

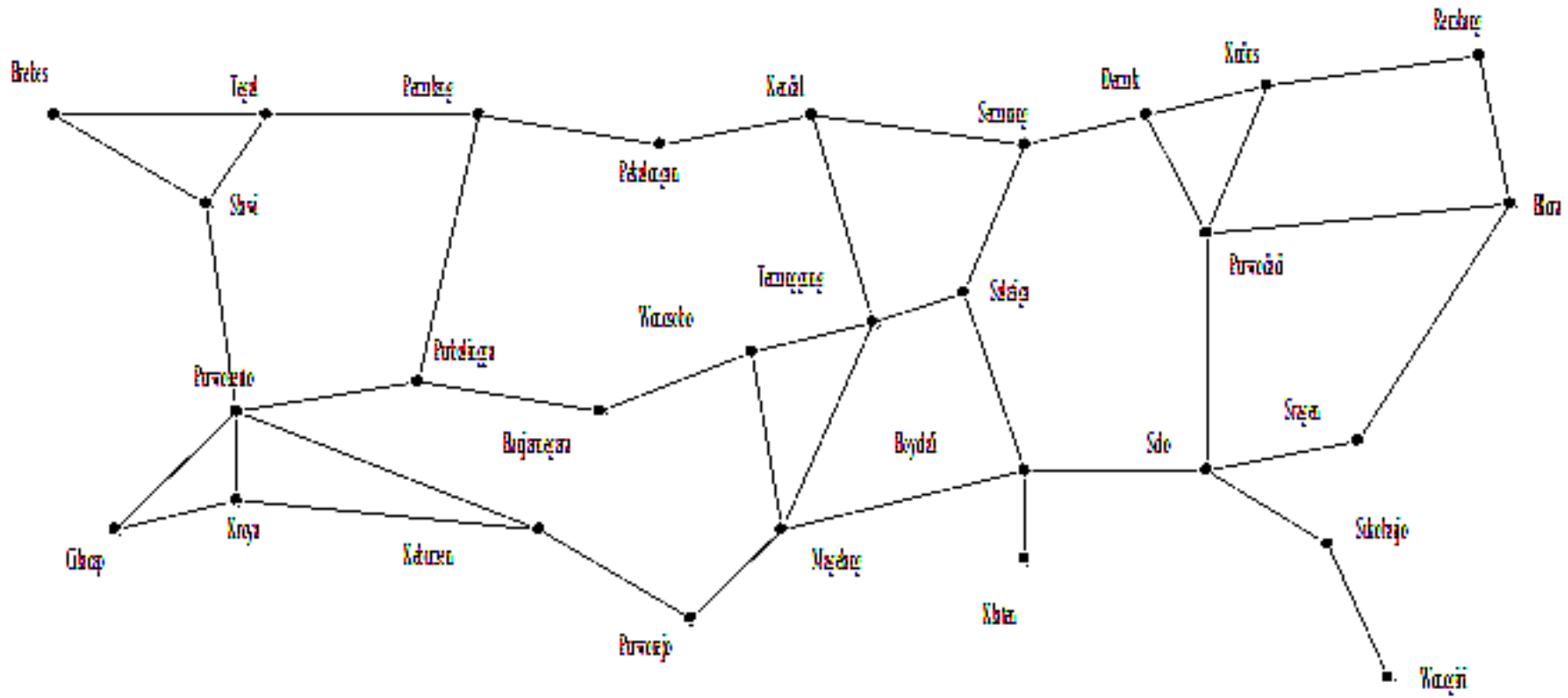
# Graf Teori

# Graf

- Representasi dari sejumlah objek diskrit dimana beberapa pasang objek dihubungkan dengan garis.
- Objek disimbolkan dengan titik/simpul (vertex) dan hubungannya disimbolkan dengan garis/sisi (edge)

