Cálculo de Limites

Aqui vamos apresentar como se procede o cálculo de limites que envolvem expressões indeterminadas.

As expressões:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty}$$

são denominadas expressões indeterminadas.

→ Considere a seguinte situação. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Neste caso, a priori, nada podemos afirmar sobre o limite:

$$(*) \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

esse limite nos remete a uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$.

Dependendo das funções f e g envolvidas, o limite $(*)$ pode assumir qualquer nº real ou mesmo nem existir.

Para determinar limites de funções envolvendo indeterminações usamos alguns artifícios algébricos.

<u>Exemplo</u>: Determine os seguintes limites envolvendo indeterminações

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$, se aplicarmos o limite no numerador e no denominador, obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$, portanto para sairmos dessa indeterminação, precisamos trabalhar algebricamente com a função envolvida.

Fatorando: $\begin{cases} x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2 \\ \quad e \\ x^2-x-6 = (x+2)(x-3) \end{cases}$

Assim $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(x+2)^2}{(x+2)(x-3)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(x+2)}{x-3}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to -2} x(x+2)}{\lim\limits_{x \to -2} (x-3)} = \dfrac{0}{-5} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, podemos observar que novamente temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Para "levantar" essa indeterminação, neste caso usamos a racionalização do numerador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

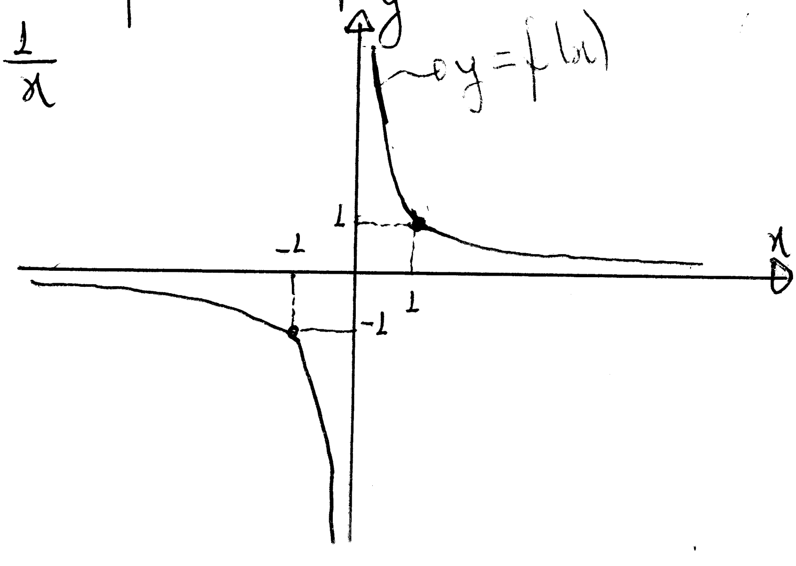
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

Limites no Infinito

Considere a seguinte função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

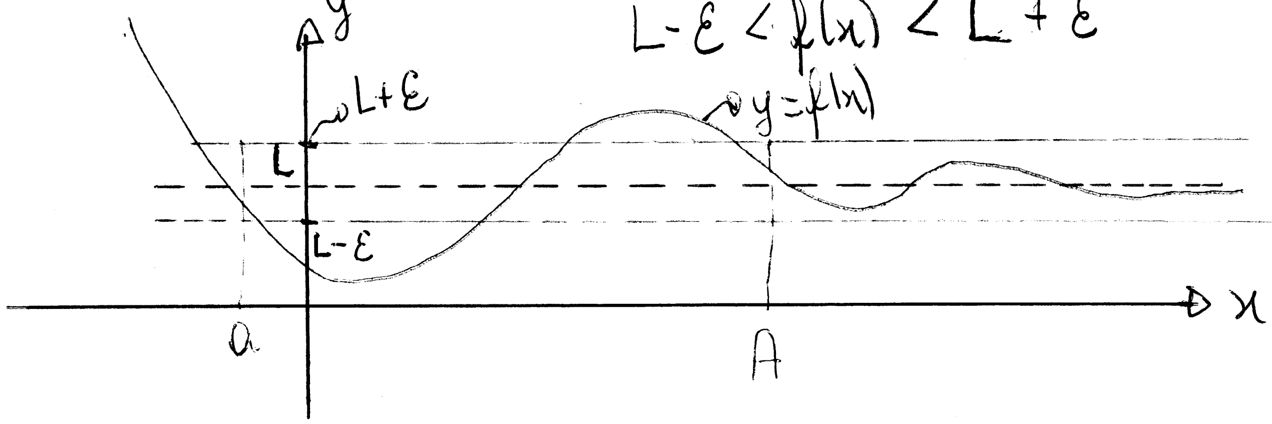
Definição: Seja $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função, dizemos que limite da função f, quando x tende ao infinito positivo, é igual a L, e indicamos por:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

