15

Traçado do gráfico de uma função; otimização

Sumário

15.1 Traçado do gráfico de uma função

Estudamos até agora vários conceitos e métodos que dizem respeito a aspectos do comportamento de uma função e que podem ser utilizados para o esboço de seu gráfico. Nesta seção iremos sistematizar o uso destas ferramentas e utilizá-las em vários exemplos.

O seguinte roteiro reúne o que se deve conhecer de cada função para a qual queremos traçar o gráfico:

(i) domínio e continuidade da função;

(ii) assíntotas verticais e horizontais;

(iii) derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento;

(iv) valores de máximo e mínimo locais;

(v) concavidade e pontos de inflexão;

(vi) esboço do gráfico.

É importante notar que nem todo item é relevante para toda função. Por exemplo, uma função pode não ter assíntotas. Por outro lado, para o esboço final do gráfico pode ser interessante também determinar os pontos de interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

No caso de haver assíntotas verticais ou horizontais, para melhor compreensão do gráfico da função, é interessante desenhar as retas assintotas no gráfico. Lembramos que uma função contínua f tem assíntota vertical na reta $x = a$ se

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

e que uma função contínua f tem assíntota horizontal na reta $y = b$ se

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b\ .$$

Faremos agora exemplos do esboço de gráfico de função, seguindo o roteiro acima.

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \ .$$

Exemplo 1

(i) Domínio e continuidade de f.

A função f está definida e é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0 \ .$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \ .$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos considerar apenas os sinais de $1 - x^2$.

intervalo	$1-x^2$	sinal de f'	f
$x < -1$	$-$	$-$	decrescente
$-1 < x < 1$	$+$	$+$	crescente
$x > 1$	$-$	$-$	decrescente

Portanto,

$$f \text{ é decrescente em } (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \quad \text{e} \quad f \text{ é crescente em } (-1,1) \ .$$

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

Os pontos críticos de f são:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \ .$$

Observando os sinais de f', pelos teste da derivada primeira resulta que

$$f \text{ tem mínimo local em } x = -1 \quad \text{e} \quad f \text{ tem máximo local em } x = 1 \ .$$

(v) Concavidade e pontos de inflexão.

Derivando novamente a função:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2).2.(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2+1)\left(-(x^2+1)-2(1-x^2)\right)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\,. \end{aligned}$$

Como $(x^2+1)^3$ é sempre positivo, podemos considerar apenas o sinal de $2x(x^2-3)$. As raízes de x^2-3 são $x=\pm\sqrt{3}$. O estudo de sinais está no quadro a seguir:

intervalo	$2x$	x^2-3	sinal de f''	concavidade
$x<-\sqrt{3}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$-\sqrt{3}<x<0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0<x<\sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$x>\sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há três mudanças de concavidade no domínio da função. os pontos $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ e $x=\sqrt{3}$ são todos pontos de inflexão do gráfico de f.

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.1. A interseção com o eixo y é o ponto $(0,f(0))=(0,0)$. marcamos no gráfico os pontos de máximo e mínimo locais (em azul) e os pontos de inflexão (em vermelho).

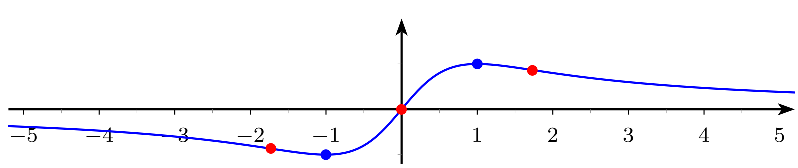

Figura 15.1: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}\ .$$

Exemplo 2

(i) Domínio e continuidade de f.

A função f não está definida para $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$, portanto o domínio é

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)\ .$$

Esta separação do domínio em três intervalos é interessante porque teremos que investigar o comportamento da função quando x se aproxima dos extremos destes intervalos.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}} = 0\ .$$

Logo, $y=0$ é uma assíntota horizontal.

Como $\lim_{x\to-1} x^2-1=0$, mas $x^2-1>0$ se $x<-1$ e $x^2-1<0$ se $-1<x<1$ então

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1} = \infty\ .$$

Como $\lim_{x\to 1} x^2-1=0$, mas $x^2-1>0$ se $x>1$ e $x^2-1<0$ se $-1<x<1$ então

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1} = \infty\ .$$

Portanto, o gráfico de f tem assíntotas verticais em $x=-1$ e em $x=1$ e assíntota horizontal em $y=0$. A informação sobre os limites infinitos e limites no infinito permite fazer o esboço prévio da Figura 15.2.