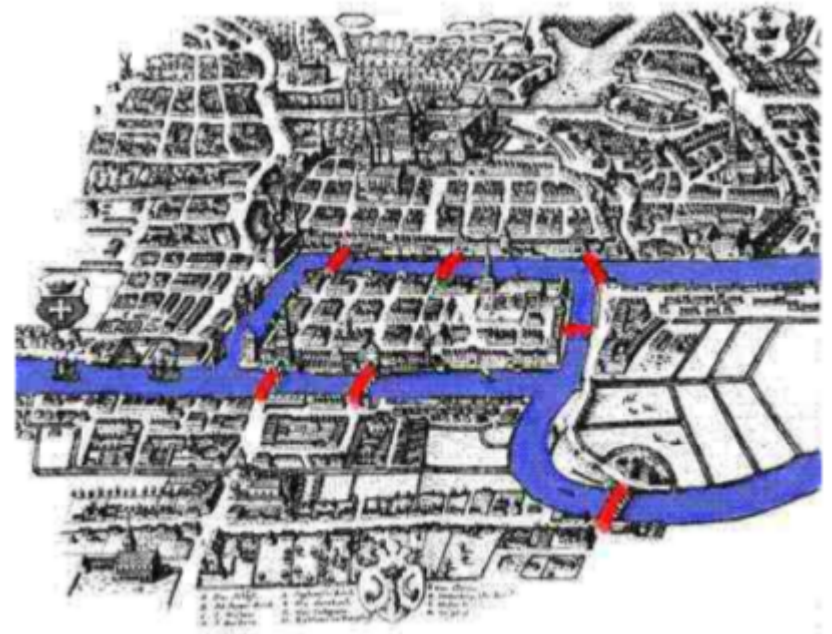
# Contoh

- Graf yang menunjukkan kota-kota di Jawa Tengah dan hubungan ketetanggaannya

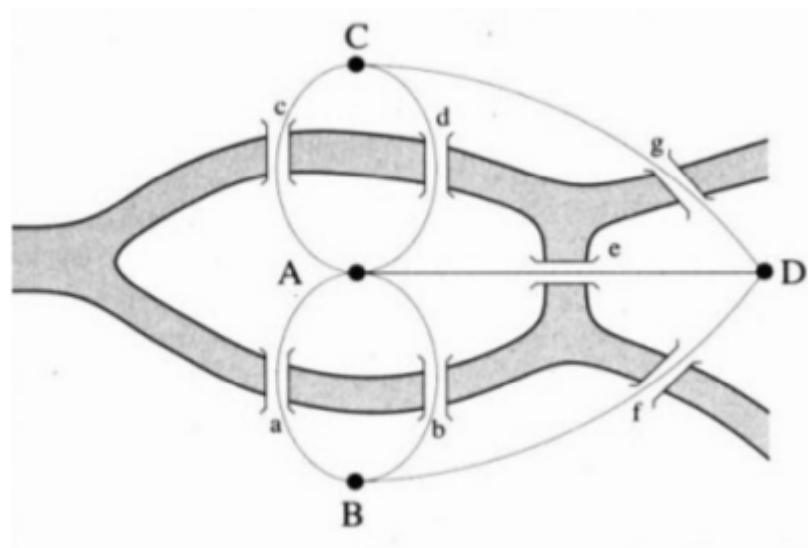


# Sejarah

- Teori Graf bermula dari masalah “7 Jembatan Königsberg” (tahun 1736)
- Bisakah dari satu tempat, menyeberangi seluruh jembatan tersebut masing-masing sekali?



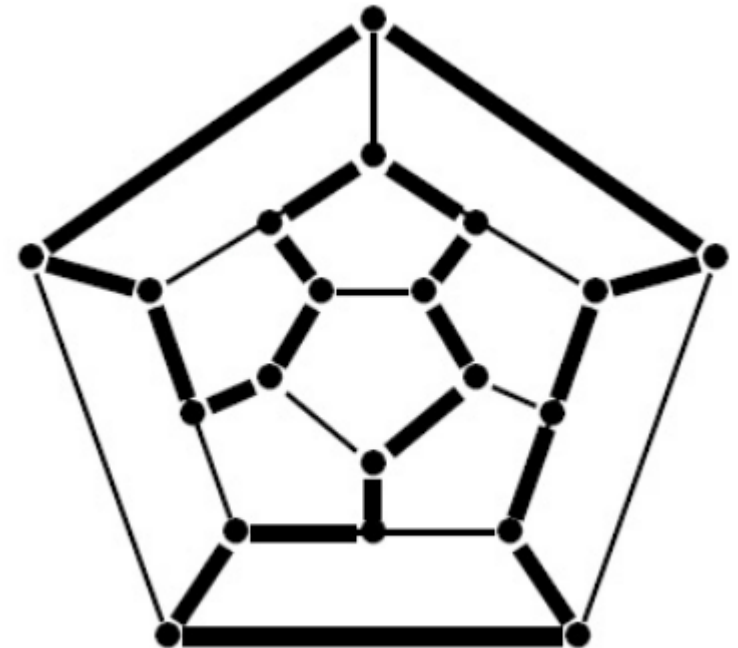
- Tiap wilayah diwakili dengan titik dan jembatan yang menghubungkan dua wilayah diwakili dengan garis yang menghubungkan dua titik tersebut.



- Masalahnya sama seperti cara menggambar garis tersebut dengan pensil tanpa mengangkat pensil dari awal hingga akhir.
- Euler membuktikan bahwa hal tersebut tidak mungkin bisa dilakukan.

