CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Limites – Noção Intuitiva

Objetivo: Dada a função y=f(x), verificar qual o comportamento da função quando a variável independente x se aproxima de um valor específico a.

Nesta sessão vamos apresentar os conceitos que envolvem limites de uma função, bem como os métodos de calculá-los.

Limites - Noção Intuitiva

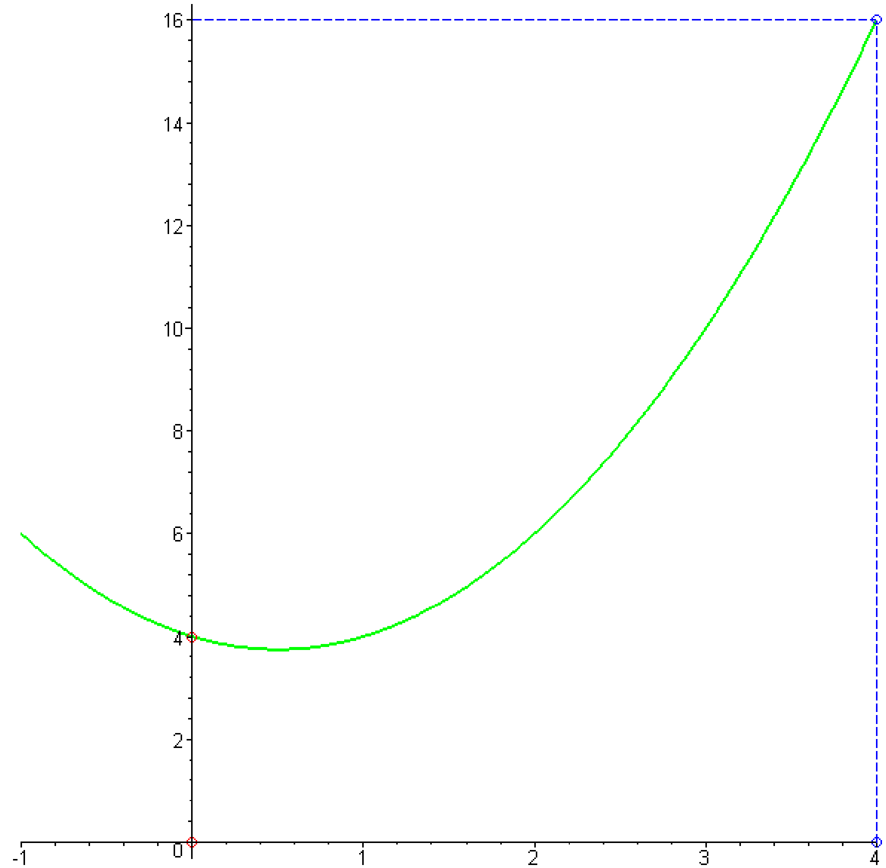
Exemplo 1:

Qual o comportamento da função $F(x)=x^2-x+4$ quando a variável x se aproxima do valor 2 ?

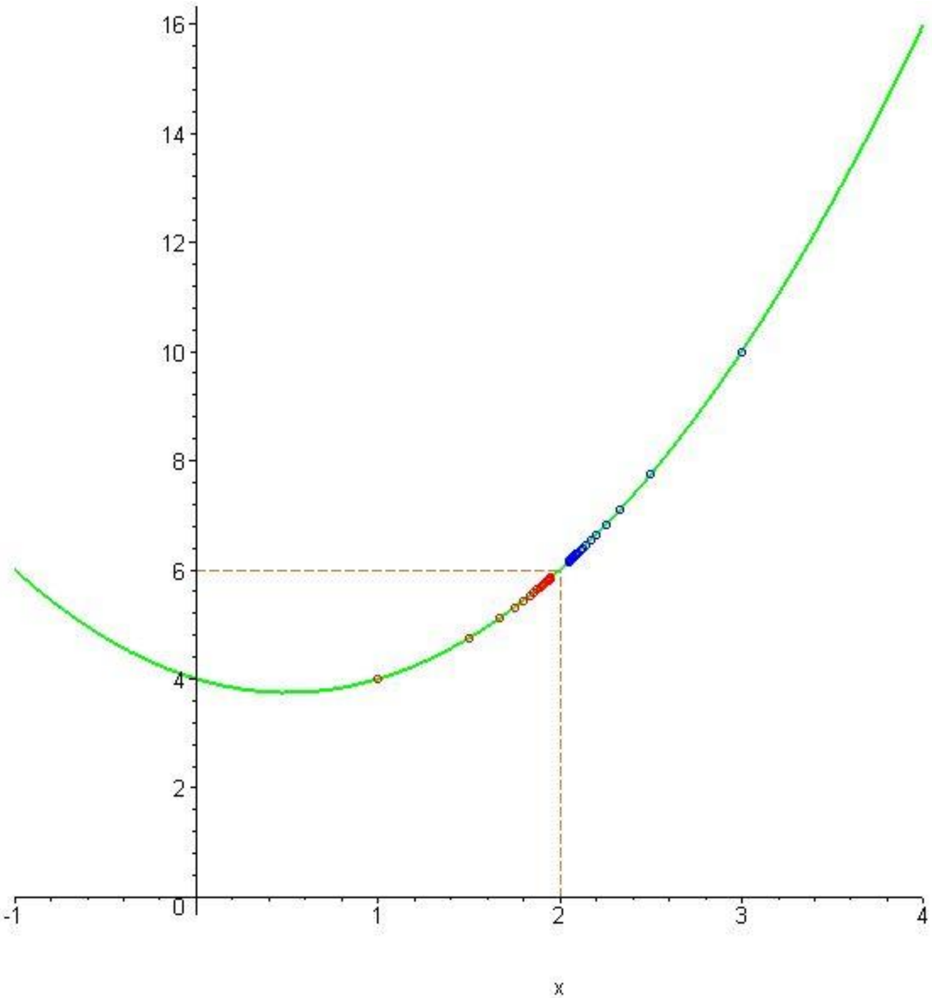
F(x)	5,71	5,9701	5,997001	6	6,003001	6,0301	6,31
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1