se $\forall\, \varepsilon>0$ existe $A>a$ tal que se

$$x>A \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$



Nota: De forma análoga, podemos definir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

Teorema: Se $n\in\mathbb{N}$ então:

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemplo: Vamos considerar o caso particular da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

$\rightarrow f(1) = 1$; $f(10) = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$f(100) = \frac{1}{(100)^2} = 0{,}0001$

Isso nos induz que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f(-1) = 1$; $f(-10) = 0{,}01$ e $f(-100) = 0{,}0001$

Ao que indica, de fato $f(x) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to -\infty]{\text{quando}} 0$, isto é, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Exemplo: Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 5}{x + 7}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-5}{x+7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(1 + 7/x\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x}}$$

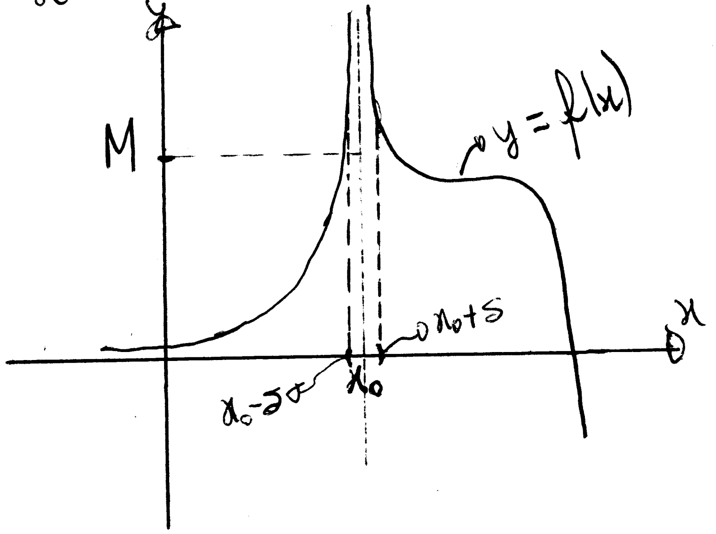
$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

Limites Infinitos

Definição: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, com $x_0 \in I$, e $f: I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função, então:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

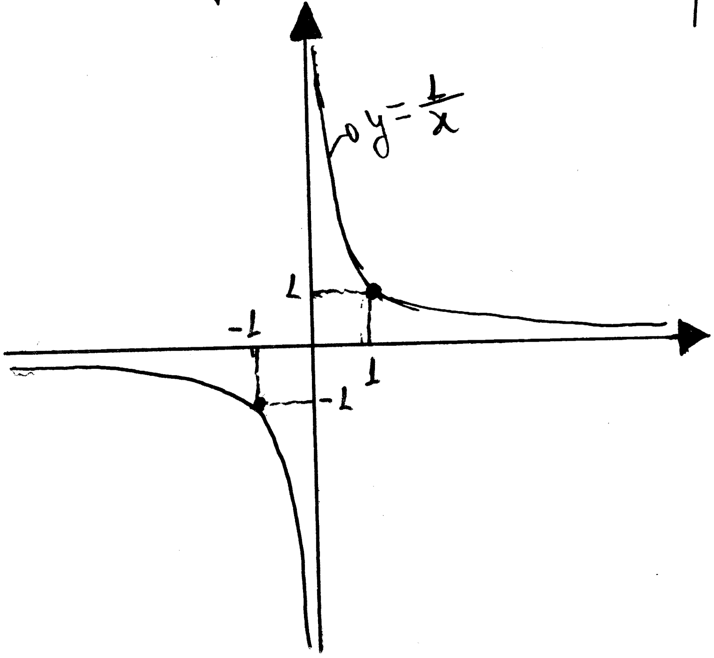
se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ com $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > M$



Analogamente definimos

$$\lim_{x \to x_0} = -\infty$$

Exemplo: Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$.



