动态规划进阶（二）

数位统计动态规划与状态压缩动态规划

马玉坤

哈尔滨工业大学计算机科学与技术学院

2017 年 8 月 18 日

1. 数位统计动态规划
    - 理论
    - 题目
        - Find a car
        - 两种 dp 数组求解的写法
        - K-wolf Number
        - 淘金
2. 状态压缩动态规划
    - 原理
    - 题目
        - Stabilization
        - 炮兵阵地
        - 多米诺骨牌覆盖问题

数位统计动态规划

一般形式

给定一个区间 $[L, R]$，求在此区间内满足某个条件限制（特性）的数的个数或者加和。一般有多组询问。

一般套路

1. 先将问题 $[L, R]$ 转化为 $[1, L-1]$ 和 $[1, R]$ 的问题

数位统计动态规划

一般形式

给定一个区间 $[L, R]$，求在此区间内满足某个条件限制（特性）的数的个数或者加和。一般有多组询问。

一般套路

1. 先将问题 $[L, R]$ 转化为 $[1, L-1]$ 和 $[1, R]$ 的问题
2. dp 状态有两部分：

数位统计动态规划

一般形式

给定一个区间 $[L, R]$，求在此区间内满足某个条件限制（特性）的数的个数或者加和。一般有多组询问。

一般套路

1. 先将问题 $[L, R]$ 转化为 $[1, L-1]$ 和 $[1, R]$ 的问题
2. dp 状态有两部分：
   1. 跟枚举有关的部分：已枚举到的位数，以及前若干位数是不是已经到了上限（范围的限制）

数位统计动态规划

一般形式

给定一个区间 $[L, R]$，求在此区间内满足某个条件限制（特性）的数的个数或者加和。一般有多组询问。

一般套路

1. 先将问题 $[L, R]$ 转化为 $[1, L-1]$ 和 $[1, R]$ 的问题
2. dp 状态有两部分：
   1. 跟枚举有关的部分：已枚举到的位数，以及前若干位数是不是已经到了上限（范围的限制）
   2. 跟特性有关的部分：已枚举的位上的数已经到达的状态（特性的限制）

数位统计动态规划 (Cont'd)

对解题的忠告

1. 数位 DP 较容易对拍，可以本地测试，减少 WA

数位统计动态规划 (Cont'd)

对解题的忠告

1. 数位 DP 较容易对拍，可以本地测试，减少 WA
2. 耐心，细心

数位统计动态规划 (Cont'd)

对解题的忠告

1. 数位 DP 较容易对拍，可以本地测试，减少 WA
2. 耐心，细心
3. 重构/重写

Find a car

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

题目

给定一个无穷大的矩阵，其中第 i 行第 j 列的元素 $mat(i,j)$ 为最小的不在集合 $\{mat(1,j), mat(2,j), \dots, mat(i-1,j), mat(i,1), mat(i,2), \dots, mat(i,j-1)\}$ 中出现过的正整数。

1	2	3	4	5
2	1	4	3	6
3	4	1	2	7
4	3	2	1	8
5	6	7	8	1

图 1: 矩阵左上角的 5 个元素

然后会有 $Q(\le 10^4)$ 个询问，每个询问给定 x_1, y_1, x_2, y_2, k，回答子矩阵 $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ 内所有小于小于等于 k 的数的和。$x_1, y_1, x_2, y_2 \le 10^9$ 且 $k \le 2 \times 10^9$。

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

第一个问题

第 i 行第 j 列，即 $mat(i,j)$ 该怎么求？能不能用一个简单的式子来表示？

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

第一个问题

第 i 行第 j 列，即 $mat(i,j)$ 该怎么求？能不能用一个简单的式子来表示？
先把矩阵里的每个元素都减 1，行数和列数从 1 开始变为从 0 开始。

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

第一个问题

第 i 行第 j 列，即 $mat(i,j)$ 该怎么求？能不能用一个简单的式子来表示？

先把矩阵里的每个元素都减 1，行数和列数从 1 开始变为从 0 开始。

此时可转化为两堆石子（分别为 i 和 j），做 NIM 游戏。

$mat(i,j) =$ 各个子状态的 SG 函数 $= i \oplus j$ ($\oplus$ 为异或)。对于原矩阵就有 $mat(i,j) = (i-1) \oplus (j-1) + 1$。

