

MATEMATIKA DISKRET

Logika Predikat (*First Order logic*)



Nugroho Dwi Saputra
nugroho.dsaputra@gmail.com

TUJUAN PEMBELAJARAN

Dapat menjelaskan teori dasar dari logika predikat serta dapat berpikir dan mengembangkan kemampuan matematis berdasarkan landasan logika predikat, dengan acuan:

- Membedakan antara logika proposisi dan logika predikat
- Mengubah kalimat menggunakan ekspresi logika dengan kuantifier
- Mengubah ekspresi logika dengan kuantifier menjadi kalimat biasa

PENDAHULUAN

- Logika proposisional sudah cukup untuk menangani pernyataan-pernyataan yang sederhana.
- Pernyataan yang mengandung kata, semua, ada atau kata yang lain tidak bisa diselesaikan.
- Untuk pernyataan yang lebih rumit, misal:

A=semua mahasiswa pandai.

B=Badu seorang mahasiswa.

C=Dengan demikian, Badu pasti pandai.

Lantas, bentuk ekspresi logika

$(A \wedge B) \rightarrow C$: tidak bisa dibuktikan!

- Logika predikat merupakan pengembangan dari logika proposisional dengan masalah pengkuantifikasian dan menambah istilah-istilah baru.

Istilah dalam Logika Predikat

- Term : subyek
- Predikat: properti dari subyek
- Fungsi proposisional= fungsi
- Kuantor
 - Universal: yang selalu bernilai benar (\forall).
 - Eksistensial: bisa bernilai benar atau salah (\exists).

Contoh Logika Predikat

- Nani adalah ibu dari Ratna.
- Term=Nani , Ratna
- Predikat=adalah ibu dari
- Fungsi=ibu(nani, ratna) ; $M(n, r)$

Bentuk logika predikat $M(n, r) \rightarrow \neg M(r, n)$

Contoh Kuantor Universal

- Semua gajah mempunyai belalai
- $G(x)$ = gajah
- $B(x)$ = belalai

Bentuk logika predikat: $(\forall x)(G(x) \rightarrow B(x))$

Dibaca: untuk semua x , jika x seekor gajah, maka x mempunyai belalai.

- Kuantor universal selalu diikuti operator IMPLIKASI

Contoh Kuantor Eksistensial

- Ada bilangan prima yang bernilai genap.
- $P(x)$ = bilangan prima
- $G(x)$ = bernilai genap

Bentuk logika predikat: $(\exists x)(P(x) \wedge G(x))$

Dibaca: ada x , dimana x adalah bilangan prima dan x bernilai genap.

- Kuantor Eksistensial selalu diikuti operator AND

Ekivalen Logis

- $(\forall x)A(x) \equiv A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge A(a_3) \wedge \dots A(a_n)$
- $(\exists x)A(x) \equiv A(a_1) \vee A(a_2) \vee A(a_3) \vee \dots A(a_n)$
- $(\forall x)(\forall y) A(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x) A(x,y)$
- $(\exists x)(\exists y) A(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)A(x,y)$
- $(\forall x)R \equiv (\exists x)R \equiv R$
- $(\forall x)(A \rightarrow B(x)) \equiv A \rightarrow (\forall x)B(x)$
- $(\forall x)(T \rightarrow B(x)) \equiv T \rightarrow (\forall x)B(x)$
- $(\forall x)(F \rightarrow B(x)) \equiv F \rightarrow (\forall x)B(x)$

Jenis variabel

- Variabel x pada $P(x)$ disebut sebagai variabel terikat bila
 - x telah diikat oleh suatu kuantifikasi $\forall x$ atau $\exists x$, atau
 - x telah digantikan oleh sebuah elemen tertentu dari domain D .
- Variabel x pada $P(x)$ disebut sebagai variabel bebas bila x tidak terikat.
- Sebuah predikat $P(x, y, z)$ pada sebuah domain $D_x \times D_y \times D_z$ menjadi sebuah kalimat logika predikat atau kalimat *first order logic (fol)*, apabila semua variabel padanya, yaitu x , y , dan z merupakan variabel terikat

Contoh 1:

Nyatakan kalimat berikut sebagai kalimat *fol*:

‘Setiap mahasiswa dalam kelas ini mengambil mata kuliah Matematika Diskret’.

Jawaban:

Pertama-tama tentukan dahulu variabel-variabel yang dibutuhkan beserta domainnya, kemudian tentukan predikat dalam variabel-variabel tersebut, dan terakhir berikan kuatifikasi yang sesuai.

