

Graf Teori

Bagian 2

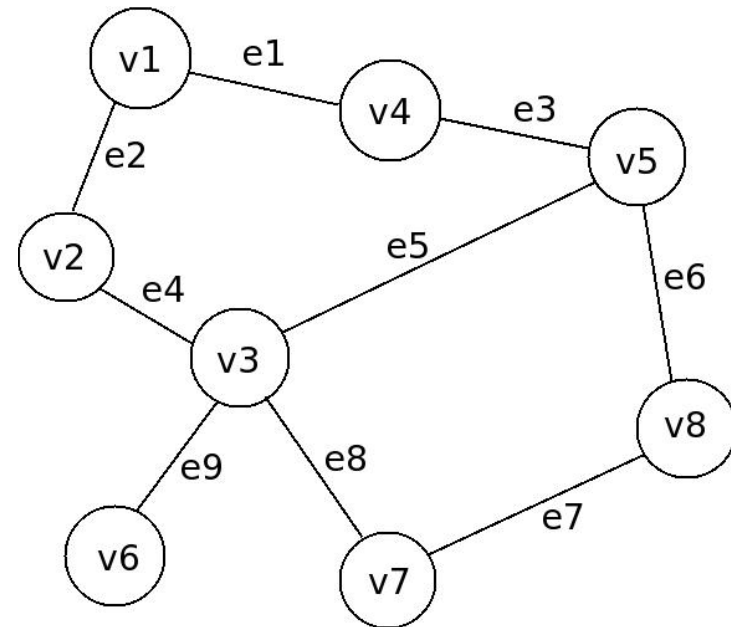
- Jarak (distance)
- Diameter
- Jenis Graf
- Representasi Graf
- Isomorfisme Graf

Jarak

- kita dapat membuat beberapa walk/trail/path yang berbeda dari sebuah titik pangkal a , ke sebuah titik ujung b
- **jarak** dari titik a ke b adalah **panjang path terpendek** yang menghubungkan titik a dan b . dituliskan sebagai **$d(a,b)$**

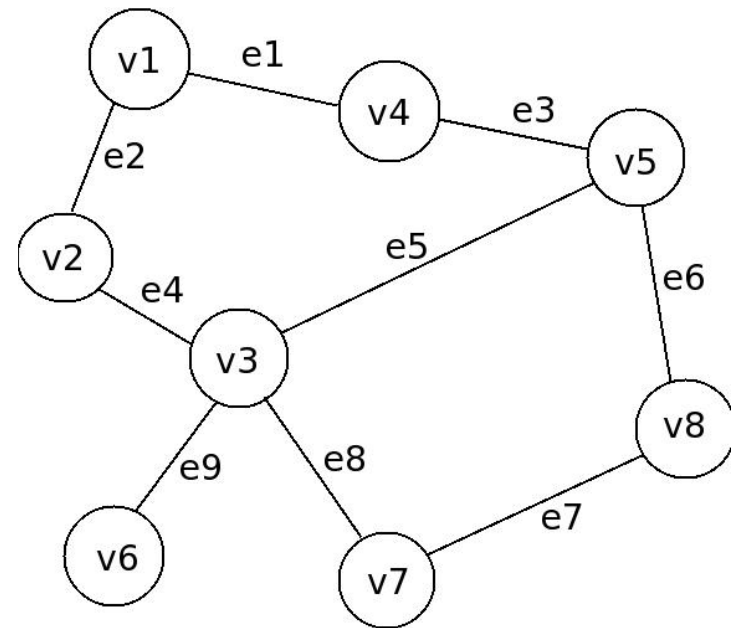
Contoh

- $d(v1, v7) = 3$
- $d(v6, v5) = 2$



Diameter

- **Diameter dari graf G** adalah **jarak terpanjang** antar sembarang 2 pasang titik pada G.
- dinotasikan dengan $\text{diam}(G)$
- $\text{diam}(G) = 3$



Terhubung

- Sebuah graf dikatakan sebagai **graf terhubung** jika untuk sembarang dua titik u dan v , dapat dibuat path yang berpangkal di u dan berakhir di v .
- Jika tidak, maka graf tersebut dikatakan **graf tidak terhubung**.