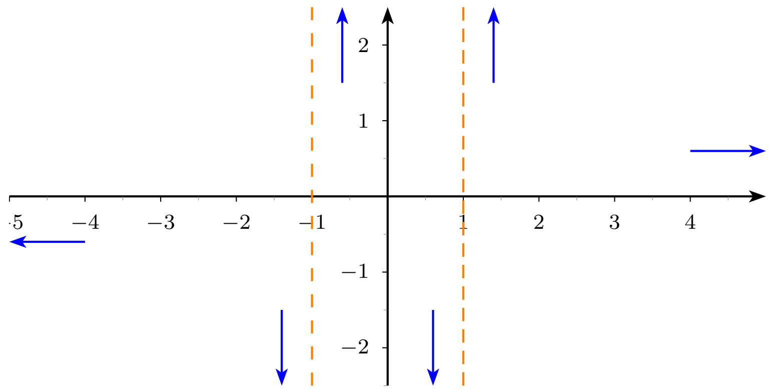

Figura 15.2

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}\ .$$

Como $(x^2-1)^2 > 0$ para todo $x \neq \pm 1$ e $-(1+x^2) < 0$ para todo x, temos que $f'(x) < 0$ em todo seu domínio. A função é sempre decrescente.

(iv) Valores de máximo e mínimo local.

A função f é derivável em todo seu domínio e a derivada $f'(x) = -\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ nunca se anula, logo não há máximos ou mínimos locais.

(v) Concavidade e pontos de inflexão.

Derivando f':

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-2x(x^2-1)^2 + (x^2+1).2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2-1)\left(x^2-1-2(x^2+1)\right)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}\ . \end{aligned}$$

Como x^2+3 e $(x^2-1)^4$ são sempre positivos (para $x \neq \pm 1$), então podemos considerar apenas os sinais de $2x(x^2-1)$. O estudo de sinais está no quadro a seguir:

intervalo	$2x$	x^2-1	sinal de f''	concavidade
$x<-1$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0<x<1$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$x>1$	$+$	$+$	$+$	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há várias mudanças de concavidade, mas $x=-1$ e $x=1$ não estão no domínio da função. O ponto $x=0$ está no domínio de f e a concavidade muda em $x=0$, logo f tem ponto de inflexão em $x=0$.

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.3. A interseção com o eixo y é o ponto $(0,f(0))=(0,0)$ que é também ponto de inflexão da função.

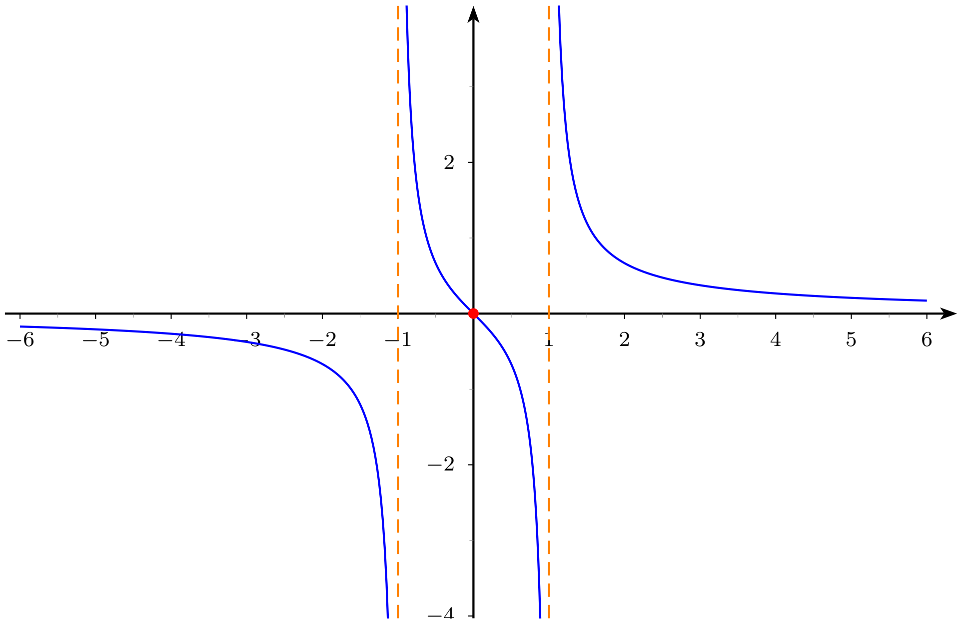

Figura 15.3: $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

Exemplo 3 Esboce o gráfico da função

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} \ .$$

(i) Domínio e continuidade de f.

