CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Integral Indefinida

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Integração

Sabemos que:

(i) $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}$ se $F'(x) = f(x)$

Neste caso F é denominada uma primitiva de f, além disso $G(x) = F(x)+C$, onde C é uma constante real é também primitiva de f.

Ex.: Determine as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int x^5\,dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + C = \dfrac{x^6}{6} + C$

De fato, pois $\left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = \dfrac{6x^5}{6} = x^5$

Integração

b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

De fato, pois $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$

c) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{2/5}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c$

$= \frac{5}{7} \cdot x^{7/5} + C$

De fato, pois $\left(\frac{5}{7} \cdot x^{7/5}\right)' = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} x^{\frac{2}{5}} = x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$

Integração

d) $\int 7\,\mathrm{sen}\,x\,dx = 7\int \mathrm{sen}\,x\,dx = 7.(-\cos x) + C$

$= -7\cos x + C$

De fato, pois $(-7\cos x)' = -7(-\mathrm{sen}\,x) = 7\cos x.$

e) $\int \frac{x^4 + 3x^{\frac{1}{2}} + 7}{x^2}\,dx = \int\left[\frac{x^4}{x^2} + \frac{3x^{1/2}}{x^2} + \frac{7}{x^2}\right]dx$

$= \int\left[x^2 + 3x^{-\frac{3}{2}} + 7x^{-2}\right]dx$

$= \int x^2\,dx + 3\int x^{-3/2}\,dx + 7\int x^{-2}\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + 3\,\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + 7\,\frac{x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{7}{x} + C$

Integração

Nota: Temos do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que se F é uma primitiva de f então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Ex: Calcule as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^{\pi/2} 3\cos t\,dt = 3\,\text{sen}\,t\Big|_0^{\pi/2} = 3\left[\text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,0\right]$

$= 3\,[1 - 0] = 3$

Integração

b) $\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-1}^{3}$

$= \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3(3)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1)\right)$

$= (9 - 9 - 9) - \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right)$

$= -9 + \frac{1}{3} - 2 = -11 + \frac{1}{3} = -\frac{32}{3}$

c) $\int_{-2}^{3}|2t|\,dt = \int_{-2}^{0}|2t|\,dt + \int_{0}^{3}|2t|\,dt$

$= \int_{-2}^{0}(-2t)\,dt + \int_{0}^{3}2t\,dt = -\frac{2t^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{2t^2}{2}\Big|_{0}^{3}$

$= -t^2\Big|_{-2}^{0} + t^2\Big|_{0}^{3} = -[0^2-(-2)^2] + [3^2-0^2] = 4+9 = 13$

Métodos de Integração

Integral por Substituição ou Mudança de Variável de integração

Por causa do Teorema Fundamental, é importante sermos capazes de encontrar primitivas. Porém, nossas fórmulas de primitivação não mostram como calcular as integrais do tipo

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Para encontrarmos essa integral usamos a estratégia de resolução de problemas de *introduzir alguma coisa extra*. Aqui o "alguma coisa extra" é uma nova variável; mudamos da variável x para uma nova variável u.

Integração por Substituição

Suponha que façamos u igual a quantidade sob o sinal de raiz em $\boxed{1}$, $u = 1 + x^2$. Então a diferencial de u é $du = 2xdx$.

Observe que se dx na notação de integral for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $2x\,dx$ ocorrerá em $\boxed{1}$; portanto, formalmente, sem justificar nossos cálculos, podemos escrever

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int \sqrt{1 + x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Integração por Substituição

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a Regra da Cadeia para derivar a função final da Equação 2:

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C\right]=\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x=2x\sqrt{x^2+1}$$

Em geral, esse método funciona sempre que temos uma integral que possa ser escrita na forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$.