Neste caso:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Teorema: Se $n \in \mathbb{N}$, então:

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

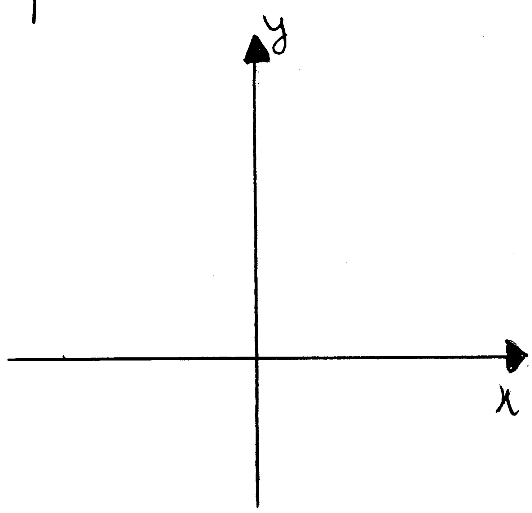
(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{, se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Exemplo: Considerando a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ neste caso:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Exemplo: Determinar o $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + \sqrt{x+1} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(x^2 + \sqrt{x+1} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} \sqrt{x+1} - \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0 + \sqrt{1} - \infty = -\infty$$

Ex: Determine $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3 + 4)$

Se fôssemos usar a propriedade da soma chegaríamos à $(+\infty - \infty + 4)$ o que claramente é uma indeterminação, logo precisamos trabalhar com a expressão algébrica.

Resolução:

$$(*) = \lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3 + 4) = \lim_{x \to +\infty} x^4\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^4}\right)$$

Agora escrevendo $f(x) = x^4$ e $g(x) = \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^4}\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$,

usando a propriedade do produto:

$\lim f(x) \cdot g(x) = +\infty$, isto é,

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3 + 4) = 0$$

<u>Exemplo:</u> Calcular os limites:

(i) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x^2 - 4} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^2 - 4} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}} = \lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{3 - y}{\sqrt{y^2\left(\frac{5}{y^2} + 4\right)}}$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{3 - y}{\sqrt{y^2}\sqrt{\frac{5}{y^2} + 4}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{3 - y}{|y|\sqrt{\frac{5}{y^2} + 4}}$$

Como $y \to -\infty$ podemos considerar $|y| = -y$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{3 - y}{-y\sqrt{\frac{5}{y^2} + 4}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{-y\left(-\frac{3}{y} + 1\right)}{-y\sqrt{\frac{5}{y^2} + 4}} = \lim_{y \to -\infty} \frac{-\frac{3}{y} + 1}{\sqrt{\frac{5}{y^2} + 4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} = 1/2$$

Assíntotas

Definição: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, com $x_0 \in I$ e $f: I-\{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função, se uma das afirmações for verdadeira.

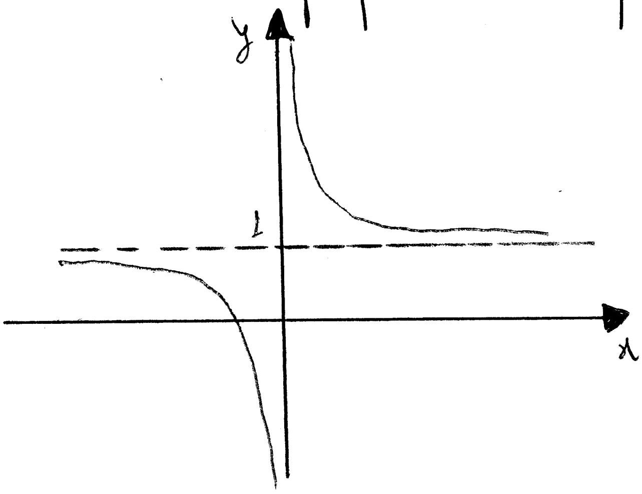
(i) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ (ii) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ (iv) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

então a reta $x = x_0$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $y = f(x)$.

