## Постановка задачи

Пусть на отрезке $[-1;1]$ дана функция $f$ :

$$f:[-1;1]\to\mathbb{R}.$$

На том же отрезке даны $n$ точек $x_1,<x_2<\ldots<x_n$ и значения $y_1,y_2,\ldots,y_n$ функции $f$ в них, то есть

$$y_i=f(x_i), i=1,\ldots,n.$$

Задача состоит в том, чтобы построить многочлен $P$ степени не выше $n-1$ такой, что

$$P(x_i)=y_i, i=1,\ldots,n.$$

Многочлен $P$ называется интерполяционным.

## Описание алгоритмов решения

### I. Алгоритм построения интерполяционного многочлена в канонической форме

Пусть искомый многочлен имеет вид:

$$P(x)=P_{n-1}(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}.$$

Тогда задача может быть переформулирована в следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0+ & x_1a_1+ & \ldots & +x_1^{n-1}a_{n-1} & =f(x_1)\\ a_0+ & x_2a_1+ & \ldots & +x_2^{n-1}a_{n-1} & =f(x_2)\\ & & \ldots & & \\ a_0+ & x_na_1+ & \ldots & +x_n^{n-1}a_{n-1} & =f(x_n)\end{cases}$$

Таким образом задача построения интерполяционного многочлена свелась к решению системы линейных уравнений относительно $a_0,\ldots,a_{n-1}$, которая в матричном виде записывается так:

$$\begin{pmatrix}1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x_1)\\ f(x_2)\\ \vdots\\ f(x_n)\end{pmatrix}$$

Существует множество способов решить систему из $n$ линейных уравнений относительно $n$ неизвестных. В моём решении используется метод Жордана-Гаусса с поиском максимального элемента по всей матрице.

### II. Алгоритм построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

Идея прошлого алгоритма состоит в том, что в пространстве многочленов степени не больше $n-1$ рассматривается базис $1,x,x^2,\ldots,x^{n-1}$, по которому и раскладывается искомый многочлен.

Идея же Лагранжа заключается в том, чтобы выбрать другой базис:

$$\Phi_i = \Phi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 1, ..., n$$

и искать коэффициенты при разложении интерполяционного многочлена по такому базису. Заметим, что функции $\Phi_i$ обладают следующим свойством:

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, i, j = 1, ..., n$$

Таким образом, искомый многочлен запишется как

$$P(x) = L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Phi_i(x) .$$

Интерполяционный многочлен, построенный в такой форме, называется интерполяционным многочленом в форме Лагранжа.

## Структура проекта по реализации алгоритмов построения интерполяционного многочлена

Проект состоит из следующих файлов:

- main.c
- Partitions.h, Partitions.c
  Реализация разбиений отрезка $[-1;1]$ на узлы Чебышёва и равноотстающие
- Jordan_linear_solver.h, Jordan_linear_solver.c
  Реализация метода Жордана-Гаусса решения системы линейных уравнений с поиском максимального элемента по всей матрице
- Interpolations.h, Interpolations.c
  Функции интерполяционных многочленов.
  double interpolation_polinomial(double x, double *a, int n) – в канонической форме, массив a – массив коэффициентов, посчитанных с помощью метода Жордана-Гаусса
  double Lagrange_interpolation_polinomial(double x, double *x_partition, double *y, int n) – в форме Лагранжа. x_partition, y – узлы и значения в них соответственно.
- Validation_functions.h, Validation_functions.c
  Реализация собственной функции для валидации, функции Рунге.
- Results_to_file.h, Results_to_file.c
  Реализация функции, записывающей результаты работы программы в файл results.txt

# Обзор и оценка реализованных алгоритмов

Будем проверять совпадение значений приближаемой функции и построенных интерполирующих многочленов в выбранных точках, при этом варьируя $n$. Также будем смотреть, насколько хорошо интерполяционный многочлен $P$ подходит в качестве приближения функции $f$.

*Для того, чтоб оценить, насколько хорошо интерполяционный многочлен приближает функцию* $f$*, будем добавлять промежуточные точки* $x_{i,1}, x_{i,2}$*, равномерно расположенные в интервале* $(x_i, x_{i+1})$*, то есть* $x_{i,1} = x_i + \dfrac{x_{i+1} - x_i}{3}, x_{i,2} = x_{i,1} + \dfrac{x_{i+1} - x_i}{3}$.

## 1. Проверка валидности написанных реализаций

Для самой базовой проверки рассмотрим в качестве $f$ функцию $x^{n-1} - x$, в качестве точек $x_1 < ... < x_n$ — равноотстающие узлы с $x_1 = -1$ и $x_n = 1$.

Ожидаемый результат: значения интерполяционного многочлена в канонической форме и в форме Лагранжа в узлах совпадают со значением $f(x) = x^n - x$. Более того, поскольку мы интерполируем многочлен, то в добавленных промежуточных точках значения тоже совпадают.

$n = 7$

| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.000000 | 2.000000 | 2.000000 | 2.000000 | 4.440892e-016 | 0.000000e+000 | 4.440892e-016 |
| -0.888889 | 1.382159 | 1.382159 | 1.382159 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 |
| -0.777778 | 0.999155 | 0.999155 | 0.999155 | 0.000000e+000 | 1.110223e-016 | -1.110223e-016 |
| -0.666667 | 0.754458 | 0.754458 | 0.754458 | 2.220446e-016 | 0.000000e+000 | 2.220446e-016 |
| -0.555556 | 0.584957 | 0.584957 | 0.584957 | 3.330669e-016 | 1.110223e-016 | 2.220446e-016 |
| -0.444444 | 0.452152 | 0.452152 | 0.452152 | 3.885781e-016 | -5.551115e-017 | 4.440892e-016 |
| -0.333333 | 0.334705 | 0.334705 | 0.334705 | 3.330669e-016 | 0.000000e+000 | 3.330669e-016 |
| -0.222222 | 0.222343 | 0.222343 | 0.222343 | 2.775558e-016 | 2.775558e-017 | 2.498002e-016 |
| -0.111111 | 0.111113 | 0.111113 | 0.111113 | 1.526557e-016 | 0.000000e+000 | 1.526557e-016 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 |
| 0.111111 | -0.111109 | -0.111109 | -0.111109 | -1.526557e-016 | 0.000000e+000 | -1.526557e-016 |
| 0.222222 | -0.222102 | -0.222102 | -0.222102 | -2.775558e-016 | 5.551115e-017 | -3.330669e-016 |
| 0.333333 | -0.331962 | -0.331962 | -0.331962 | -3.330669e-016 | 0.000000e+000 | -3.330669e-016 |
| 0.444444 | -0.436737 | -0.436737 | -0.436737 | -3.885781e-016 | 0.000000e+000 | -3.885781e-016 |
| 0.555556 | -0.526154 | -0.526154 | -0.526154 | -3.330669e-016 | -1.110223e-016 | -2.220446e-016 |
| 0.666667 | -0.578875 | -0.578875 | -0.578875 | -2.220446e-016 | 0.000000e+000 | -2.220446e-016 |
| 0.777778 | -0.556400 | -0.556400 | -0.556400 | -2.220446e-016 | 1.110223e-016 | -3.330669e-016 |
| 0.888889 | -0.395619 | -0.395619 | -0.395619 | -4.440892e-016 | 5.551115e-017 | -4.996004e-016 |
| 1.000000 | 0.000000 | 0.000000 | -0.000000 | -4.440892e-016 | 0.000000e+000 | -4.440892e-016 |

Действительно, значения интерполяционных многочленов $P_{n-1}$, $L_n$ и функции $f$ совпадают в узлах и промежуточных точках.

