MATEMATIKA DISKRET

Metode Pembuktian

Nugroho Dwi Saputra

nugroho.dsaputra@gmail.com

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Dapat memahami aturan dalam metode pembuktian
- Dapat menggunakan metode pembuktian

PENDAHULUAN

Metode Pembuktian

Suatu Teorema atau Proposisi adalah suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan bahwa nilai kebenarannya (truth value) selalu benar (absah, valid). Proses menunjukkannya disebut suatu pembuktian.

Suatu aksioma atau suatu postulat adalah suatu pernyataan yang keabsahannya tidak perlu dibuktikan.

Suatu pembuktian adalah suatu barisan pernyataan yang absah, setiap pernyataannya dapat berupa suatu aksioma atau suatu postulat atau teorema lain yang keabsahannya sudah dibuktikan, atau hipotesa dari teorema yang bersangkutan atau dapat diturunkan dari salah satu atau beberapa pernyataan sebelumnya berdasarkan aturan-aturan tertentu. Aturan-aturan ini disebut rules of inference.

PENDAHULUAN

Suatu lemma adalah suatu teorema yang sederhana dan dipakai dalam pembuktian teorema lain yang lebih kompleks.

Suatu corollary juga merupakan suatu teorema yang merupakan akibat langsung dari suatu teorema yang sudah dibuktikan.

Metode Membuktikan sebuah Teorema

(i) Vacuous proof

(ii) Trivial proof

(iii) Direct proof

(iv) Indirect proof atau proof by contraposition

(v) Proof by cases.

1. VACUOUS PROOF

Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila p bernilai *false*.

Jadi untuk membuktikan bahwa kalimat tersebut bernilai *true*, salah satu cara adalah membuktikan bahwa p bernilai *false*. Pembuktian cara ini disebut ***vacuous proof***.

Contoh 1.

$P(n)$:= Jika $n > 1$ maka $n^2 > n$

Buktikan: $P(0)$:=Jika $0 > 1$ maka $0^2 > 0$ bernilai *true*.

Bukti:

Nyatakan $P(0)$ sebagai $p \rightarrow q$ dengan $p := 0 > 1$ dan $q := 0^2 > 0$. Untuk membuktikan $p \rightarrow q$ cukup dibuktikan bahwa p bernilai *false*. Sedangkan $p := 0 > 1$ yang memang bernilai *false*.

Jadi, $P(0)$ *true* berdasarkan ***vacuous proof***.

2. TRIVIAL PROOF

Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila q bernilai *true*. Jadi untuk membuktikan bahwa kalimat tersebut bernilai *true*, salah satu cara adalah membuktikan bahwa q bernilai *true*.

Pembuktian cara ini disebut ***trivial proof***.

2. TRIVIAL PROOF

Contoh 2.

$P(n)$:= Jika a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$, maka $a^n \geq b^n$.

Buktikan:

$P(0)$:= Jika a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$, maka $a^0 \geq b^0$.

bernilai *true*.

Bukti:

Nyatakan $P(0)$ sebagai $p \rightarrow q$ dengan

p := a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$

dan $q := a^0 \geq b^0$.

Untuk membuktikan $p \rightarrow q$ cukup dibuktikan bahwa q bernilai *true*.

Sedangkan $q := a^0 \geq b^0$ tidak lain adalah $1 \geq 1$ yang bernilai *true*.

Jadi, $P(0)$ *true* berdasarkan ***trivial proof***

3. DIRECT PROOF

Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila jika p bernilai *true*, maka q harus bernilai *true*. Dengan perkataan lain harus **ditunjukkan bahwa keadaan *p* bernilai *true* dan *q* bernilai *false* tidak pernah terjadi**. Pembuktikan ini disebut ***direct proof***.

3. DIRECT PROOF

Berikan suatu ***direct proof*** untuk teorema berikut:

Jika n adalah sebuah bilangan ganjil, maka n^2 juga bilangan ganjil.

Bukti

Teorema di atas dapat dinyatakan dalam kalimat logika predikat:

$\forall n\ (p(n) \rightarrow q(n))$ dengan

$p(n) := n$ adalah sebuah bilangan ganjil, dan

$q(n) := n^2$ adalah sebuah bilangan ganjil

Jadi yang mau dibuktikan adalah $\forall n\ (p(n) \rightarrow q(n))$ *valid.*

Misalkan bahwa untuk sembarang n, $p(n)$ *true*, akan ditunjukkan bahwa

$q(n)$ juga *true*.

$p(n)$ *true*, berarti n adalah sebuah bilangan ganjil, jadi $n = 2k + 1$ dengan k sebuah bilangan bulat.

Jadi $n^2 = (2k + 1)2 = 4k2 + 4k + 1 = 2(2k2 + 2k) + 1$ maka $n2$ juga bilangan ganjil, jadi $q(n)$ *true*.

Dengan perkataan lain $\forall n\ (p(n) \rightarrow q(n))$ *valid.*

3. DIRECT PROOF

Suatu bilangan bulat n disebut sebuah ***perfect square*** bila terdapat sebuah bilangan bulat k sehingga $n = k^2$.

Contoh 4.

Berikan suatu ***direct proof*** untuk teorema berikut:

Jika m dan n adalah sebuah *perfect square*, maka hasilkalinya mn

juga sebuah *perfect square*. Bukti:

Teorema di atas dapat dinyatakan dalam kalimat logika predikat:

$\forall m\ \forall n\ (p(m) \wedge p(n) \rightarrow p(mn))$

dengan $p(n) :=$ n adalah sebuah *perfect square*

Jadi yang mau dibuktikan adalah $\forall m\ \forall n\ (p(m) \wedge p(n) \rightarrow p(mn))$ *valid.*

Dengan perkataan lain harus ditunjukkan bahwa untuk sembarang m dan n, bila $p(m) \wedge p(n)$ bernilai *true*, $p(mn)$ juga bernilai *true*.