Definição: Seja $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (ou $f: (-\infty, b) \to \mathbb{R}$) uma função tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$), então dizemos que a reta $y = L$ (ou $y = M$) é uma assíntota horizontal do gráfico da função f.

Exemplo: Analizar a existência de assíntotas ao gráfico da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$



$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ é assíntota vertical

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 1$ é assíntota horizontal

Limites Fundamentais

Temos três caracterizações denominados de limites fundamentais. Esses três casos envolvem indeterminações da forma $\frac{0}{0}$, 1^∞ e ∞^0

Proposição: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Não faremos a demonstração, mas vamos verificar numéricamente o que acontece com o quociente $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ a medida que x tende ao zero

x	0,5	0,2	0,1	0,01	0	-0,01	-0,1	-0,5
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0,9588	0,9933	0,9983	0,9998	?	0,9998	0,9983	0,9588

Exemplo: Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

Não conseguimos usar a proposição diretamente, então faremos uma mudança de variável:

Seja $4x = u \Rightarrow x = \frac{u}{4}$, além disso:

quando $x \to 0 \Rightarrow 4x \to 0$, isto é, $u \to 0$

Logo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u/4}$

$= \lim_{u\to 0} \frac{4}{u} \cdot \operatorname{sen} u = 4 \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 4 \cdot 1 = 4$

Proposição: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, onde e é o número irracional neperiano, seu valor aproximado é

$e \simeq 2{,}718281828 4\ldots$

x	10	100	1000	10000	...
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	...

x	-10	-100	-1000	-10000	...
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2,8679	2,7319	2,7196	2,7184	...

Exemplo 1: Determinar $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x}$

Fazendo $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ e quando $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Nota: De forma análoga $\lim_{x \to 0^-} (1+x)^{1/x} = e$,

isto é, $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Exemplo 2: Determinar $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

Seja $\frac{1}{y} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 5y$, quando $x \to +\infty$

$\Rightarrow y \to +\infty$

Logo $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^x = \lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{5y}$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^5 = \left[\lim_{y \to +\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^5 = e^5 //$$

Proposição: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Vamos fazer uma tabela para o caso particular em que $a = 2$, neste caso $\ln 2 \simeq 0{,}693147$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2}$$

x	0,5	0,2	0,1	0,01	0	-0,001	-0,01	-0,1
$\frac{2^x - 1}{x}$	0,8284	0,7434	0,7177	0,6955	?	0,6929	0,6907	0,6696

Ex: Determinar os limites a seguir:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{9^x - 81}{x - 2}$, podemos observar que é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{9^x - 81}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{9^x - 9^2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{9^2\left(\frac{9^x}{9^2} - 1\right)}{x - 2}$$

$$= 9^2 \cdot \lim_{x \to 2} \frac{9^{x-2} - 1}{x - 2}$$

Tomando $y = x - 2$, quando $x \to 2 \Rightarrow y \to 0$

Logo $\lim_{x \to 2} \frac{9^x - 81}{x - 2} = 9^2 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{9^y - 1}{y} = 9^2 \cdot \ln 9$

$= \underline{81 \cdot \ln 9}$

Continuidade

Definição: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que f é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

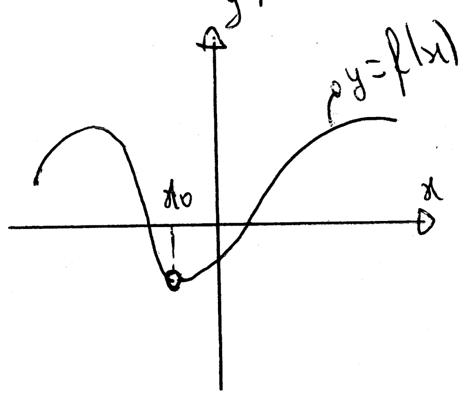
(i) $x_0 \in I$, $(x_0 \in D(f))$;

(ii) existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

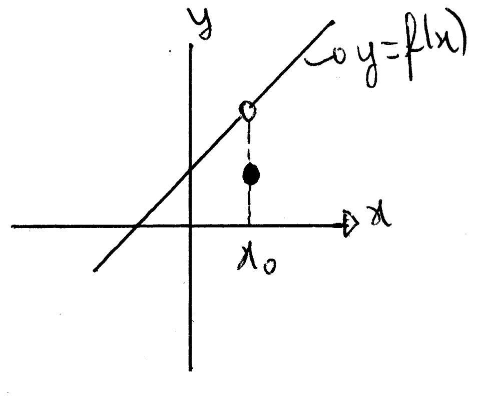
(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Vamos ilustrar algumas situações de funções que não são contínuas em x_0.

