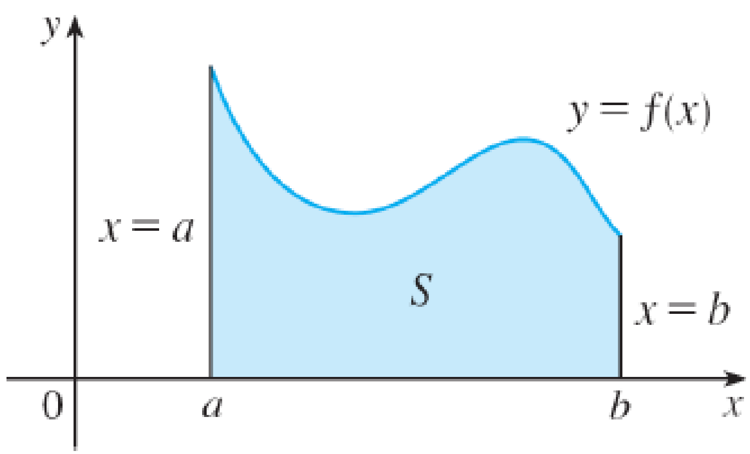
CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Integração – Cálculo de Áreas

Nós começamos tentando resolver o *problema da área*: Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.

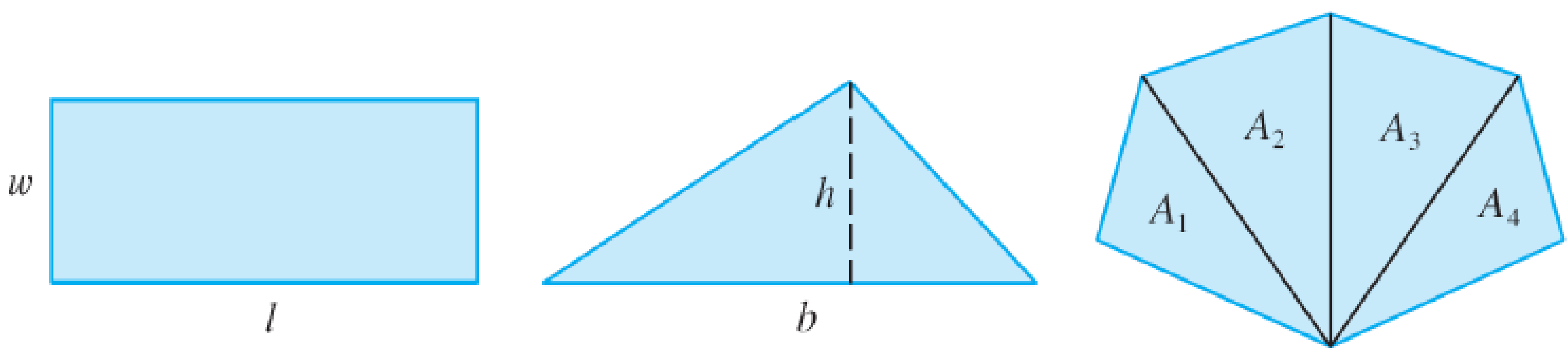


$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Figura 1

Integração – Cálculo de Áreas

Para um retângulo, a área é definida como o produto do comprimento e da largura. A área de um triângulo é a metade da base vezes a altura. A área de um polígono pode ser encontrada dividindo-o em triângulos (como na Figura 2) e a seguir somando-se as áreas dos triângulos.



$A = lw$ $\qquad$ $A = \frac{1}{2}bh$ $\qquad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Figura 2

Integração – Cálculo de Áreas

Exemplo:

Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na Figura 3).