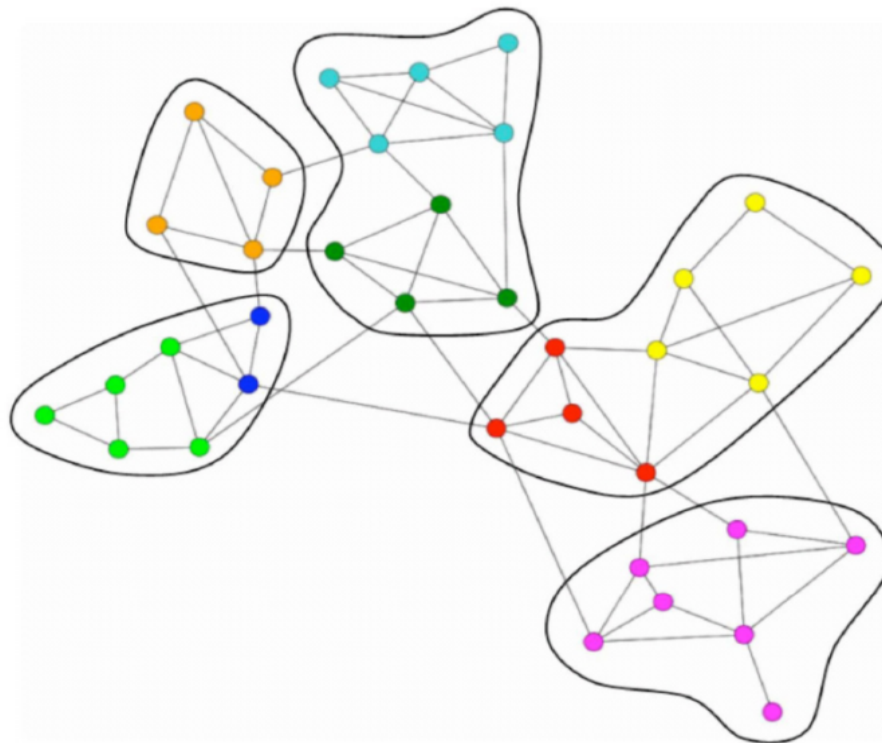
# Hamilton

- Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865) mendesain sebuah mainan serupa graf.
- Bagaimana cara menjelajah semua kota tepat sekali dan kembali lagi ke kota semula.



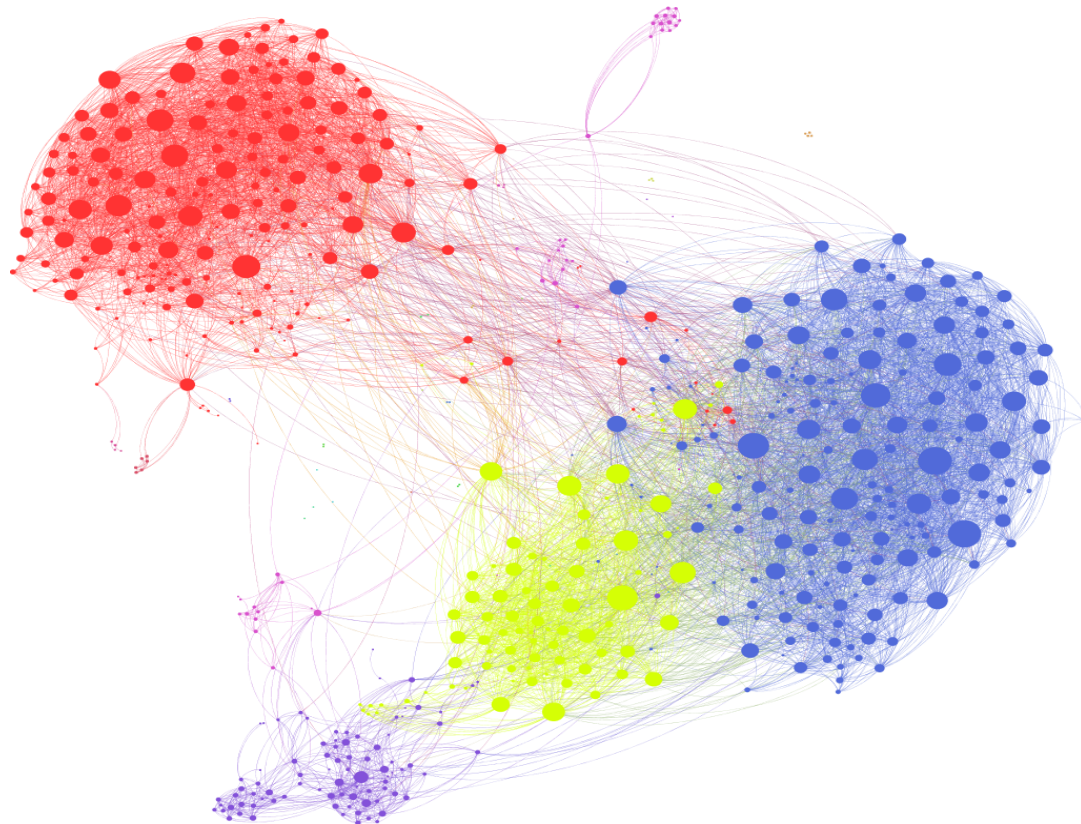
# Aplikasi Graf

- Sekarang graf digunakan untuk banyak hal : diantaranya untuk menyatakan komunitas di jaringan pertemanan

