

Himpunan

Bahan kuliah
Matematika Diskrit

Definisi

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- Himpunan Mahasiswa adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.

Cara Penyajian Himpunan

1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$
- $K = \{\{\}\}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, \dots, 100\}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A ;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A .

Contoh 2.

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$

$$K = \{\{\}\}$$

maka

$$3 \in A$$

$$\{a, b, c\} \in R$$

$$c \notin R$$

$$\{\} \in K$$

$$\{\} \notin R$$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$,

$$P_2 = \{ \{a, b\} \},$$

$$P_3 = \{ \{ \{a, b\} \} \},$$

maka

$$a \in P_1$$

$$a \notin P_2$$

$$P_1 \in P_2$$

$$P_1 \notin P_3$$

$$P_2 \in P_3$$

2. *Simbol-simbol Baku*

N = himpunan bilangan asli (natural) = $\{ 1, 2, \dots \}$

Z = himpunan bilangan bulat = $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan **U**.

Contoh: Misalkan $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan A adalah himpunan bagian dari U , dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

* **note** : simbol **P** ada yang menuliskan sebagai himpunan bilangan bulat positif, ada yang menuliskan sebagai himpunan bilangan prima.

di kuliah ini, **P** digunakan untuk himpunan bilangan prima.
Untuk bilangan bulat positif digunakan simbol **Z⁺** atau **N**

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh 4.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

$$A = \{ x \mid x \text{ bilangan bulat positif lebih kecil dari } 5 \}$$

$$\text{atau } A = \{ x \mid x \in N, x < 5 \}$$

yang ekuivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $M = \{ x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit} \}$

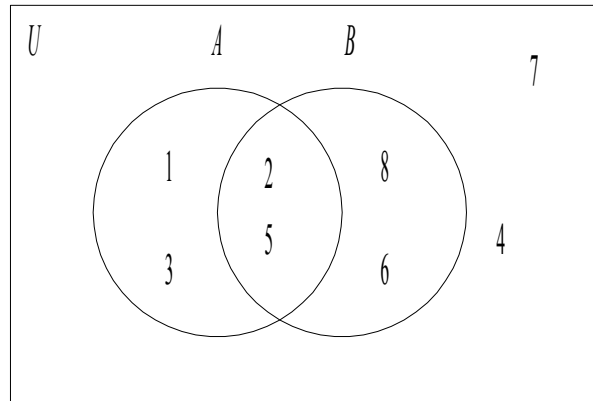
4. Diagram Venn

Contoh 5.

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$,

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut **kardinal** dari himpunan A .

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.

(i) $B = \{ x \mid x \text{ merupakan bilangan prima lebih kecil dari } 20 \}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) $T = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$, maka $|A| = 3$

Himpunan kosong (*null set*)

- Himpunan dengan kardinal $= 0$ disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : \emptyset atau $\{\}$

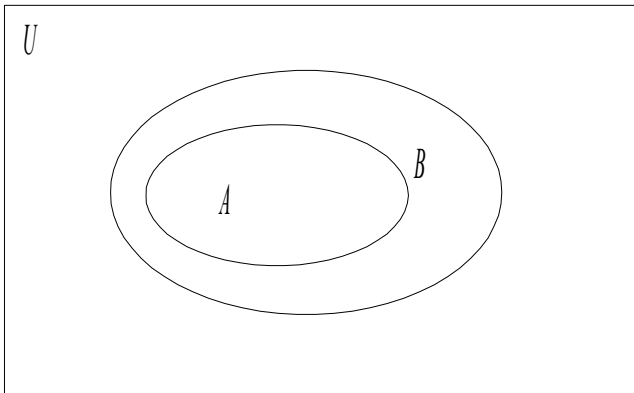
Contoh 7.

- (i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$
- (ii) $P = \{ \text{orang Indonesia yang pernah ke bulan} \}$, maka $n(P) = 0$
- (iii) $A = \{ x \mid x \text{ adalah akar persamaan kuadrat } x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset\}$
- himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B .
- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A .
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka \emptyset dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A .

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan \emptyset adalah *improper subset* dari A .