不懂原理也没关系，今天我们的重点不在这。

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

异或

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \text{(left)} \\
= & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & \text{(right)} \\
= & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

图 2: 异或

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

二维前缀和

设 $sum(x,y)=\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{j} a(i,j)$，那么我们有

$$\sum_{i=x_1}^{x_2}\sum_{j=y_1}^{y_2} a(i,j) \tag{1}$$

$$=sum(x_2,y_2)-sum(x_1-1,y_2) \tag{2}$$

$$-sum(x_2,y_1-1)+sum(x_1-1,y_1-1) \tag{3}$$

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

数位 DP

问题转化成求 $\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y}[i \oplus j \leq k](i \oplus j)$
设 $f(di, dx, dy, dk)$ 为这个状态下的数字个数，$g(di, dx, dy, dk)$ 为数字和。其中 di 表示从最高位开始已枚举到的位数，dx, dy 分别表示已枚举的 x 与 y 的前缀是否到达上限，dk 表示已枚举的 x 和 y 的前缀的异或是否达到 k 的上限。
详见代码。

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

数位 DP (Cont'd)

为什么这样设计状态？举个例子。
比如 $x = 1010, y = 0101, k = 1110$，枚举完了高三位，此时已枚举的 $x' = 101$，$y' = 010$, 且它们的异或值 $k' = 111$，这时候的状态应该是 $f(0,1,1,1)$（枚举到第 0 位，且 x, y, k 前缀都达到限制）。
那么我们枚举低位的时候就不能随便枚举 x 和 y，否则会超出 x 和 y 的限制。同时，我们还要注意已枚举的前缀是否达到 k 的上限，如果达到了 k 的上限，同样不能随便枚举 x 和 y。枚举第 0 位时，我们实际上 x 只能取 0，y 只能取 0 或 1，但 y 不能取 1，因为这时候 $x \oplus y = 1111$，超出了范围。

Find a car (Cont'd)

Codeforces Round #415 (Div. 1) C

总结

四个状态中前三个状态（位数，x 前缀，y 前缀）都是关于枚举的范围的，而第四个状态可以理解成枚举的范围，也可以理解成数的特性。在这里我们使用了布尔变量，表示前缀是否达到上限，从而使得我们枚举后面的位时知道是否需要注意范围的限制。

递推求动态规划

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
  for (int j = volume[i]; j <= capacity; j++) {
    dp[i][j] = max(dp[i-1][j],
                   dp[i-1][j-volume[i]] + value[i]);
  }
}
```

递归求动态规划（记忆化搜索）

