MATEMATIKA DISKRET

Induksi Matematik

STT-NF

Nugroho Dwi Saputra

nugroho.dsaputra@gmail.com

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Dapat memahami dan meggunakan induksi matematis

PENDAHULUAN

Induksi Matematik

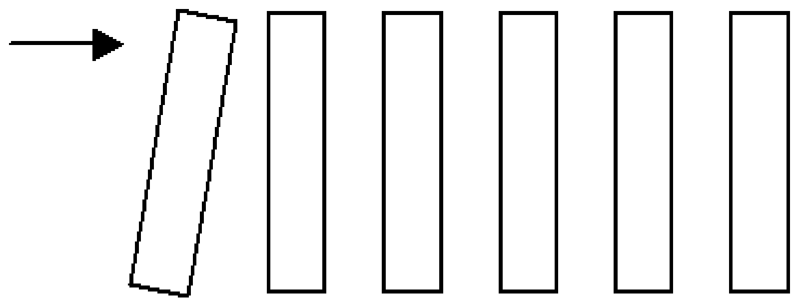
- Metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat adalah induksi matematik.
- Induksi matematik merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
- Melalui induksi matematik kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.

Contoh :

- p(n): “Jumlah bilangan bulat positif dari 1 sampai n adalah n(n + 1)/2”.
  Buktikan p(n) benar!

Prinsip Induksi Matematik

Induksi matematik berlaku seperti efek domino.



LANGKAH-LANGKAH INDUKSI MATEMATIK

- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi.
- Langkah 2 dinamakan **induksi** berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa p(n) benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi.

Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa p(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 1

Contoh 1. Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah *n* buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

Contoh 1

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke-n adalah $(2n - 1)$]. Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

Contoh 2

Contoh 2.

Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, buktikan dengan induksi matematik bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk *n* = 0 (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

Ini jelas benar, sebab $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$= 2^1 - 1$

$= 2 - 1$

$= 1$

Contoh 2

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$ adalah benar (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$ juga benar.

Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif *n*, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Contoh 3

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli *n* berlaku

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Penyelesaian:

(i) *Basis induksi*. Untuk *n* = 1 (bilangan asli pertama), kita peroleh $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

Ini benar karena 1=1

Contoh 3

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa p(n) benar, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ adalah benar (hipotesis induksi).

Kita harus menunjukkan bahwa p(n +1) juga benar, yaitu

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$ juga benar.

Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1\Big) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan asli *n*, terbukti bahwa 2

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$