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$
 - (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
 A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B .
Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$
 - (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Latihan

[LIP00] Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah *proper subset* dari C dan C adalah *proper subset* dari B .

Jawaban:

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang-kurangnya satu elemen dari B .

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah *proper subset* dari B .

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A .
- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A . Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \iff A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$

Contoh 9.

- (i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x(x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
- (ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{ 5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
- (iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{ 3, 8 \}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:

- (a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
- (b) jika $A = B$, maka $B = A$
- (c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekuivalen

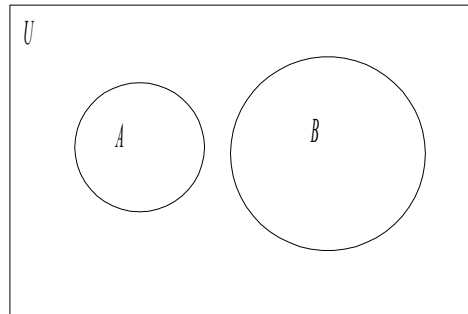
- Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 10.

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A // B$
- Diagram Venn:



Contoh 11.

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, \dots \}$, maka $A // B$.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.
- Notasi : $P(A)$ atau 2^A
- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh 12.

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$

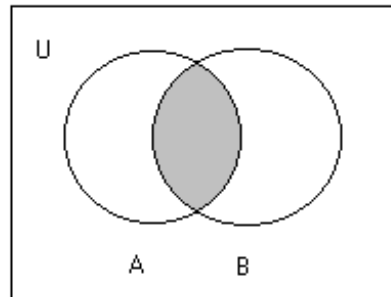
Contoh 13.

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{ \emptyset \}$ adalah $P(\{ \emptyset \}) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$. 22

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan (*intersection*)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

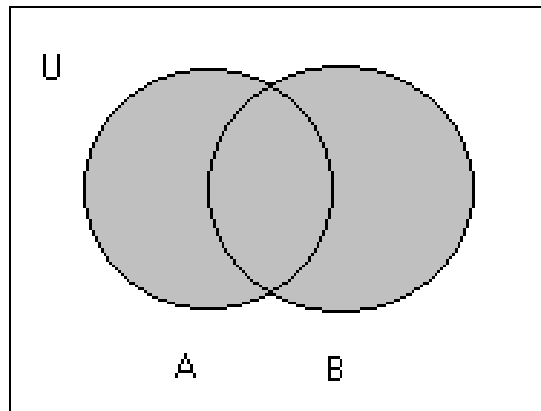


Contoh 14.

- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
(ii) Jika $A = \{3, 5, 9\}$ dan $B = \{-2, 6\}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: $A \parallel B$

2. Gabungan (*union*)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

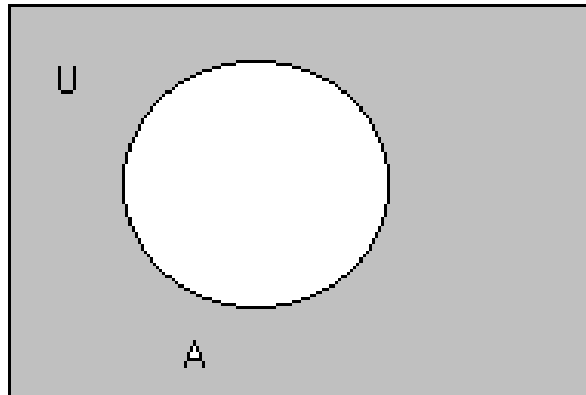


Contoh 15.

- (i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
- (ii) $A \cup \emptyset = A$

3. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\bar{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.