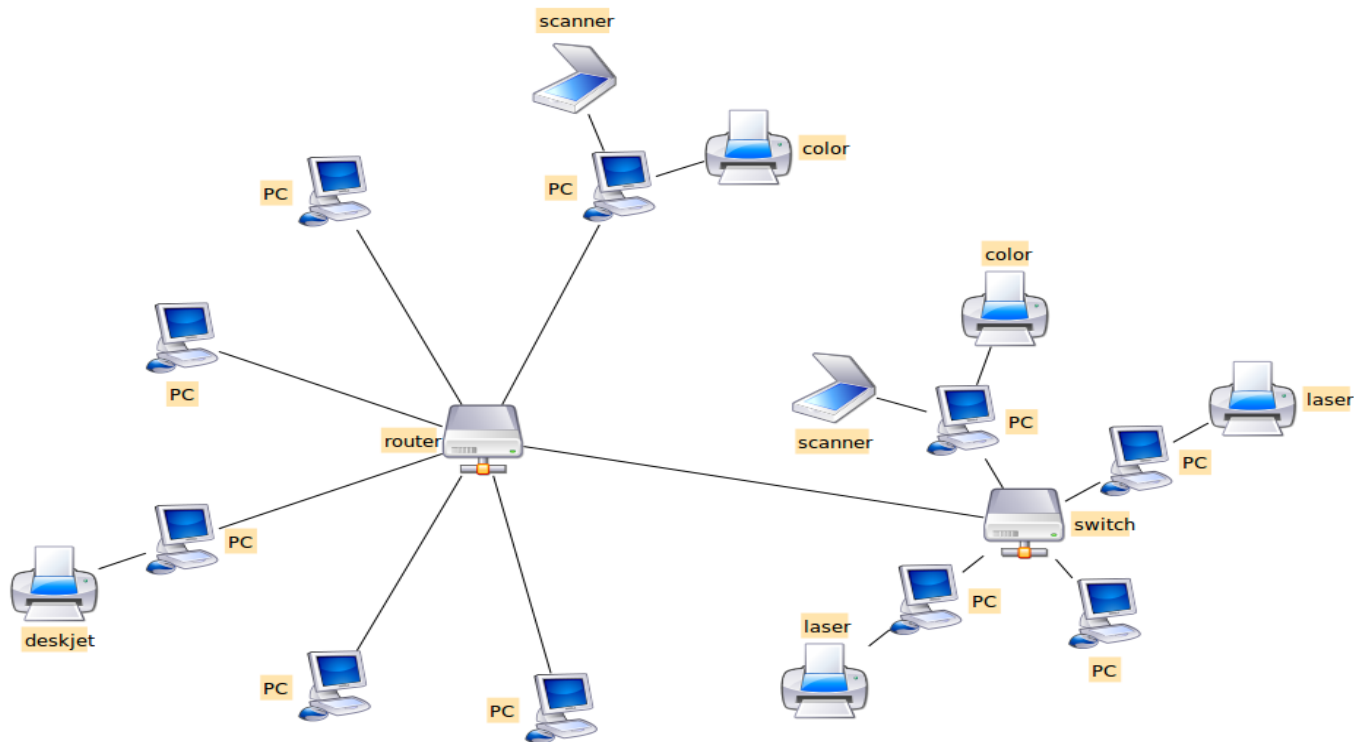




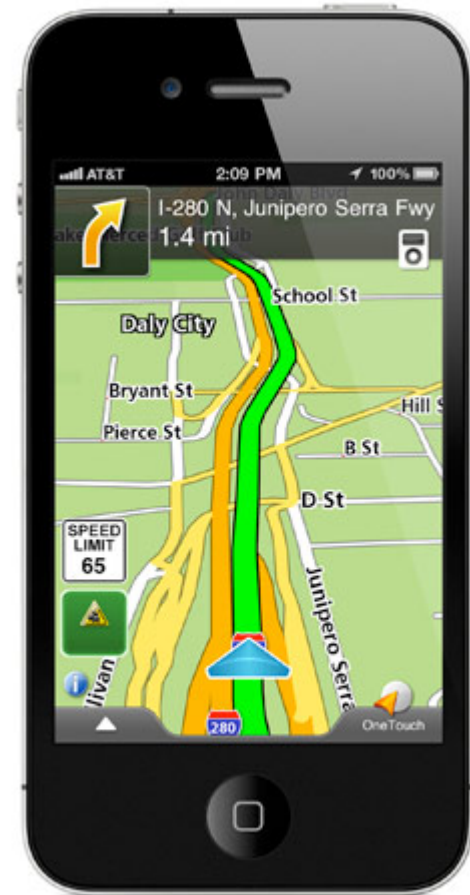
- Bahkan berkembang sangat besar (Sosial Media)



- Untuk menggambarkan koneksi jaringan komputer



- Dalam aplikasi GPS untuk mencari rute terpendek
- dan lain lain  
(di berbagai bidang)



# Definisi Formal Graf

- Sebuah graf  $G$  adalah himpunan pasangan berurut dari himpunan titik tak kosong  $V$ , himpunan sisi  $E$ , dan fungsi  $\psi_G$  yang memetakan anggota  $E$  ke  $V \times V$