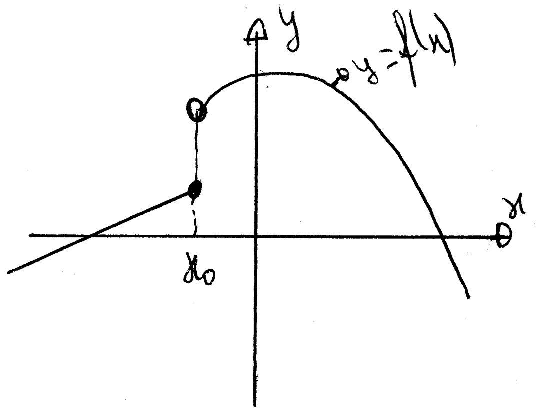
(i)



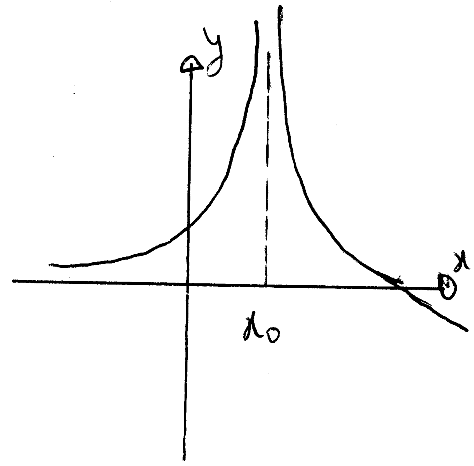
(ii)



(iii)



(iv)



Exemplo: Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq -1 \\ 1-|x| & , x < -1 \end{cases}$

em $x = -1$.

→ A função f está definida em $x = -1$, isto é,
$(-1) \in D(f)$ e $f(-1) = (-1)^2 = 1$.

→ Verificação da existência do limite de f
em $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (1-|x|) = 1-|-1| = 1-1 = 0$$

Como $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ então $\nexists \lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Logo f não é contínua em $x = -1$.

Ex: Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & , x \neq -2 \\ -4 & , x = -2 \end{cases}$
é contínua em $x = -2$.

→ $(-2) \in D(f)$ e $f(-2) = -4$

→ $$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x-2) = -2-2 = -4$$

Além disso $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4 = f(-2)$

logo f é contínua em $x = -2$

Propriedades das Funções Contínuas

Proposição: Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então:

(i) $f \pm g$ é contínua em a;

(ii) $f \cdot g$ é contínua em a;

(iii) $\frac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

Proposição:

(i) Uma função polinomial é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio

(iii) As funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo: Determine o conjunto onde a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é contínua.

Como f é uma função racional, basta verificarmos o domínio da função f.

$\to$ Para $x \in D(f)$ precisamos $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Logo f é contínua no conjunto $A = \mathbb{R} - \{3\}$.

Exemplo: Determine o valor de p de modo que a função $f(x)=\begin{cases} x^2+px+2, & x\neq 3 \\ 3, & x=3 \end{cases}$ seja uma função contínua em $\mathbb{R}$.

→ Podemos que a sentença x^2+px+2, representa uma função polinomial, portanto ela é contínua, no entanto, a função $f(x)$ é definida por essa sentença em $\mathbb{R}-\{3\}$ então para que f seja contínua em $\mathbb{R}$, basta ainda verificarmos sua continuidade em $x=3$

→ $f(3)=3$

→ $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(x^2+px+2)$

$= 3^2+p\cdot 3+2 = 3p+11$

Para f ser contínua em 3, precisamos que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$\Rightarrow 3p+11=3 \Rightarrow 3p=-8 \Rightarrow \boxed{p=-\frac{8}{3}}$