A função f está definida e é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

f é contínua então não possui assíntotas verticais. Para encontrar os limites no infinito, observamos que $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(1+x)$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} = \infty \text{ e } \lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}(1+x) = \infty \ .$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}}(1+x) = \infty \ .$$

Portanto, o gráfico de f não possui assíntotas horizontais.

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

Temos que $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, logo $x^{\frac{4}{3}}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, o que mostra que $x^{\frac{1}{3}}$ não é derivável em $x = 0$. Portanto $f(x)$ não é derivável em $x = 0$ e para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right) \ .$$

Para o estudo de sinais de f' observe que $x^{\frac{1}{3}} > 0$ se $x > 0$ e $x^{\frac{1}{3}} < 0$ se $x < 0$. Quanto aos sinais de $4+\frac{1}{x}$, temos que $4+\frac{1}{x} = \frac{4x+1}{x}$. O numerador muda de sinal em $x = -\frac{1}{4}$ e o denominador em $x = 0$.

O estudo de sinais de $f'(x)$ está representado no quadro a seguir:

intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4x+1$	x	sinal de f'	f
$x < -\frac{1}{4}$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente
$-\frac{1}{4} < x < 0$	$-$	$+$	$-$	$+$	crescente
$x > 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente

Vemos que f é decrescente em $(-\infty, -\frac{1}{4})$ e crescente em $(-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$.

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}\ .$$

Mas f não é derivável em $x = 0$, logo f' se anula apenas em $x = -\frac{1}{4}$. O teste da derivada primeira (ver quadro anterior quanto aos sinais de f') mostra que f tem mínimo local em $x = -\frac{1}{4}$ e não tem nem máximo nem mínimo local no ponto crítico $x = 0$.

(v) Concavidade e pontos de inflexão.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Como $x^{-\frac{2}{3}} > 0$ para todo $x \neq 0$ então o sinal de f'' é o sinal de $2 - \frac{1}{x}$. Quanto aos sinais de $2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$:

intervalo	$2x - 1$	x	sinal de f''	concavidade
$x < 0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0 < x < \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$x > \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	para cima

Portanto, a função tem concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ e concavidade para baixo em $(0, \frac{1}{2})$.

Há uma mudança de concavidade em $x = \frac{1}{2}$ e em $x = 0$ que são, portanto, os pontos de inflexão.

(vi) Esboço do gráfico.

Usando as informações reunidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 15.4. O gráfico de f corta o eixo y no ponto $(0, 0)$ e corta o eixo x em $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1+x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1$. Representamos no gráfico o ponto de mínimo em azul e os pontos de inflexão em vermelho.

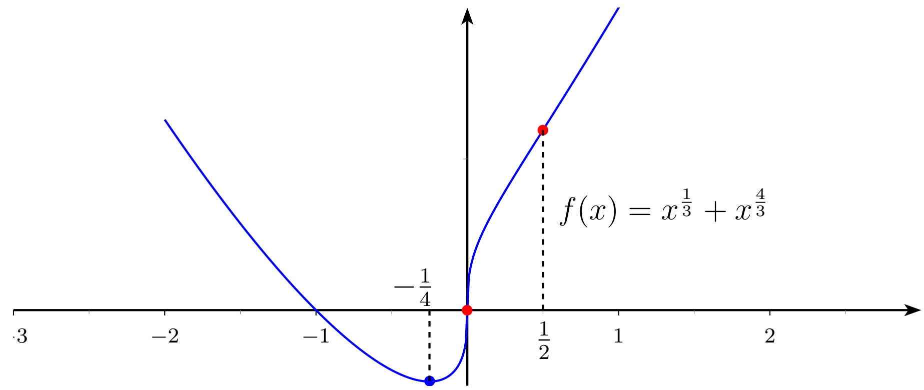

Figura 15.4: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$

Exemplo 4

Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x + 2\cos x \ .$$

(i) Domínio e continuidade de f.