$n = 8$

| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.000000 | 0.000000 | 0.000000 | -0.000000 | -2.220446e-016 | 0.000000e+000 | -2.220446e-016 |
| -0.904762 | 0.408467 | 0.408467 | 0.408467 | 3.330669e-016 | 5.551115e-017 | 2.775558e-016 |
| -0.809524 | 0.581696 | 0.581696 | 0.581696 | 0.000000e+000 | 1.110223e-016 | -1.110223e-016 |
| -0.714286 | 0.619421 | 0.619421 | 0.619421 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 | 0.000000e+000 |
| -0.619048 | 0.584208 | 0.584208 | 0.584208 | -2.220446e-016 | 0.000000e+000 | -2.220446e-016 |
| -0.523810 | 0.512990 | 0.512990 | 0.512990 | -1.110223e-016 | 0.000000e+000 | -1.110223e-016 |
| -0.428571 | 0.425916 | 0.425916 | 0.425916 | -1.110223e-016 | 0.000000e+000 | -1.110223e-016 |
| -0.333333 | 0.332876 | 0.332876 | 0.332876 | -5.551115e-017 | 5.551115e-017 | -1.110223e-016 |
| -0.238095 | 0.238052 | 0.238052 | 0.238052 | 0.000000e+000 | -2.775558e-017 | 2.775558e-017 |
| -0.142857 | 0.142856 | 0.142856 | 0.142856 | 5.551115e-017 | 0.000000e+000 | 5.551115e-017 |
| -0.047619 | 0.047619 | 0.047619 | 0.047619 | 2.775558e-017 | 6.938894e-018 | 2.081668e-017 |
| 0.047619 | -0.047619 | -0.047619 | -0.047619 | -1.387779e-017 | 2.081668e-017 | -3.469447e-017 |
| 0.142857 | -0.142856 | -0.142856 | -0.142856 | -2.775558e-017 | 0.000000e+000 | -2.775558e-017 |
| 0.238095 | -0.238052 | -0.238052 | -0.238052 | -2.775558e-017 | 0.000000e+000 | -2.775558e-017 |
| 0.333333 | -0.332876 | -0.332876 | -0.332876 | 0.000000e+000 | -5.551115e-017 | 5.551115e-017 |
| 0.428571 | -0.425916 | -0.425916 | -0.425916 | 5.551115e-017 | 0.000000e+000 | 5.551115e-017 |
| 0.523810 | -0.512990 | -0.512990 | -0.512990 | 1.110223e-016 | 0.000000e+000 | 1.110223e-016 |
| 0.619048 | -0.584208 | -0.584208 | -0.584208 | 3.330669e-016 | 1.110223e-016 | 2.220446e-016 |
| 0.714286 | -0.619421 | -0.619421 | -0.619421 | 2.220446e-016 | 0.000000e+000 | 2.220446e-016 |
| 0.809524 | -0.581696 | -0.581696 | -0.581696 | 0.000000e+000 | -1.110223e-016 | 1.110223e-016 |
| 0.904762 | -0.408467 | -0.408467 | -0.408467 | -1.110223e-016 | -2.775558e-016 | 1.665335e-016 |
| 1.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 2.220446e-016 | 0.000000e+000 | 2.220446e-016 |

Всё снова хорошо!

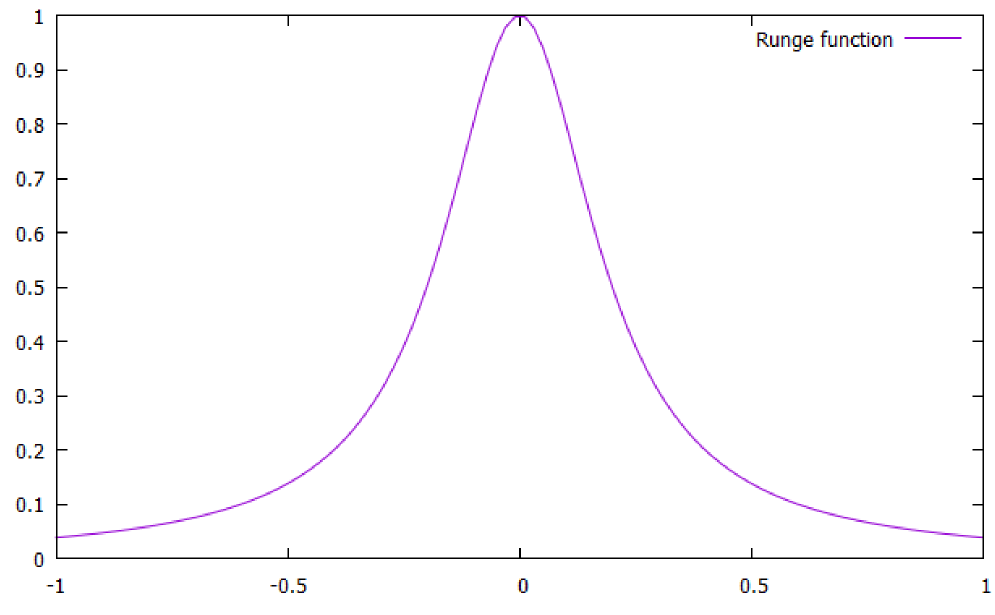
Попробуем пойти дальше, будем интерполировать более сложные функции и смотреть на то, насколько они хорошо приближаются интерполяционными многочленами в зависимости от $n$ и выбора узлов.

## 2. Интерполяционные многочлены для функции Рунге

Функция Рунге задаётся следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}.$$

Ниже изображен её график на $[-1;1]$.



## Равноотстающие узлы

Построим интерполяционный многочлен для функции Рунге по равноотстающим узлам.

