CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Integral Indefinida

1 Tabelas de Integrais Indefinidas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

Exemplo 1: Encontre o $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO: Poderíamos converter $\cos^2 x$ em $1 - \text{sen}^2 x$, mas obteríamos uma expressão em termos de sen x sem nenhum fator extra cos x. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\text{sen}^4 x$ restante em termos de cos x:

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen}\, x\, dx$ e, assim,

$$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = \int (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx$$

$$= \int (1 - u^2)^2\, u^2\, (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Exemplo 2: Calcule $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUÇÃO: Se escrevermos $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\operatorname{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos $\cos 2x$.

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Para resumirmos, listamos as regras que devem ser seguidas ao calcular integrais da forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, em que $m \geq 0$ e $n \geq 0$ são inteiros.

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar ($n = 2k + 1$), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de seno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx.\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência do seno é ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de cosseno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \cos x$. [Observe que se ambas as potências de seno e cosseno forem ímpares, podemos usar (a) ou (b).]

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

(c) Se as potências de seno e cosseno forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x). \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

$\boxed{2}$ Para calcular as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx \, dx$, use a identidade correspondente:

$$\text{(a) } \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$$

$$\text{(b) } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\text{(c) } \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Exemplo 3: Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx$.

Solução:

Essa integral poderia ser calculada utilizando a integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a) como a seguir:

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x \, dx &= \int \tfrac{1}{2} [\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x] \, dx \\
&= \tfrac{1}{2} \int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x) \, dx \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\cos x - \tfrac{1}{9} \cos 9x\right) + C.
\end{aligned}
$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Podemos empregar uma estratégia semelhante para calcular integrais da forma $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$. Como $(d/dx) \operatorname{tg} x = \sec^2 x$, podemos separar um fator $\sec^2 x$ e converter a potência (par) da secante restante em uma expressão envolvendo a tangente, utilizando a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Ou, como $(d/dx) \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$, podemos separar um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e converter a potência (par) da tangente restante para a secante.

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Exemplo 4: Calcule $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO: Se separamos um fator $\sec^2 x$, poderemos expressar o fator $\sec^2 x$ em termos de tangente, usando a identidade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$. Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \text{tg}\, x$, de modo que $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}
\int \text{tg}^6 x \sec^4 x \, dx &= \int \text{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \text{tg}^6 x \, (1 + \text{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx \\
&= \int u^6 (1 + u^2) du = \int (u^6 + u^8) du \\
&= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C \\
&= \frac{1}{7} \text{tg}^7 x + \frac{1}{9} \text{tg}^9 x + C
\end{aligned}$$

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

ESTRATÉGIA PARA CALCULAR $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \operatorname{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x \, (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx.\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k + 1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx.\end{aligned}$$

A seguir, substitua $u = \sec x$.

Integração Envolvendo Funções Trigonométricas

Exemplo 5: Encontre $\int \text{tg}^3 x \, dx$.

SOLUÇÃO: Aqui apenas tg x ocorre, então usamos $\text{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescrever um fator $\text{tg}^2 x$ em termos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \text{tg}^3 x \, dx &= \int \text{tg}\, x \, \text{tg}^2 x \, dx = \int \text{tg}\, x \, (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \text{tg}\, x \sec^2 x \, dx - \int \text{tg}\, x \, dx \\ &= \frac{\text{tg}^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C.\end{aligned}$$

Na primeira integral substituímos mentalmente $u = \text{tg}\, x$ de modo que $du = \sec^2 x \, dx$.