A função f está definida e é contínua em $\mathbb{R}$. É interessante notar também que a função é *periódica* com período igual a 2π.

(ii) Assíntotas verticais e horizontais.

A função não possui assíntotas horizontais ou verticais. Não existem os limites

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} 2x + 2\cos x \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} 2x + 2\cos x \ .$$

A função repete indefinidamente o padrão que possui entre 0 e 2π.

(iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A função é derivável em todo ponto e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{sen} 2x + 2\cos x)' = 2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x \\ &= 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen} x = -2(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) \ , \end{aligned}$$

em que usamos a relação trigonométrica $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

Para o estudo de sinais, dada a periodicidade da função, vamos nos restringir ao intervalo $(0, 2\pi)$.

Temos que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + 1 = 0 \text{ ou } 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Mas $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, os pontos críticos são os pontos $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\operatorname{sen} x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $2\operatorname{sen} x - 1$ será positiva para

$$\operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\ .$$

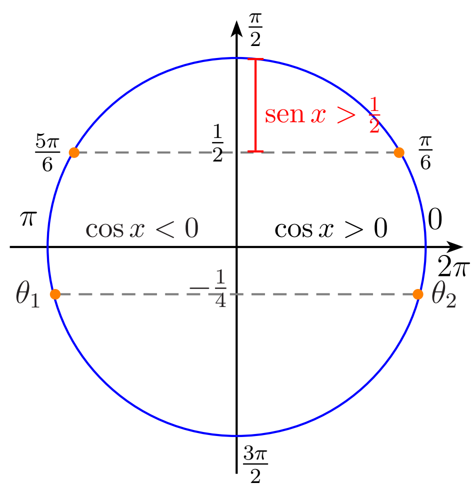

Figura 15.5

Reunindo as informações sobre os sinais de $f'(x) = -2(\operatorname{sen} x + 1)(2\operatorname{sen} x - 1)$:

intervalo	$-2(\operatorname{sen} x + 1)$	$2\operatorname{sen} x - 1$	sinal de f'	f
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$-$	$-$	$+$	crescente
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	$-$	$+$	$-$	decrescente
$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$	$+$	crescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-$	$-$	$+$	crescente

(iv) Valores de máximo e mínimo locais.

Pelo teste da derivada primeira, olhando o quadro acima, concluímos que $x = \frac{\pi}{6}$ é máximo local, $x = \frac{5\pi}{6}$ é mínimo local e $x = \frac{3\pi}{2}$ não é máximo nem mínimo local.

(v) Concavidade e pontos de inflexão. Derivando novamente a função, obtemos:

$$f''(x) = (2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x)' = -4\operatorname{sen} 2x - 2\cos x = -2\cos x(4\operatorname{sen} x + 1)\,.$$

Para o estudo dos sinais, observe que $\cos x > 0$ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ e $\cos x < 0$ em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Com relação ao fator $4\operatorname{sen} x + 1$, há dois valores θ_1, θ_2 no intervalo $(0, 2\pi)$ cujo seno é $-\frac{1}{4}$ (Observe a figura 15.5). Segue que $4\operatorname{sen} x + 1 > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x > -\frac{1}{4}$ ocorre para $x \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$ e $4\operatorname{sen} x + 1 < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x < -\frac{1}{4}$ para $x \in (\theta_1, \theta_2)$.

Portanto,

intervalo	$-2\cos x$	$4\operatorname{sen} x + 1$	sinal de f''	concavidade
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$\frac{\pi}{2} < x < \theta_1$	$+$	$+$	$+$	para cima
$\theta_1 < x < \frac{3\pi}{2}$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$\frac{3\pi}{2} < x < \theta_2$	$-$	$-$	$+$	para cima
$\theta_2 < x < 2\pi$	$-$	$+$	$-$	para baixo

Há mudança de concavidade nos pontos $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \theta_1$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = \theta_2$, que são os pontos de inflexão.

(vi) Esboço do gráfico.

Basta fazer os esboço no intervalo $[0, 2\pi]$ e usar o fato de que a função $f(x) = \operatorname{sen} 2x + 2\cos x$ é periódica de período 2π, ou seja, basta fazer a translação do gráfico de um valor 2π, à direita e à esquerda, indefinidamente.

