

最优化作业 1

第三周周二(3月13日)之前交

1. 设 S_1, S_2 是凸集, 试讨论下列集合是否是凸集。若是给出证明, 否则举一反例予以说明。

- a) $S_1 \cup S_2$;
b) $S_1 + S_2 = \{x + y | x \in S_1, y \in S_2\}$;
c) $S_1 - S_2 = \{x - y | x \in S_1, y \in S_2\}$

2. 解释下列集合是否是凸集, 为什么?

- a) $S = \{x | x_1^2 + x_2^2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \leq 10, -x_1 - x_2 \leq -10x_2\}$
b) $S = \{x | x_1 + x_2 \leq 6, -2x_1 + 3x_2 \geq 2, 4x_1 - x_2 \leq 12\}$
c) $S = \{x | -(x_1 - 1)^2 + x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \geq 3, x_1 \geq 1\}$

3. 设 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_m(x)$ 均为凸函数, 讨论下列函数是否是凸函数。若是则给出证明, 否则举一反例。

- a) $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$
b) $g(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$

4. 将下列线性规划问题化成标准型, 并采用代数法, 求解其所有的基本解, 验证其最优解。

a) $\text{Min } z = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \text{ s.t. } \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$

b) $\text{Min } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, \text{ s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ x_1, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$

5. 用图解法求解以下线性规划问题:

a) $\max z = 3x_1 - 2x_2$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) $\min f = -x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t. } \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \geq 56 \\ 3x_1 - 5x_2 \geq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

6. 求出下面系统中的三个基本解

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= -3 \end{aligned}$$

7. 找出方程 $Ax = b$ 的两个基本解, 并指出每个解中的 B, B^{-1}, N, x_B, x_N

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

8. 证明: 线性规划(LP)问题可行解 x 为基本可行解的充要条件是 x 中正分量对应矩阵 A 的系数列向量线性无关.

9. 讨论线性规划问题与其对偶问题的联系与区别