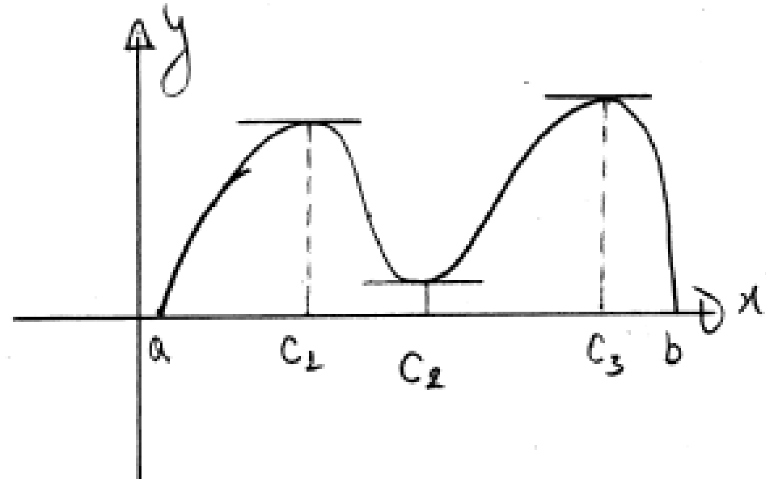
CÁLCULO 1

Prof. Dr. Milton Kist

Universidade Federal da Fronteira Sul
Curso: Ciência da Computação
UFFS – Câmpus Chapecó
milton.kist@uffs.edu.br

Teoremas Sobre Derivadas

Teorema de Rolle: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em (a,b). Se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$



Teoremas Sobre Derivadas

<u>Exemplo:</u> Seja $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$. Mostre que f satisfaz as condições do Teorema de Rolle no intervalo $[-3,3]$. Após determine os valores $c \in (-3,3)$ onde $f'(c) = 0$

- Condições do Teorema de Rolle:
  - $\rightarrow$ f é contínua em $[-3,3]$;
  - $\rightarrow$ f é derivável em $(-3,3)$;
  - $\rightarrow$ $f(-3) = -(-3)^4 + 8(-3)^2 + 9 = 0$ e $f(3) = -(3)^4 + 8(3)^2 + 9 = 0$
- $f'(x) = -4x^3 + 16x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 16x = 0$

$\Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 2$

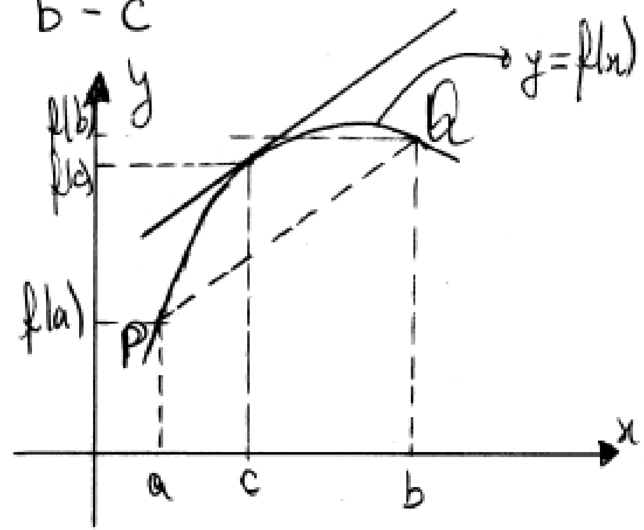
Logo os valores $c \in (-3,3)$ onde $f'(c) = 0$ são os elementos do conjunto $A = \{-2; 0; 2\}$.

Teoremas Sobre Derivadas

Teorema de Lagrange: (Valor médio para derivadas)

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - c}$$



Teoremas Sobre Derivadas

(Ponto Crítico) Definição: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto crítico de f se $f'(x_0) = 0$.

Exemplo: Dada a função $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$, determine os pontos críticos de f.

→ Como f é uma função derivável em $\mathbb{R}$, precisamos determinar os valores $x \in \mathbb{R}$ onde $f'(x) = 0$.

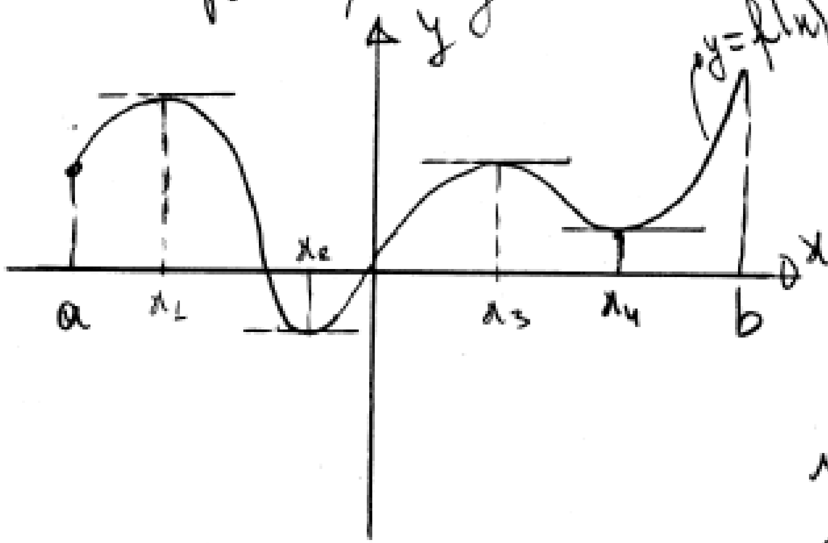
Como $f'(x) = -4x^3 + 16x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pm 2$

Logo os pontos críticos de f são: $0; -2; 2$.

Teoremas Sobre Derivadas

Nota: Caso numa função $c \in D(f)$ e não exista $f'(c)$, c também é denominado ponto crítico de f

Interpretação geométrica do ponto crítico



Sendo $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, os pontos críticos são exatamente os pontos onde temos retas tangentes, ao gráfico de f, horizontais

Teoremas Sobre Derivadas

Proposição: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, então todo ponto extremo local de f é também ponto crítico.

Pergunta: Se $f: I \to \mathbb{R}$ for uma função derivável no intervalo aberto I, e $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto extremo local?

Teoremas Sobre Derivadas

<u>Teorema</u> (Weierstrass): Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem x_m e $x_M \in [a,b]$ tais que:

$$f(x_m) = \min\{f(x),\ x\in[a,b]\} \quad \text{e}$$

$$f(x_M) = \max\{f(x),\ x\in[a,b]\}$$

Isso significa que uma função contínua definida sobre um conjunto compacto (fechado e limitado) sempre possui um valor de máximo e um valor de mínimo absoluto.

Teoremas Sobre Derivadas

Proposição: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e derivável no interior de I. Se f assume um valor extremo em I, então esse ponto extremo corresponde a uma das extremidades de I ou a um ponto crítico de f.

Nota: Já sabemos do Teorema de Weierstrass que $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua, admite máximo e mínimo. Com a proposição acima temos condições de determinar esses pontos extremos em intervalos compactos, de funções deriváveis sobre esses intervalos.

Teoremas Sobre Derivadas

Exemplo: Determine os valores de máximo e mínimo da função $f:[0,5] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - x^2$.

Teoremas Sobre Derivadas

Exemplo: Determine os valores de máximo e mínimo da função $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^3-x^2$.

Vídeo Aulas

Material para atividades assíncronas:

https://www.youtube.com/channel/UCJWVAaZwA9jh1XVVmyQ9znw

https://miltonkist.herokuapp.com/aulas/calculo-i/