Jenis Graf

- Jika ditinjau dari arah sisinya, graf dibagi menjadi 2 macam
 - graf berarah (directed graph)
 - graf tidak berarah (undirected graph / graph)
- Jika ditinjau dari bentuk sisinya, sebuah graf dapat dibagi menjadi 3 macam
 - graf sederhana (simple graph)
 - graf ganda (multi graph)
 - graf semu (pseudo graph)

Graf Sederhana

- **Graf sederhana** adalah graf yang **tidak memiliki sisi ganda dan loop**.
- Teorema :

Jika G adalah graf sederhana dan banyaknya titik adalah n , maka banyaknya sisi dari G maksimal sebanyak $nC2$

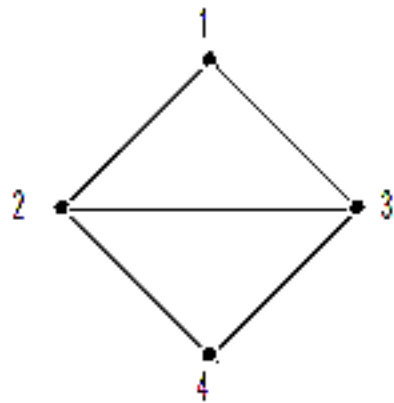
- note : teorema tersebut dapat dibuktikan dengan induksi matematika

Graf Tidak Sederhana

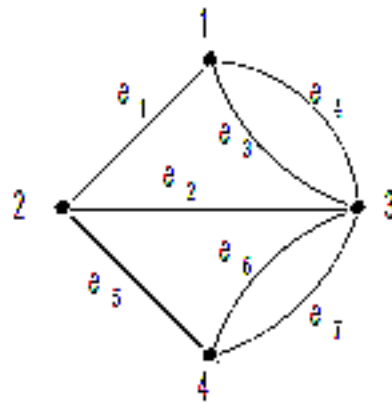
- **Graf ganda** adalah graf yang dapat **memiliki sisi ganda**, tetapi **tidak memiliki loop**.
- **Graf semu** adalah graf yang dapat **memiliki sisi ganda dan loop**.
- Graf sederhana, graf ganda, dan graf semu adalah graf tidak berarah

Contoh

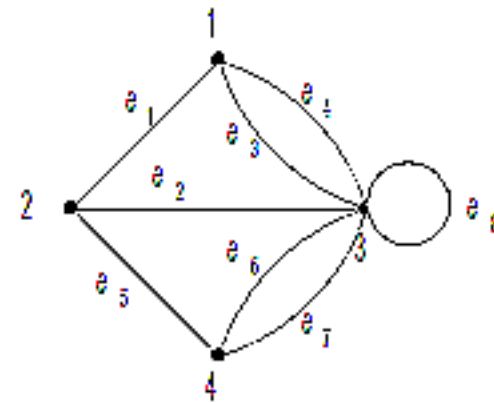
- Contoh graf sederhana G_1 , graf ganda G_2 , dan graf semu G_3



