CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Aplicações de Integração – Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Nota1: Como motivação para a definição da Integral Definida, usamos o problema de determinar a área de uma figura plana limitada superiormente pelo gráfico de uma função contínua **y=f(x)** e não-negativa, inferiormente pela reta **y=0** (eixo x), e lateralmente pelas retas **x=a** e **x=b**, com **a<b**.

Nota 2: O cálculo de áreas de determinadas figuras planas pode ser feito via integração. Vejamos algumas situações onde isso ocorre.

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Caso I Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$ (ver Figura 6.11).

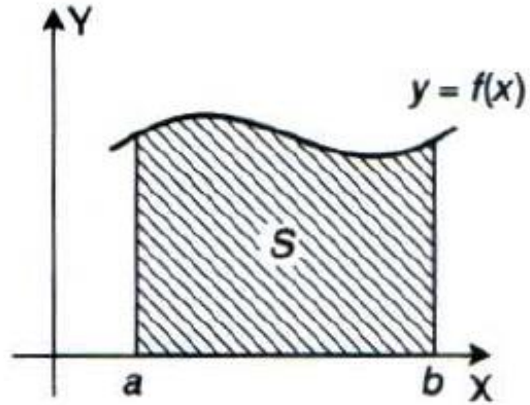


Figura 6.11

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 1: Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = 4 - x^2$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.12).

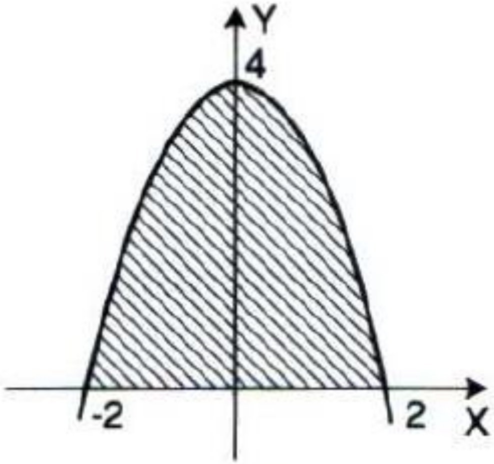


Figura 6.12

No intervalo $[-2, 2]$, $y = 4 - x^2 \geq 0$. Assim, a área procurada é a área sob o gráfico de $y = 4 - x^2$ de -2 até 2.

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Temos:

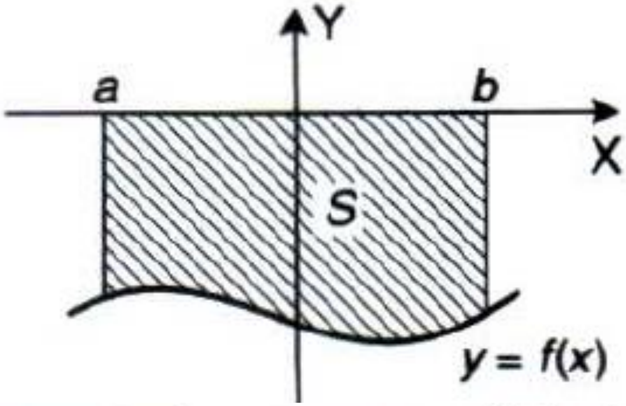
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right] = \frac{32}{3}.$$

Portanto, $A = 32/3$ (32/3 unidades de área).

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Caso II Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$ (ver Figura 6.13).



É fácil constatar que neste caso basta tomar o módulo da integral

$\int_a^b f(x)dx$, ou seja,

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 2: Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x.

A curva $y = x^2 - 4$ intercepta o eixo dos x nos pontos de abscissa -2 e 2 (ver Figura 6.14).