Limites - Noção Intuitiva

Graficamente, quando x se aproxima de 2 a imagem da função se aproxima de 6.



Limites – Noção Intuitiva



Indicamos por:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 4) = 6$$

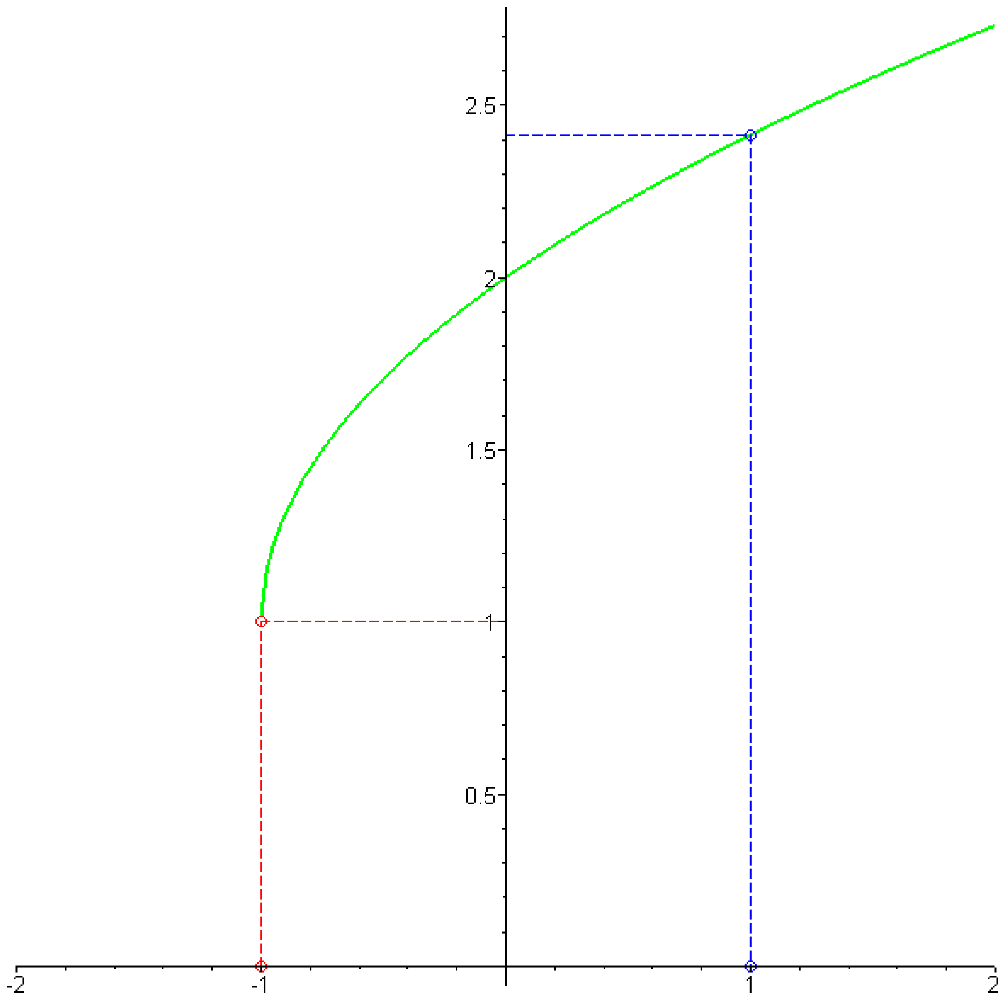
Limites – Noção Intuitiva

Exemplo 2: Qual o comportamento da função ***F(x)*** quando a variável ***x*** se aproxima do valor "**0**"?

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}}$$

F(x)	1,9486	1,99498	1,999499 →	?	← 2,0004998	2,004987	2,04880
X	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1

Limites – Noção Intuitiva



Indicamos por:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

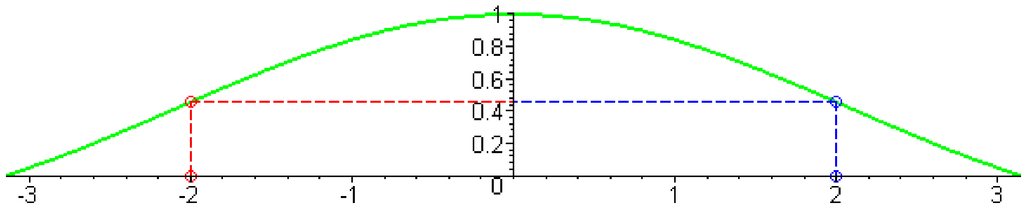
Limites – Noção Intuitiva

Exemplo 3: Qual o comportamento da função ***F(x)*** quando a variável ***x*** se aproxima do valor "**0**"?