G_1



G_2



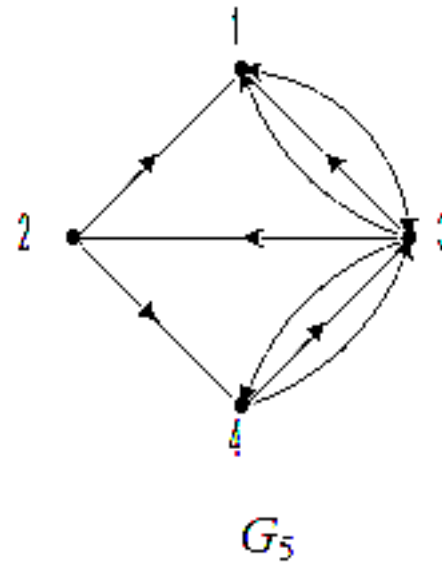
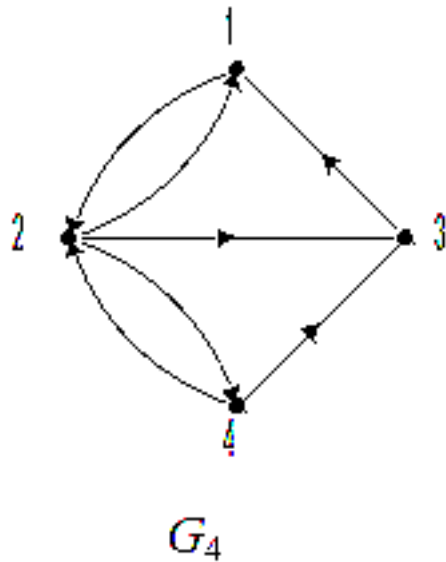
G_3

Graf Berarah

- Dalam graf berarah, sisi (a,b) **tidak sama** dengan sisi (b,a) .
- Graf Berarah dibagi menjadi 2 kategori
 - **Graf berarah sederhana**
graf berarah yang tidak memiliki sisi ganda dan loop
 - **Graf berarah ganda**
graf berarah yang memiliki sisi ganda atau loop

Contoh

- Contoh graf berarah sederhana G_4 , dan graf berarah ganda G_5



Derajat Titik pada Graf Berarah

- penulisan derajat pada graf berarah dibedakan dari graf tidak berarah
- pada graf berarah, derajat titik v dituliskan :
 - $d_{\text{in}}(v) = d^-(v)$ = banyak sisi yang masuk ke titik v (*in-degree*)
 - $d_{\text{out}}(v) = d^+(v)$ = banyak sisi yang keluar dari titik v (*out-degree*)
 - $d(v) = d_{\text{in}}(v) + d_{\text{out}}(v)$

Derajat Titik pada Graf Berarah

- Titik dengan $d_{\text{in}}(\mathbf{v}) = 0$ disebut sebagai **source**
- Titik dengan $d_{\text{out}}(\mathbf{v}) = 0$ disebut sebagai **sink**

$$\sum d_{\text{in}}(\mathbf{v}) = \sum d_{\text{out}}(\mathbf{v}) = |E|$$

Jenis Graf

Jenis	Sisi	Sisi ganda dibolehkan?	Sisi gelang dibolehkan?
Graf sederhana	Tak-berarah	Tidak	Tidak
Graf ganda	Tak-berarah	Ya	Tidak
Graf semu	Tak-berarah	Ya	Ya
Graf berarah	Bearah	Tidak	Ya
Graf-ganda berarah	Bearah	Ya	Ya

- Note :
- Kata **Graf** pada bahasan selanjutnya mengacu kepada **Graf Sederhana** kecuali diberitakan lain.

Representasi Graf

- Graf bisa direpresentasikan dengan cara
 - menggambar graf secara geometris
 - menuliskan himpunan V dan E dari graf
- Selain itu, bisa juga ditampilkan menggunakan :
 - matriks ketetanggaan (adjacency matrix)
 - matriks bersisian (incidence matrix)
 - daftar ketetanggaan (adjacency list)

Matriks Ketetanggaan

- Cara membuat :
 - tiap baris dan tiap kolom mewakili titik pada graf
 - $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i \text{ bertetangga dengan } j \\ 0 & \text{jika } i \text{ tidak bertetangga dengan } j \end{cases}$
- Sifat :
 - jumlah elemen tiap barisnya / tiap kolomnya akan menunjukkan derajat titik yang mewakili baris tersebut

Matriks Bersisian

- Cara membuat :
 - tiap baris matriks mewakili titik pada graf
 - tiap kolom matriks mewakili sisi pada graf
 - $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } j \text{ bertumpu ke } i \\ 0 & \text{jika } j \text{ tidak bertumpu ke } i \end{cases}$
- Sifat :
 - jumlah elemen tiap kolom = 2
 - jumlah elemen tiap baris menyatakan derajat titik yang mewakili baris tersebut