$$G = (V, E, \psi_G)$$

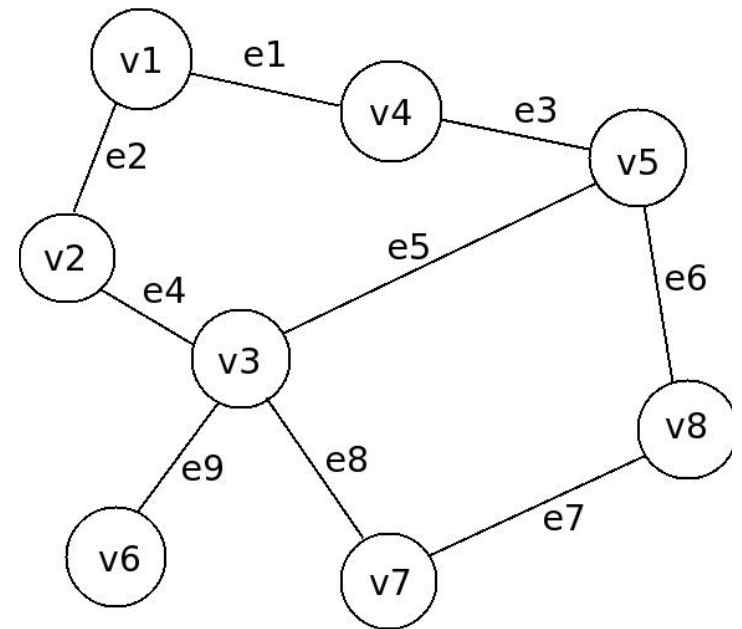
$$V \neq \emptyset$$

$$\psi_G : E \rightarrow V \times V$$

# Contoh

- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8\}$
- $E = \{e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9\}$

$\psi_G(e1) = (v1, v4), \psi_G(e2) = (v1, v2),$   
 $\psi_G(e3) = (v4, v5), \psi_G(e4) = (v2, v3),$   
 $\psi_G(e5) = (v3, v5), \psi_G(e6) = (v5, v8),$   
 $\psi_G(e7) = (v7, v8), \psi_G(e8) = (v3, v7),$   
 $\psi_G(e9) = (v3, v6)$



# Definisi Formal Graf

Atau

- Graf  $G$  adalah himpunan pasangan berurut dari himpunan titik tak kosong  $V$  dan himpunan sisi  $E$  yang menghubungkan sepasang titik

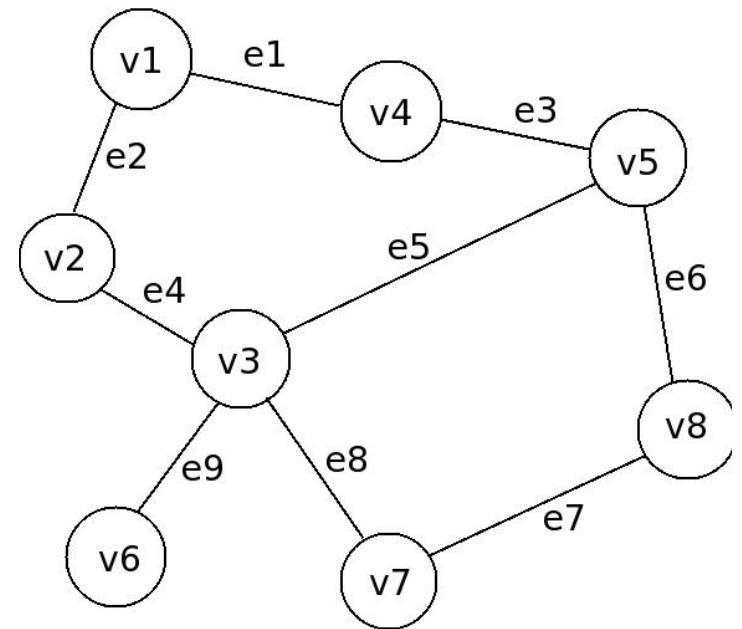
$$G = (V, E)$$

$$V \neq \emptyset$$

$$E \subseteq V \times V$$

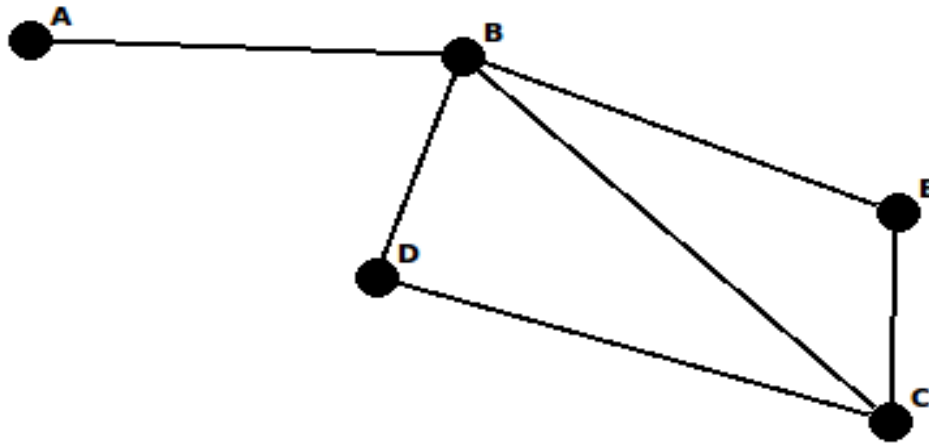
# Contoh

- $V = \{v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8\}$
- $E = \{e1=(v1, v4),$   
     $e2=(v1, v2), e3=(v4, v5),$   
     $e4=(v2, v3), e5=(v3, v5),$   
     $e6=(v5, v8), e7=(v7, v8),$   
     $e8=(v3, v7), e9=(v3, v6)\}$



