

Analisis Numerik

Solusi Sistem Persamaan Linier

Ahmad Rio Adriansyah

STT Terpadu - Nurul Fikri

ahmad.rio.adriansyah@gmail.com
arasy@nurulfikri.ac.id

Sistem Persamaan Linier

- Persamaan linier = Persamaan yang hanya mengandung konstanta dan peubah dengan pangkat tertinggi 1
- Sistem persamaan linier = Sejumlah persamaan linier yang harus diselesaikan secara simultan

SPL dengan 2 Peubah

Contoh :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

Cara penyelesaian :

- Metode Substitusi
- Metode Eliminasi
- Metode Gabungan (substitusi dan eliminasi)

Metode Substitusi

- Satu persamaan diatur agar hanya ada 1 peubah di sebelah kiri

$$y = 1 - 2x$$

- Substitusikan peubah tersebut ke dalam persamaan yang lainnya

$$x + 2(1 - 2x) = -4$$

$$x + 2 - 4x = -4$$

$$x - 4x = -4 - 2$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

- Substitusikan nilai peubah yang sudah didapat ke persamaan asal

$$y = 1 - 2(2) = 1 - 4$$

$$y = -3$$

Metode Eliminasi

- Samakan koefisien salah satu peubah

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \times 1 \\ x + 2y = -4 & \times 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + 4y = -8 \end{cases}$$

- Eliminasi salah satu peubah

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 2x + 4y & = & -8 \quad - \\ \hline -3y & = & 9 \end{array}$$

$$\boxed{y = -3}$$

- Lakukan hal yang sama untuk peubah lainnya

SPL dengan 3 Peubah

Contoh :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$$

Bentuk Umum SPL

dan dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$Ax = b$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Penyulihan Mundur

Jika matriks A berbentuk matriks segitiga atas sehingga sistem persamaannya menjadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

solusi dapat diperoleh dengan cara penyulihan mundur (*backward substitution*)

Penyulihan Mundur

```
procedure Sulih_Mundur(A : matriks; b : vektor; n: integer;
                      var x : vektor);
{ Menghitung solusi sistem persamaan linjar yang sudah berbentuk matriks
  segitiga atas
  K.Awal : A adalah matriks yang berukuran  $n \times n$ , elemennya sudah terdefinisi
           harganya; b adalah vektor kolom yang berukuran  $n \times 1$ .
  K.Akhir: x berisi solusi sistem persamaan linjar.
}
var
    j, k: integer;
    sigma: real;
begin
    x[n]:=b[n]/a[n,n];
    for k:=n-1 downto 1 do begin
        sigma:=0;
        for j:=k+1 to n do
            sigma:=sigma + a[k, j] * x[j];
        {endfor}
        x[k]:= (b[k] - sigma )/a[k, k];
    end;
end;
```

$$a_{nn}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n/a_{nn}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

\vdots

dst

Jika $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{k+1}$ diketahui, maka x_k dapat dihitung dengan

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n (a_{kj}x_j)}{a_{kk}}$$

untuk $k = n-1, n-2, \dots, 1$ dan $a_{kk} \neq 0$

Tujuannya untuk mengubah matriks A pada persamaan matriks $Ax = b$ menjadi matriks segitiga atas.

$$Ax = b \rightarrow Ux = c$$

dimana U adalah matriks segitiga atas $n \times n$, dan x, c matriks kolom berukuran n .

Mengubahnya dengan menggunakan "operasi baris elementer" (OBE).

OBE mengubah persamaan, tetapi tidak mengubah solusi dari sistem persamaannya.

Terdiri dari 3 buah operasi :

- Pertukaran : Menukar urutan dua buah persamaan
- Penskalaan : Mengalikan sebuah persamaan dengan konstanta tak nol
- Penjumlahan : Mengganti sebuah persamaan dengan penjumlahan persamaan itu dengan persamaan lain.

Contoh :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Sistem persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Untuk melakukan OBE, persamaan matriks tersebut dapat kita buat menjadi bentuk yang tergabung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim R_3 + R_1 \rightarrow R_3 \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\sim R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow{\sim R_3 + 3R_2 \rightarrow R_3 \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ubahlah sistem persamaan linier berikut menjadi bentuk persamaan matriks, dan ubah matriksnya menjadi matriks segitiga atas dengan Eliminasi Gauss.

$$1 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{cases}$$

Eliminasi Gauss

Nilai $a_{r,r}$ yang digunakan untuk mengeliminasi x_r pada baris ke $r + 1, r + 2, \dots, n$ disebut elemen pivot dan persamaan pada baris ke- r disebut persamaan pivot.