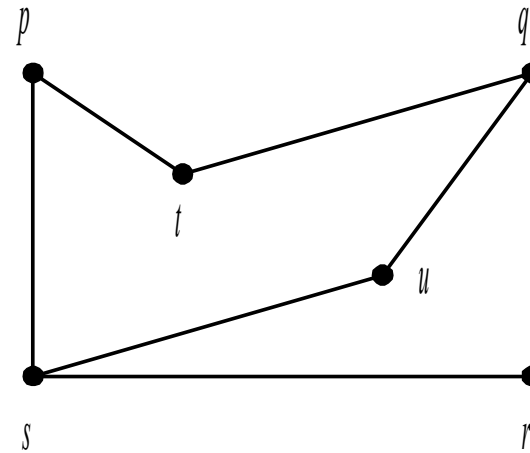
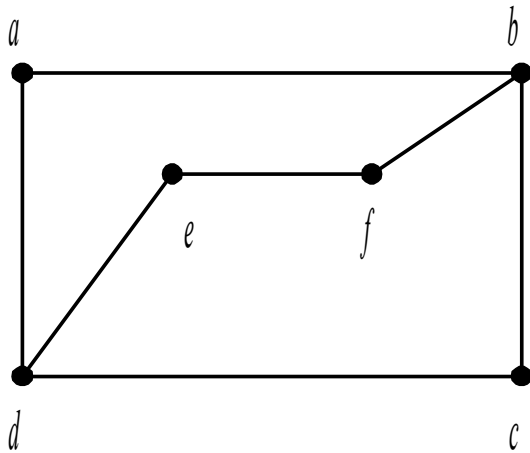
Daftar Ketetanggaan

- Cara membuat :
 - dibuat dalam bentuk tabel 2 kolom
 - kolom pertama berisi daftar titik pada graf
 - kolom kedua berisi daftar titik yang bertetangga dengan titik di kolom pertama pada baris yang sama
- Sifat :
 - banyak elemen di kolom kedua menyatakan derajat titik di kolom pertama

Latihan

Quiz!!!

- Apakah kedua graf ini sama?



Isomorfisme Graf

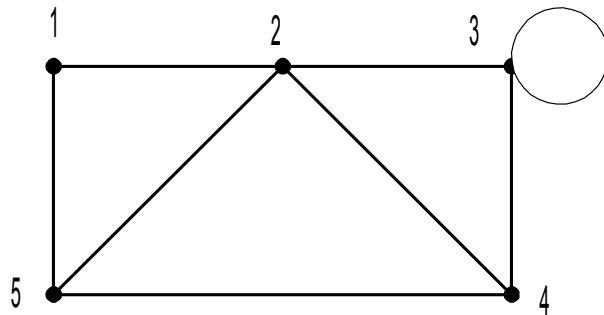
- Diberikan matriks ketetanggaan suatu graf sebagai berikut (ket : graf tersebut bukan graf sederhana)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

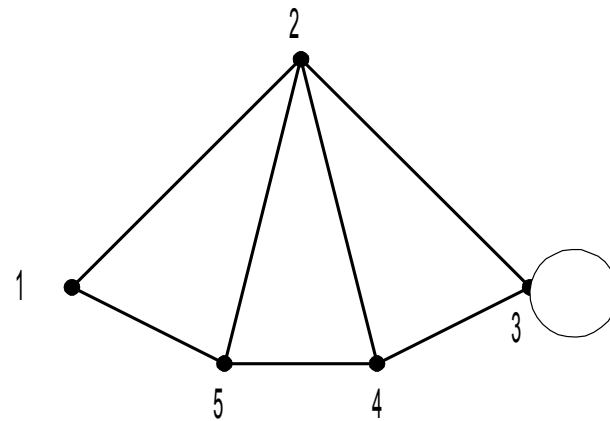
- Gambarkan 2 buah graf yang bersesuaian dengan matriks tersebut! Beri nama G dan H.