# Contoh

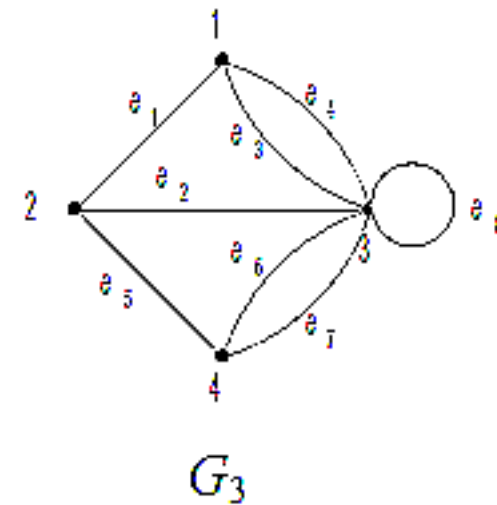
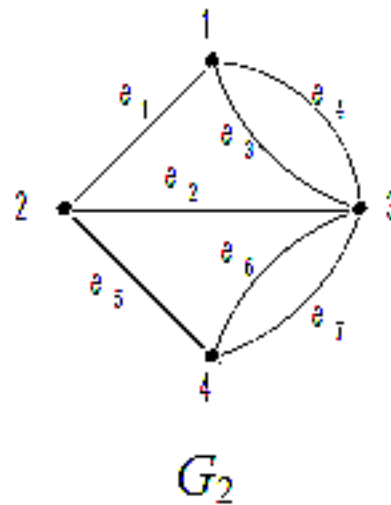
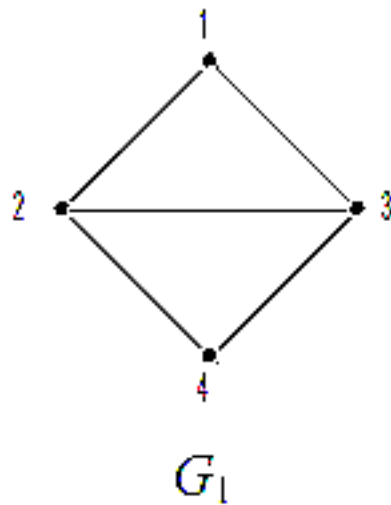
- $V = \{a,b,c,d,e\}$
- $E = \{ab,be,bc,bd,ec,cd\}$





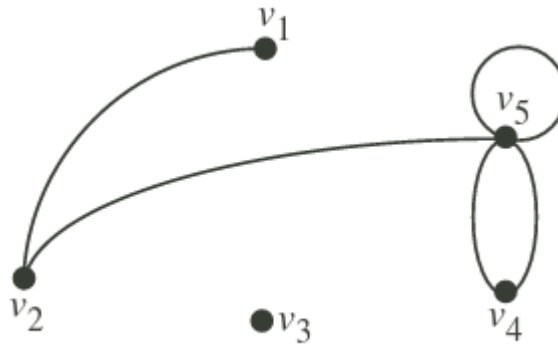
# Latihan

- Sebutkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf berikut



# Latihan

- Sebutkan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf berikut



$G_4$

# Istilah

- Ukuran dan Orde (size, order)
- Bertetangga (adjacent)
- Bertumpu (incident)
- Gelang (loop)
- Sisi ganda (multi edge)
- Jalan (walk)
- Jejak (trail)
- Lintasan (path)
- Sirkuit (cycle)
- Jarak (distance)

# Ukuran dan Orde

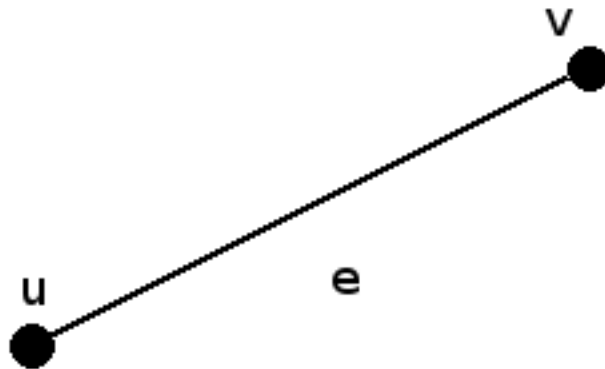
- Orde dari sebuah graf ( $|V|$  atau  $v(G)$ ) ditentukan dari banyaknya **titik** yang ada pada graf tersebut
- Ukuran dari sebuah graf ( $|E|$  atau  $\varepsilon(G)$ ) ditentukan dari banyaknya **sisi** pada graf tersebut

- Berdasarkan ordenya, graf bisa dibagi menjadi 2 macam :
  - Graf berhingga : jika himpunan titiknya berhingga
  - Graf tak berhingga : jika himpunan titiknya tak berhingga
- Graf **trivia** adalah graf yang hanya memiliki **satu titik** dan **tidak memiliki sisi**.