Desta forma f é contínua em $\mathbb{R}$ se $\boxed{p=-\frac{8}{3}}$

Definição: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função

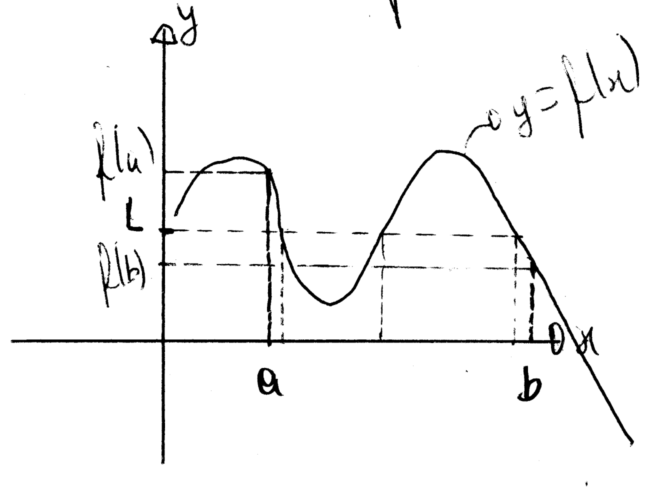
(i) Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, então diremos que f é contínua à direita no ponto a;

(ii) Se $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, diremos que a função f é contínua à esquerda no ponto b;

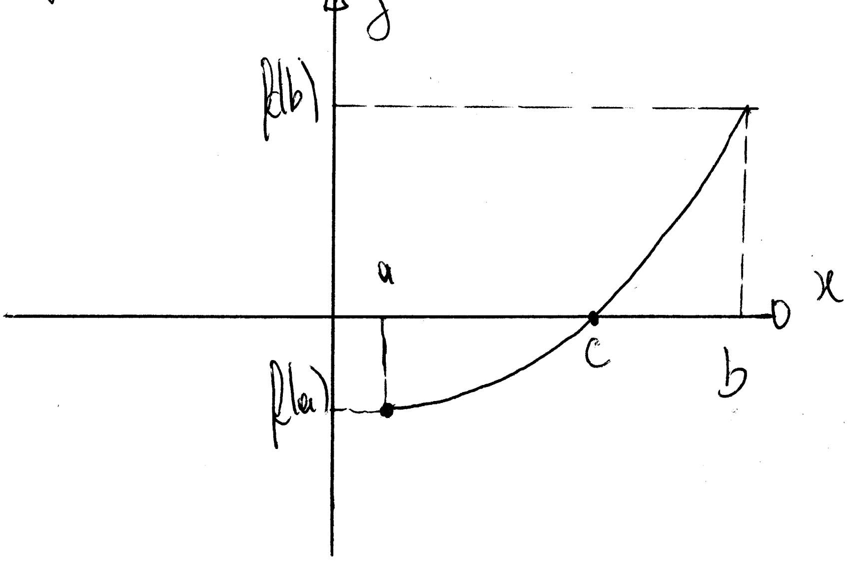
(iii) Se f for contínua em todo intervalo aberto (a,b), f for contínua à direita no ponto a e f for contínua à esquerda no ponto b, então diremos que f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.

Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, e L é um número real tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$, então existe pelo menos um $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = L$



Nota: Uma consequência do TVI é que se f for uma função contínua em $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais opostos, então existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$



Exemplo: Verifique se a equação $2x^2 = e^x + 1$ possui uma solução.

→ Vamos reescrever a equação $2x^2 = e^x + 1$.

$2x^2 = e^x + 1$ é equivalente à $e^x - 2x^2 + 1 = 0$

A função $f(x) = e^x - 2x^2 + 1$ é a função associada à equação $e^x - 2x^2 + 1 = 0$.

→ Assim precisamos verificar se a função f possui raiz.

$$f(-1) = e^{-1} - 2(-1)^2 + 1 = \frac{1}{e} - 1 \simeq -0{,}632 < 0$$
$$f(0) = e^0 - 2(0)^2 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2 > 0$$

Como f é contínua em $[0,1]$ e $f(-1)<0$ e $f(0)>0$ Segue pelo TVI que existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c)=0$, logo $2x^2 = e^x + 1$ possui solução real.