CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

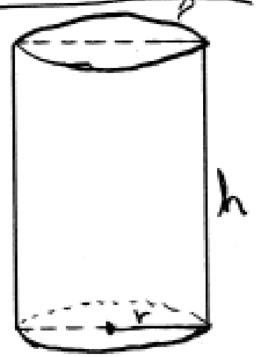
Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

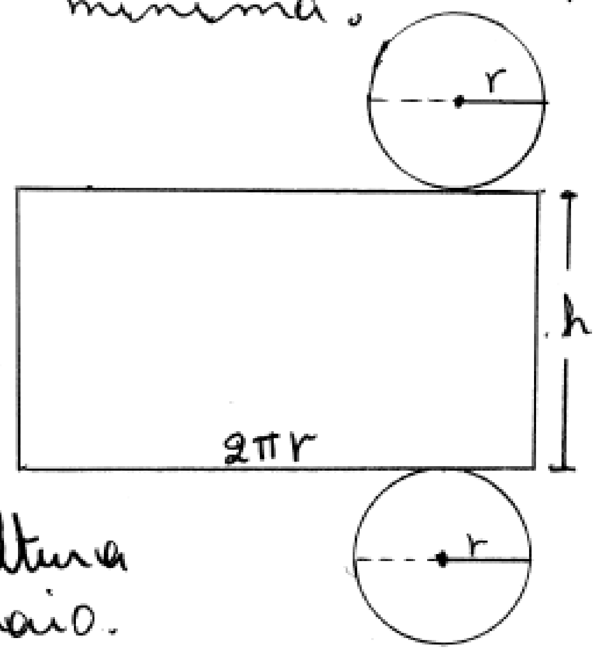
Otimização - Derivadas

Problemas de Otimização

Questão 1: Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume V, de forma que sua área total seja mínima.

Resolução:





Como se trata de uma lata cilíndrica ela tem duas dimensões variáveis, são elas a altura e o raio da base.

Sejam h = altura
r = raio.

Otimização - Derivadas

→ O volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura, já a área da superfície é dada pela soma das áreas das bases e a área lateral.

Assim:

$V = A_b \cdot h$

$\Rightarrow V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$A_T = 2 \cdot A_b + 2\pi r \cdot h$

$\Rightarrow A_T = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$

Para um volume dado (fixo) precisamos minimizar a função $A_T = A_T(r, h)$

Otimização - Derivadas

Como $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

e a $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi h r$, segue que:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)\cdot r$$

$\Rightarrow A_T = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$, isto é, $A_T = A_T(r)$

Derivando a função A_T com relação à $\underline{r}$ temos

$$A'_T = 4\pi r - 2V\cdot r^{-2} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$A'_T(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 2V$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{2V}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Otimização - Derivadas

Com isso as dimensões do cilindro de volume (V) que possui área total (A_T) mínima são respectivamente:

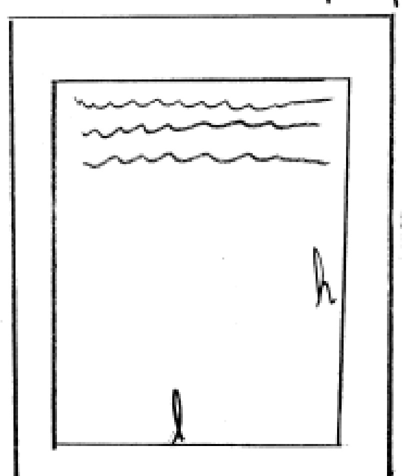
→ raio da base: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

→ altura: $h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Otimização - Derivadas

Questão 2: Uma folha de papel contém 375 cm^2 de matéria impressa, com margem superior de 3,5 cm, margem inferior de 2 cm, margem lateral direita de 2 cm e margem lateral esquerda de 2.5 cm. Determine quais devem ser as dimensões da folha para que haja o máximo de economia de papel.

Resolução:



A área impressa é dada pelo produto da altura pela largura. Sendo altura = h e largura = l temos

$$A_I = h . l$$

Otimização - Derivadas

Por outro lado a área total da folha será dada por $A_T = (l + 2 + 2{,}5)(h + 3{,}5 + 2) = (l + 4{,}5)(h + 5{,}5)$

Como $A_I = h.l$ e $375 = h.l \Rightarrow \boxed{h = \frac{375}{l}}$

Substituindo em A_T temos:

$$A_T = (l + 4{,}5)\left(\frac{375}{l} + 5{,}5\right) = (l + 4{,}5)\left(\frac{375 + 5{,}5\,l}{l}\right)$$

$$\Rightarrow A_T = \frac{5{,}5\,l^2 + 399{,}75\,l + 1687{,}5}{l}$$

Otimização - Derivadas

Derivando a função $A_T = A_T(l)$ temos:

$$A'(l) = \left[\frac{5{,}5\,l^2 + 399{,}75\,l + 1687{,}5}{l}\right]'$$

$$\Rightarrow A'(l) = \frac{(11l + 399{,}75)l - (5{,}5\,l^2 + 399{,}75\,l + 1687{,}5).1}{l^2}$$

$$A'(l) = 0 \Rightarrow 11l^2 - 5{,}5\,l^2 + 399{,}75\,l - 399{,}75\,l - 1687{,}5 = 0$$

$$\Rightarrow 5{,}5\,l^2 - 1687{,}5 = 0 \Rightarrow 5{,}5\,l^2 = 1687{,}5$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{1687{,}5}{5{,}5} = 306{,}818$$

$$\Rightarrow l = \pm\sqrt{306{,}818} \Rightarrow l = 17{,}51$$

Como $h = \frac{375}{l} \Rightarrow h = \frac{375}{17{,}51} = 21{,}41$

Otimização - Derivadas

Temos que $h = 21,41$ e $l = 17,51$ são as dimensões da área impressa que minimizam a área da folha.

Assim as dimensões da folha que fazem a maior economia de papel sob as hipóteses do problema são, respectivamente

altura $= 21,41 + 5,5 = 26,91$ cm

largura $= 17,51 + 4,5 = 22,01$ cm