$n = 7$

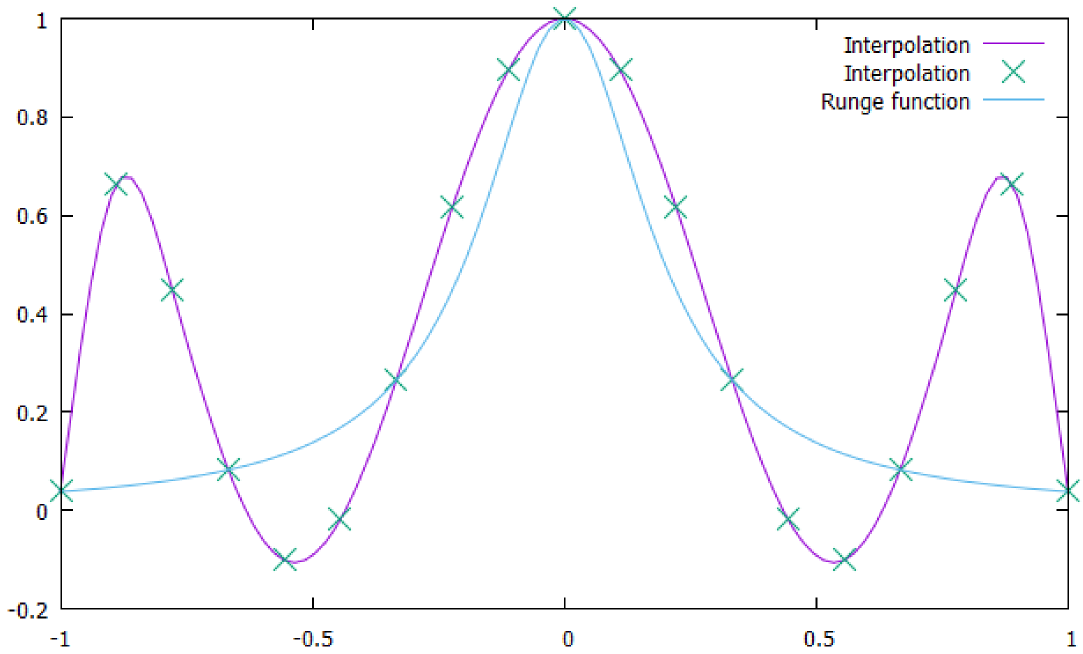
| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.000000 | 0.038462 | 0.038462 | 0.038462 | 0.000000 | 0.000000 | 1.637579e-015 |
| -0.888889 | 0.048186 | 0.664061 | 0.664061 | 0.615876 | 0.615876 | -1.776357e-015 |
| -0.777778 | 0.062021 | 0.447782 | 0.447782 | 0.385760 | 0.385760 | -1.165734e-015 |
| -0.666667 | 0.082569 | 0.082569 | 0.082569 | -0.000000 | 0.000000 | -4.024558e-016 |
| -0.555556 | 0.114731 | -0.100918 | -0.100918 | -0.215649 | -0.215649 | 6.938894e-016 |
| -0.444444 | 0.168399 | -0.018638 | -0.018638 | -0.187037 | -0.187037 | 1.231654e-015 |
| -0.333333 | 0.264706 | 0.264706 | 0.264706 | 0.000000 | 0.000000 | 8.881784e-016 |
| -0.222222 | 0.447514 | 0.615744 | 0.615744 | 0.168230 | 0.168230 | 6.661338e-016 |
| -0.111111 | 0.764151 | 0.894724 | 0.894724 | 0.130573 | 0.130573 | 1.110223e-016 |
| 0.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000e+000 |
| 0.111111 | 0.764151 | 0.894724 | 0.894724 | 0.130573 | 0.130573 | 2.220446e-016 |
| 0.222222 | 0.447514 | 0.615744 | 0.615744 | 0.168230 | 0.168230 | 9.992007e-016 |
| 0.333333 | 0.264706 | 0.264706 | 0.264706 | 0.000000 | 0.000000 | 1.276756e-015 |
| 0.444444 | 0.168399 | -0.018638 | -0.018638 | -0.187037 | -0.187037 | 1.474515e-015 |
| 0.555556 | 0.114731 | -0.100918 | -0.100918 | -0.215649 | -0.215649 | 8.187895e-016 |
| 0.666667 | 0.082569 | 0.082569 | 0.082569 | 0.000000 | 0.000000 | 4.163336e-017 |
| 0.777778 | 0.062021 | 0.447782 | 0.447782 | 0.385760 | 0.385760 | -1.165734e-015 |
| 0.888889 | 0.048186 | 0.664061 | 0.664061 | 0.615876 | 0.615876 | -6.661338e-016 |
| 1.000000 | 0.038462 | 0.038462 | 0.038462 | -0.000000 | 0.000000 | -1.387779e-016 |

Итак, в узлах сто процентное совпадение значений функции Рунге и интерполяционного многочлена в обеих формах, чего и стоило ожидать. Более того, значения интерполяционных многочленов совпадают и в промежуточных точках $x_{i,1}, x_{i,2}$, всё, как и должно быть.

Оценим, насколько интерполяционный многочлен “похож ” на функцию Рунге.

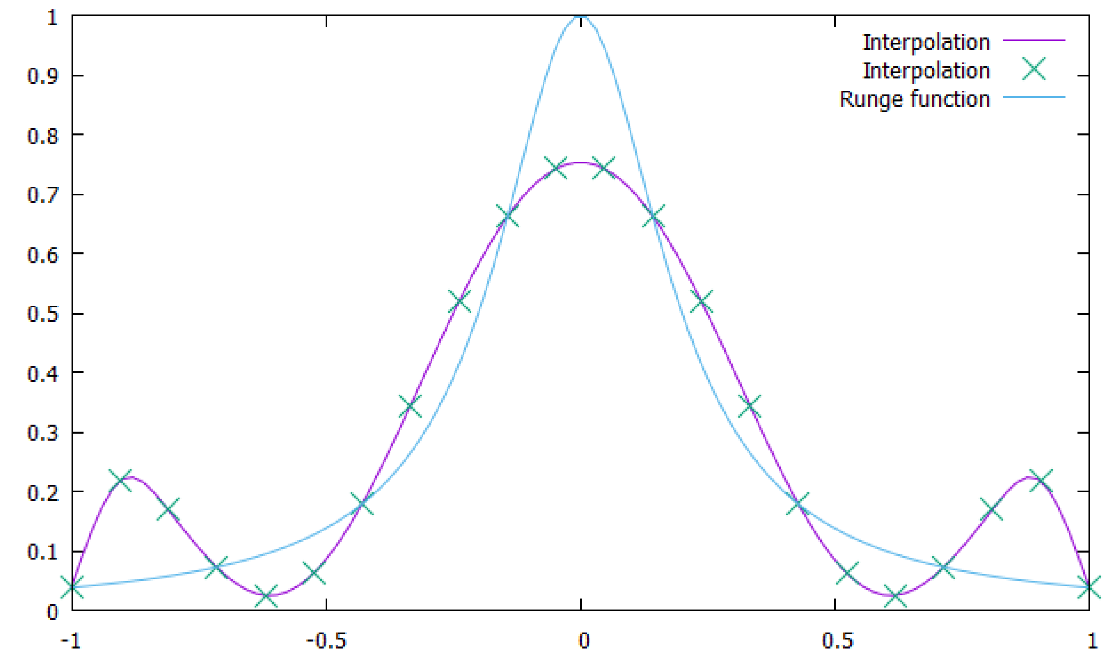
В добавленных промежуточных точках значения интерполяционного многочлена прилично отличаются от истинных значений. Причём, чем ближе к концам отрезка $[-1;1]$, тем сильнее скачки в промежуточных точках.

Чтоб стало понятно, о чём речь, взглянем на графики.