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{sen(x)}{x}}$$

F(x)	0,99833	0,999983	0,99999983	?	0,99999983	0,999983	0,99833
X	-0,1	-0,01	0,001	0	0,001	0,01	0,1

Limites – Noção Intuitiva



Indicamos por:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

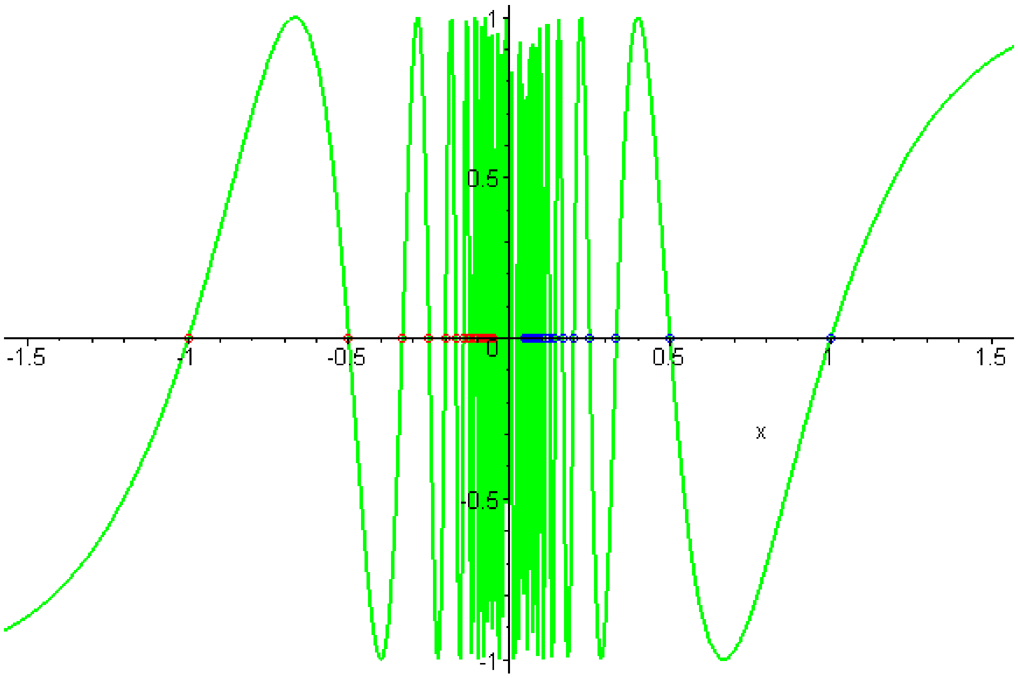
Limites – Noção Intuitiva

Exemplo 4: Qual o comportamento da função ***F(x)*** quando a variável ***x*** se aproxima do valor "**0**"?