Temos que $f(0) = f(2\pi) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Segue o esboço do gráfico. Os pontos de máximo e mínimo locais no intervalo $(0, 2\pi)$ estão marcados em azul e os pontos de inflexão no mesmo intervalo estão marcados em vermelho.

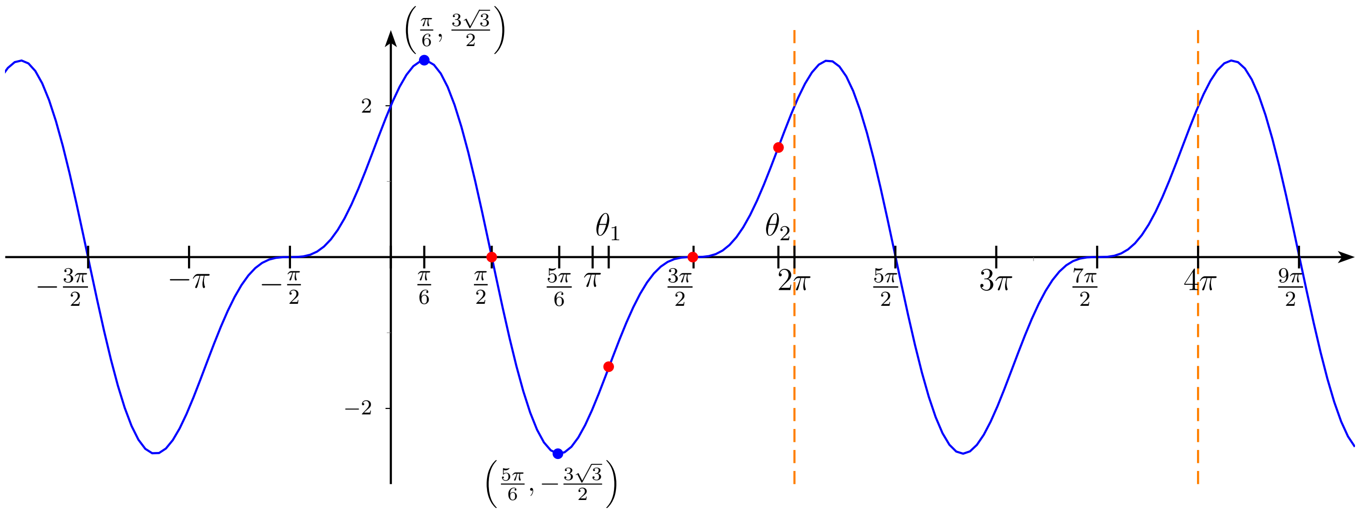

Figura 15.6: $f(x) = \operatorname{sen} 2x + 2\cos x$

Exercícios

Para cada uma das funções a seguir:

(a) Encontre as assíntotas horizontais e verticais;

(b) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento;

(c) Encontre os pontos de máximo e mínimo locais;

(d) Encontre os intervalos de concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão;

(e) Esboce o gráfico da função.

1. $f(x) = x^3 - x^2$.

2. $f(x) = x^4 - 2x^3$.

3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

7. $f(x) = (x^2+1)^3$.

8. $f(x) = (x^2-1)^3$.

9. $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - x$.

10. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$.

11. $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$.

12. $f(x) = x - 2\,\mathrm{sen}\,(x)$.

15.2 Problemas de otimização

Uma das aplicações mais comuns do Cálculo são os problemas de otimização. Tratam-se de problemas que são modelados por uma função e buscamos obter os valores de máximo ou mínimo da função.

Nesta seção, daremos vários exemplos de problemas de otimização, em várias áreas do conhecimento, mostrando como o Cálculo pode ser aplicado nos mais diversos campos do conhecimento humano.

Para resolver um problema de otimização, usamos em geral o seguinte roteiro aproximado:

(i) Identificamos as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita no problema. O desenho de gráficos e diagramas pode ser útil para isso.

(ii) Identificamos os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.

(iii) Descrevemos as relações entres estas variáveis por meio de uma ou mais equações. Em geral, uma destas equações dará a grandeza que queremos *otimizar*, isto é encontrar seu máximo ou mínimo. Se há mais de uma variável no problema, substituindo uma ou mais equações naquela principal permitirá descrever a grandeza que queremos otimizar em função de uma só variável.