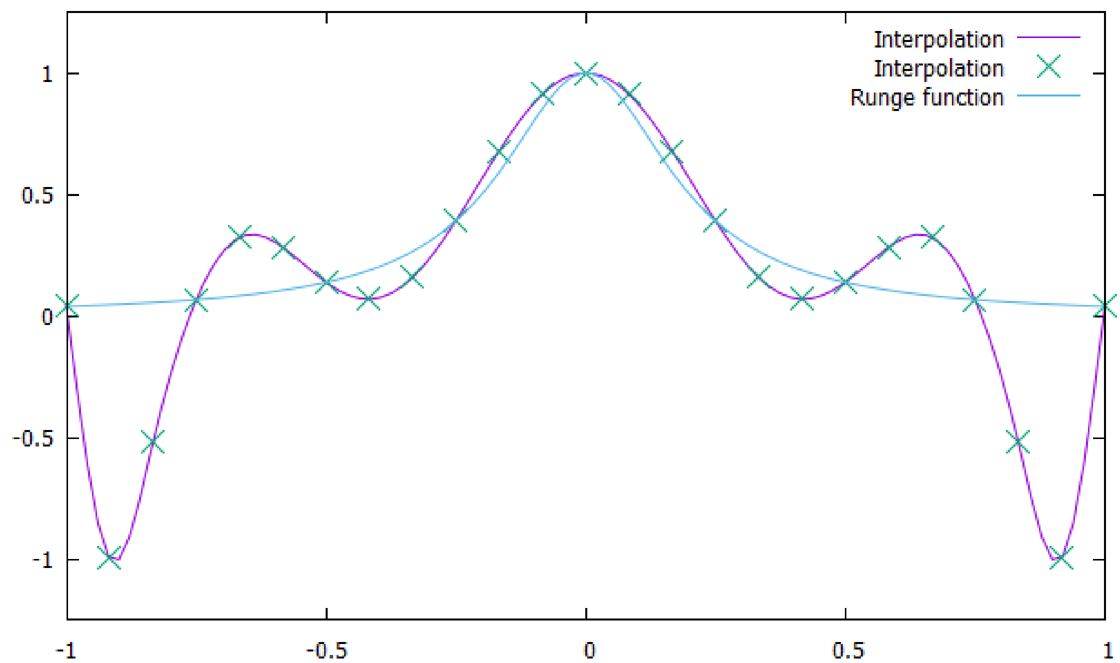


Проверим, что происходит при больших $n$ .

$n=8$




$n=9$




При чётных $n$ ситуация плохая: в малой окрестности нуля и окрестностях концов отрезка $[-1;1]$ скачки в промежуточных точках большие. Присутствие скачков в нуле понятно, ведь ноль не попал в узлы, и при увеличении $n$ они будут уменьшаться. Однако, как можно увидеть, увеличение количества равноотстающих узлов дало положительные результаты только рядом с нулем: там действительно интерполяционный многочлен более-менее “похож” на функцию Рунге (видно при нечетном $n$ ). А чем ближе к концам отрезка, тем скачки в промежуточных точках больше, причём, **с ростом $n$ растут и скачки**. Поэтому ***в качестве приближающей функции для функции Рунге интерполяционный многочлен, построенный по равноотстающим узлам, вряд ли стоит брать.***

## Узлы Чебышёва

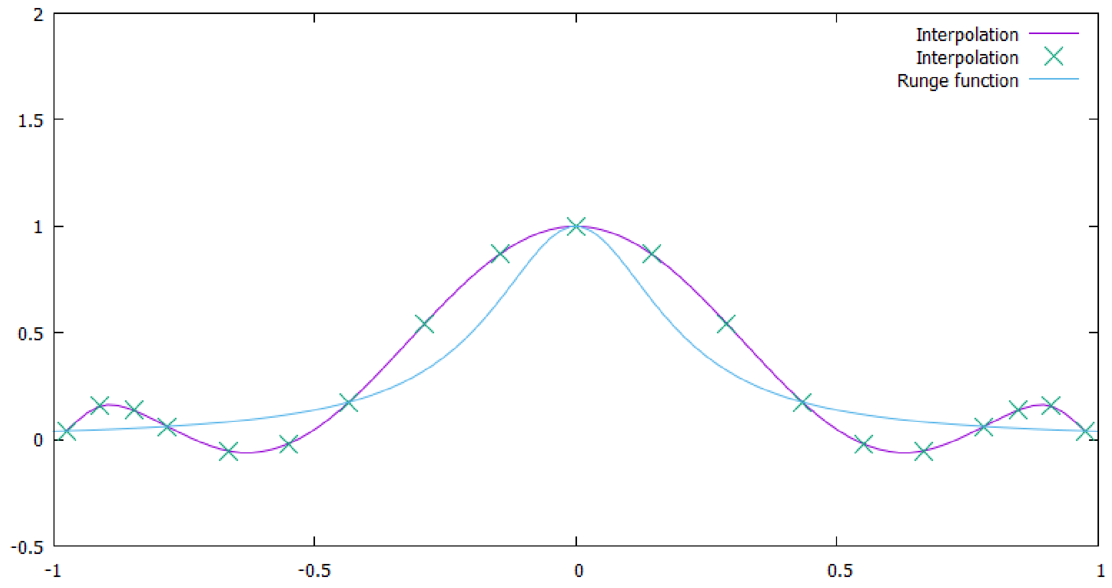
Построим интерполяционный многочлен для функции Рунге по узлам Чебышёва, то есть по узлам вида

$$x_i = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}, i = 1, \ldots, n.$$

$n = 7$

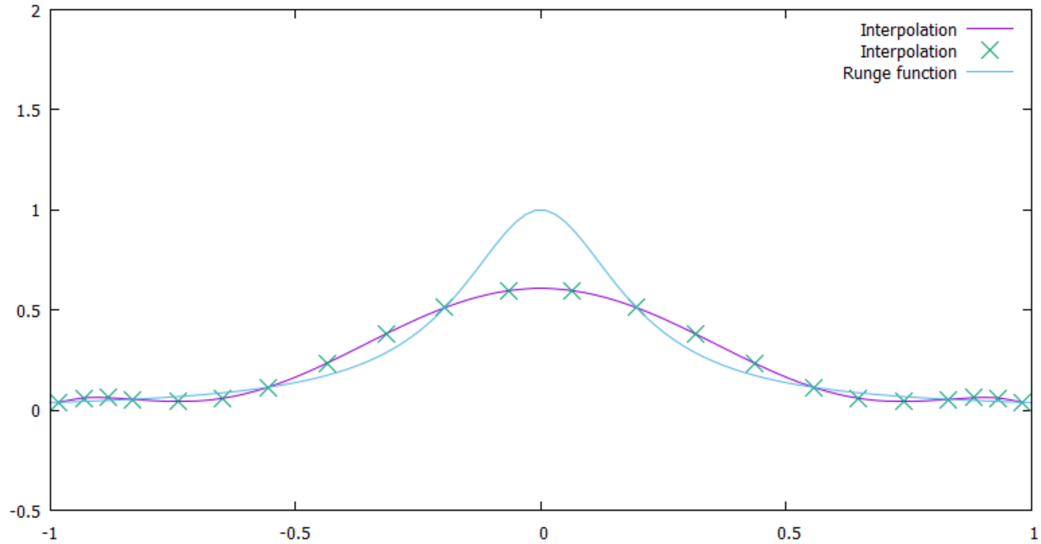
| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.974928 | 0.040384 | 0.040384 | 0.040384 | 0.000000 | 0.000000 | 1.443290e-015 |
| -0.910562 | 0.046023 | 0.155809 | 0.155809 | 0.109786 | 0.109786 | 8.049117e-016 |
| -0.846197 | 0.052907 | 0.136308 | 0.136308 | 0.083401 | 0.083401 | 8.326673e-016 |
| -0.781831 | 0.061419 | 0.061419 | 0.061419 | 0.000000 | 0.000000 | 9.228729e-016 |
| -0.665849 | 0.082755 | -0.052563 | -0.052563 | -0.135318 | -0.135318 | 5.898060e-016 |
| -0.549866 | 0.116838 | -0.020182 | -0.020182 | -0.137021 | -0.137021 | 3.712308e-016 |
| -0.433884 | 0.175243 | 0.175243 | 0.175243 | 0.000000 | 0.000000 | 1.110223e-016 |
| -0.289256 | 0.323444 | 0.543220 | 0.543220 | 0.219776 | 0.219776 | 0.000000e+000 |
| -0.144628 | 0.656629 | 0.870780 | 0.870780 | 0.214151 | 0.214151 | -4.440892e-016 |
| 0.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |
| 0.144628 | 0.656629 | 0.870780 | 0.870780 | 0.214151 | 0.214151 | -2.220446e-016 |
| 0.289256 | 0.323444 | 0.543220 | 0.543220 | 0.219776 | 0.219776 | -1.110223e-016 |
| 0.433884 | 0.175243 | 0.175243 | 0.175243 | 0.000000 | 0.000000 | 3.330669e-016 |
| 0.549866 | 0.116838 | -0.020182 | -0.020182 | -0.137021 | -0.137021 | 3.295975e-016 |
| 0.665849 | 0.082755 | -0.052563 | -0.052563 | -0.135318 | -0.135318 | 3.747003e-016 |
| 0.781831 | 0.061419 | 0.061419 | 0.061419 | 0.000000 | 0.000000 | 3.469447e-017 |
| 0.846197 | 0.052907 | 0.136308 | 0.136308 | 0.083401 | 0.083401 | -5.551115e-017 |
| 0.910562 | 0.046023 | 0.155809 | 0.155809 | 0.109786 | 0.109786 | 8.326673e-016 |
| 0.974928 | 0.040384 | 0.040384 | 0.040384 | -0.000000 | 0.000000 | -3.330669e-016 |