```
int dfs(int i, int j) {
  if (i == 0) {
    return 0;
  }
  if (vis[i][j]) {
    return dp[i][j];
  }
  vis[i][j] = 1;
  return dp[i][j] = max(dfs(i-1, j),
                        dfs(i-1, j-volume[i]) + value[i]);
}
```

两种方法的比较

- 递推的优势

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小
  2. 不需递归，不怕爆栈

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小
  2. 不需递归，不怕爆栈
- 递归的优势

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小
  2. 不需递归，不怕爆栈
- 递归的优势
  1. 对有效状态数较少的问题可大大提高效率，避免无效状态的搜索

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小
  2. 不需递归，不怕爆栈
- 递归的优势
  1. 对有效状态数较少的问题可大大提高效率，避免无效状态的搜索
  2. 实现简单，更符合人类思维

两种方法的比较

- 递推的优势
  1. 常数小
  2. 不需递归，不怕爆栈
- 递归的优势
  1. 对有效状态数较少的问题可大大提高效率，避免无效状态的搜索
  2. 实现简单，更符合人类思维
  3. 边界的初始化更容易

K-wolf Number (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 5 07

问题

K-wolf 数字定义为：十进制表示下，任意相邻的 k 位数字都各不相同。
给定 L, R, K，求区间 $[L, R]$ 内的 K-wolf 数字的个数。
$L, R \leq 10^{18}; K \leq 5$

K-wolf Number (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 5 07

解法

转化为 $1, \ldots, n$ 的 K-wolf 数个数的问题。
设 $dp(i, j, k)$ 表示从最高位枚举到第 i 位，j 表示已枚举的位有没有达到 n 的上限，k 存的是已枚举的位中后 k-1 位的值。这样我们就能知道。

K-wolf Number (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 5 07

解法 (Cont'd)

注意到一个问题：刚才的题目 (Find a car) 中，我们实际上将所有数都加上了前导零，补成了 31 位。然而在这个题目中，如果我们仍然这么操作，从第 8 位开始枚举，补上前导零，把所有数都变成 18 位数，那么像 29 这样的数就会变成 000000000000000029，不符合 K-wolf 数的定义 (有连续的 0)，所以我们不能算上前导零。

K-wolf Number (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 5 07

解法 (Cont'd)

注意到一个问题：刚才的题目 (Find a car) 中，我们实际上将所有数都加上了前导零，补成了 31 位。然而在这个题目中，如果我们仍然这么操作，从第 8 位开始枚举，补上前导零，把所有数都变成 18 位数，那么像 29 这样的数就会变成 000000000000000029，不符合 K-wolf 数的定义 (有连续的 0)，所以我们不能算上前导零。

一种方案是：在 dp 状态中，加入一维指示之前枚举的位是否全是 0。

另一种方案是：手动枚举数的位数以及最高位的数字，然后剩下再 dp。

K-wolf Number (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 5 07

解法 (Cont'd)

注意到一个问题：刚才的题目 (Find a car) 中，我们实际上将所有数都加上了前导零，补成了 31 位。然而在这个题目中，如果我们仍然这么操作，从第 8 位开始枚举，补上前导零，把所有数都变成 18 位数，那么像 29 这样的数就会变成 000000000000000029，不符合 K-wolf 数的定义 (有连续的 0)，所以我们不能算上前导零。

一种方案是：在 dp 状态中，加入一维指示之前枚举的位是否全是 0。

另一种方案是：手动枚举数的位数以及最高位的数字，然后剩下再 dp。

具体实现见文件 k-wolf_1.cpp 与 k-wolf_2.cpp。

淘金

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

题目

初始时，在 $1 \le x \le n, 1 \le y \le n$ 上的每个点上，都有一块金子。在一阵风过后，(x, y) 位置上的金子会到 $(f(x), f(y))$ 位置上，其中 $f(x)$ 等于 x 各个位上的数字乘积。

这阵风刮过之后，小 Z 希望依次走到 k 个点上进行金子的收集。请最大化收集到的金子总数。结果对 $10^9 + 7$ 取模。

$n \le 10^{12}; k \le \min(10^5, n^2)$