Elemen pivot dapat bernilai nol sehingga bisa terjadi pembagian dengan nol. Metode eliminasi yang tidak memperdulikan kemungkinan ini disebut dengan Eliminasi Gauss Naif. Naif karena metodenya tidak melakukan pemeriksaan kemungkinan pembagian dengan nol.

Untuk menghindari elemen pivot yang bernilai nol, dapat dilakukan operasi pertukaran baris. Metode ini disebut sebagai Eliminasi Gauss dengan Pivoting

Eliminasi Gauss dengan Pivoting

Contoh :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 & = 9 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 & = 6 \end{cases}$$

Sistem persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Untuk melakukan OBE, persamaan matriks tersebut dapat kita buat menjadi bentuk yang tergabung

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array} \right] \sim_{R_2+3R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 6 \end{array} \right] \\
 &\quad \sim_{R_3-2R_1 \rightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right] \\
 &\quad \sim_{R_3 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Penyulihan Mundur

Setelah didapat matriks segitiga atas, maka dapat dilakukan penyulihan mundur untuk mendapatkan solusi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-3x_3 = 3 \rightarrow x_3 = \frac{3}{-3} = \boxed{-1}$$

$$4x_2 + 2x_3 = 2 \rightarrow 4x_2 - 2 = 2$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{4}{4} = \boxed{1}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_1 + 2 - 1 = 2$$

$$\rightarrow x_1 = \boxed{1}$$

Mengurangi Galat

Tata Ancang *pivoting*

- Pivoting sebagian (*partial pivoting*)

Pivot dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & \boxed{x} & x & x & x \\ 0 & \boxed{x} & x & x & x \\ 0 & \boxed{x} & x & x & x \end{array} \right]$$

*dicari nilai $|x|$ terbesar lalu barisnya dipertukarkan dengan baris kedua

- Pivoting lengkap (*complete pivoting*)

Disamping baris, kolom juga diikuti dalam pencarian elemen terbesar dan dipertukarkan.

Contoh :

$$\begin{cases} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 & = & 7.85 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 & = & 71.4 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 & = & -19.3 \end{cases}$$

Solusi eksaknya adalah $x_1 = 3$, $x_2 = -2.5$, dan $x_3 = 7$
Perhitungan akan dilakukan dengan 4 digit di belakang koma.

Tanpa Pivoting

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \end{array} \right]$$

$$\sim_{R_1+30R_3 \rightarrow R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0 & -210.1 & 8.8 & 586.85 \end{array} \right]$$

$$\sim_{R_1-10R_2 \rightarrow R_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 1.9 & -100.2 & -706.15 \\ 0 & -210.1 & 8.8 & 586.85 \end{array} \right]$$

$$\sim_{R_3*(1.9/-210.1)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 1.9 & -100.2 & -706.15 \\ 0 & 1.9 & -0.0796 & -5.3071 \end{array} \right]$$

$$\sim_{R_3-R_2 \rightarrow R_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 1.9 & -100.2 & -706.15 \\ 0 & 0 & 100.1204 & 700.8429 \end{array} \right]$$

Tanpa Pivoting

$$100.1204x_3 = 700.8429 \quad \rightarrow x_3 = \boxed{7.0000009988}$$

$$1.9x_2 - 100.2x_3 = -706.15 \quad \rightarrow x_2 = \boxed{-2.4999473266}$$

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad \rightarrow x_1 = \boxed{3.0000018224}$$

Galat perhitungan adalah selisih nilai eksak dan nilai perhitungan

$$\epsilon = X_{hitung} - X_{eksak}$$

$$\epsilon_{x_1} = 3.0000018224 - 3 = 0.0000018224$$

$$\epsilon_{x_2} = (-2.4999473266) - (-2.5) = 0.0000526734$$

$$\epsilon_{x_3} = 7.0000009988 - 7 = 0.0000009988$$

Dengan Pivoting

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \end{array} \right]$$

$$\sim R_1 + 30R_3 \rightarrow R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \\ 0 & -210.1 & 8.8 & 586.85 \end{array} \right]$$

$$\sim R_1 - 10R_2 \rightarrow R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & 1.9 & -100.2 & -706.15 \\ 0 & \boxed{-210.1} & 8.8 & 586.85 \end{array} \right]$$

$$\sim R_2 \leftrightarrow R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & -210.1 & 8.8 & 586.85 \\ 0 & 1.9 & -100.2 & -706.15 \end{array} \right]$$

$$\sim R_2 + \frac{210.1}{1.9} R_3 \rightarrow R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0 & -210.1 & 8.8 & 586.85 \\ 0 & 0 & -11071.2105 & -77498.4737 \end{array} \right]$$