Итак, сравнивая полученные результаты с аналогичными при равноотстающих узлах, можно заметить, что в окрестности нуля скачки в промежуточных точках получились чуть-чуть больше. Однако, к концам отрезка $[-1;1]$ они только уменьшаются! При построении интерполяционного многочлена по равноотстающим узлам скачки в промежуточных точках только усиливались к концам отрезков. Этот эффект хорошо виден на картинке.



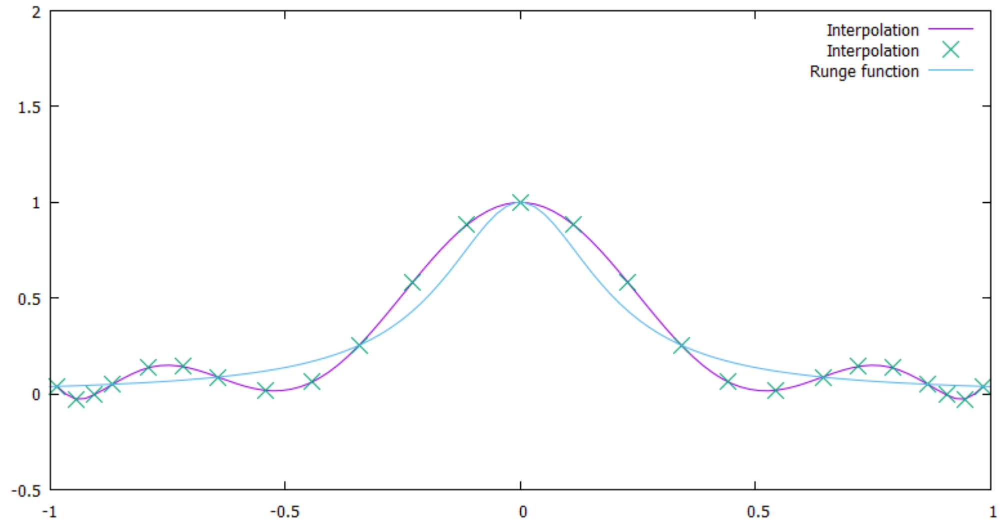

Посмотрим, что происходит с интерполяционным многочленом, построенным по узлам Чебышёва, при росте $n$ и сравним результаты с аналогичными при построении интерполяционного многочлена по равноотстающим узлам.

$n = 8$

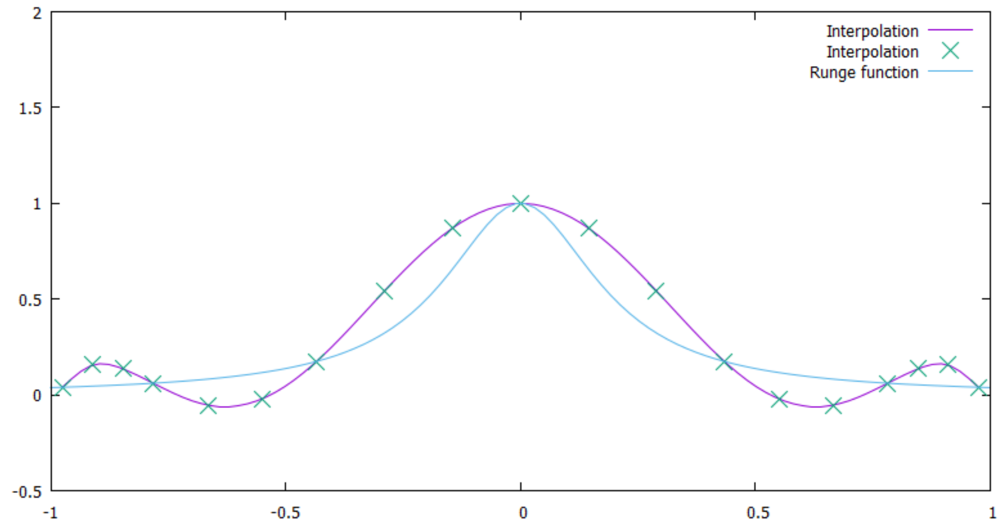



При чётном $n$ снова наблюдается проблема в нуле, однако ближе к концам отрезков разница $P(x) - f(x)$ уменьшилась.

$n = 9$

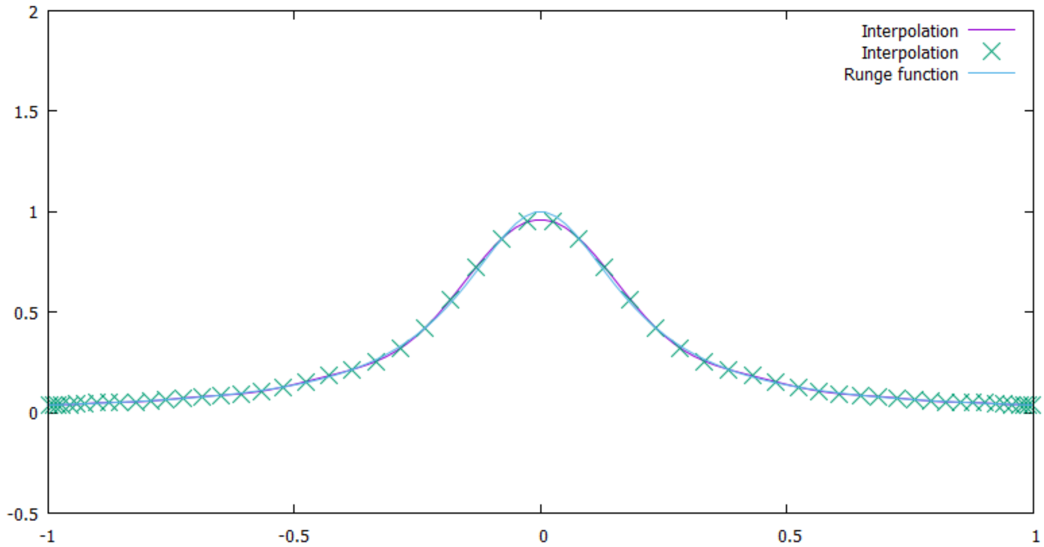



$n = 7$



Из двух изображений выше ( $n=7$ и $n=9$ ) видно, что при росте $n$ скачки в промежуточных точках уменьшаются по всему отрезку. Значит, **при больших $n$ интерполяционный многочлен, построенный по узлам Чебышёва, будет приближать функцию Рунге.**