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

第一个问题

最后有多少个金子落到了 (x, y) 坐标上？

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

第一个问题

最后有多少个金子落到了 (x, y) 坐标上？

$$(\sum_{i=1}^{n}[f(i)=x])\times(\sum_{j=1}^{n}[f(j)=y])$$

所以为了简化，把 x 与 y 坐标分开考虑。

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

第二个问题

只考虑一维的话，什么样的坐标上会有金子？

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

第二个问题

只考虑一维的话，什么样的坐标上会有金子？
质因子只包括 $2, 3, 5, 7$（当然也可以不包括）。

$$\log_2 10^{12} \times \log_3 10^{12} \times \log_5 10^{12} \times \log_7 10^{12} \approx 244411$$

实际上，有金子的坐标数没那么 10^{12} 多。

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

数位 DP

设 $dp(i, l, c_2, c_3, c_5, c_7)$。$i$ 表示枚举到的位数，l 表示已枚举的位是否达到 n 的上限，c_2, c_3, c_5, c_7 分别表示已枚举的位上的数相乘得到的乘积中 $2, 3, 5, 7$ 四种质因子的数目。

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

其实还有一个问题

给定序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$（已经从大到小排好序），在矩阵 M 中找到前 m 大的值的和。其中 $M_{i,j} = a[i] \times a[j]$。

淘金 (Cont'd)

SDOI 2013 Round 1 Day 2 Problem 3

其实还有一个问题

给定序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$（已经从大到小排好序），在矩阵 M 中找到前 m 大的值的和。其中 $M_{i,j} = a[i] \times a[j]$。
最大值可能是 $a_1 \times a_1, a_2 \times a_1, \ldots, a_n \times a_1$，然后呢？（显然 $a_1 \times a_1$ 最大。）
次大值可能是 $a_1 \times a_2, a_2 \times a_1, a_3 \times a_1, \ldots, a_n \times a_1$。然后呢？（假设 $a_2 \times a_1$ 最大。）
第 3 大值可能是 $a_1 \times a_2, a_2 \times a_2, a_3 \times a_1, a_n \times a_1$。
维护矩阵每一行从左往右第一个没遍历的元素，然后放入最大堆中，每次从堆顶中取出 x，此时 x 所在的行的第一个没遍历的元素变成了 x 右边的数，把 x 弹出，并把 x 右边的数加入堆中。
重复 m 次。时间复杂度 $O((m+n)\log n)$。
实际上还可以优化到 $O(m \log n)$。

使用二进制数进行状态压缩

使用二进制数表示状态的动机

- 很多问题中，每个元素都有两种状态（在集合中，不在集合中；被占据，没被占据）
- 计算机使用二进制存储数据，使用原生的数字运算便可实现很多集合运算

使用二进制数进行状态压缩 (Cont'd)

使用二进制数表示状态的方法

1. &：“与”运算，集合求交
2. |：“或”运算，集合求并
3. ∧：“异或”运算，集合对称差 $((A-B)\cup(B-A))$，一般用作求补集 (也就是左操作数表示的集合包含右操作数表示的集合时使用)
4. <<：“左移”运算，$x << d$，将 x 在二进制下的每一位向左移动 d 位，最右边用 0 填充
5. >>：“右移”操作，$x >> d$，将 x 在二进制下的每一位向右移动 d 位，最左边用 0 填充（只考虑正数或无符号数）

例子：$((S >> 5)\&1)$——获取 S 状态下第 5 个元素的状态。

其他方法

视题目而定

有些题目中元素状态有若干种，例如连通性状态压缩动态规划中，插头的种类数就决定了每个元素的状态数目。
3 进制、4 进制、阶乘表示都有可能。

Stabilization

2016 Multi-University Training Contest 6 06

题目

给定序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，求一个 x，使得

$$\sum_{i=1}^{n-1} |(a_{i+1} \oplus x) - (a_i \oplus x)|$$

最小。

$n \leq 10^5; a_i < 2^{20}$

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

第一个问题

异或 x 之后，相邻的数的大小关系会改变，怎么处理？

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