$$\boldsymbol{F(x) = sen\,\frac{1}{x}}$$

F(x)	0	0	0	?	0	0	0
X	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1

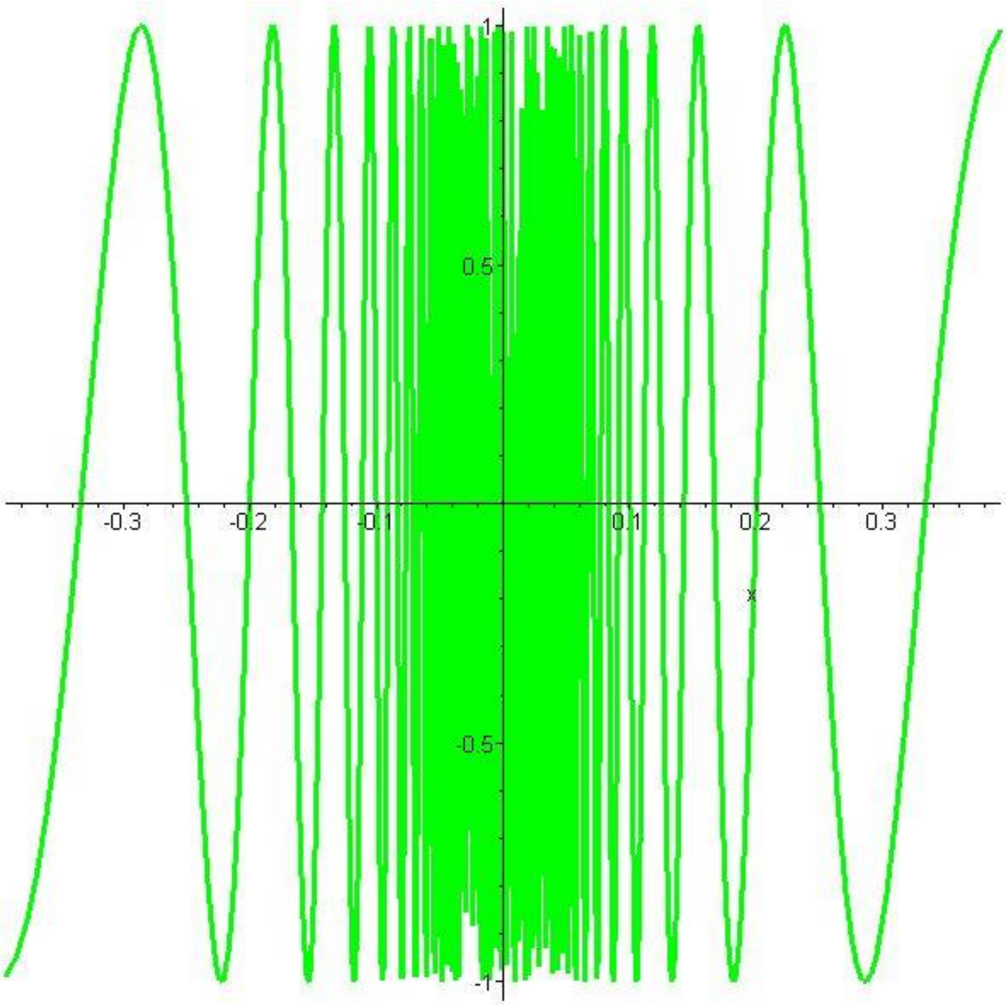
Limites – Noção Intuitiva



Neste caso:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0\ ?$$

Limites – Noção Intuitiva



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \text{não existe}$$

Limites – Definição (Formal)

$\boxed{1}$ **Definição** Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a.) Então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L"

se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

De uma maneira formal, temos:

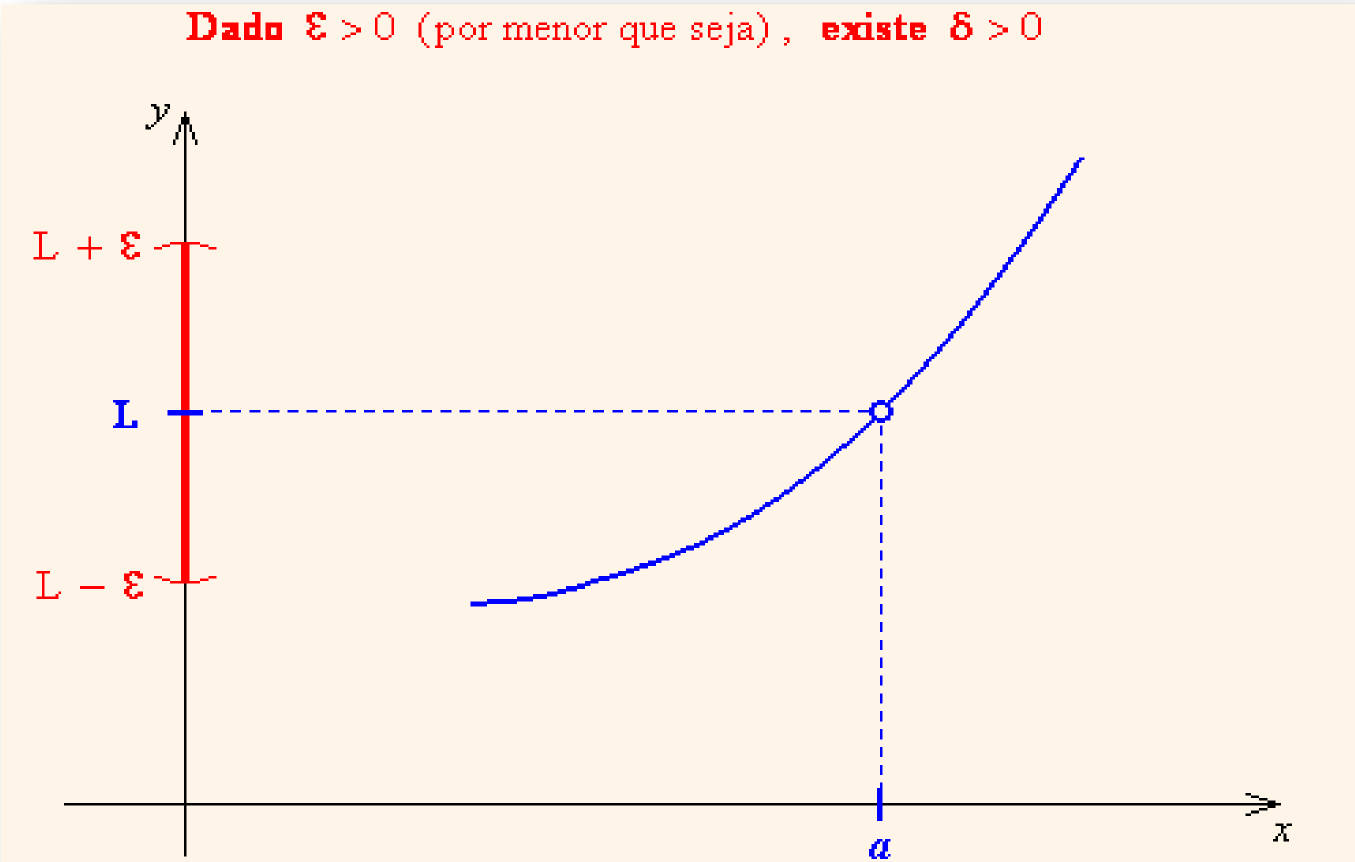
Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

Limites – Definição (Formal)