$n=20$




Как видно из графиков, построенных при $n=20$, действительно, ***увеличение количества узлов Чебышёва даёт лучшее приближение функции Рунге с помощью интерполяционного многочлена. Причём, зазор в нуле, который был сильно заметен при маленьких чётных $n$ исчезает.***

## 3. Интерполяционные многочлены для функции модуля

### Равноотстающие узлы

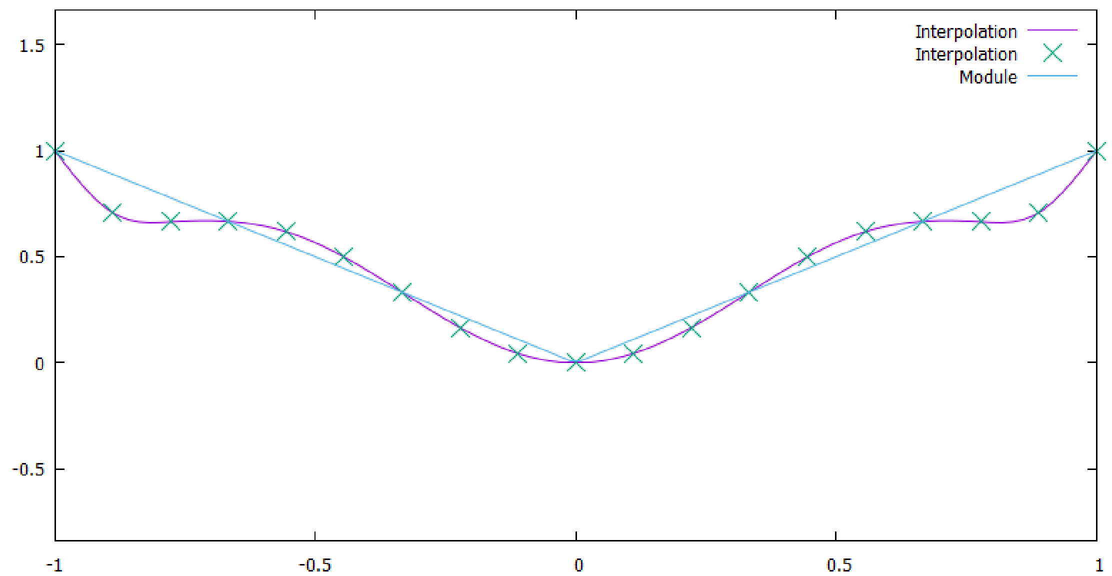
Снова строим интерполяционный многочлен в обеих формах для функции $f(x)=|x|$.

$n=7$

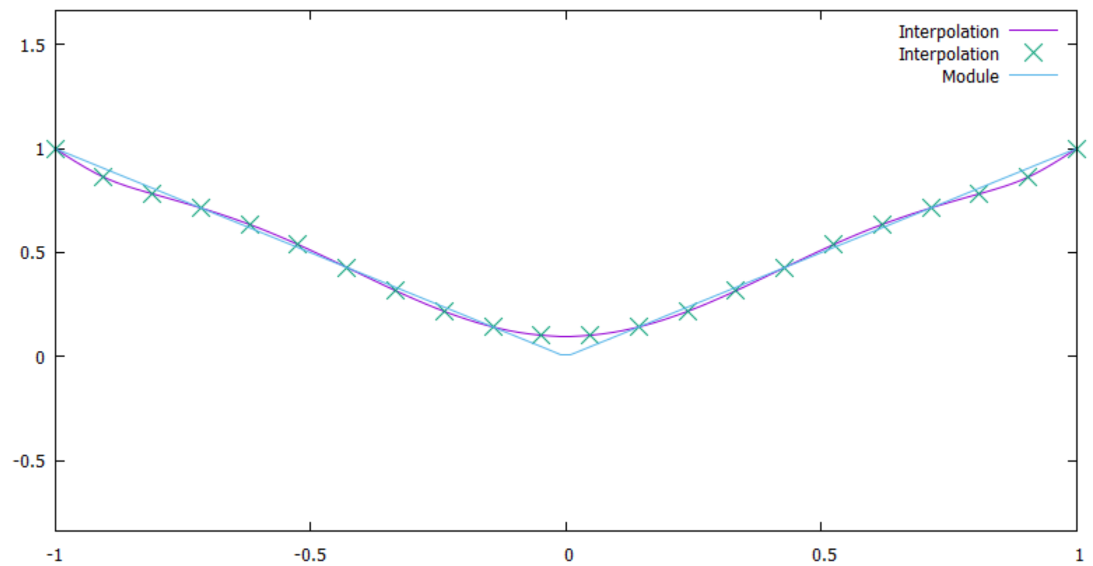
| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |
| -0.888889 | 0.888889 | 0.707209 | 0.707209 | -0.181680 | -0.181680 | 7.771561e-016 |
| -0.777778 | 0.777778 | 0.664685 | 0.664685 | -0.113093 | -0.113093 | 5.551115e-016 |
| -0.666667 | 0.666667 | 0.666667 | 0.666667 | -0.000000 | 0.000000 | -1.110223e-016 |
| -0.555556 | 0.555556 | 0.618046 | 0.618046 | 0.062490 | 0.062490 | -3.330669e-016 |
| -0.444444 | 0.444444 | 0.498704 | 0.498704 | 0.054260 | 0.054260 | -5.551115e-016 |
| -0.333333 | 0.333333 | 0.333333 | 0.333333 | -0.000000 | 0.000000 | -4.996004e-016 |
| -0.222222 | 0.222222 | 0.166743 | 0.166743 | -0.055479 | -0.055479 | -3.053113e-016 |
| -0.111111 | 0.111111 | 0.044658 | 0.044658 | -0.066453 | -0.066453 | -9.020562e-017 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000e+000 |
| 0.111111 | 0.111111 | 0.044658 | 0.044658 | -0.066453 | -0.066453 | -8.326673e-017 |
| 0.222222 | 0.222222 | 0.166743 | 0.166743 | -0.055479 | -0.055479 | -2.498002e-016 |
| 0.333333 | 0.333333 | 0.333333 | 0.333333 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |
| 0.444444 | 0.444444 | 0.498704 | 0.498704 | 0.054260 | 0.054260 | -4.996004e-016 |
| 0.555556 | 0.555556 | 0.618046 | 0.618046 | 0.062490 | 0.062490 | -5.551115e-016 |
| 0.666667 | 0.666667 | 0.666667 | 0.666667 | 0.000000 | 0.000000 | 1.110223e-016 |
| 0.777778 | 0.777778 | 0.664685 | 0.664685 | -0.113093 | -0.113093 | 5.551115e-016 |
| 0.888889 | 0.888889 | 0.707209 | 0.707209 | -0.181680 | -0.181680 | 9.992007e-016 |
| 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |

Интерполяция прошла успешно, но в концах заметные скачки. В концах скачки больше, чем около нуля. Посмотрим на изменение ситуации с ростом $n$ .