第一个问题

异或 x 之后，相邻的数的大小关系会改变，怎么处理？

因为异或的是同一个数 x。所以两个数不同的二进制位异或之后仍然不同，相同的二进制位异或之后仍然相同。

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

第一个问题

异或 x 之后，相邻的数的大小关系会改变，怎么处理？
因为异或的是同一个数 x。所以两个数不同的二进制位异或之后仍然不同，相同的二进制位异或之后仍然相同。
我们只需要看两个相邻的数的二进制表示中最高的不同的位，就可以知道相邻的两个数谁比谁大，谁减谁等于差的绝对值。

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法

设 $S_i = \{j | a_j$与a_{j+1}二进制表示中最高不同的位为$i\}$。我们可以设

$$dp(x, i) = \sum_{j \in S_i} |(a_j \oplus x) - (a_{j+1} \oplus x)| \tag{4}$$

$$f(i) = |S_i| \tag{5}$$

$$g(i, k) = \sum_{j \in S_i} [a_j\text{和}a_{j+1}\text{第}k\text{位分别为 0 和 1}] \tag{6}$$

$$h(i, k) = \sum_{j \in S_i} [a_j\text{和}a_{j+1}\text{第}k\text{位分别为 1 和 0}] \tag{7}$$

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法 (Cont'd)

设 x 的二进制表示中最高的为 1 的位为第 $highbit(x)$ 位。设 $y = x \oplus 2^{highbit(x)}$，此时假设我们算完了 $dp(y, 0 \ldots 19)$，怎么算 $dp(x, 0 \ldots 19)$ 呢?

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法 (Cont'd)

设 x 的二进制表示中最高的为 1 的位为第 $highbit(x)$ 位。设 $y = x \oplus 2^{highbit(x)}$，此时假设我们算完了 $dp(y, 0 \dots 19)$，怎么算 $dp(x, 0 \dots 19)$ 呢?

$dp(x, 0 \dots highbit(x) - 1) = dp(y, 0 \dots highbit(x) - 1)$（这部分没有影响）

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法 (Cont'd)

设 x 的二进制表示中最高的为 1 的位为第 $highbit(x)$ 位。设 $y = x \oplus 2^{highbit(x)}$，此时假设我们算完了 $dp(y, 0 \dots 19)$，怎么算 $dp(x, 0 \dots 19)$ 呢?

$dp(x, 0 \dots highbit(x) - 1) = dp(y, 0 \dots highbit(x) - 1)$（这部分没有影响）

$dp(x, highbit(x)) = 2^{highbit(x)+1} \times f(highbit(x)) - dp(y, highbit(x))$

（原来是 $i - j$，因为最高不同的位取反，现在变成了 $2^{highbit(x)+1} + j - i = 2^{highbit(x)+1} - (i - j)$）

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法 (Cont'd)

设 x 的二进制表示中最高的为 1 的位为第 $highbit(x)$ 位。设 $y = x \oplus 2^{highbit(x)}$，此时假设我们算完了 $dp(y, 0 \dots 19)$，怎么算 $dp(x, 0 \dots 19)$ 呢?

$dp(x, 0 \dots highbit(x)-1) = dp(y, 0 \dots highbit(x)-1)$（这部分没有影响）

$dp(x, highbit(x)) = 2^{highbit(x)+1} \times f(highbit(x)) - dp(y, highbit(x))$（原来是 $i-j$，因为最高不同的位取反，现在变成了 $2^{highbit(x)+1} + j - i = 2^{highbit(x)+1} - (i-j)$）

$$\begin{array}{l} i:\ 0\ \underline{\mathbf{1}}\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ j:\ 0\ \underline{\mathbf{0}}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

图 3: 最高位取反前

$$\begin{array}{l} i:\ 0\ \underline{\mathbf{0}}\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ j:\ 0\ \underline{\mathbf{1}}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

图 4: 最高位取反后