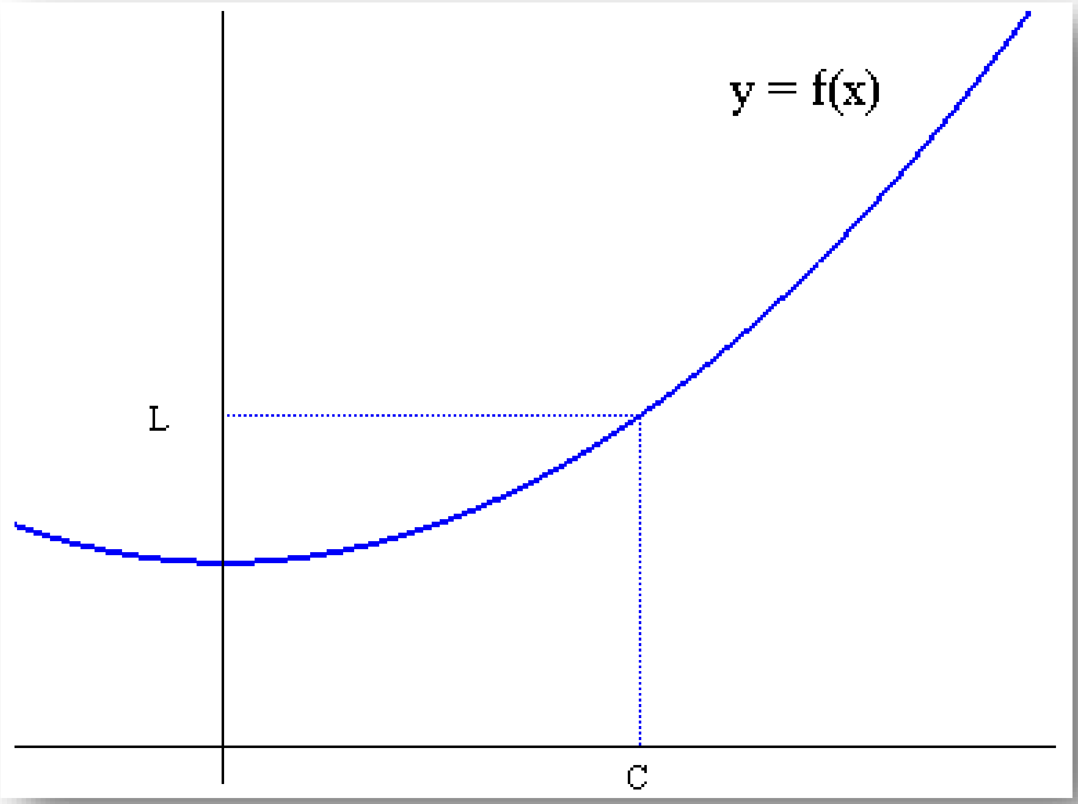
Ilustração gráfica da definição formal de limite



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limites – Definição (Formal)

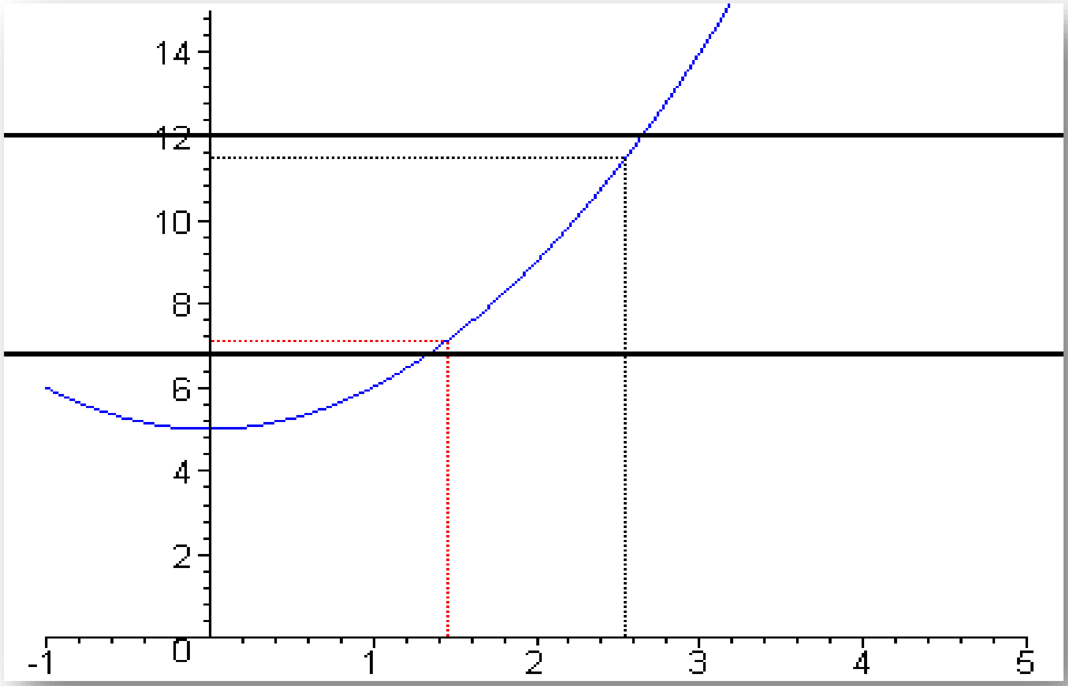
Interpretação do conceito de limite



$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Limites – Definição (Formal)