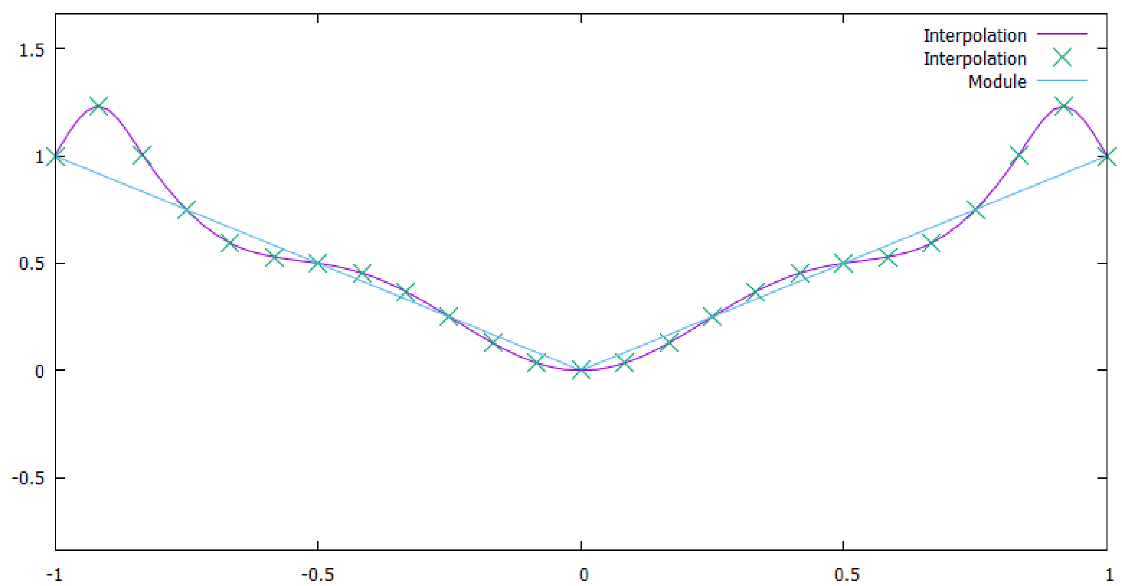
$n = 7$


Interpolation
Interpolation
Module
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1

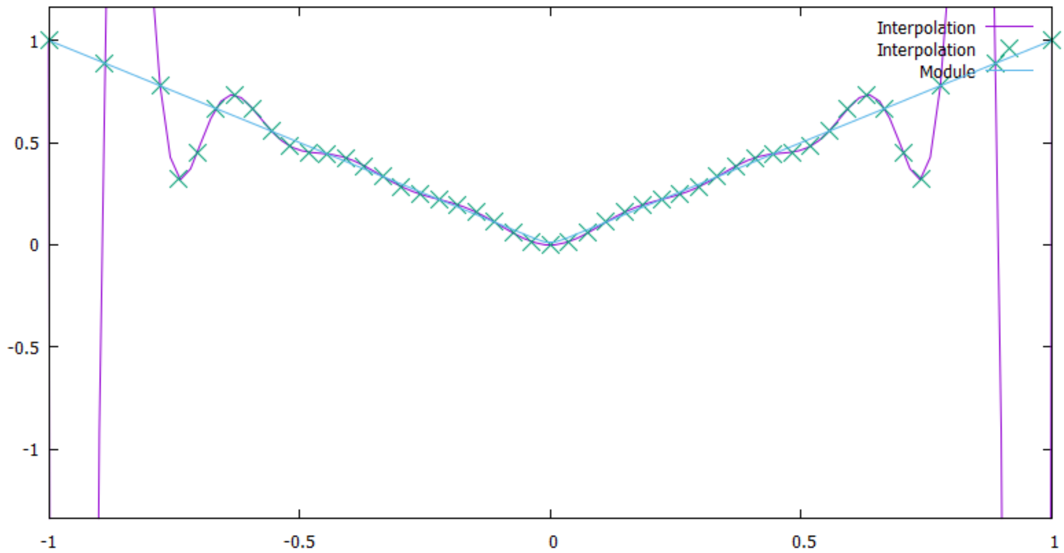
$n = 8$


Interpolation
Interpolation
Module
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1

$n = 9$


Interpolation
Interpolation
Module
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1

$n=19$

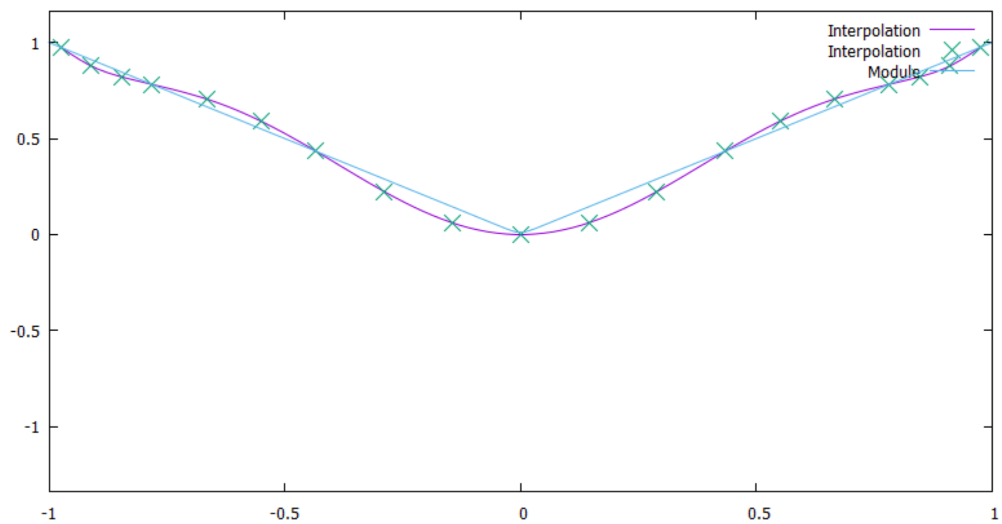



Тенденция следующая: ближе к концам отрезка $[-1:1]$ скачки в промежуточных точках становятся огромными, по сравнению с этим, уменьшение скачков в окрестности нуля ничтожно мало. Также, всплески с концов постепенно начинают распространяться и ближе к нулю.

