Analisis Numerik
Analisis Galat

Ahmad Rio Adriansyah

STT Terpadu - Nurul Fikri

ahmad.rio.adriansyah@gmail.com
arasy@nurulfikri.ac.id

March 9, 2019

Galat

Jika $\hat{a}$ adalah nilai hampiran untuk nilai sejati a, yang disebut galat adalah

$$\epsilon = a - \hat{a}$$

Contoh :
Jika sebuah pensil yang panjangnya 10,4 cm diukur dengan penggaris ternyata hasilnya 10,5 cm, maka galatnya adalah sebesar

...

Galat

Jika $\hat{a}$ adalah nilai hampiran untuk nilai sejati a, yang disebut galat adalah

$$\epsilon = a - \hat{a}$$

Contoh :
Jika sebuah pensil yang panjangnya 10,4 cm diukur dengan penggaris ternyata hasilnya 10,5 cm, maka galatnya adalah sebesar

$$\begin{aligned}\epsilon &= 10,4cm - 10,5cm \\ &= -0,1cm\end{aligned}$$

Galat Mutlak

Digunakan saat tanda galat (positif atau negatifnya) tidak dipertimbangkan

$$|\epsilon| = |a - \hat{a}|$$

Jika informasinya hanya galat atau galat mutlak saja, tidak tergambar seberapa besar kesalahannya terhadap nilai sejatinya.
Misal, galat 1 cm pada pengukuran pensil dan pada pengukuran jalan tol efeknya berbeda jauh.

Galat Relatif

Galat Relatif Sejati :
Galat yang didapat dari hasil normalisasi terhadap nilai sejatinya

$$\epsilon_R = \frac{a - \hat{a}}{a}$$

Galat Relatif Hampiran :
Galat yang didapat dari hasil normalisasi terhadap nilai hampirannya

$$\epsilon_{RA} = \frac{a - \hat{a}}{\hat{a}}$$

Galat Relatif

Dalam kenyataannya, nilai sejati jarang diketahui, karena itu digunakan iterasi untuk menghampiri nilai sejati.

Dalam iterasi, Galat dan Galat Relatif Hampiran dapat juga dihitung dengan cara :

$$\epsilon = \hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}$$

$$\epsilon_{RA} = \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}}{\hat{a}_i}$$

dan iterasi dihentikan pada saat

$$|\epsilon| \leq |\epsilon_s|$$

dimana ϵ_s adalah toleransi galat yang diberikan

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Deret Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

Deret Maclaurin = Deret Taylor baku, dengan $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

Contoh

Fungsi e^x dapat dituliskan dalam deret polinom sebagai berikut

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

darimana?

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = e^x & \longrightarrow & f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x & \longrightarrow & f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x & \longrightarrow & f''(0) = e^0 = 1 \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x) = e^x & \longrightarrow & f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \end{array}$$

Contoh

Fungsi e^x dapat dituliskan dalam deret polinom sebagai berikut

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Jika kita menghitung nilai e^x, bisa digunakan deret polinom tersebut hingga suku ke-n. Suku ke-(n+1) dst menjadi error/galat/residu.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \epsilon$$

dimana $\epsilon = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \dots$

Demo

Fungsi e^x dapat dituliskan dalam deret polinom sebagai berikut

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Kita akan menghitung nilai e^x menggunakan deret polinomnya sampai suku ke-n

Latihan

Uraikan $f(x) = cos(x)$ di sekitar $x = 0$.

Lalu hitung nilai $f(\pi/3)$ hingga galat relatif hampirannya kurang dari 0.5%

Perambatan Galat

misal kita memiliki dua bilangan nilai sejati a dan b dan nilai hampirannya masing masing $\hat{a}$ dan $\hat{b}$

$$a = \hat{a} + \epsilon_a$$
$$b = \hat{b} + \epsilon_b$$

$$a + b = \hat{a} + \hat{b} + (\epsilon_a + \epsilon_b)$$

galat dari penjumlahan setara dengan penjumlahan galat masing masing operandnya

Perambatan Galat

$a = \hat{a} + \epsilon_a$
$b = \hat{b} + \epsilon_b$

$$
\begin{aligned}
a * b &= (\hat{a} + \epsilon_a)(\hat{b} + \epsilon_b) \\
&= \hat{a}\hat{b} + \hat{a}\epsilon_b + \hat{b}\epsilon_a + \epsilon_a\epsilon_b \\
&= \hat{a}\hat{b} + (\hat{a}\epsilon_b + \hat{b}\epsilon_a + \epsilon_a\epsilon_b)
\end{aligned}
$$

galat relatif dari operasi perkalian setara dengan

$$
\begin{aligned}
\epsilon_R &= \frac{(\hat{a}\epsilon_b + \hat{b}\epsilon_a + \epsilon_a\epsilon_b)}{ab} \\
&\approx \epsilon_a + \epsilon_b
\end{aligned}
$$

Perambatan Galat

Jika operasi dilakukan terhadap seruntunan komputasi, maka galat operasi awal akan merambat dalam runtun komputasi tersebut. Hal itu akan mengakibatkan terjadinya penumpukan galat yang semakin besar yang membuat hasil perhitungan akhirnya menyimpang.

Ketidakpastian hasil akibat galat pembulatan yang bertambah besar dapat membuat perhitungan menjadi tidak stabil (*unstable*). Ketidakstabilan ini disebut dengan ketidakstabilan numerik.

Proses komputasi numerik yang diinginkan adalah yang stabil, yaitu pada saat galat hasil antara (*intermediate*) hanya sedikit pengaruhnya terhadap hasil akhir.

Ketidakstabilan numerik dapat dihindari dengan memilih metode komputasi yang stabil.

Kondisi Buruk/Ill Conditioned

Ketidakstabilan numerik tidak sama dengan ketidakstabilan matematik. Ketidakstabilan matematik sering disebut dengan kondisi buruk (*ill conditioned*), yaitu pada saat perubahan data yang sedikit mengakibatkan perubahan jawaban yang sangat drastis.

Contoh : solusi dari $x^2 - 4x + 3.999$ adalah $x_1 = 2.032$ dan $x_2 = 1.968$

Jika datanya berubah sedikit menjadi $x^2 - 4x + 4.000$ atau $x^2 - 4x + 4.001$, maka solusinya berubah sangat jauh

Kondisi Buruk/Ill Conditioned

Akar persamaan $f(x) = 0$ berkondisi buruk jika karena perubahan ϵ yang kecil mengakibatkan perubahan h yang besar pada

$$f(x+h) + \epsilon = 0$$

* Noble, Ben. *A Videotape Course on Elementary Numerical Analysis*. Oberlin College. 1972.