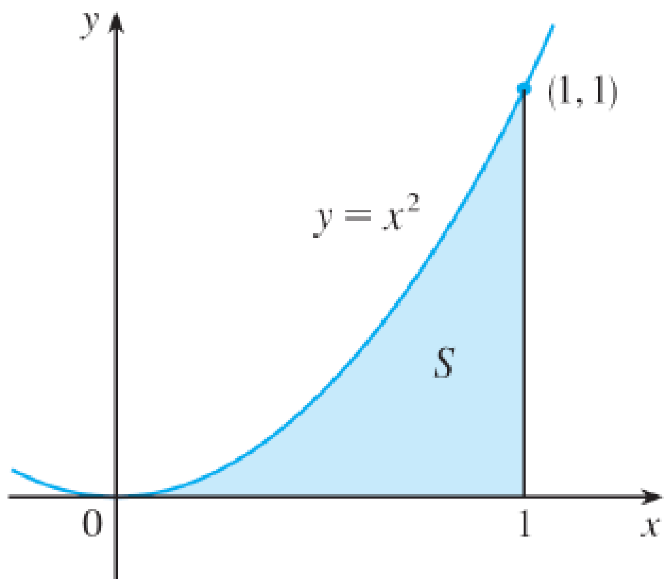


Figura 3

Integração – Cálculo de Áreas

Observamos primeiro que a área de S deve estar em algum lugar entre 0 e 1, pois S está contida em um quadrado com lados de comprimento 1, mas certamente podemos fazer melhor que isso. Suponha que S seja dividida em quatro faixas

S_1, S_2, S_3, e S_4, traçando as retas verticais $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{4}$, como na Figura 4(a).

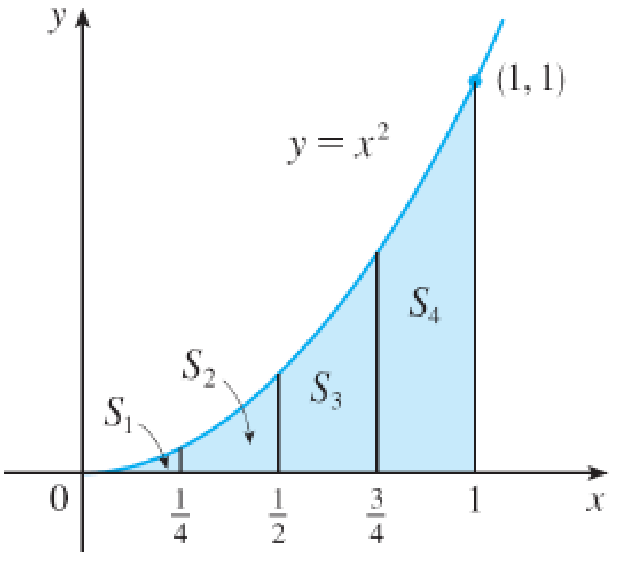


Figura 4(a)

Integração – Cálculo de Áreas

Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa [veja a Figura 4(b)].Em outras palavras, as alturas desses retângulos são os valores da função $f(x) = x^2$ nas extremidades *direitas* dos subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, e $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada retângulo tem largura de $\frac{1}{4}$ e a altura e $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$, e 1^2.

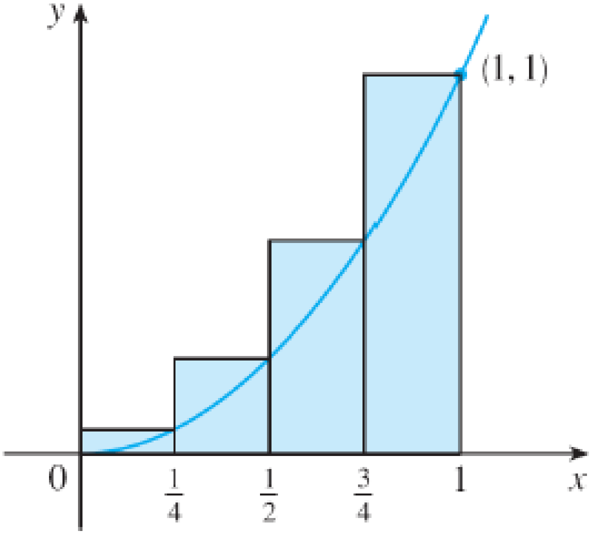


Figura 4(b)

Integração – Cálculo de Áreas

Se R_4 for a soma das áreas dos retângulos aproximados, teremos

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

Da Figura 4(b) vemos que a área A de S é menor que R_4, logo

$$A < 0{,}46875.$$

Integração – Cálculo de Áreas

Em vez de usar os retângulos na Figura 4(b), poderíamos usar os retângulos menores na Figura 5, cujas alturas seguem os valores de *f* nas extremidades *esquerdas* dos subintervalos. (O retângulo mais à esquerda desapareceu, pois sua altura é 0.)