(iv) Usando a primeira e segunda derivada da função que queremos otimizar, encontramos seus pontos críticos e determinamos aquele(s) que resolve(m) o problema. Neste ponto é importante estar atento para o fato de que alguns dos pontos críticos da função podem estar fora do intervalo de valores possíveis para a variável (item ii) e devem ser desprezados.

Vimos um primeiro problema de otimização: o Exemplo 6 da Unidade 8, que reproduzimos aqui.

Exemplo 5 Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15×30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Seja x o lado do quadrado que é cortado nos cantos da caixa. Veja a figura 15.7.

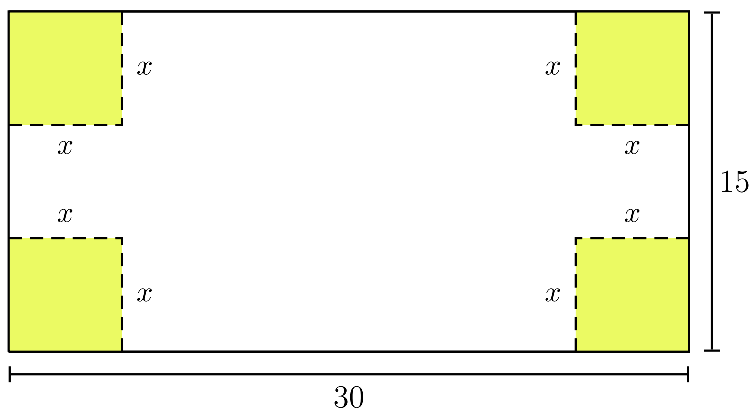

Figura 15.7

A caixa terá como base um retângulo de lados $30 - 2x$ e $15 - 2x$ e altura x. Seu volume é dado por

$$V(x) = x(30 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x \ ,$$

observando que devemos ter $0 < x < \frac{15}{2}$ para que seja possível fazer o corte do retângulo.

Derivando, temos:

$$V'(x) = 12x^2 - 180x + 450 \quad \text{e} \quad V''(x) = 24x - 180 \ .$$

Os pontos críticos de $V(x)$ são $V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 180x + 450 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. São dois pontos críticos: $x_1 = \frac{15+5\sqrt{3}}{2} \approx 11{,}8$ e $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}2$. O primeiro valor deve ser desprezado por estar fora do intervalo $(0, \frac{15}{2})$.

Usando o teste da derivada segunda no ponto crítico x_2, temos

$$V''(x_2) = 24x_2 - 180 \approx -103{,}9 < 0 \ ,$$

o que mostra que o ponto é de máximo.

Portanto, obteremos uma caixa de volume máximo para um corte quadrado de lado $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}2$.

Exemplo 6

Encontre dois números não negativos cuja soma é 30 e tal que o produto de um dos números e o quadrado do outro é máximo.

Sejam x e y os números. Então $x+y=30$ e queremos maximizar $P = xy^2$. Devemos ter $0 < x, y < 30$ para que os números sejam não negativos.

Escrevendo $y = 30 - x$, obtemos $P(x) = x(30-x)^2 = x^3 - 60x^2 + 900x$.

As derivadas de $P(x)$ são

$$P'(x) = 3x^2 - 120x + 900 \quad \text{e} \quad P''(x) = 6x - 120 \ .$$

Os pontos críticos são

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 120x + 900 = 0 \Rightarrow x = 10 \quad \text{ou} \quad x = 30 \ .$$

Como a solução $x = 30$ deve ser desprezada, resta $x = 10$. Usando o teste da derivada segunda, $P''(10) = 6 \cdot 10 - 120 = -60 < 0$, mostra que $P = xy^2$ é máximo para $x = 10$.

Exemplo 7

Um reservatório de água tem o formato de um cilindro sem a tampa superior e tem uma superfície total de 36π m^2. Encontre os valores da altura h e raio da base r que maximizam a capacidade do reservatório.