Misalkan $U = \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$,

- (i) jika $A = \{ 1, 3, 7, 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 2, 4, 6, 8 \}$
- (ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\bar{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990

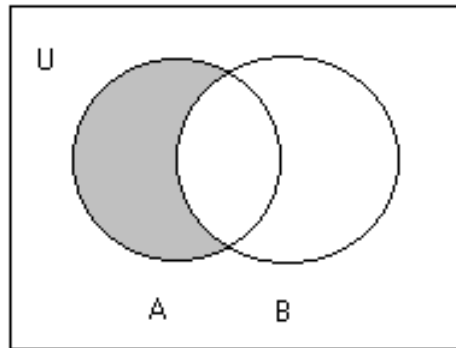
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

- (i) “mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri” $\rightarrow (E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$
- (ii) “semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta” $\rightarrow A \cap C \cap D$
- (iii) “semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta” $\rightarrow \bar{C} \cap \bar{D} \cap B$

4. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$

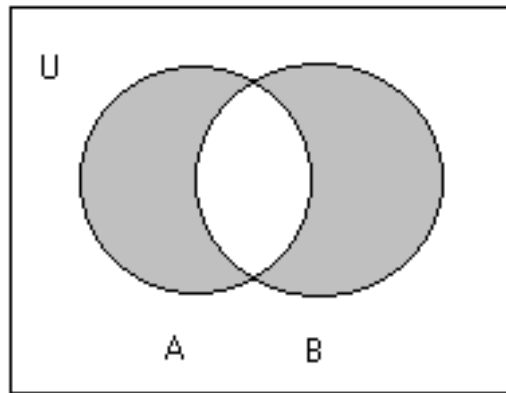


Contoh 18.

- (i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \emptyset$
- (ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

5. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

- (i) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai A” : $P \cap Q$
- (ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B” : $P \oplus Q$
- (iii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai C” : $U - (P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B \}$

Contoh 20.

- (i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$
- (ii) Misalkan $A = B =$ himpunan semua bilangan riil, maka
 $A \times B =$ himpunan semua titik di bidang datar

Catatan :

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga,
maka :

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

2. $(a,b) \neq (b,a)$

3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A dan B tidak
kosong

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Contoh 21. Misalkan

$A = \text{himpunan makanan} = \{ s = \text{soto}, g = \text{gado-gado}, n = \text{nasi goreng}, m = \text{mie rebus} \}$

$B = \text{himpunan minuman} = \{ c = \text{coca-cola}, t = \text{teh}, d = \text{es dawet} \}$

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^n A_i$$

Contoh 22.

$$(i) \ A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$
$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

Hukum-hukum Himpunan

- Disebut juga sifat-sifat (*properties*) himpunan
- Disebut juga hukum aljabar himpunan

1. Hukum identitas: <ul style="list-style-type: none">- $A \cup \emptyset = A$- $A \cap U = A$	2. Hukum <i>null</i> /dominasi: <ul style="list-style-type: none">- $A \cap \emptyset = \emptyset$- $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: <ul style="list-style-type: none">- $A \cup \bar{A} = U$- $A \cap \bar{A} = \emptyset$	4. Hukum idempoten: <ul style="list-style-type: none">- $A \cup A = A$- $A \cap A = A$

<p>5. Hukum involusi:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\overline{(\overline{A})} = A$ 	<p>6. Hukum penyerapan (absorpsi):</p> <ul style="list-style-type: none"> - $A \cup (A \cap B) = A$ - $A \cap (A \cup B) = A$
<p>7. Hukum komutatif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $A \cup B = B \cup A$ - $A \cap B = B \cap A$ 	<p>8. Hukum asosiatif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
<p>9. Hukum distributif:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 	<p>10. Hukum De Morgan:</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
<p>11. Hukum 0/1</p> <ul style="list-style-type: none"> - $\overline{\emptyset} = U$ - $\overline{U} = \emptyset$ 	

MATERI PENGAYAAN (TAMBAHAN)

Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas \rightarrow dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan

Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

- mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
- pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

- mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
- pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
- bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti \cup , \cap , dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti

$$\cup \rightarrow \cap,$$

$$\cap \rightarrow \cup,$$

$$\emptyset \rightarrow U,$$

$$U \rightarrow \emptyset,$$

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S .