Isomorfisme Graf

- Dua buah graf yang sama, tetapi penggambaran secara geometrisnya berbeda disebut sebagai **isomorfik**.



G



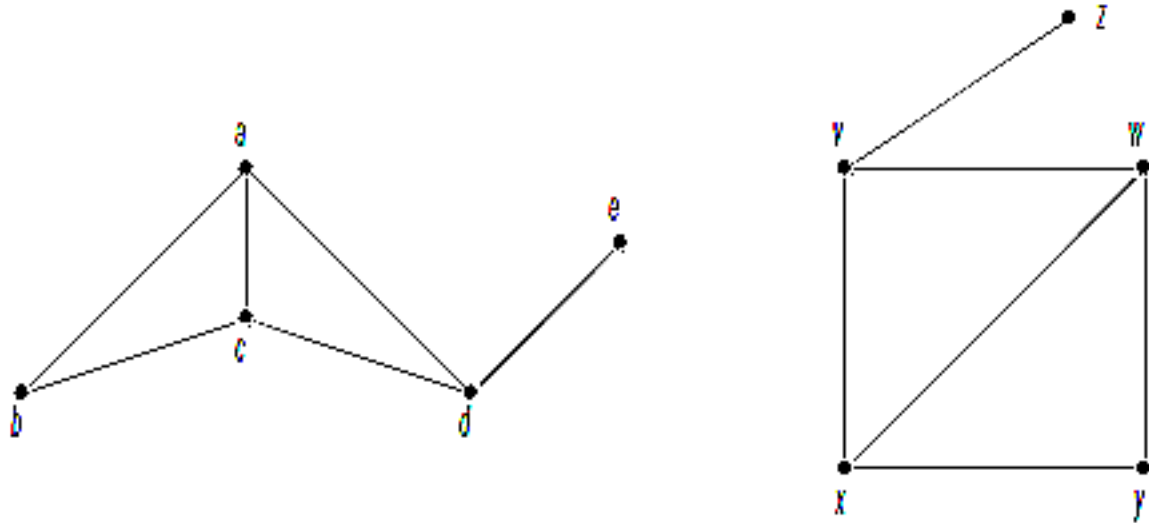
H

- Graf G dan H isomorfik

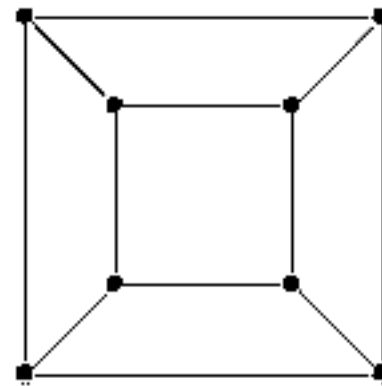
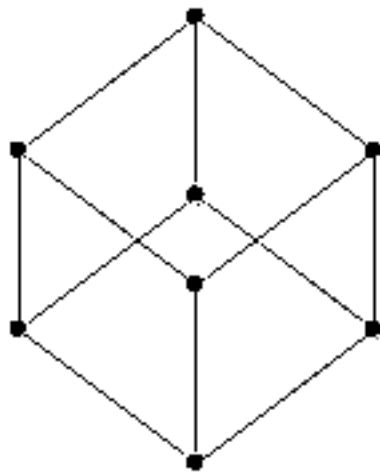
Isomorfisme Graf

- Dua buah graf G dan H dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antar titik dan antar sisi pada graf G dan H sehingga hubungan kebersisiannya tetap terjaga.
- Dua graf yang **isomorfik** adalah **graf yang sama**, meskipun nama titik dan sisinya berbeda