O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Logo, $V = \pi r^2 h$. A superfície lateral do cilindro é $S = 2\pi r h$ e a área da base é πr^2, logo

$$2\pi r h + \pi r^2 = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36 - r^2}{2r} \ ,$$

o que resulta em

$$V = V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{36 - r^2}{2r} = \frac{\pi r(36 - r^2)}{2} \ .$$

Derivando $V(r)$, obtemos:

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) \quad \text{e} \quad V''(r) = -3\pi r \ .$$

Os pontos críticos de V são

$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r = -2\sqrt{3}\ .$$

Como somente valores positivos de r fazem sentido para o problema, nosso único candidato a solução é $r = 2\sqrt{3}$. Como $V''(r) < 0$ para $r > 0$, o teste da derivada segunda mostra que o volume é máximo para $r = 2\sqrt{3}$.

Exemplo 8

Encontre o ponto (x, y) do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto $(2, 0)$.

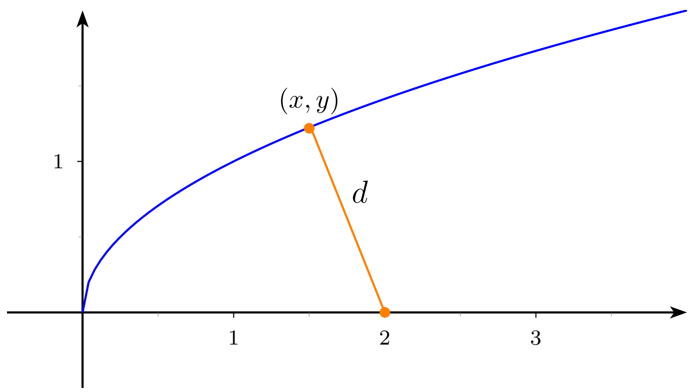

Figura 15.8

A distância d entre o ponto (x, y) do gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o ponto $(2, 0)$ é

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}\ ,$$

em que substituímos $y = \sqrt{x}$ na equação. Devemos ter $x > 0$ para que o ponto (x, y) esteja no gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Derivando a função $d = d(x)$, obtemos:

$$d'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}} \quad \text{e} \quad d''(x) = \frac{7}{4(x^2 - 3x + 4)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Há apenas um ponto crítico:

$$d'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\ ,$$

e, como $x^2 - 3x + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $d''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e o teste da derivada segunda mostra que $x = \frac{3}{2}$ é ponto de mínimo.

Exemplo 9

Uma fazenda produz laranjas e ocupa uma certa área com 50 laranjeiras. Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano. Verificou-se que para cada nova laranjeira plantada nesta área a produção por árvore diminui de 10 laranjas. Quantas laranjas devem ser plantadas no pomar de forma a maximizar a produção?

Para x novas árvores plantadas, o número total de árvores passa a ser $50 + x$, mas a produção individual passa a ser de $600 - 10x$ laranjas por árvore, totalizando uma produção de $P(x) = (50 + x)(600 - 10x) = 30000 + 100x - 10x^2$ laranjas por ano na fazenda.

Devemos ter $x > 0$ (não se pode plantar um número negativo de árvores) e, como a produção não pode ser negativa, devemos ter $600 - 10x > 0 \Rightarrow x < 60$.

Derivando $P(x)$, obtemos:

$$P'(x) = 100 - 20x \quad \text{e} \quad P''(x) = -20 \ .$$

Portanto, há um ponto crítico em $100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$. Este ponto será de máximo, pois $P''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, deve-se plantar 5 novas árvores para maximizar a produção.

Exercícios

1. Divida o número 200 em duas partes de forma que o produto das partes seja máximo.

2. Se $xy = 48$, encontre o valor mínimo de $x + y^3$ para x e y positivos.

3. Encontre o ponto do gráfico de $f(x) = x^2$ mais próximo de $(0, 2)$.

4. Encontre o ponto no eixo OX que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0, 1)$ e $(3, 4)$.

5. Prove que o retângulo de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio fixado é um quadrado.

6. Um carro B se encontra 30 km a leste de um carro A. Ao mesmo tempo, o carro A começa a se mover para o norte com uma velocidade de 60 km/h e o carro B para oeste com uma velocidade de 40 km/h. Encontre a distância mínima entre os carros.

