MATEMATIKA DISKRET

-Logika Proposisi-

Nugroho Dwi Saputra

nugroho.dsaputra@gmail.com

TUJUAN PEMBELAJARAN

Mahasiswa dapat menjelaskan teori dasar dari logika proposisi serta dapat berpikir dan mengembangkan kemampuan matematis berdasarkan landasan logika proposisi, dengan acuan:

- Menggunakan operator logika
- Menggunakan tabel kebeneran
- Membuat kalimat logika proposisi
- Menentukan kesetaraan logika

OUTLINE

- ✓ Logika Proposisi
- ✓ Jenis- Jenis Operator Logika
- ✓ Kalimat Logika Proposisi (KLP)
- ✓ Tabel Kebenaran
- ✓ Keseteraan Logika

LOGIKA PROPOSISI

Logika

- Logika merupakan dasar dari semua penalaran (*reasoning*).
- Penalaran didasarkan pada hubungan antara pernyataan (*statements*).

Proposisi

- Pernyataan atau kalimat deklaratif yang bernilai benar (true) atau salah (false), tetapi tidak keduanya.

LOGIKA PROPOSISI

Tentukan apakah kalimat berikut

- Pernyataan?
- Proposisi?

1. Jakarta Ibukota Malaysia
2. Buah adalah makanan sehat
3. Tolong jangan tidur dikelas ini
4. x>5
5. 1 + 1 = 2

OPERATOR LOGIKA

Operator Logika atau Penghubung Logika (*Logical Connectives)*

Dari proposisi-proposisi yang ada dapat dibentuk proposisi baru dengan menggunakan penghubung atau operator logika.

Yang dikenal ada 6 operator logika, yaitu

- negasi ¬,
- konjungsi ∧,
- disjungsi ∨,
- *exclusive or ⊕,*
- implikasi →, dan
- bi-implikasi (*biconditional)* ↔*,*

OPERATOR LOGIKA

Operator negasi ¬

Jika *p adalah sebuah proposisi, maka ¬p* adalah sebuah proposisi pula.

¬p disebut negasi (negation) dari p, atau tidak p (not p). Nilai kebenaran dari ¬p adalah true bila p bernilai false, dan bernilai false bila p bernilai true.

Tabel Kebenaran untuk Negasi dari *p*

P	*¬p*
T	F
F	T

OPERATOR LOGIKA

Contoh 1:

Proposisi: “Jakarta adalah ibu kota Indonesia”

Negasi : “Jakarta bukan ibu kota Indonesia” atau

“Tidak benar bahwa Jakarta adalah ibu kota Indonesia”.

Jika p mewakili “Luas ruang kuliah ini lebih dari 16 m^2

maka $\neg$*p mewakili proposisi*

“Tak benar bahwa luas ruang kuliah ini lebih dari 16 m^2”

“Luas ruang kuliah ini kurang dari atau sama dengan 16 m^2”

OPERATOR LOGIKA

2. Operator Konjungsi ∧

Jika *p dan q adalah proposisi maka "p dan q" atau p ∧ q* adalah sebuah proposisi pula, yang disebut sebagai konjungsi (*conjunction) dari p dan q. Dan nilai kebenaran dari p ∧ q adalah true pada saat p dan q* kedua-duanya bernilai *true, dan false bila salah satu atau kedua-duanya dari p* dan *q bernilai false. Dan dapat ditunjukkan oleh tabel kebenaran berikut:*

Tabel Kebenaran untuk Konjungsi dari *p dan q*

P	q	p ^ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

OPERATOR LOGIKA

Contoh 2:

Jika *p* : *Hari ini adalah hari Selasa.*

q : *Hari ini hujan.*

maka $p \wedge q$: *Hari ini adalah hari Selasa dan hari ini hujan*

atau Hari ini adalah hari Selasa dan hujan

$p \wedge q$ *bernilai T hanya pada hari Selasa yang hujan, dan bernilai F pada hari* lainnya atau pada hari Selasa yang tidak hujan.

OPERATOR LOGIKA

3. Operator Disjungsi ∨

Jika *p dan q adalah proposisi maka "p atau q" atau p ∨ q* adalah sebuah proposisi pula, yang disebut sebagai disjungsi (*disjunction) dari p dan q. Dan nilai kebenaran dari p ∨ q adalah false pada saat p dan q* kedua-duanya bernilai *false, dan true bila salah satu atau kedua-duanya dari p* dan *q bernilai true. Dan dapat ditunjukkan oleh tabel kebenaran berikut:*

P	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

OPERATOR LOGIKA

Contoh 3:

Jika *p : Hari ini adalah hari Selasa*

q : Hari ini hujan

maka $p \vee q$ *: Hari ini adalah hari Selasa atau hari ini hujan*

$p \vee q$ *bernilai F apabila harinya bukan hari Selasa dan pada hari itu tidak hujan,* dan bernilai *T apabila harinya adalah hari Selasa atau apabila harinya hujan.*

OPERATOR LOGIKA

4. Operator Exclusive Or $\oplus$

Jika *p dan q adalah proposisi maka exclusive or dari p dan q atau p* $\oplus$ *q* adalah sebuah proposisi pula. Dan nilai kebenaran dari *p* $\oplus$ *q adalah true pada* saat *p dan q memiliki nilai kebenaran yang berbeda, dan false bila p dan q* memiliki nilai kebenaran yang sama. Dan dapat ditunjukkan oleh tabel kebenaran berikut:

Tabel Kebenaran untuk *Exclusive or dari p dan q*

P	q	p $\oplus$ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

OPERATOR LOGIKA

Contoh 4:

Jika *p : Hari ini adalah hari Selasa*

q : Hari ini hujan

maka

$p \oplus q$ *: Hari ini adalah hari Selasa yang tidak hujan atau hari ini bukan hari* Selasa tetapi hujan.

$p \oplus q$ *bernilai F pada setiap hari Selasa yang hujan atau pada hari-hari bukan* hari Selasa yang tidak hujan, dan bernilai *T pada hari Selasa yang tidak hujan* atau pada hari lainnya yang hujan.

OPERATOR LOGIKA

5. Operator Implikasi →

Jika *p dan q adalah proposisi maka Implikasi (Implication) p → q, dibaca "Jika p maka q", adalah sebuah proposisi pula. p disebut hipotesa atau antecedent atau premise, q disebut konklusi (conclusion) atau konsekuensi (consequence).*

Dan nilai kebenaran dari *p → q adalah false hanya pada saat p bernilai true dan q* bernilai *false, selainnya p → q akan bernilai true. Dan dapat ditunjukkan oleh* tabel kebenaran berikut.

P	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

OPERATOR LOGIKA

Contoh 5:

Jika *p* : *Hari ini adalah hari Selasa*

q : *Hari ini hujan*

maka

$p \rightarrow q$: *Jika hari ini adalah hari Selasa maka hari ini hujan.*

$p \rightarrow q$ *bernilai F hanya pada hari Selasa yang tidak hujan, dan bernilai T pada* hari Selasa yang hujan atau pada hari yang bukan hari Selasa.

"Jika *p maka q" dapat pula dikatakan sebagai*
"*p mengakibatkan q*"
Atau "*p hanya jika q*"
atau "*p adalah syarat cukup untuk q*"
atau "*q adalah syarat perlu untuk p".*

OPERATOR LOGIKA

6. Operator Bi-implikasi (*Biconditional)* ↔

Jika *p dan q adalah proposisi maka biconditional p ↔ q juga sebuah proposisi,*

dibaca "*p jika dan hanya jika q", atau "p adalah syarat perlu dan cukup untuk q".*

Dan nilai kebenaran dari *p ↔ q adalah true pada saat p dan q memiliki nilai K*ebenaran yang sama, dan *false bila p dan q memiliki nilai kebenaran yang* berbeda. Dan dapat ditunjukkan oleh tabel kebenaran berikut:

P	q	p↔q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

OPERATOR LOGIKA

<u>Contoh 6:</u>

Jika *p* : *Hari ini adalah hari Selasa*

q : *Hari ini hujan*

maka

$p \leftrightarrow q$: *Hari ini adalah hari Selasa jika dan hanya jika hari ini hujan, atau* Hari ini adalah hari Selasa adalah syarat perlu dan cukup agar hari ini hujan.

$p \leftrightarrow q$ *bernilai F hanya pada hari Selasa yang tidak hujan atau hari lain yang* hujan, dan bernilai *T pada hari Selasa yang hujan atau pada hari lain yang tidak* hujan.

KALIMAT LOGIKA PROPOSISI

Kalimat (*Formula) Logika Proposisi dibentuk dari :*

- konstanta proposisi : ***T (true), F (false)***
- variabel proposisi : $p_1, p_2 \ldots, q_1, q_2, \ldots .. r_1, r_2$

dengan menggunakan penghubung proposisi berikut:

- negasi ¬ (*tidak)*
- *konjungsi ∧ (dan)*
- disjungsi ∨ (*atau)*
- *exclusive or ⊕ (atau eksklusif)*
- implikasi → (*jika … maka …)*
- *biconditional ↔ (jika dan hanya jika)*

dan mengikuti aturan-aturan berikut:

(a) Setiap proposisi merupakan sebuah kalimat logika proposisi (KLP)

(b) Jika *F dan G merupakan sebuah KLP maka*

$\neg F,\ F \wedge G, F \vee G, F \oplus G,\ F \rightarrow G$, *dan* $F \leftrightarrow G$

masing-masing juga merupakan sebuah KLP.