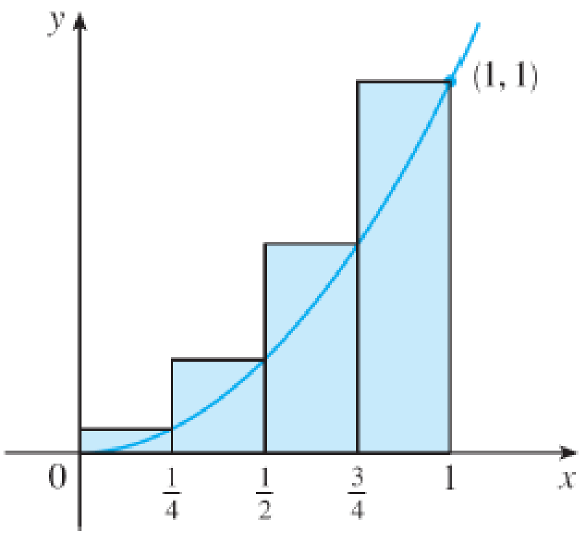


Figura 4(b)

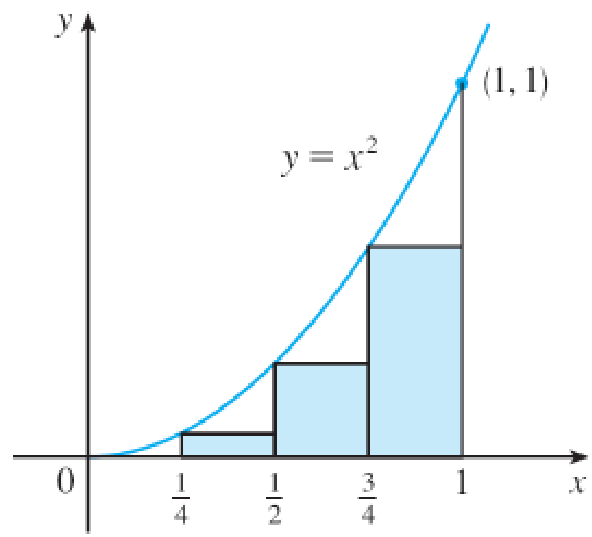


Figura 5

Integração – Cálculo de Áreas

A soma das áreas desses retângulos aproximantes é

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

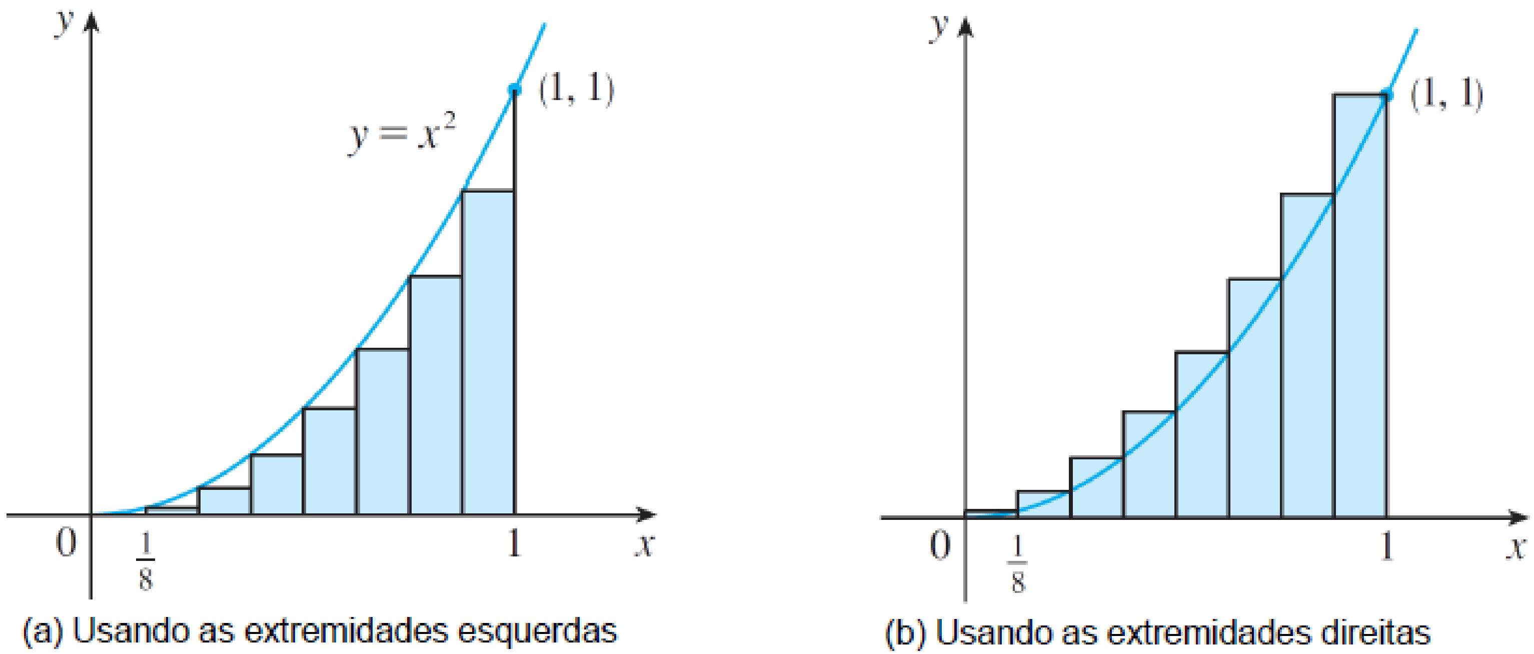
Vemos que a área de S é maior que L_4 e, então, temos estimativas inferior e superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875.$$