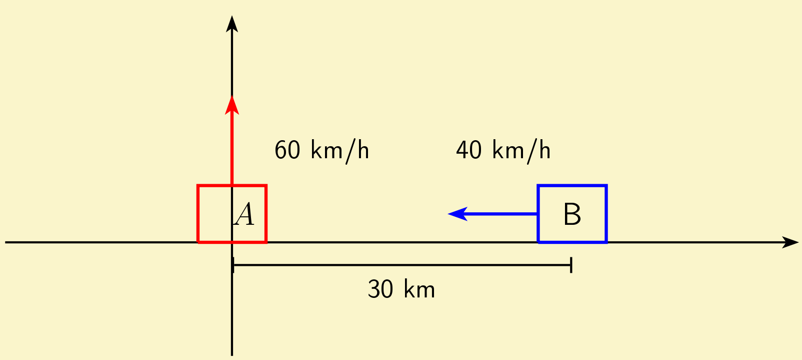

Figura 15.9

7. Uma lata cilíndrica deve ter a capacidade de 50π cm^3. O material do topo e base da caixa custa R$ 25,00 por m^2, enquanto que o material com o qual os lados são feitos custa R$ 20,00 por m^2. Encontre o raio da base e a altura da lata que minimiza o custo da lata.

8. Encontre as dimensões do cone de máximo volume que pode ser inscrito em uma esfera de raio 1.

9. Seja um triângulo isósceles cujos lados iguais têm uma medida fixada. Qual ângulo entre estes lados resulta em um triângulo de área máxima.

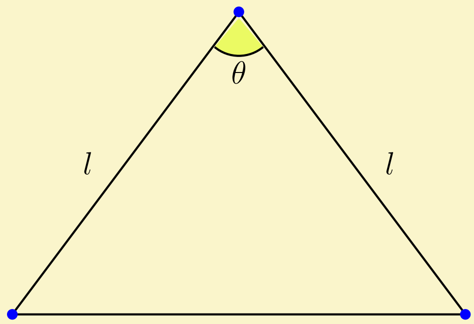

Figura 15.10

10. O material para a base de uma caixa retangular com tampa aberta e base quadrada custa R$ 0,30 por cm^2, enquanto que o material para as faces custa R$ 0,20 por cm^2. Encontre as dimensões para a caixa de maior volume que pode ser feita com R$ 100,00.

11. Uma pessoa sai de um ponto A na margem de um rio de 1 km de largura. Ela deve atravessar o rio de canoa e então chegar o mais rápido possível até um ponto B situado a 2 km de distância pela margem do rio. Se ela consegue remar a canoa a 6km/h e correr a 9km/h, a que distância de B ele deve terminar a travessia de canoa?

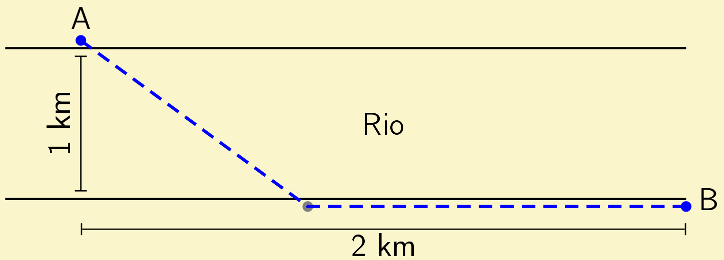

Figura 15.11

12. Em um cinema a tela tem 4 metros de altura e está posicionada 2 metros acima da linha horizontal que passa pelos seus olhos. A que distância da parede deve se situar uma pessoa para que seu ângulo de visão seja máximo? Observe a figura a seguir.

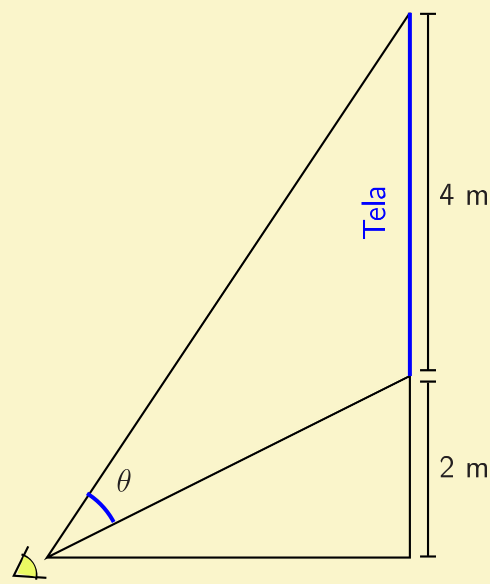

Figura 15.12