CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Derivada

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, observamos que:

(i) $f(b)-f(a)$ é a variação da função f no intervalo $[a,b]$

(ii) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a taxa de variação média da função f no intervalo $[a,b]$.

(iii) Se tomarmos umo ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, teremos a taxa de variação (instantânea) da função f em $x = x_0$

Derivada

Exemplo: Suponha que um corpo se desloca num movimento retilíneo uniforme segundo a função $S(t) = t^2 + 4t$, podemos observar que:

→ No intervalo $[0, 3]$ o deslocamento será de
$S(3) - S(0) = (3^2 + 4.3) - 0 = \underline{21 \text{ u.c}}$

→ $V_m = \dfrac{S(3) - S(0)}{3 - 0} = \dfrac{21}{3} = 7 \text{ u.v}$, é a velocidade média do corpo no intervalo $[0, 3]$

→ $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{S(t) - S(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^2 + 4t}{t} = \lim\limits_{t \to 0} (t + 4) = 4 \text{ u.v}$, será a velocidade do corpo em $t = 0$.

Derivada

Observação: Numa função f, quando existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dizemos que a função possui derivada no ponto $x=x_0$, $x_0 \in D(f)$

Definição: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, e $x_0 \in I$ um ponto fixo, diremos que f é derivável em $x=x_0$ se existir o limite:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Neste caso indicaremos $L = f'(x_0)$, ou seja, $f'(x_0)$ é a derivada de f em $x=x_0$.

Derivada

Exemplo: Seja $f(x) = 3x^2 - 5x$, determine $f'(x_0)$, usando a definição de derivada.

$$\rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(3x^2 - 5x) - (3x_0^2 - 5x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{3(x^2 - x_0^2) - 5(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{3(x - x_0)(x + x_0) - 5(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}\,[3(x + x_0) - 5]}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} 3(x + x_0) - 5 = \boxed{6x_0 - 5}$$

Derivada

https://www.youtube.com/watch?v=HK6DDx8G7ZU&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=14 (Conceito de derivada, a partir da reta tangente ao gráfico da função num ponto)

https://www.youtube.com/watch?v=eQsN_tJ9CyA&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=15 (não existência de derivada num ponto, derivadas laterais, derivada de cf, f+g e fg)

https://www.youtube.com/watch?v=JMtmSdWcjqA&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=16 (Condição necessária e suficiente para existência da derivada, Leibniz, derivação e continuidade)

https://www.youtube.com/watch?v=rPzFJpGIEh0&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=17 (Derivada do polinômio)

https://www.youtube.com/watch?v=f_PwzFrWp7Q&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=18 (derivada de f/g, regra da cadeia)

https://www.youtube.com/watch?v=J_pgvEewQU0&list=PL2D9B691A704C6F7B&index=19 (Função exponencial, função seno, função cosseno)

Derivada

OBS: Na expressão: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(*)$

tomando $x - x_0 = \Delta x$ então:

$\to x = x_0 + \Delta x$

$\to$ quando $x \to x_0 \Rightarrow (x - x_0) \to 0$, isto é, $\Delta x \to 0$

Assim podemos reescrever $(*)$ como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (**)$$

As expressões $(*)$ e $(**)$ são equivalentes

Derivada

→ <u>Propriedades</u>: Seguem algumas propriedades envolvendo derivadas de funções

<u>Proposição</u>: Sejam f, g duas funções deriváveis em $x = x_0$, e k uma constante real então são deriváveis em x_0.

(i) $\left[f(x_0) + g(x_0)\right]' = f'(x_0) + g'(x_0)$

(ii) $\left[k f(x_0)\right]' = k \cdot f'(x_0)$

(iii) $\left[f(x_0) \cdot g(x_0)\right]' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(iv) $\left[\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\right]' = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$

Derivada

<u>Nota</u>: Foi visto que $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

é a derivada de f num ponto fixo $\underline{x_0}$.

Em muitas situações não queremos a derivada num ponto fixo e sim num ponto qualquer $x \in D(f)$, onde existe a derivada.

Neste caso podemos definir a <u>função derivada de f</u>.

<u>Definição</u>: Seja f uma função, se existir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

$f'(x)$ é denominada de função derivada de f.

Derivada

OBS: Todas as propriedades válidas para derivada pontual podem ser extendidas para as funções derivadas.

Exemplo: Determine $f'(x)$, sabendo que $f(x) = 2x^3 + 3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[2(x+\Delta x)^3 + 3\right] - \left[2x^3 + 3\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[2\left(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right) + 3\right] - (2x^3 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2\right)}{\cancel{\Delta x}} = 6x^2$$

Derivada

Questão 1. Calcule as funções derivadas das seguintes funções. Após determine as derivadas pontuais indicadas:

(i)

$f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

(ii)

$g(t) = \dfrac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'\left(\sqrt{3}\right)$

Questão 2. Derive a função, determine o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado. Após determine a equação dessa reta tangente.

$$f(x) = x + \frac{9}{x}, \quad x = -3$$

Derivada