# Bertetangga

- Dua titik **u** dan **v** disebut **bertetangga** jika ada setidaknya sebuah sisi **e** yang menghubungkan u dan v.

u bertetangga dengan v  $\leftrightarrow (u,v) \in E$



# Bertumpuan

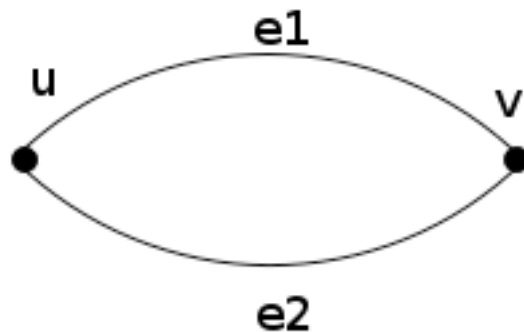
- Sebuah sisi **e** disebut **bertumpu** pada titik **u** dan **v** jika u dan v bertetangga melalui sisi e.

$e$  bertumpu pada  $u$  dan  $v \leftrightarrow e = (u,v)$

- Sebuah sisi pasti bertumpu ke dua buah titik (bisa titik yang sama atau titik yang berbeda)

# Sisi Ganda

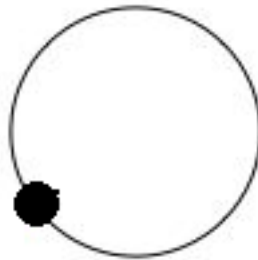
- Jika sepasang titik yang sama dihubungkan dengan lebih dari satu sisi, maka sisi-sisi tersebut disebut sebagai **sisi ganda**.





# Gelang/Loop

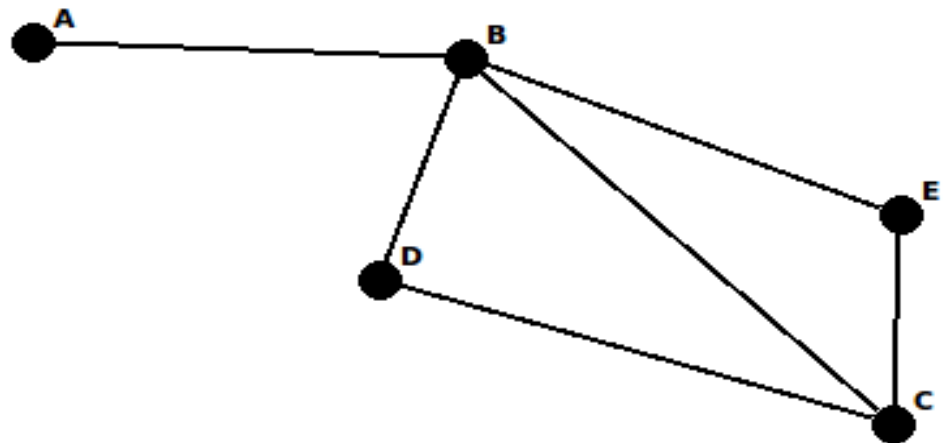
- Jika sebuah sisi bertumpu ke titik yang sama, maka sisi tersebut disebut sebagai **gelang/loop**.



# Derajat

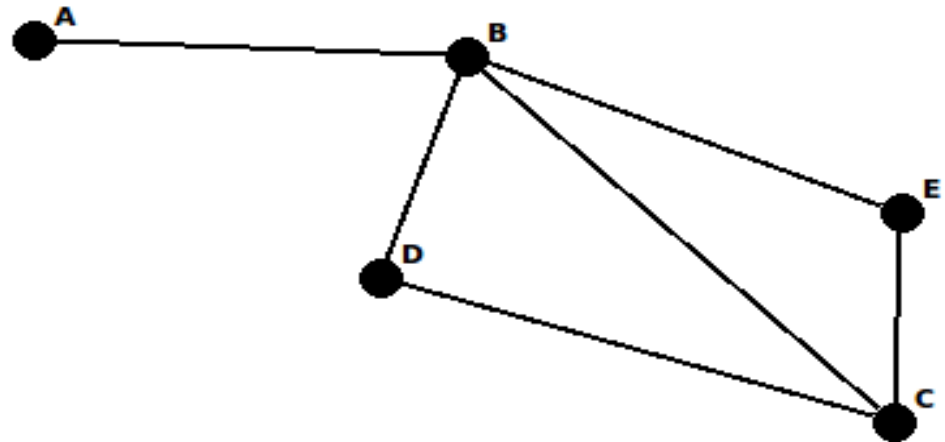
- **Derajat** dari sebuah titik  $v$  (disimbolkan dengan  $\deg(v)$ ) adalah banyaknya sisi yang bertumpu pada titik tersebut. (loop dihitung 2)
- Derajat **maksimal** dari graf  $G$  ( $\Delta(G)$ ) adalah **derajat terbesar** dari titik-titik graf  $G$
- Derajat **minimal** dari graf  $G$  ( $\delta(G)$ ) adalah derajat **terkecil** dari titik-titik graf  $G$

$$\deg(c) = 3$$



# Contoh

- $\deg(a) = 1$
- $\deg(b) = 4$
- $\deg(c) = 3$
- $\deg(d) = 2$
- $\deg(e) = 2$



- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 1$

# Teorema

- Jumlah derajat seluruh titik pada graf adalah dua kali ukuran graf tersebut

$$\sum \deg(v_i) = 2 \cdot |E|$$

- bisa dibuktikan menggunakan induksi matematika

# Jalan (Walk)

- Sebuah **jalan** adalah barisan tak kosong

$$w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$$

dimana  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  untuk  $1 \leq i \leq k$