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum <i>null</i> /dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \bar{A} = U$	Dualnya: $A \cap \bar{A} = \emptyset$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$

5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\emptyset} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \emptyset$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A.$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,

B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,

$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$

$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$

$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan A , B , dan C , berlaku

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ & |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Untuk himpunan A_1, A_2, \dots, A_r , berlaku:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r| = & \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + \\ & (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r| \end{aligned}$$

Latihan:

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Penyelesaian:

Diketahui:

$$|U| = 500$$

$$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$$

$$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$$

$$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = U - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Partisi

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, \dots dari A sedemikian sehingga:

(a) $A_1 \cup A_2 \cup \dots = A$, dan

(b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

Contoh 25. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A .

Himpunan Ganda (*multiset*)

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

Contohnya, $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1\}$, multiplisitas 0 adalah 4.
- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$,

$$P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

$$P \cap Q = \{ a, a, c \}$$

3. $P - Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
- multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q , jika selisihnya positif
 - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q .

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
 $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Pembuktian Proposisi Perihal Himpunan

- Proposisi himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Proposisi dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

Contoh: Buktikan “ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ”

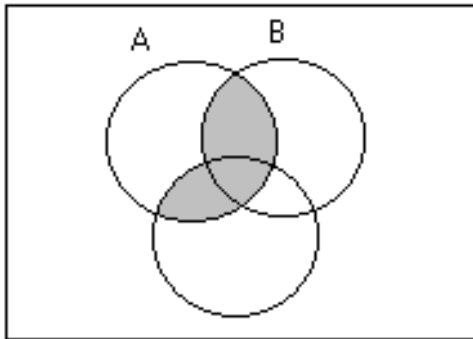
2. Implikasi

Contoh: Buktikan bahwa “Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$ ”.

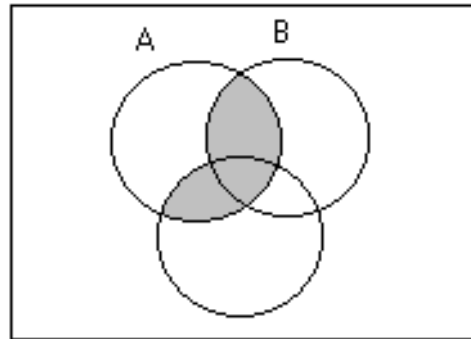
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Kedua diagram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta.
- Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

Bukti:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) &= A \cap (B \cup \bar{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= A \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A && \text{(Hukum identitas)}\end{aligned}$$

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \bar{A}) && \text{(Definisi operasi selisih)} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) && \text{(Hukum distributif)} \\ &= (A \cup B) \cap U && \text{(Hukum komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(Hukum identitas)} \end{aligned}$$

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B , bahwa

$$(i) \quad A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B \quad \text{dan}$$

$$(ii) \quad A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (i) \quad A \cup (\bar{A} \cap B) &= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) && \text{(H. distributif)} \\ &= U \cap (A \cup B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cup B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

(ii) adalah dual dari (i)

$$\begin{aligned} A \cap (\bar{A} \cup B) &= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) && \text{(H. distributif)} \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{(H. komplemen)} \\ &= A \cap B && \text{(H. identitas)} \end{aligned}$$

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian (\subseteq atau \subset).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \emptyset$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

- (i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$. Dari definisi operasi gabungan (\cup), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.
- (ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \emptyset$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan semesta (U). Tuliskan hasil dari operasi beda-setangkup berikut?

(a) $A \oplus U$ (b) $A \oplus \bar{A}$ (c) $\bar{A} \oplus U$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad A \oplus U &= (A - U) \cup (U - A) \\ &= (\emptyset) \cup (A) \\ &= \bar{A}\end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)
(Definisi operasi selisih)
(Hukum Identitas)

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad A \oplus \bar{A} &= (A - \bar{A}) \cup (\bar{A} - A) \\ &= (A \cap A) \cup (\bar{A} \cap \bar{A}) \\ &= A \cup \bar{A} \\ &= U\end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)
(Definisi operasi selisih)
(Hukum Idempoten)
(Hukum Komplemen)

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad \bar{A} \oplus U &= (\bar{A} \cup U) - (\bar{A} \cap U) \\ &= U - \bar{A} \\ &= A\end{aligned}$$

(Definisi operasi beda setangkup)
(Hukum Null dan Hukum Identitas)
(Definisi operasi selisih)