Podemos repetir esse procedimento com um número maior de faixas.

Integração – Cálculo de Áreas

Figura 6 mostra o que acontece quando dividimos a regiãoS em oito faixas com a mesma largura.



Aproximando S por 8 retângulos

Figura 6

Integração – Cálculo de Áreas

Calculando a soma das áreas dos retângulos menores (L_8) e a soma das áreas dos retângulos maiores (R_8), obtemos estimativas inferior e superior melhores para A:

$$0,2734375 < A < 0,3984375.$$

Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que a verdadeira área de S está em algum lugar entre 0,2734375 e 0,3984375.

Podemos obter melhores estimativas aumentando o número de faixas.

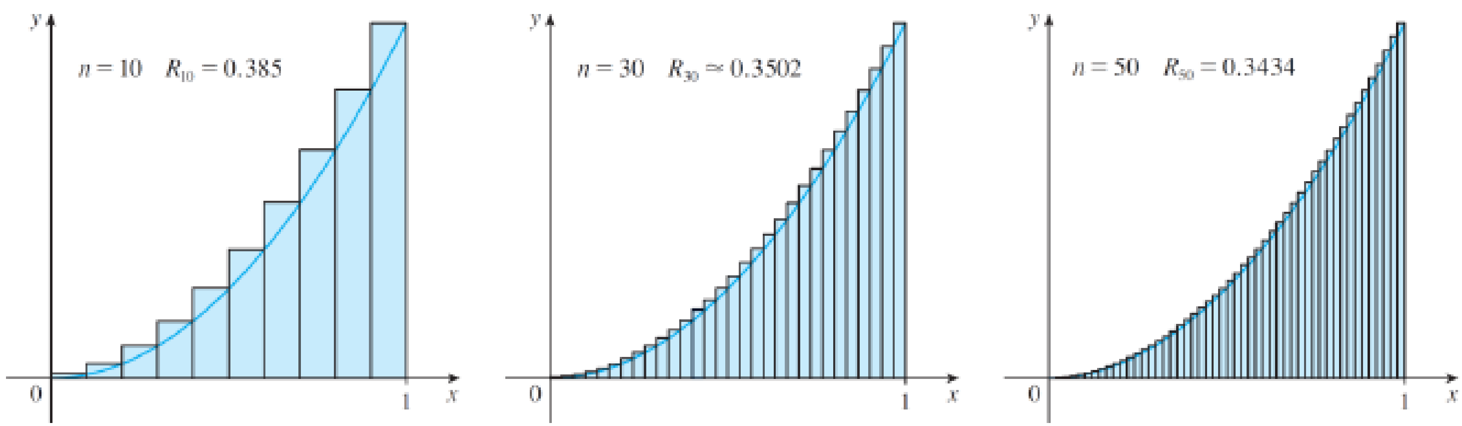
Integração – Cálculo de Áreas

n	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

A tabela à direita mostra os resultados de cálculos similares (com um computador) usando n retângulos cujas alturas são encontradas com as extremidades esquerdas (L_n) ou com as extremidades direitas (R_n). Em particular, vemos que usando 50 faixas a área está entre 0,3234 e 0,3434. Com 1.000 faixas conseguimos estreitar a desigualdade ainda mais: A está entre 0,3328335 e 0,3338335. Uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números: $A \approx 0,3333335$.

