CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

REGRAS DE L'HÔPITAL

Enunciaremos a seguir a Regra de L'Hôpital e faremos alguns exemplos.

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

O mesmo vale se a for substituído por a^+, a^-, ∞ e $-\infty$, ou seja, o mesmo vale para limites laterais e limites no infinito. No caso de limites no infinito o intervalo I deve ser do tipo (b, ∞) para $x \to \infty$ e do tipo $(-\infty, b)$ para $x \to -\infty$).

REGRAS DE L'HÔPITAL

Exemplo 1

Usando a Regra de L'Hôpital, calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$,

então o limite é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Usando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \ .$$

REGRAS DE L'HÔPITAL

Exemplo 2

Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$.

Como $\lim_{x\to 1} x^2+x-2=0$ e $\lim_{x\to 1} 2x^2+x-3=0$, o limite pedido é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)'}{(2x^2+x-3)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{3}{5} .$$

REGRAS DE L'HÔPITAL

Exemplo 3

Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Como $\lim_{x\to 0}(x - \operatorname{sen} x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} .$$

Mas $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$, logo caímos em outra forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital uma segunda vez, resulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} ,$$

REGRAS DE L'HÔPITAL

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$, $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

O mesmo vale para os limites laterais, para limites no infinito e no caso em que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

REGRAS DE L'HÔPITAL

Exemplo 4

Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 2x + 2}$.

Trata-se de uma forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 2x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x + 3}{6x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

REGRAS DE L'HÔPITAL

Outras formas indeterminadas

Podemos utilizar a Regra de L'Hôpital para resolver outras indeterminações se transformando-as em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ é uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$. Fazendo

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

reduzimos aos casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, o que for mais conveniente para a solução do exercício.

REGRAS DE L'HÔPITAL

Exemplo 5

Calcule o limite $\lim_{x\to\infty} x \tan \frac{1}{x}$.

Pela continuidade da função tangente, $\lim_{x\to\infty} \tan \frac{1}{x} = \tan \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \tan 0 = 0$. Portanto, $\lim_{x\to\infty} x \tan \frac{1}{x}$ é uma forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. Uma solução é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \tan \frac{1}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sec^2 \frac{1}{x} = \sec^2 0 = 1 \ .
\end{aligned}$$