Stabilization (Cont'd)

2016 Multi-University Training Contest 6 06

解法 (Cont'd)

那 $dp(x, highbit(x)+1\dots19)$ 呢？留作练习题。
注意：不要忘了用 $g(i,k)$ 和 $h(i,k)$。

启示

需要预处理的东西都不是一下子就能想到的，需要在实际进行计算的尝试时才能发现。

炮兵阵地

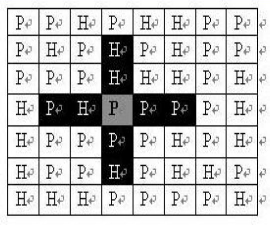
NOI 2001

问题

给定一个 $n \times m$ 的网格图，需要在其上部署炮兵部队，网格图上的每个网格可能是平原（可以部署部队），或者是山地（不可以部署部队）。

问最多能部署多少支炮兵部队，使任意两个部队不在对方的攻击范围，炮兵的攻击范围见图5。

$n \leq 100; m \leq 10$



P	P	H	P	H	H	P	P
P	H	P	H	P	H	P	P
P	P	P	H	H	H	P	H
H	P	H	P	P	P	P	H
H	P	P	P	P	H	P	H
H	P	P	H	P	H	H	P
H	H	H	P	P	P	P	H

图 5: 炮兵部队攻击范围

炮兵阵地 (Cont'd)

NOI 2001

解法

按行转移做状态压缩动态规划。

由于上下攻击范围是相互的，所以我们只需要让上面的部队不要打到下面就可以。

设 $dp(i, S)$ 表示第 1 行到第 i 行已经确定，且第 i 行的状态为 S 的方案数。S 实际上可以用 3 进制数来表示。

- S 的第 j 位为 0，意味着 (i, j) 与 $(i-1, j)$ 都没有放部队，此时 $(i+1, j)$ 可以放部队
- S 的第 j 位为 1，意味着 $(i-1, j)$ 放了部队，此时 $(i+1, j)$ 不可以放部队
- S 的第 j 位为 2，意味着 (i, j) 放了部队，此时 $(i+1, j)$ 也不可以放部队

炮兵阵地 (Cont'd)

NOI 2001

解法 (Cont'd)

有了第 i 行的状态的表示，我们就能知道第 i+1 行怎样枚举决策了，也就是说这一行放几支部队，分别放到哪。

炮兵阵地 (Cont'd)

NOI 2001

解法 (Cont'd)

有了第 i 行的状态的表示，我们就能知道第 i+1 行怎样枚举决策了，也就是说这一行放几支部队，分别放到哪。
第 i 行一共有 3^{10} 种状态，对于每个状态，第 i+1 行都有 2^{10} 个决策（每个格子放或者不放）。
然而，事实上，有效的状态数并没有那么多，可以预处理一下有用的状态，加一些剪枝。比如，同一行不可能放两个相邻的炮兵部队（隔一个格子也不行）。

多米诺骨牌覆盖问题

问题

多米诺骨牌的大小为 1×2，现在你要用多米诺骨牌去覆盖 $n \times m$ 大小的方格图。使得方格图中的每个方格被且仅被一个多米诺骨牌的一格覆盖。

问一共有多少覆盖方案？

$n \times m \leq 256$

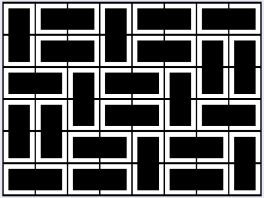


图 6: 6×8 网格图的多米诺骨牌覆盖

多米诺骨牌覆盖问题 (Cont'd)

初步分析

$n \times m \leq 256$ 的意思是说 $\min(n, m) \leq 16$，不失一般性，我们设 $m \leq n$。（n 为行数）
这样每行的格子数不多（≤ 16）。
但不像上一个题里，我们一行一行地决策，这次我们一格一格地决策。

多米诺骨牌覆盖问题 (Cont'd)

解法

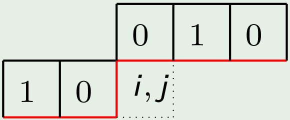


图 7: 轮廓线示意图

设 $dp(i, j, S)$ 表示轮廓线状态为 S 时的方案数。S 可以用一个二进制数表示，因为轮廓线上第 j 列的格子要么

- 0: 没被覆盖
- 1: 被覆盖了

多米诺骨牌覆盖问题 (Cont'd)

解法

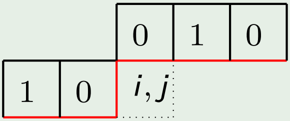


图 7: 轮廓线示意图

设 $dp(i, j, S)$ 表示轮廓线状态为 S 时的方案数。S 可以用一个二进制数表示，因为轮廓线上第 j 列的格子要么

- 0: 没被覆盖
- 1: 被覆盖了

那么决策有哪几种呢？

- 放一个横着的骨牌（主动决策）
- 放一个竖着的骨牌（被动决策，要看上一行同列的方格有没有被覆盖）

多米诺骨牌覆盖问题 (Cont'd)

解法 (Cont'd)

代码写起来很简单。

```
#define _1(i, j) (((i)>>(j))&1)
for (int i = 0; i < n; i++) {
  for (int j = 0; j < m; j++) {
    swap(cur, lst);
    dp[cur].clear();
    for (auto it = dp[lst].begin(); it != dp[lst].end(); ++it) {
      int s = it->first,
      v = it->second;
      if (j && !_1(s, j) && _1(s, j - 1)) {
        addMod(dp[cur][s ^ (1<<(j-1))], v);
      }
      addMod(dp[cur][s ^ (1<<j)], v);
    }
  }
  addMod(f[i][m], dp[cur].count(0)?dp[cur][0]:0);
}
```