Interpretação do conceito de limite



$$Existe \lim_{x \to 2} f(x)$$

Limites - Propriedades

P1) O limite da função identidade f(x) = x, quando x tende a “a”, é igual a “a”.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Exemplo: $$\lim_{x \to 3} x = 3$$

Limites - Propriedades

P2) O limite de uma função constante f(x) = K, quando x tende a “a”, é igual a própria constante:

$$\lim_{x \to a} K = K$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} 4 = 4$$

Limites - Propriedades

P3) O limite da soma é igual a soma dos limites (caso esses limites existam):

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x+5)=\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 3x+\lim_{x\to 2} 5=$$

$$\lim_{x\to 2} x^2+3\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 5=2^2+3.2+5=15$$

Limites - Propriedades

P4) O limite da diferença é igual a diferença dos limites (caso esses limites existam):

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2}(2x^2-x)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}x$$

$$2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}x=2.2^2-2=6$$

Limites - Propriedades

P5) O limite do produto é igual ao produto dos limites (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \to a}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3}(x^2) = \lim_{x \to 3} x.x = \lim_{x \to 3} x.\lim_{x \to 3} x = 3.3 = 9$$

Limites - Propriedades

P6) O limite do quociente é igual ao quociente dos limites (caso esses limites existam):

$$\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 3}\left[\frac{x-5}{x^3-7}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to 3}(x-5)}{\lim\limits_{x \to 3}(x^3-7)} = \frac{3-5}{27-7} = \frac{-1}{10}$$

Limites - Propriedades

P7) O limite da raiz de uma função, é a raiz do limite da função, se o limite existe e é maior ou igual a zero:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^4-4x+1} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(x^4-4x+1)} = \sqrt{(-2)^4-4(-2)+1} = 5$$

Teorema do Confronto (ou Sanduíche)

Teorema: Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo *x* em um intervalo aberto contendo *a*, exceto possivelmente em *x*=*a*, e se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

Então,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

Teorema do Confronto (ou Sanduíche)

Exemplo 1: Se $|f(x)| \leq x^4$, então $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

De fato, se $|f(x)| \leq x^4$,
então: $-x^4 \leq f(x) \leq x^4$.

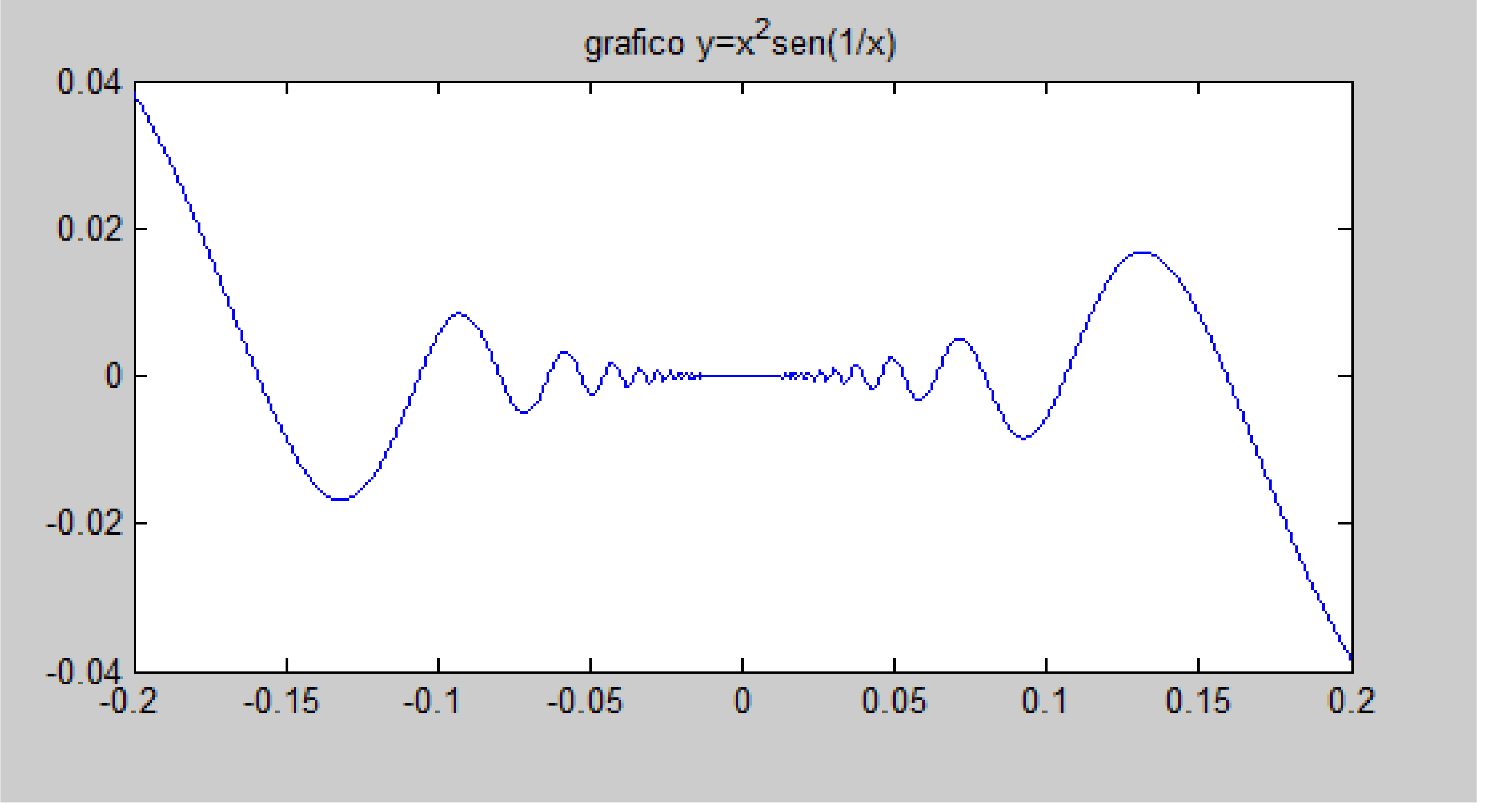
Multiplicando por $(\frac{1}{x^2})$, obtemos: $-x^2 \leq \dfrac{f(x)}{x^2} \leq x^2$