KALIMAT LOGIKA PROPOSISI

Contoh 7:

KLP H: $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ memiliki anak kalimat :

G: $p \oplus q$

K: $p \oplus \neg q$

dan H sendiri.

G memiliki anak kalimat p dan q dan G

K memiliki anak kalimat p, K1: $\neg q$ dan K

K_1 memiliki anak kalimat q dan K_1

INTERPRETASI DAN TABEL KEBENARAN

Definisi

- Suatu interpretasi (*interpretation*) I adalah suatu pemberian nilai T atau F pada setiap proposisi yang terpakai.

- Interpretas I disebut interpretasi kosong (*empty interpretation*) apabila I tidak memberi nilai pada proposisi apapun.

Contoh 8 :

Interpretasi untuk KLP H pada **Contoh 7** H: $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ ada 4 buah, yaitu

I_1 : p bernilai T, q bernilai T

I_2 : p bernilai T, q bernilai F

I_3 : p bernilai F, q bernilai T

I_4 : p bernilai F, q bernilai F

Jadi nilai H terhadap masing-masing interpretasi dapat ditentukan melalui sebuah tabel yang disebut **Tabel Kebenaran**

P	q	G: $\neg q$	F: $p \oplus q$	G: $p \oplus G$	F v G
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T

Contoh 9 :

Tentukan semua nilai yang mungkin dari KLP *H: (p ∨ q) ∧ (¬p ∧ ¬q).*
Interpretasi untuk KLP *H adalah*

I_1 : p bernilai T, q bernilai T
I_2 : p bernilai T, q bernilai F
I_3 : p bernilai F, q bernilai T
I_4 : p bernilai F, q bernilai F

Semua nilai yang mungkin dari KLP *H diberikan pada tabel kebenaran berikut:*

P	q	¬p	¬q	p ∨ q	¬p ∧ ¬q	H: (p ∨ q) ∧ (¬p ∧ ¬q)
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	F

INTERPRETASI DAN TABEL KEBENARAN

Definisi

Sebuah KLP H disebut absah (*valid*) bila H bernilai *true* terhadap setiap interpretasi I untuk H. H disebut juga suatu tautologi (*tautology*).

Sebuah KLP H disebut terpenuhi (*satisfiable*) bila terdapat interpretasi I untuk H sehingga H bernilai true terhadap I itu.

Sebuah KLP H disebut kontradiksi (*contradictory/unsatisfiable*) bila H bernilai *false* terhadap setiap interpretasi I untuk H.

KLP H pada Contoh 8 adalah suatu KLP yang valid,

KLP pada Contoh 9 adalah suatu KLP yang *contradictory*,

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Dua kalimat *H dan K disebut setara (logically equivalent) jika kalimat* $H \leftrightarrow K$ valid (*tautologi).*

Ditulis $H \equiv K$. *atau* $H \Leftrightarrow K$.

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan Definisi

$F \equiv \neg T$	*(Definisi dari False)*
$(H \leftrightarrow K) \equiv (H \wedge K) \vee (\neg H \wedge \neg K)$	*(Definisi dari $\leftrightarrow$)*
$(H \neg\leftrightarrow K) \equiv \neg(H \leftrightarrow K)$	*(Definisi dari $\neg\leftrightarrow$)*
$(H \rightarrow K) \equiv (\neg H \vee K)$	*(Definisi dari $\rightarrow$)*
$(H \rightarrow K) \equiv (H \wedge K) \leftrightarrow H$	*(Definisi dari $\rightarrow$)*
$(H \rightarrow K) \equiv (H \vee K) \leftrightarrow K$	*(Definisi dari $\rightarrow$)*

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Identitas

$(H \vee F) \equiv H$	*(Identitas dari $\vee$ adalah F)*
$(H \wedge T) \equiv H$	*(Identitas dari $\wedge$ adalah T)*
$T \equiv H \leftrightarrow H$	*(Identitas dari $\leftrightarrow$)*
$T \rightarrow H \equiv H$	*(Identitas kiri dari $\rightarrow$ adalah T)*

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Dominasi

$H \vee T \equiv T$	*(Dominasi dari ∨)*
$H \wedge F \equiv F$	*(Dominasi dari ∧)*
$H \rightarrow T \equiv T$	*(Dominasi kanan dari →)*

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Idempoten

$H \vee H \equiv H$	*(Idempoten dari ∨)*
$H \wedge H \equiv H$	*(Idempoten dari ∧)*

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Refleksif

$H \equiv H$	*(Refleksif dari ↔)*
$H \rightarrow H \equiv T$	*(Refleksif dari →)*