Integração por Substituição

Observe que se $F' = f$, então

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C,$$

pois, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

Se fizermos a "mudança de variável" ou "substituição" $u = g(x)$, então, da Equação 3 temos

$$\int F'(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\, du$$

ou, escrevendo $F' = f$, obtemos

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = \int f(u)\, du.$$

Integração por Substituição

Assim, demonstramos a regra a seguir.

$\boxed{4}$ **Regra da Substituição** Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I, então

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Observe que a Regra da Substituição para a integração foi demonstrada usando a Regra da Cadeia para a derivação.

Note também que se $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, portanto uma forma de se recordar a Regra da Substituição é imaginar dx e du em $\boxed{4}$ como diferenciais.

Assim, a Regra de Substituição diz que: **é permitido operar com *dx* e *du* após sinais de integração como se fossem diferenciais.**

Integração por Substituição

Exemplo 1:

Encontre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$.

SOLUÇÃO: Fazemos a substituição $u = x^4 + 2$ porque sua diferencial é $du = 4x^3\, dx$, que, à parte do fator constante 4, ocorre na integral. Assim, usando $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$ e a Regra da Substituição, temos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx &= \int \cos u \cdot du\, \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \int \cos u\, du \\ &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4} \operatorname{sen}(x^4 + 2) + C.\end{aligned}$$

Observe que no estágio final retornamos para a variável original x.

Integração por Substituição

Em Integrais Definidas

Existem dois métodos para se calcular uma integral *definida* por substituição. Um deles consiste em se calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Teorema Fundamental. Por exemplo,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

Outro método, geralmente preferível, consiste em alterar os limites de integração ao mudar a variável.

Integração por Substituição

$\boxed{6}$ **Regra da Substituição para as Integrais Definidas** Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na imagem de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Calcule $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando $\boxed{6}$.

SOLUÇÃO: Seja $u = 2x + 1$. Então $du = 2\,dx$ e $dx = \frac{1}{2}\,du$.

Para encontrarmos os novos limites de integração observamos que

quando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$

e

quando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$.

Integração por Substituição

Portanto, $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_1^9$$

$$= \frac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{26}{3}$$

Observe que quando usamos $\boxed{6}$ *não* retornamos à variável x após a integração. Simplesmente calculamos a expressão em u entre os valores apropriados de u.

Integração por Substituição

Exemplo: $Calcule\ \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} tsen(t^2)dt$

Integração por Partes

Cada regra de derivação tem outra correspondente de integração. Por exemplo, a Regra de Substituição para a integração corresponde à Regra da Cadeia para a derivação. Aquela que corresponde à Regra do Produto para a derivação é chamada *integração por partes*.

A Regra do Produto afirma que se f e g forem funções deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Integração por Partes

Na notação para integrais indefinidas, essa equação se torna

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x)$$

ou $$\int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx = f(x)g(x)$$

Podemos rearranjar essa equação como

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx}$$

A fórmula 1 é chamada **fórmula para integração por partes**.

Integração por Partes

Talvez seja mais fácil lembrar na seguinte notação. Seja $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então as diferenciais são $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e, assim, pela Regra da Substituição, a fórmula para a integração por partes torna-se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \tag{2}$$

Integração por Partes

Exemplo:

Encontre $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 1: Suponha que escolhamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Então $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$.(Para g podemos escolher qualquer antiderivada de g'.) Assim, utilizando a Fórmula 1, temos

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x \, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.
\end{aligned}$$

Integração por Partes

Exemplo: Encontre $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUÇÃO USANDO A FÓRMULA 2: Sejam

$$u = x, \qquad dv = \operatorname{sen} x \, dx.$$

Então, $du = dx, \qquad v = -\cos x,$

de modo que

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\operatorname{sen} x \, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u} \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Integração por Partes

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, poderemos calcular integrais definidas por partes.Calculando ambos os lados da Fórmula 1 entre *a* e *b*, supondo que *f′* e *g′* contínuas, e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

6

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx$$

Integração por Partes

Exemplo: Calcule a integral definida $\int_{1}^{2} x \ln x \, dx$