Pelo teorema do confronto: $\lim_{x \to 0} -x^2 \leq \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} \leq \lim_{x \to 0} x^2$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \leq 0 \qquad \therefore \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

Teorema do Confronto (ou Sanduíche)

Exemplo 2: Mostre que $\lim_{x \to 0} x^2 * sen(\frac{1}{x}) = 0$



Teorema do Confronto (ou Sanduíche)

Algebricamente: Para x≠0,

$$-1 \le sen(\frac{1}{x}) \le 1$$

Multiplicando por x^2, obtemos:

$$-x^2 \le x^2 sen\frac{1}{x} \le x^2$$

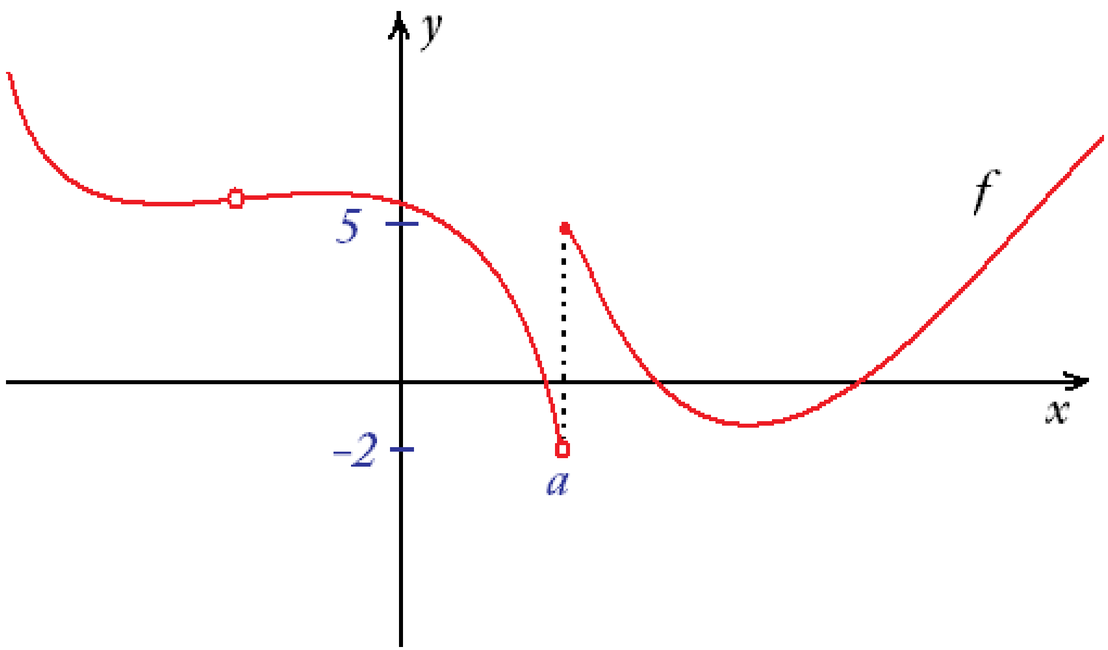
Aplicando o Teorema do Confronto:

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0$$

Limites Laterais

Objetivo: Dada a função **y = f(x)**, queremos verificar qual é o comportamento da função quando a variável independente **x** se aproxima de um valor **a** pela esquerda e pela direita.



Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Limites Laterais

Definição Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que o **limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a** [ou o **limite d e$f(x)$ quando x tende a a pela esquerda**] é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, para x suficientemente próximo de a e x menor que a.

De maneira semelhante, se exigirmos que x seja maior que a, obtemos "o **limite a direita de $f(x)$ quando x tende ao a**" e se este limite for igual a L, escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

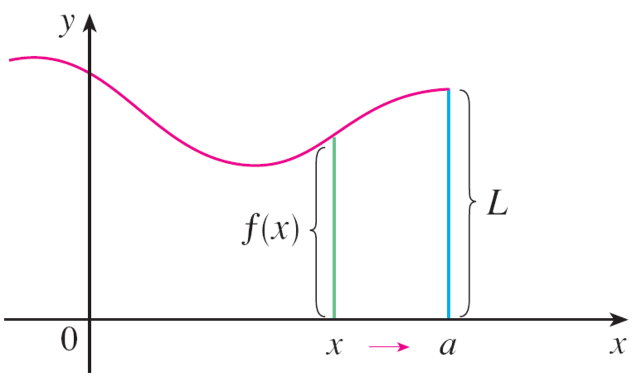
Limites Laterais

Dessa forma:

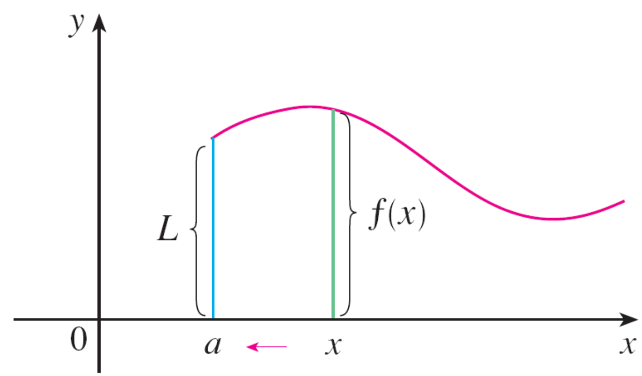
(a) o símbolo "$x \to a^-$" indica que estamos considerando somente $x < a$;

(b) o símbolo "$x \to a^+$" indica que estamos considerando somente $x > a$.

Essas definições estão ilustradas na Figura 9.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites Laterais

Comparando as definições de limite de uma função num ponto e os limites laterais de uma função num ponto, chegamos a seguinte conclusão:

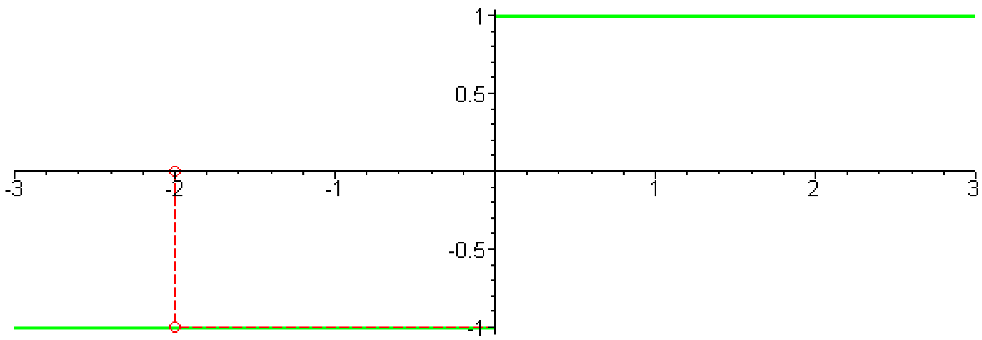
$$\boxed{3} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Exemplo 1: Analise se o seguinte limite existe

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Limites Laterais

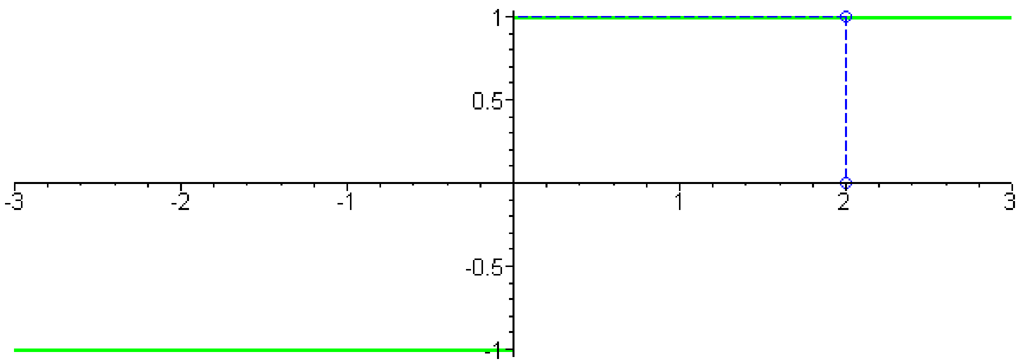
Limite a esquerda no ponto zero “0”



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Limites Laterais

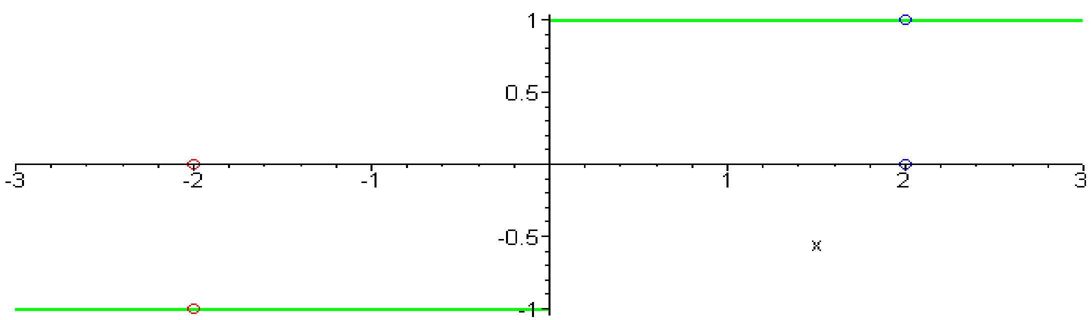
Limite a direita no ponto zero "0"



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Limites Laterais

Vamos analisar o limite o ponto zero “0”



$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \text{não existe}$$

Limites Laterais

O gráfico de uma função g é apresentado na Figura abaixo. Use-o para estabelecer os valores (caso existam) dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$