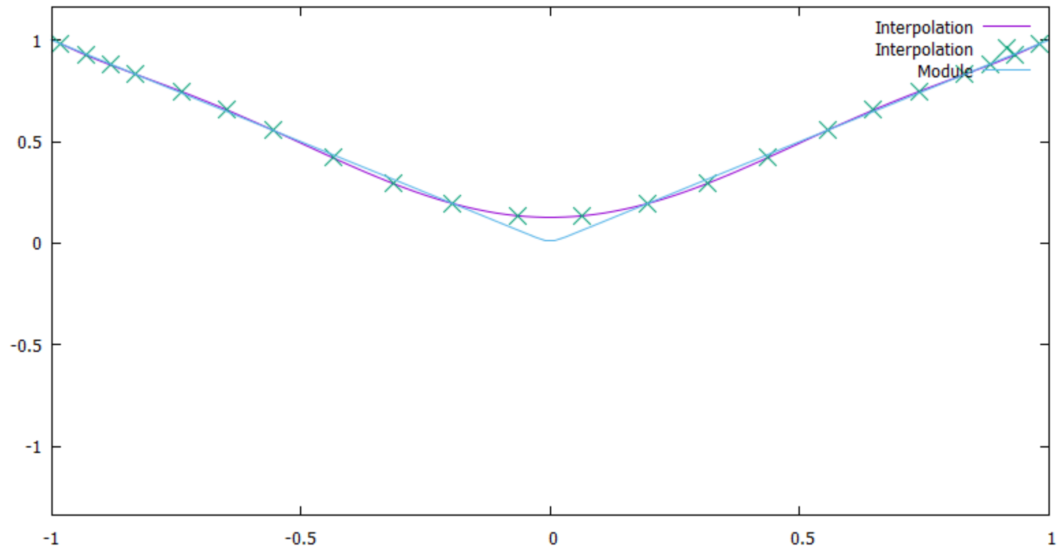
## Узлы Чебышёва

$n=7$

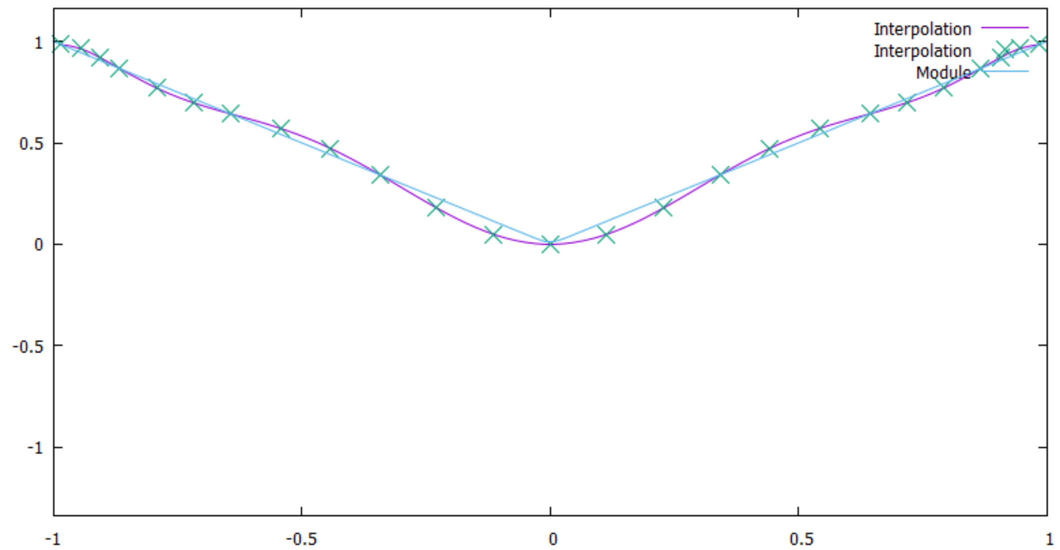
| x | f(x) | L(x) | P(x) | P(x)-f(x) | L(x)-f(x) | P(x)-L(x) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -0.974928 | 0.974928 | 0.974928 | 0.974928 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |
| -0.910562 | 0.910562 | 0.877330 | 0.877330 | -0.033232 | -0.033232 | -2.220446e-016 |
| -0.846197 | 0.846197 | 0.821101 | 0.821101 | -0.025096 | -0.025096 | 4.440892e-016 |
| -0.781831 | 0.781831 | 0.781831 | 0.781831 | -0.000000 | 0.000000 | -1.110223e-016 |
| -0.665849 | 0.665849 | 0.705775 | 0.705775 | 0.039926 | 0.039926 | 1.110223e-016 |
| -0.549866 | 0.549866 | 0.589741 | 0.589741 | 0.039874 | 0.039874 | -3.330669e-016 |
| -0.433884 | 0.433884 | 0.433884 | 0.433884 | -0.000000 | 0.000000 | -1.665335e-016 |
| -0.289256 | 0.289256 | 0.224220 | 0.224220 | -0.065036 | -0.065036 | 1.665335e-016 |
| -0.144628 | 0.144628 | 0.061246 | 0.061246 | -0.083382 | -0.083382 | 1.387779e-016 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 1.745965e-016 |
| 0.144628 | 0.144628 | 0.061246 | 0.061246 | -0.083382 | -0.083382 | 1.040834e-016 |
| 0.289256 | 0.289256 | 0.224220 | 0.224220 | -0.065036 | -0.065036 | -1.665335e-016 |
| 0.433884 | 0.433884 | 0.433884 | 0.433884 | -0.000000 | 0.000000 | -1.665335e-016 |
| 0.549866 | 0.549866 | 0.589741 | 0.589741 | 0.039874 | 0.039874 | -2.220446e-016 |
| 0.665849 | 0.665849 | 0.705775 | 0.705775 | 0.039926 | 0.039926 | -4.440892e-016 |
| 0.781831 | 0.781831 | 0.781831 | 0.781831 | -0.000000 | 0.000000 | -1.110223e-016 |
| 0.846197 | 0.846197 | 0.821101 | 0.821101 | -0.025096 | -0.025096 | -2.220446e-016 |
| 0.910562 | 0.910562 | 0.877330 | 0.877330 | -0.033232 | -0.033232 | -3.330669e-016 |
| 0.974928 | 0.974928 | 0.974928 | 0.974928 | -0.000000 | 0.000000 | -4.440892e-016 |



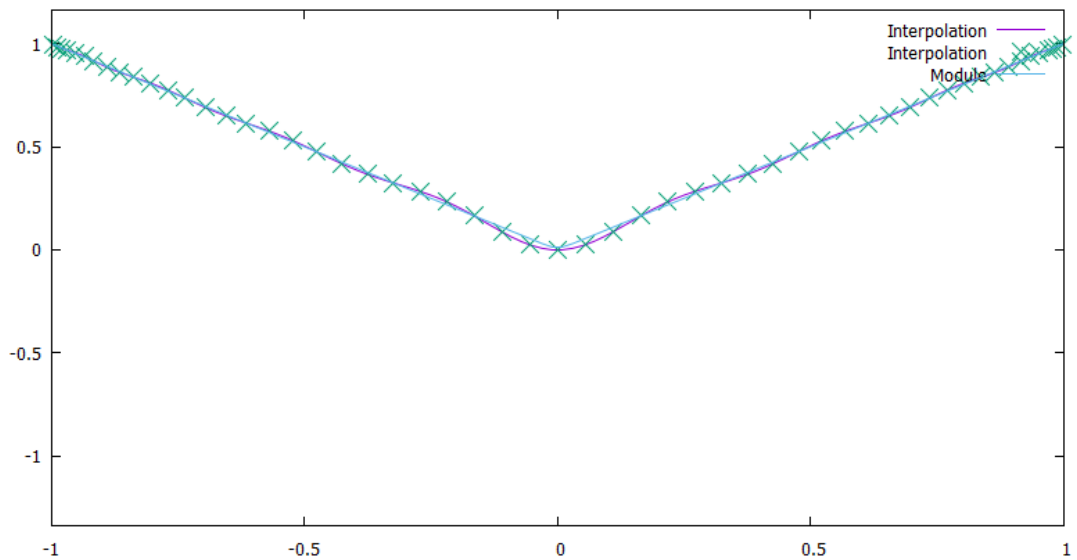
$n = 8$




$n = 9$




$n = 19$




Итак, с увеличением $n$ приближение вне маленькой окрестности нуля действительно становится лучше. Однако изгиб около нуля избежать не получается.