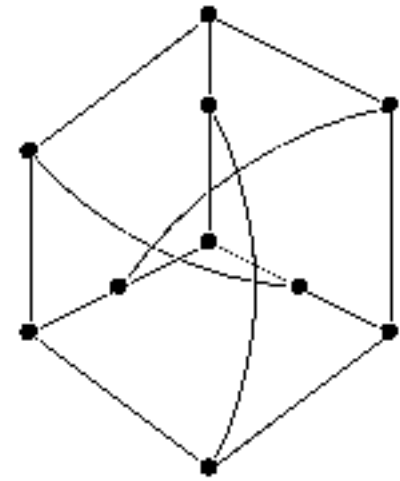
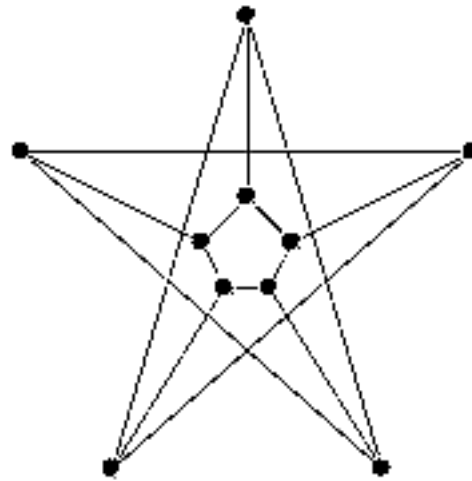
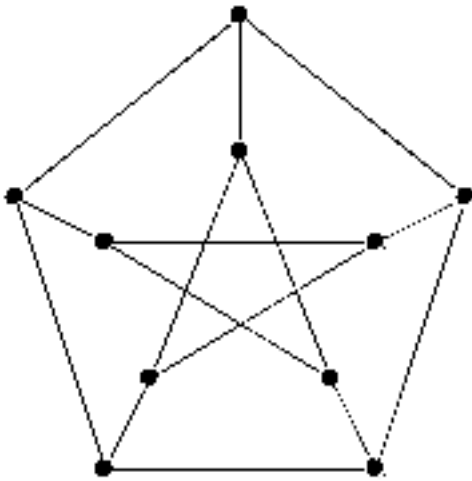
Contoh Graf Isomorf



Contoh Graf Isomorf



Contoh Graf Isomorf

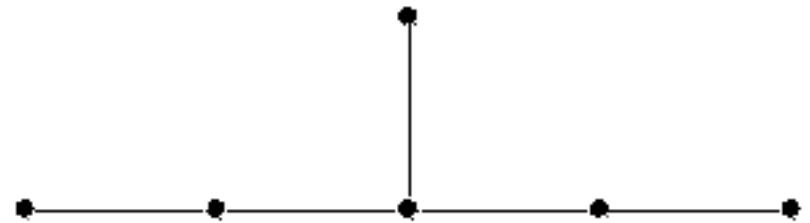
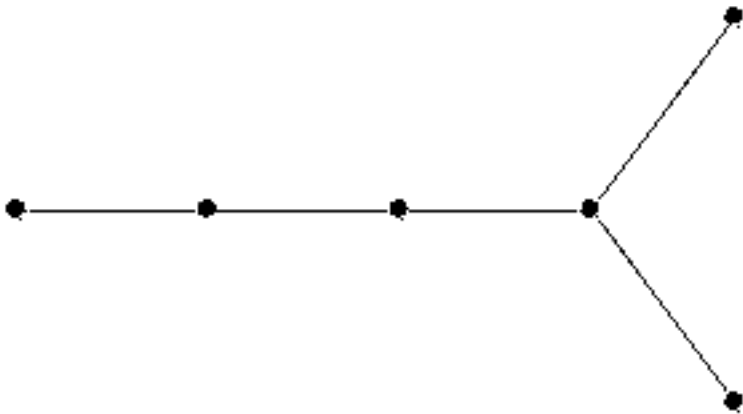


Isomorfisme Graf

- Pengecekan :
 - mempunyai banyak titik yang sama
 - mempunyai banyak sisi yang sama
 - mempunyai titik berderajat tertentu yang sama
 - korespondensi satu-satunya mengawetkan kebersisiannya
- Jika salah satu syarat tersebut tidak terpenuhi, maka kedua graf tersebut tidak isomorfik. Bisa juga diperiksa secara visual

Latihan

- Apakah kedua graf berikut isomorfik?



Latihan

- Apakah kedua graf berikut isomorfik?