Dari $p(m) \wedge p(n)$ bernilai *true*, diperoleh m adalah *perfect square*, berarti ada bilangan bulat h sehingga $m = h^2$.

n adalah *perfect square*, berarti ada bilangan bulat k sehingga $n = k^2$. Maka $mn = (h^2)(k^2)$.

Berdasarkan sifat perkalian bilangan bulat hasilkali diperoleh $mn = (h^2)(k^2) = (hk)^2$.

Yang berarti mn adalah sebuah *perfect square*. Jadi $p(mn)$ bernilai *true*.

4. INDIRECT PROOF

Perhatikan bahwa kalimat

$p \rightarrow q$

setara dengan kalimat *contrapositive*-nya

$\neg q \rightarrow \neg p$.

Jadi untuk membuktikan kalimat pertama, dapat dibuktikan kalimat kedua. Cara pembuktian ini disebut ***indirect proof*** **atau** ***proof by contraposition*****.**

4. INDIRECT PROOF

Contoh 5.

Berikan suatu ***indirect proof*** **atau** ***proof by contraposition*** untuk teorema berikut:

Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Bukti. Ambil

$p := 3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil

$q := n$ adalah sebuah bilangan ganjil

Yang ingin dibuktikan adalah $p \to q$

Dengan indirect proof harus membuktikan bahwa

$\neg q \to \neg p$,

yaitu:

4. INDIRECT PROOF

Jika n bukan bilangan ganjil, maka $3n + 2$ juga bukan sebuah bilangan ganjil.

Misalkan bahwa n bukan bilangan ganjil', dengan perkataan lain n adalah bilangan genap, berarti $n = 2k$ untuk sebuah bilangan bulat k.

Jadi $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$ berarti $3n + 2$ adalah sebuah bilangan genap, atau

$3n + 2$ juga bukan sebuah bilangan ganjil. Maka $\neg q \rightarrow \neg p$ telah terbukti.

4. INDIRECT PROOF

Contoh 6.

Buktikan: Jika n adalah sebuah bilangan bulat dan n^2 adalah bilangan ganjil, maka n adalah sebuah bilangan ganjil pula.

Bukti:

Ambil $p := n^2$ adalah sebuah bilangan ganjil

$q := n$ adalah sebuah bilangan ganjil

Yang ingin dibuktikan adalah $p \rightarrow q$.

Bila dipakai *direct proof* akan sulit dibuktikan, maka akan dipakai *indirect proof.*

Dengan *indirect proof* harus membuktikan bahwa

$\neg q \rightarrow \neg p$,

dengan $\neg q := n$ bukan sebuah bilangan ganjil,

berarti n adalah sebuah bilangan genap.

$\neg p := n^2$ bukan sebuah bilangan ganjil,

berarti n adalah sebuah bilangan genap.

4. INDIRECT PROOF

Bila $\neg q$ *true*

berarti n adalah sebuah bilangan genap,

berarti ada bilangan bulat k sehingga $n = 2k$.

Jadi, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$,

yang berarti n^2 adalah sebuah bilangan genap, maka $\neg p$ juga *true*.

5. PROOF BY CASES

Perhatikan bahwa kalimat

$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots\ldots \vee p_n) \rightarrow q$

setara dengan kalimat

$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots\ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$

Jadiuntuk membuktikan kalimat pertama, dapat dibuktikan setiap kalimat

$p_i \rightarrow q$ untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$.

Cara pembuktian ini disebut **proof by cases**.

5. PROOF BY CASES

Contoh 7.

Buktikan: $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Bukti:

Ambil p := n adalah sebuah bilangan bulat, dan q := $n^2 \geq n$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ dengan

p_1 := n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$

p_2 := $n = 0$

dan p_3 := n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai proof by cases, yaitu dengan membuktikan

5. PROOF BY CASES

(i) $p_1 \to q$ atau

Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

(ii) $p_2 \to q$ atau Jika $n = 0$ maka $n^2 \geq n$. Ternyata benar.

(iii) $p_3 \to q$ atau Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

Maka $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \to q$ terbukti.

5. PROOF BY CASES

Contoh 8.

Buktikan: Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \leq 4$ maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$.

Bukti:

n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \leq 4$,

berarti $n = 1$ atau $n = 2$ atau $n = 3$ atau $n = 4$.

Ambil $p_1 := n = 1$, $p_2 := n = 2$, $p_3 := n = 3$, $p_4 := n = 4$,

dan $q := (n + 1)^3 \geq 3^n$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai proof by cases, yaitu dengan

membuktikan

5. PROOF BY CASES

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau Jika $n = 1$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 2$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika $n = 3$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$, dan

(iv) $p_4 \rightarrow q$ atau Jika $n = 4$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

Untuk (i):

Untuk $n = 1$, $(n + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 8 \geq 3$. Berarti $p1 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (ii):

Untuk n = 2, $(n + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 27 \geq 3^2$. Berarti $p2 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iii):

Untuk $n = 3$, $(n + 1)^3 = (3 + 1)^3 = 64 \geq 3^3$. Berarti $p3 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iv):

Untuk $n = 4$, $(n + 1)^3 = (4 + 1)^3 = 125 \geq 3^4$. Berarti $p4 \rightarrow q$ terbukti. Jadi $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.