Integração – Cálculo de Áreas

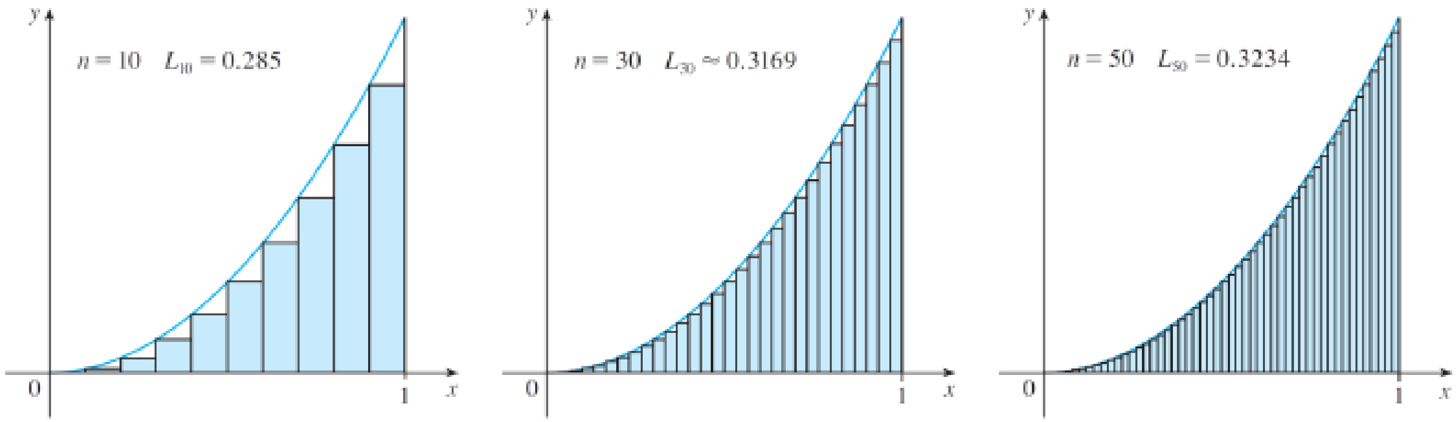
Das Figuras 8 e 9, parece que conforme *n* aumenta, ambos L_n e R_n se tornam aproximações cada vez melhores à área de *S*.



As extremidades da direita produzem somas superiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 8

Integração – Cálculo de Áreas



As extremidades da direita produzem somas inferiores pois $f(x) = x^2$ é crescente

Figura 9

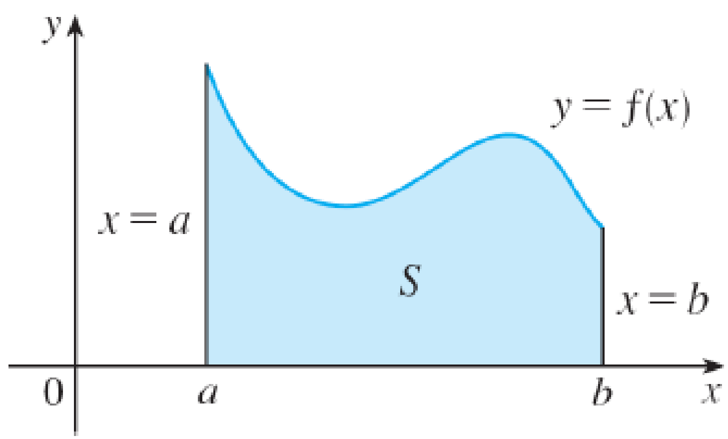
Portanto, *definimos* a área *A* como o limite das somas das áreas desses retângulos aproximantes. Isto é,

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Integração – Cálculo de Áreas

Vamos retornar ao problema apresentado no início da aula

Encontre a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a a b. Isso significa que S, ilustrada na Figura 1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua f [onde $f(x) \geq 0$], pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x.



$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Figura 1

Integração – Cálculo de Áreas

Começamos por subdividir S em n faixas S_1, S_2, …, S_n de igual largura, como na Figura 10.