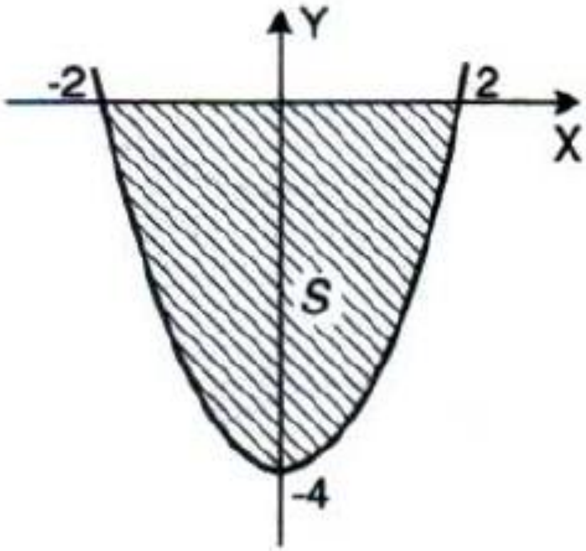


Figura 6.14

No intervalo $[-2, 2]$, $y = x^2 - 4 \leq 0$. Assim:

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx \right|$$

$$= \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 3:

Encontre a área da região S, limitada pela curva $y = \text{sen}\, x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π.

Precisamos dividir a região S em duas sub-regiões S_1 e S_2 (ver Figura 6.15).

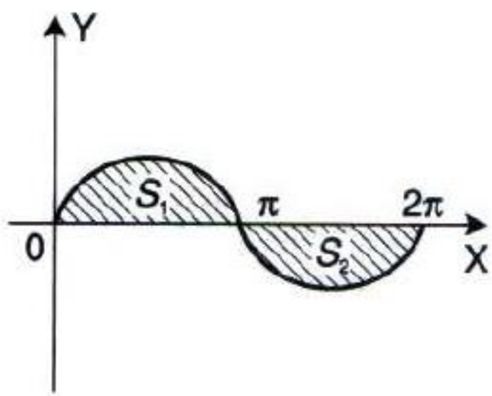
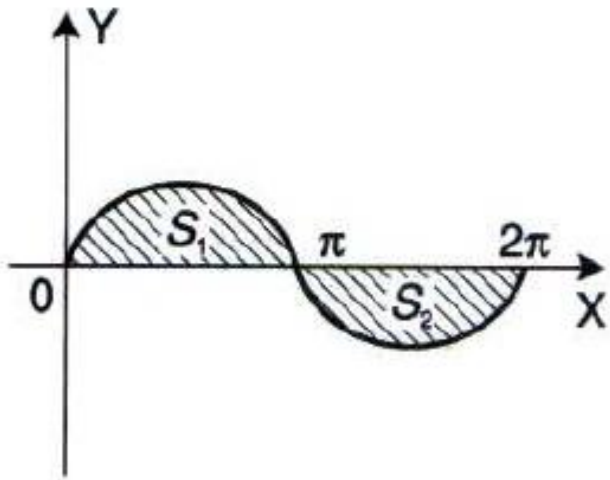


Figura 6.15

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen}\, x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen}\, x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, temos:

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

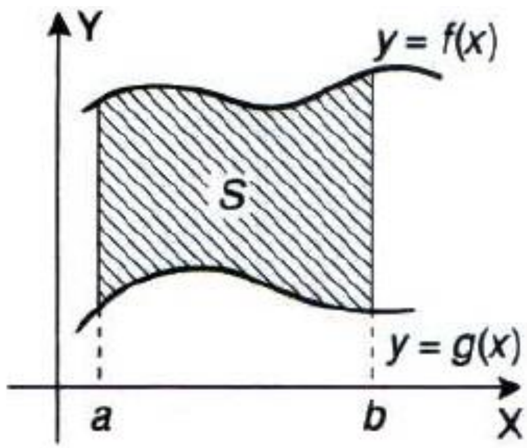


$$
\begin{aligned}
A &= A_1 + A_2 \\
&= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx \right| \\
&= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| \\
&= -\cos \pi + \cos 0 + |-\cos 2\pi + \cos \pi| \\
&= -(-1) + 1 + |-1 + (-1)| \\
&= 4 \text{ u.a.}
\end{aligned}
$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Caso III Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a, b]$.

Neste caso pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$



Então, a área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g, ou ainda,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos x deslocado de tal maneira que as funções se tornem não-negativas, $\forall\, x \in [a, b]$.