(a) Ambil x sebagai variabel, dan domain

$D = \{x: x \text{ adalah mahasiswa dalam kelas ini}\}$
 $P(x) := x \text{ mengambil mata kuliah Matematika Diskret}$

maka kalimat di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $\forall x P(x)$.

Atau

(b) Ambil

$D = \{x : x \text{ adalah mahasiswa}\}$
 $Q(x) := x \text{ berada dalam kelas ini}$
 $P(x) := x \text{ mengambil mata kuliah Matematika Diskret}$

Maka kalimat di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $\forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$.

Contoh 2.

Dengan domain $D = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real}\}$ dan $P(x) := x + 1 > x$,
maka $\forall x P(x)$ berbunyi sebagai
'Untuk setiap bilangan real x berlaku $x + 1 > x$ '.
Dan $\forall x P(x)$ bernilai T .

Contoh 3.

Dengan domain $D = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real}\}$ dan $P(x) := 2 > x$,
maka $\forall x P(x)$ berbunyi sebagai
'Untuk setiap bilangan real x , berlaku $2 > x$ '.

Jadi $\forall x P(x)$ bernilai F .

Bila domainnya adalah $D = \{x \mid x \text{ adalah bilangan real negatif}\}$,
maka $\forall x P(x)$ berbunyi sebagai
'Untuk setiap bilangan real negatif x , berlaku $2 > x$ '.

Jadi $\forall x P(x)$ bernilai T .

Contoh 3.

Misalkan domain untuk variable x adalah

$D = \{x \mid x \text{ adalah bilangan bulat positif yang lebih kecil dari } 5\}$, dan $P(x) : x^2 < 10$
maka $\forall x P(x)$ sama artinya dengan $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$,

$P(1) := 1^2 < 10$ bernilai T ,

$P(2) := 2^2 < 10$ bernilai T ,

$P(3) := 3^2 < 10$ bernilai T ,

$P(4) := 4^2 < 10$ bernilai F ,

maka $\forall x P(x)$ bernilai F .

Mengubah kalimat menjadi ekspresi logika predikat

Contoh 14.

(a) Ubah kalimat 'Setiap orang memiliki teman akrab' menjadi kalimat logika predikat!

Karena teman merupakan sebuah hubungan antara dua orang, maka di sini dibutuhkan dua variabel x dan y . Ambil

$D = \{x \mid x \text{ adalah orang}\}$ sebagai domain untuk variabel x , juga untuk variabel y , dan predikat $A(x, y) := y \text{ adalah teman akrab dari } x$.

Jadi, kalimat logika predikat untuk kalimat tersebut adalah

$$\forall x \in D (\exists y \in D A(x, y)) \text{ atau } \forall x (\exists y A(x, y)) \text{ atau } \forall x \exists y A(x, y),$$

dengan

$A(x, y)$ sebagai scope untuk $\exists y$, dan x masih berupa variabel bebas.

$\exists y A(x, y)$ sebagai scope untuk $\forall x$, dan tidak ada lagi variabel bebas.

(b) Ubah kalimat '*Bee memiliki tepat satu teman akrab*' menjadi kalimat logika predikat!

Seperti pada (a), Ambil $D = \{x \mid x \text{ adalah orang}\}$.

Disini dibutuhkan dua variabel y dan z , dengan D sebagai domain untuk kedua variabel y dan z tersebut, dan
predikat $A(\text{Bee}, y) := y \text{ adalah teman akrab dari Bee}$.

Jadi, kalimat logika predikat untuk kalimat '*Bee memiliki tepat satu teman akrab*' adalah
 $\exists y \in D (A(\text{Bee}, y) \wedge (\forall z \in D ((z \neq y) \rightarrow \neg A(\text{Bee}, z))))$, atau
 $\exists y \in D (A(\text{Bee}, y) \wedge \forall z \in D ((z \neq y) \rightarrow \neg A(\text{Bee}, z)))$,

POST TEST

1. Semua kesatria pembrani adalah pahlawan
2. Beberapa orang berpikir bahwa Gudeg makanan khasYogya
3. Terdapat beberapa orang yang berpikir bahwa Mahesa Jenar dan Kamandoko keduanya adalah raja silat.
4. Richard III adalah seorang raja yang baik tetapi beberapa orang berpikir tidak
5. Untuk setiap pahlawan, terdapatlah suatu seorang penjahat yang harus dikalahkan dan seorang pahlawan wanita harus diselamatkan.