矩阵上每个格子有初始的颜色（黄色或者白色）。没次操作可以使一个格子以及周围 4 个格子反转颜色（黄变白，白变黄），问最少需要多少此操作，能让所有格子变成黄色。

枚举第一行的格子反不反转，就知道第二行该怎么做，然后就知道第 i 行该怎么做。

换句话说，枚举完第一行的决策，剩余行的决策就都确定了。

Corn Fields

POJ 3254

题意：在一片 M 行 N 列的草地上（用 0 和 1 矩阵表示），1 表示能放牛，0 表示不能放。在草地上放牛并且牛不能相邻，问有多少种放法（一头牛都不放也算一种）。

设 $f(i, S)$ 表示从第一行枚举到第 i 行，且第 i 行状态为 S 时的方案数。

假设第 i 行状态 S 的第 j 位为 1（ (i, j) 放牛），那么第 $i-1$ 行的第 j 为就必须为 0，而第 i 行第 j 列为 0，那么第 $i-1$ 行第 j 列既可以为 0，也可以为 1。

直接状压压力不大，有兴趣可以搜索“高位前缀和”（本质也是状压）。

Rectangular Covering

POJ 2836

平面上有 n 个点，现用平行于坐标轴的矩形去覆盖所有点，每个矩形至少盖两个点，矩形面积不可为 0，求这些矩形的最小面积和。

因为面积最小化，所以每个矩形一定至少有两个端点与 n 个点中的两个点分别重合。

求出以每对点为端点形成的矩形所包含的点集 ($\frac{n(n-1)}{2}$ 对点)。设 $f(S)$ 表示覆盖的点集为 S 所需的最小矩形面积，可以枚举这 $n(n-1)/2$ 个矩形（设枚举到第 i 个矩形），用 $f(S) + area(i)$ 去更新 $f(S|cover(i))$ 。

Mondriaan's Dream

POJ 2411

多米诺骨牌覆盖问题，见上午课件。

Sherlock and the Encrypted Data

Codeforces 776 G

题意：求区间 $[L, R]$ 内所有满足。。。题意挺麻烦的，大家直接看题目吧。

一个数异或另一个数变大还是变小，只跟另一个数的最高位的 1 有关。所以为了判断 x 是否是满足题意的数字，我们只需要关注 x 的 16 进制表示中数字最大的一位数（设这个数为 $i, 0 \leq i \leq 16$ ）以及 x 的二进制表示中的对应位（就是第 i 位）就可以。

所以我们可以枚举 h ，表示十六进制中表示中各位上最大的数为 h 。设方程 $f(i, j, k, l)$ 。 i 表示枚举到第 i 位， j 表示高位是否达到上限， k 表示目前为止枚举的十六进制位中有没有出现过 h ， l 表示前导 0。需要注意的是，每一个十六进制位都需要小于等于 h ，而且二进制表示中第 h 位应该等于 1。（这样异或 2^h 之后才能减小。）

官方题解用了**不同的做法**，把数位 DP 与状压 DP 结合了起来，大家也可以做一下参考。

<http://codeforces.com/blog/entry/50622>