Analisis Numerik
Regresi dan Interpolasi

Ahmad Rio Adriansyah

STT Terpadu - Nurul Fikri

ahmad.rio.adriansyah@gmail.com
arasy@nurulfikri.ac.id

May 3, 2017

Interpolasi Polinom

Diberikan $n+1$ buah titik berbeda, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, tentukan polinom $p_n(x)$ yang melewati semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

$$y_i = p_n(x_i) \qquad \text{untuk } i = 0, 1, \ldots, n$$

nilai y_i dan x_i dapat berasal dari pengamatan atau fungsi matematika $(f(x))$ seperti $ln(x), cos(x)$, atau yang lainnya.

$p_n(x)$ disebut sebagai **fungsi hampiran** terhadap $f(x)$. Disebut juga sebagai **polinom interpolasi**.

Interpolasi Polinom

Setelah fungsi hampiran $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung nilai y di $x = a$ dengan

$$y = p_n(a)$$

- Jika nilai a terletak di dalam (antara x_0 s.d. x_n), maka disebut sebagai **interpolasi**

$$x_0 < a < x_n$$

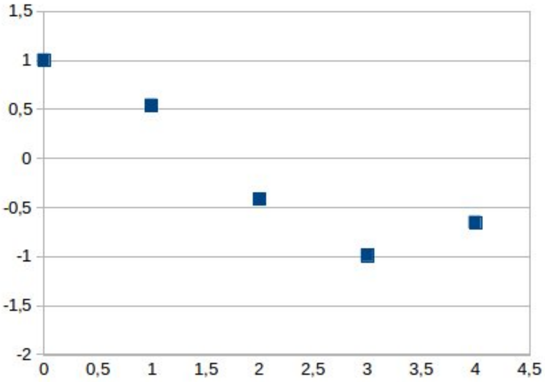
- Jika nilai a terletak di luar (lebih kecil dari x_0 atau lebih besar dari x_n), maka disebut sebagai **ekstrapolasi**

$$a < x_0 \vee a > x_n$$

Contoh

Diberikan titik-titik data berikut

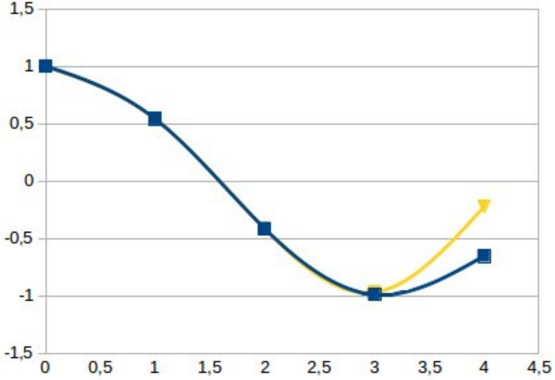
$$(0, 1.0000), (1, 0.5403), (2, -0.4161), (3, -0.9900), (4, -0.6536)$$



Contoh

Ternyata titik-titik data tersebut dapat didekati dengan fungsi

$$p_3(x) = 1 + 0.0886x - 0.6982x^2 + 0.1499x^3$$



Contoh

Jika kita mencari nilai di antara 0 s.d. 4, misalnya $x = 1,5$, maka itu adalah interpolasi

$$\begin{aligned} p_3(1,5) &= 1 + 0.0886(1,5) - 0.6982(1,5)^2 + 0.1499(1,5)^3 \\ &= 0.0679 \end{aligned}$$

Jika kita mencari nilai di luar itu, misalnya $x = -0,5$, maka itu adalah ekstrapolasi

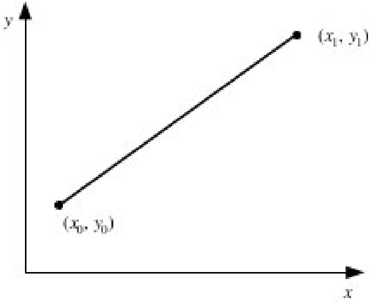
$$\begin{aligned} p_3(-0,5) &= 1 + 0.0886(-0,5) - 0.6982(-0,5)^2 + 0.1499(-0,5)^3 \\ &= 0.7624 \end{aligned}$$

Interpolasi Linier

Interpolasi linier adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus.

Diberikan dua buah titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$. Polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah persamaan garis lurus yang berbentuk

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$



Interpolasi Linier

Koefisien a_0 dan a_1 dicari dengan substitusi dan eliminasi.