Observando a Figura 6.17, concluímos que:

$$A' = A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

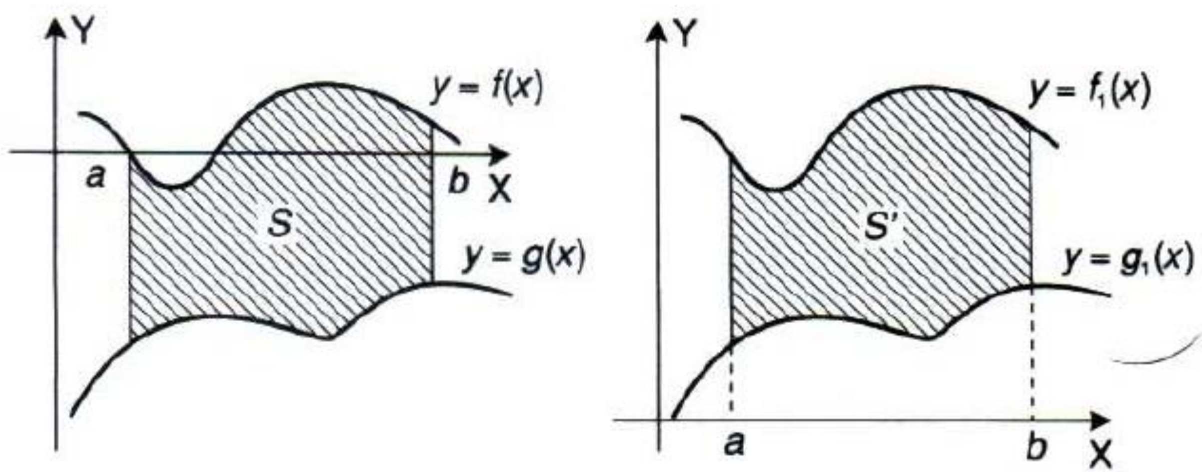


Figura 6.17

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 4: Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2 (ver Figura 6.18). No intervalo $[-1, 2]$ temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

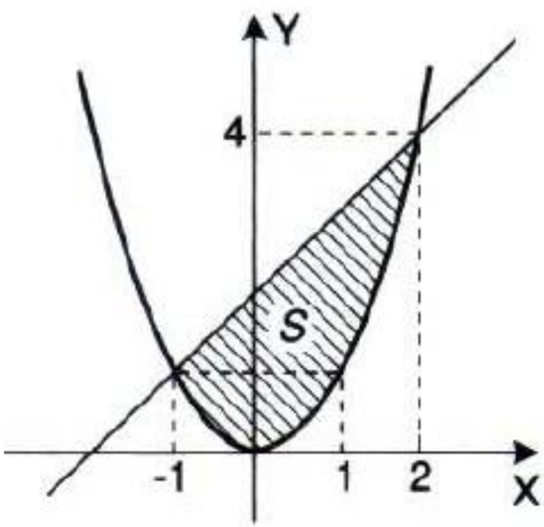


Figura 6.18

No intervalo $[-1, 2]$ temos $x + 2 \geq x^2$. Então,

$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

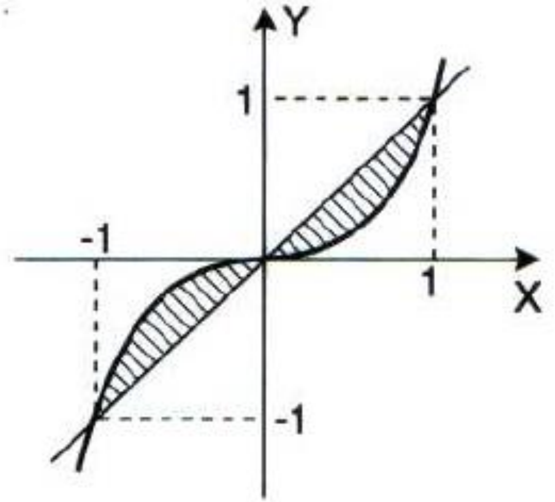
$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 5: Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1, 0 e 1



No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e, no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$.