Dengan Pivoting

$$-11071.2105x_3 = -77498.4737 \rightarrow x_3 = \boxed{7.0000000181}$$

$$-210x_2 + 8.8x_3 = 586.85 \rightarrow x_2 = \boxed{-2.4999999992}$$

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \rightarrow x_1 = \boxed{3.0000000012}$$

Galat perhitungannya

$$\epsilon = X_{hitung} - X_{eksak}$$

$$\epsilon_{x_1} = 3.0000000012 - 3 = 0.0000000012$$

$$\epsilon_{x_2} = (-2.4999999992) - (-2.5) = 0.0000000008$$

$$\epsilon_{x_3} = 7.0000000181 - 7 = 0.0000000181$$

Galat mutlak adalah nilai mutlak dari selisih nilai eksak dan nilai perhitungan

$$\epsilon = |x_{hitung} - x_{eksak}|$$

Galat mutlaknya

	Tanpa Pivoting	Dengan Pivoting
x_1	0.0000018224	0.0000000012
x_2	0.0000526734	0.0000000008
x_3	0.0000009988	0.0000000181

Mengurangi Galat

Penskalaan (*scaling*)

Penskalaan digunakan untuk SPL **yang mempunyai perbedaan koefisien yang mencolok**. Caranya adalah dengan membagi tiap baris persamaan dengan nilai mutlak koefisien terbesar di ruas kirinya sehingga koefisien maksimum dalam tiap baris adalah 1.

Contoh :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 100000 & 100000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 100000 & 100000 \\ 0 & -49999 & -49998 \end{array} \right]$$

Jika kita menggunakan perhitungan dengan 4 angka di belakang koma, maka persamaan tersebut menghasilkan solusi yang salah $x_1 = 0, x_2 = 1$

Mengurangi Galat

Namun jika kita skalakan terlebih dahulu

$$\begin{bmatrix} 2 & 100000 & | & 100000 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.00002 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0.00002 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

perhitungannya memberikan solusi yang benar $x_1 = x_2 = 1$

Kemungkinan Solusi SPL

- Solusi unik
Jika pada hasil eliminasi Gauss tidak terdapat baris yang semuanya bernilai 0
- Banyak solusi
Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat setidaknya satu baris yang semuanya 0
- Tidak ada solusi
Jika pada hasil eliminasi Gauss terdapat baris yang semuanya bernilai 0, tetapi elemen pada baris yang bersesuaian di vektor kolom b tidak 0

Penggunaan metode eliminasi Gauss mengakibatkan banyak galat pembulatan sehingga solusi yang diperoleh bisa jauh dari solusi sebenarnya.

Untuk mengatasinya, dapat digunakan metode iterasi. Dengan metode ini, galat pembulatan dapat diperkecil karena kita dapat melanjutkan iterasi sampai didapat solusi seteliti mungkin.

Metode eliminasi Gauss disebut metode langsung dan metode yang menggunakan iterasi disebut metode tak langsung.

Sistem persamaan linier

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

dapat diselesaikan dengan iterasi dengan syarat $a_{kk} \neq 0$

$x_i^{(k)}$ maksudnya adalah nilai dari peubah x_i pada iterasi ke k

Persamaan iterasinya dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,(n-1)}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}\end{aligned}$$

Metode Iterasi

Dengan tebakan awal

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

dan kondisi pemberhentian dapat ditentukan dengan galat relatif atau banyaknya iterasi

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \epsilon$$

Rumus umum

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

- Dari tebakan awal dan persamaan pertama didapatkan nilai $x_1^{(1)}$
- Dari tebakan awal dan persamaan kedua didapatkan nilai $x_2^{(1)}$
- Setelah semua nilai $x_i^{(1)}$ didapat, dihitung nilai $x_i^{(2)}$
- dst

Rumus umum

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

- Dari tebakan awal dan persamaan pertama didapatkan nilai $x_1^{(1)}$
- Nilai $x_1^{(1)}$ digunakan dalam perhitungan nilai $x_2^{(1)}$
- Nilai $x_1^{(1)}$ dan $x_2^{(1)}$ digunakan dalam perhitungan nilai $x_3^{(1)}$
- dst

buka file Iterasi.ods