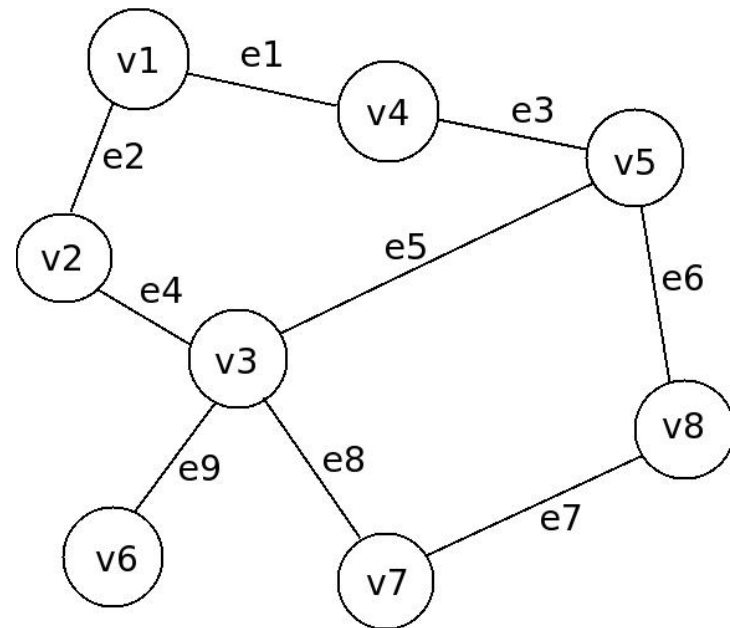
- $v_0$  disebut **titik pangkal** dari jalan  $w$
- $v_k$  disebut **titik ujung** dari jalan  $w$
- titik lainnya disebut titik internal
- **panjang** dari jalan  $w$  adalah  $k$  (banyak langkah yang dibutuhkan untuk berjalan dari titik pangkal ke titik ujung) = banyak sisi yang dilalui

# Jejak (Trail) dan Lintasan (Path)

- **Jejak** adalah jalan dimana **semua sisi** yang dilalui **berbeda**.
- **Lintasan** adalah jalan dimana **semua titik** yang dilalui **berbeda**.
- Panjang jejak dan panjang lintasan dihitung dengan cara yang sama dengan panjang jalan.

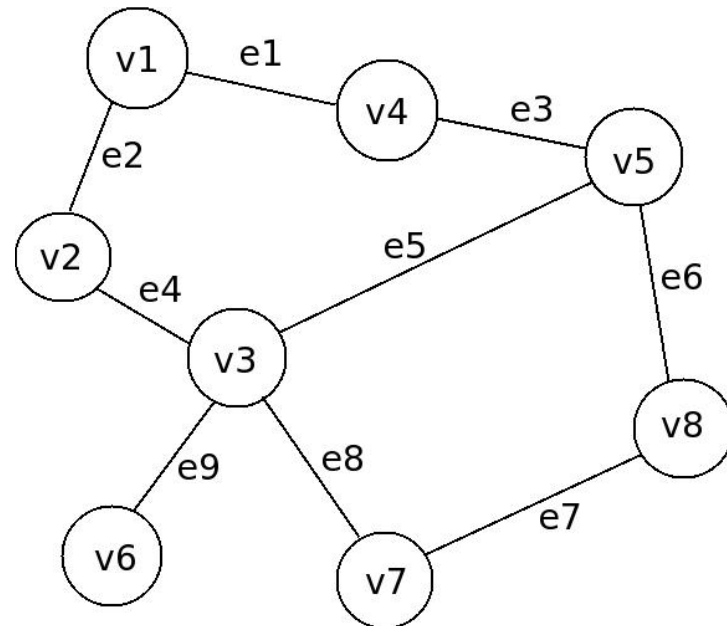
# Contoh

- Diberikan graf G berikut
- barisan  $w = v_2 e_2 v_1 e_1 v_4 e_3 v_5 e_5 v_3 e_8 v_7$  adalah sebuah walk dari titik  $v_2$  ke  $v_7$
- panjang  $w = ?$
- apakah jalan tersebut berupa jejak?
- apakah jalan tersebut berupa lintasan?



# Sirkuit (Circuit) dan Lingkaran (Cycle)

- Jalan yang **titik pangkal dan ujungnya sama** disebut sebagai **jalan tertutup (closed walk)**.
- Sebuah **sirkuit** adalah **jejak yang tertutup** (jejak yang **titik pangkal dan titik ujungnya sama**).
- Sebuah **lingkaran** adalah **lintasan yang tertutup**.
- $c = v_3 e_5 v_5 e_6 v_8 e_7 v_7 e_8 v_3$  adalah sebuah sirkuit dengan panjang 4





Pada graf  $G$  :

- Sebutkan sebuah lingkaran dengan panjang 5
- Sebutkan sebuah closed walk dengan panjang 7
- Adakah sebuah sirkuit dengan panjang 8 pada graf tersebut?