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Observamos que poderíamos ter calculado a área da seguinte forma:

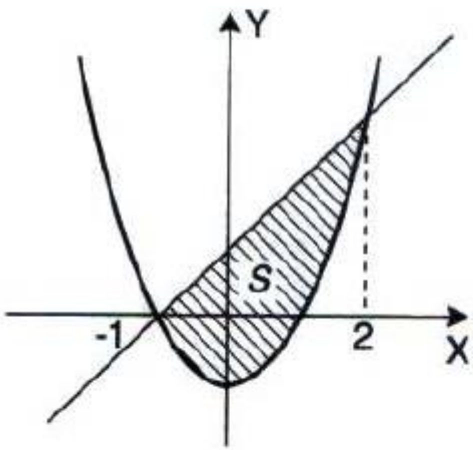
$$A = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2} \text{ u.a.},$$

pois a área à esquerda do eixo dos y é igual a que se encontra à sua direita.

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 6: Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$.

As curvas $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2



No intervalo $[-1, 2]$, $x + 1 \geq x^2 - 1$. Logo,

$$A = \int_{-1}^{2} [(x + 1) - (x^2 - 1)]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

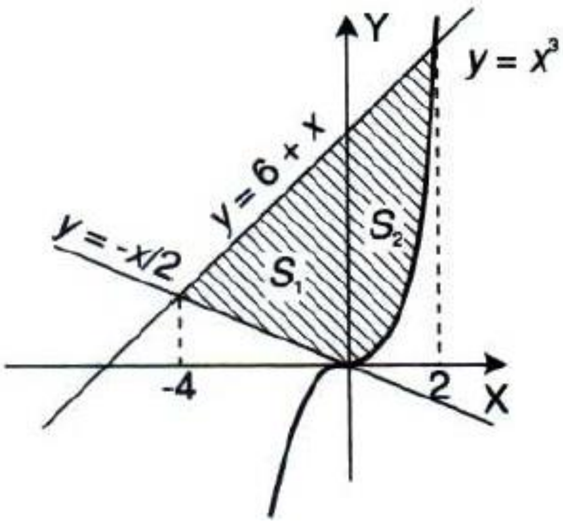
$$= 9/2 \text{ u.a.}$$

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 7:

Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas sub-regiões S_1 e S_2



No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \dfrac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Cálculo de A_1*:* No intervalo $[-4, 0]$, $6 + x \geq -\frac{x}{2}$. Assim:

$$A_1 = \int_{-4}^{0}[(6 + x) - (-x/2)]dx$$

$$= \int_{-4}^{0}\left(6 + \frac{3x}{2}\right)dx$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Big|_{-4}^{0}$$

$$= 12 \text{ u.a.}$$

Cálculo de A_2: No intervalo $[0, 2]$, $6 + x \geq x^3$. Então,

$$A_2 = \int_{0}^{2}[(6 + x) - x^3]\,dx$$

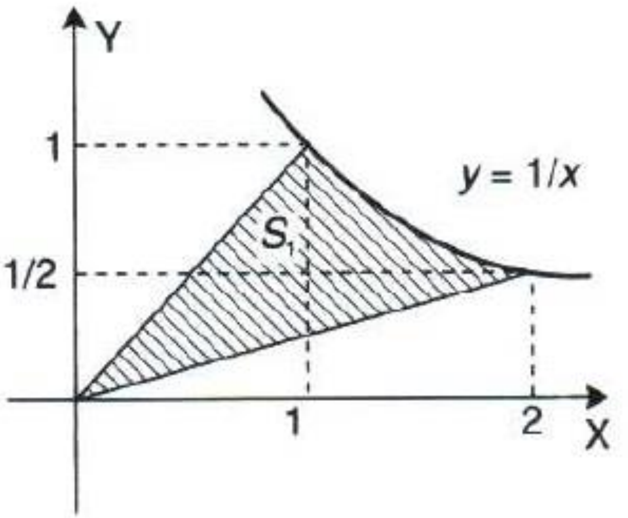
$$= \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= 10 \text{ u.a.}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$ u.a.

Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 8: Encontrar a área das regiões S_1 e S_2, vistas na figura a seguir:



Cálculo de Áreas de Figuras Planas

Exemplo 9: Calcule a área da região plana limitada pelas curvas:

$$x = y^2 \text{ e } y = -\frac{1}{2}x$$