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Komutatif / Simetri

$(H \wedge K) \equiv (K \wedge H)$ *(Simetri dari $\wedge$)*

$(H \vee K) \equiv (K \vee H)$ *(Simetri dari $\vee$)*

$(H \leftrightarrow K) \equiv (K \leftrightarrow H)$ *(Simetri dari $\leftrightarrow$)*

$(H \neg\leftrightarrow K) \equiv (K \neg\leftrightarrow H)$ *(Simetri dari $\neg\leftrightarrow$)*

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Asosiatif

$[(H \wedge K) \wedge L] \equiv [H \wedge (K \wedge L)]$

$[(H \vee K) \vee L] \equiv [H \vee (K \vee L)]$

$[(H \leftrightarrow K) \leftrightarrow L] \equiv [H \leftrightarrow (K \leftrightarrow L)]$

$[(H \neg\leftrightarrow K) \neg\leftrightarrow L] \equiv [H \neg\leftrightarrow (K \neg\leftrightarrow L)]$

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Transitif

$[(H \rightarrow K) \wedge (K \rightarrow L)] \rightarrow (H \rightarrow L)$

$[(H \leftrightarrow K) \wedge (K \leftrightarrow L)] \rightarrow (H \leftrightarrow L)$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Kontrapositif

$(H \rightarrow K) \equiv (\neg K \rightarrow \neg H)$

$(\neg H \rightarrow K) \equiv (\neg K \rightarrow H)$

$(H \leftrightarrow K) \equiv (\neg K \leftrightarrow \neg H)$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Sifat Distributif

$[H \wedge (K \wedge L)] \equiv [(H \wedge K) \wedge (H \wedge L)]$ *(Distributif $\wedge$ terhadap $\wedge$)*

$[H \vee (K \vee L)] \equiv [(H \vee K) \vee (H \vee L)]$ *(Distributif $\vee$ terhadap $\vee$)*

$[H \wedge (K \vee L)] \equiv [(H \wedge K) \vee (H \wedge L)]$ *(Distributif $\wedge$ terhadap $\vee$)*

$[H \vee (K \wedge L)] \equiv [(H \vee K) \wedge (H \vee L)]$ *(Distributif $\vee$ terhadap $\wedge$)*

$[H \vee (K \leftrightarrow L)] \equiv [(H \vee K) \leftrightarrow (H \vee L)]$ *(Distributif $\vee$ terhadap $\leftrightarrow$)*

$[H \rightarrow (K \leftrightarrow L)] \equiv [(H \rightarrow K) \leftrightarrow (H \rightarrow L)]$ *(Distributif $\rightarrow$ terhadap $\leftrightarrow$)*

$\neg(H \leftrightarrow K) \equiv (H \leftrightarrow \neg K)$ *(Distributif $\neg$ terhadap $\leftrightarrow$)*

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan De Morgan

$\neg (H \wedge K) \equiv (\neg H \vee \neg K)$

$\neg (H \vee K) \equiv (\neg H \wedge \neg K)$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Dobel Negasi

$\neg(\neg H) \equiv H$

Skema Kalimat Absah berdasarkan *Excluded Middle*

$H \vee \neg H \equiv T$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Golden Rule

$H \wedge K \leftrightarrow H \equiv K \leftrightarrow H \vee K$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Kontradiksi

$(H \wedge \neg H) \equiv F$

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Skema Kalimat Absah berdasarkan Modus Ponens

$H \wedge (H \rightarrow K) \rightarrow H$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Absorption

$H \wedge (H \vee K) \equiv H$
$H \vee (H \wedge K) \equiv H$
$H \wedge (\neg H \vee K) \equiv H \wedge K$
$H \vee (\neg H \wedge K) \equiv H \vee K$

Skema Kalimat Absah berdasarkan Weakening / Strengthening

$H \wedge K \rightarrow H$
$H \wedge K \rightarrow H \vee K$
$H \rightarrow (H \vee K)$
$H \wedge K \rightarrow H \wedge (K \vee L)$
$H \vee (K \wedge L) \rightarrow H \vee K$

Untuk membuktikan bahwa dua kalimat adalah setara dapat menggunakan kesetaraan kalimat-kalimat yang telah dibuktikan kesetaraannya.

KESETARAAN KALIMAT LOGIKA

Contoh 10.

Buktikan bahwa $H : \neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ *setara dengan* $K : (\neg p \wedge \neg q)$.

Bukti: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$

$\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

$\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$

$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$

$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q)$

$\equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Contoh 11.

Buktikan bahwa $H:\ (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ *adalah valid*

Bukti. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

$\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$

$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$

$\equiv T \vee T$

$\equiv T$