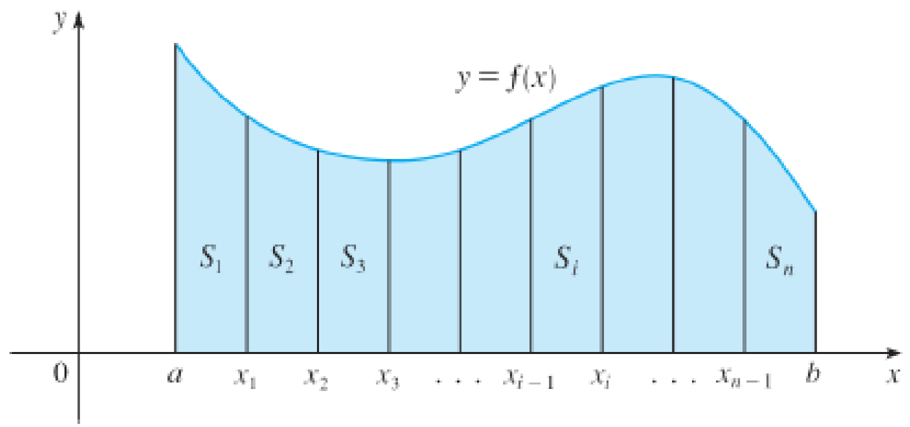


Figura 10

A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim, a largura de cada uma das n faixas é

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Integração – Cálculo de Áreas

Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. As extremidades direitas dos subintervalos são

$$x_1 = a + \Delta x,$$

$$x_2 = a + 2\,\Delta x,$$

$$x_3 = a + 3\,\Delta x,$$

$$\vdots$$

Integração – Cálculo de Áreas

Vamos aproximar a i-ésima faixa S_i por um retângulo com largura Δx e altura $f(x_i)$, que é o valor de f na extremidade direita (veja a Figura 11).

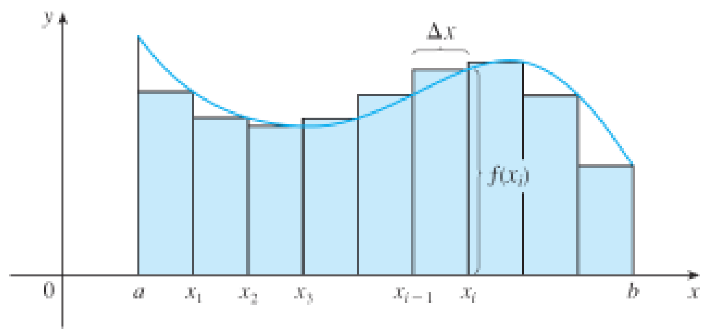


Figura 11

Então, a área do i-ésimo retângulo é $f(x_i)\ \Delta x$. O que consideramos intuitivamente como a área de S é aproximado pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$R_n = f(x_1)\ \Delta x + f(x_2)\ \Delta x + \quad . . . \quad + f(x_n)\ \Delta x$$

Integração – Cálculo de Áreas

A Figura 12 mostra a aproximação para n = 2, 4, 8 e 12. Observe que essa aproximação parece tornar-se cada vez melhor à medida que aumentamos o número de faixas, isto é, quando $n \to \infty$.

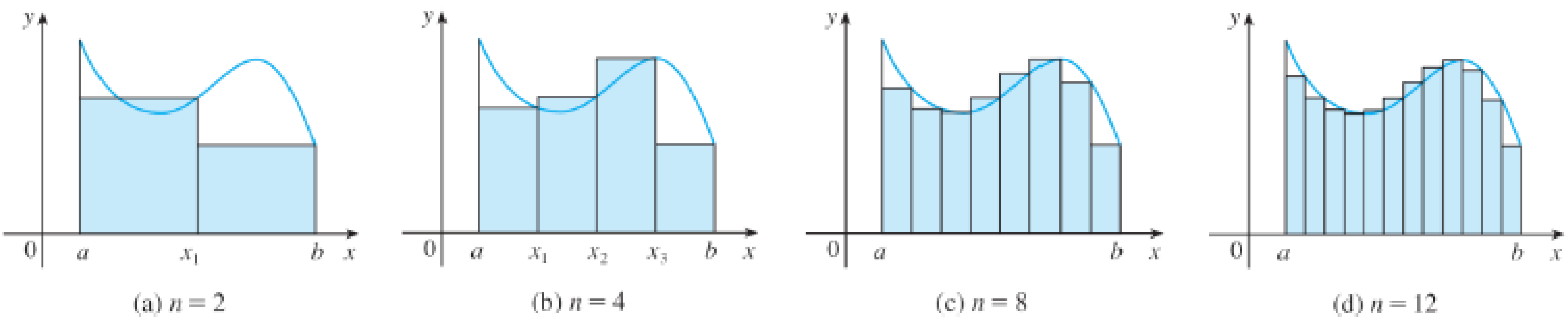


Figura 12

Integração – Cálculo de Áreas

Portanto, vamos definir a área *A* da região *S* da seguinte forma.

$\boxed{2}$ **Definição** A área *A* da região *S* que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [\, f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x].$$

Pode ser demonstrado que o limite na Definição 2 sempre existe, uma vez que estamos supondo que *f* seja contínua. Pode também ser demonstrado que obteremos o mesmo valor se usarmos as extremidades esquerdas dos aproximantes:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [\, f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x].$$

Integração – Cálculo de Áreas

De fato, em vez de usarmos as extremidades esquerda ou direita, podemos tomar a altura do i-ésimo retângulo como o valor de f em *qualquer* número x_i^* no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Chamamos os números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ de **pontos amostrais**.

A Figura 13 mostra os retângulos aproximamantes quando os pontos amostrais não foram escolhidos como as extremidades. Logo, uma expressão mais geral para a área S é

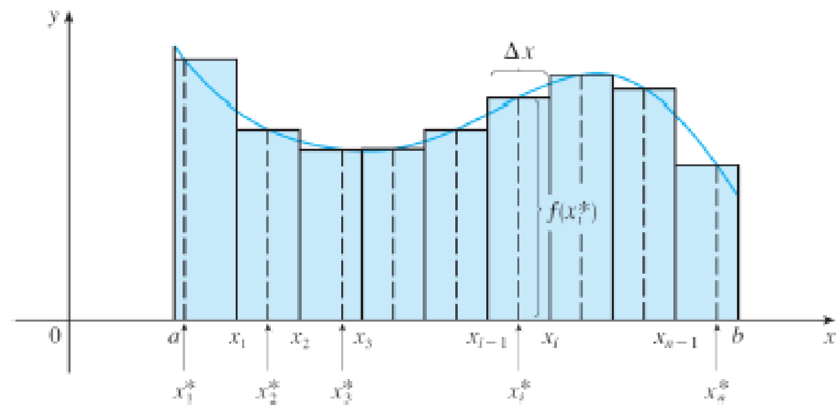


Figura 13

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

Integral Definida – Definição

2 Definição de Integral Definida Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)/n$. Sejam $x_0 \; (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n \; (= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ **pontos amostrais** arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de** f **de** a **a** b é

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é **integrável** em $[a, b]$.

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que ocorre na Definição 2 é chamada **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866).

Integral Definida - Propriedades

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, onde c é qualquer constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

6. Se $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Se $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Definição 38 *Uma função* $F(x)$ *é chamada uma primitiva da função* $f(x)$ *em um intervalo* I *se, para todo* $x \in I$*, temos* $F'(x) = f(x)$.

Definição 39 *Se* $F(x)$ *é uma primitiva de* $f(x)$*, a expressão* $F(x) + c$ *é chamada integral indefinida da função* $f(x)$ *e é denotada por* $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Teorema 20 *(Teorema Fundamental do Cálculo) Se* f *é contínua sobre* $[a, b]$ *e se* F *é uma primitiva de* f *neste intervalo, então:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Integral Indefinida

Logo,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{significa} \quad F'(x) = f(x).}$$

Por exemplo, podemos escrever

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \text{pois} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2.$$

Portanto, podemos olhar uma integral indefinida como representando toda uma *família* de funções (uma primitiva para cada valor da constante *C*).

Integral Indefinida

Cada fórmula pode ser verificada derivando-se a função do lado direito e obtendo-se o integrando. Por exemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x.$$

Integral Indefinida

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Integral Indefinida

Calcule $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$.

SOLUÇÃO: Essa integral indefinida não é imediatamente reconhecível na Tabela 1, logo, usamos identidades trigonométricas para reescrever a função antes de integrá-la:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \operatorname{cossec}\theta\ \operatorname{cotg}\theta\ d\theta = -\operatorname{cossec}\theta + C$$

Integração

Calcule $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt.$

SOLUÇÃO: Precisamos primeiro escrever o integrando em uma forma mais simples, efetuando a divisão:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9$$

$$= 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$

$$= \left(2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

Integração

Integração

Integração