Dengan mensubstitusi nilai (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan $p_1(x) = a_0 + a_1 x$, didapat 2 persamaan

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0$$
$$y_1 = a_0 + a_1 x_1$$

dari SPL tersebut, didapatkan solusi

$$a_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Interpolasi Linier

Fungsi hampiran yang didapatkan adalah

$$p_1(x) = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$

atau dengan sedikit manipulasi aljabar didapat bentuk persamaan

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

berupa garis lurus yang melalui titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$

Contoh

Diketahui $ln(9.0) = 2.1972$ dan $ln(9.5) = 2.2513$.
Tentukan nilai $ln(9.2)$ dengan interpolasi linier!
Bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

Nilai eksak $ln(9.2) = 2.2192$

Contoh

Titik data yang kita punya adalah $(9.0, 2.1972)$ dan $(9.5, 2.2513)$. Persamaan garis yang digunakan untuk menginterpolasi adalah

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= 2.1972 + \frac{2.2513 - 2.1972}{9.5 - 9.0}(x - 9.0) \\ &= 2.1972 + \frac{0.0541}{0.5}(x - 9.0) \end{aligned}$$

$$p_1(x) = 1.2234 + 0.1082x$$

Contoh

Nilai $p_1(9.2)$ adalah

$$\begin{aligned} p_1(9.2) &= 1.2234 + 0.1082x \\ &= 1.2234 + 0.1082(9.2) \\ &= 1.2234 + 0.9954 \\ &= 2.2188 \end{aligned}$$

Jika kita bandingkan dengan nilai eksaknya $= 2.2192$ terdapat galat sebesar

$$\epsilon = |2.2192 - 2.2188| = 0.0004$$

Interpolasi Kuadratik

Jika diberikan **tiga** buah titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, dan (x_2, y_2). Polinom yang dapat menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah persamaan yang berbentuk

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Dengan mensubstitusi nilai titik ke dalam persamaannya, didapat

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 &= y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 &= y_2 \end{aligned}$$

yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss.

Contoh

Diketahui $ln(8.0) = 2.0794, ln(9.0) = 2.1972$, dan $ln(9.5) = 2.2513$.
Tentukan nilai $ln(9.2)$ dengan interpolasi kuadratik!
Bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

Nilai eksak $ln(9.2) = 2.2192$

Contoh

Titik data yang kita punya adalah $(8.0, 2.0794)$, $(9.0, 2.1972)$, dan $(9.5, 2.2513)$. Sistem persamaan linier yang terbentuk adalah

$$a_0 + a_1(8.0) + a_2(8.0)^2 = 2.0794$$
$$a_0 + a_1(9.0) + a_2(9.0)^2 = 2.1972$$
$$a_0 + a_1(9.5) + a_2(9.5)^2 = 2.2513$$

Dengan metode eliminasi gauss, didapat nilai a_0, a_1, dan a_2 sehingga polinom kuadratiknya

$$p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$$

Contoh

Nilai $p_2(9.2)$ adalah

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2 \\ &= 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 \\ &= 0.6762 + 2.0847 - 0.5417 \\ &= 2.2192 \end{aligned}$$

Jika kita bandingkan dengan nilai eksaknya $= 2.2192$ terdapat galat sebesar

$$\epsilon = |2.2192 - 2.2192| = 0.0000$$

Dengan ketelitian 4 angka di belakang koma, nilai hampiran untuk $ln(9.2)$ sama dengan nilai eksaknya.

Interpolasi Kubik

Jika diberikan **empat** buah titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dan (x_3, y_3). Polinom yang dapat menginterpolasi ketiga titik tersebut dengan lebih baik lagi adalah persamaan yang berbentuk

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Dengan mensubstitusi nilai titik ke dalam persamaannya, didapat

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 &= y_2 \\
a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 &= y_3
\end{aligned}$$

yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss.

Interpolasi Polinom

Dengan cara yang sama, kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n jika diketahui $n+1$ buah titik.

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Interpolasi Polinom

Dengan mensubstitusikan nilai titik-titik data yang dimiliki, maka didapatkan sistem persamaan linier dengan $n+1$ buah persamaan dan $n+1$ buah variabel.

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n &= y_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

yang solusinya dapat diperoleh dengan metode eliminasi Gauss.

Interpolasi Polinom

Tapi penentuan polinom interpolasi dengan cara tersebut kurang disukai karena sistem persamaan linier yang diperoleh ada kemungkinan berkondisi buruk, terutama untuk derajat polinom yang semakin tinggi. Selain itu, semakin tinggi derajat polinom, komputasi yang dibutuhkan menigkat sangat cepat.

Interpolasi Polinom

Beberapa metode pencarian polinom interpolasi ditemukan tanpa menggunakan cara pendekatan di atas, diantaranya :

- Polinom Lagrange
- Polinom Newton
- Polinom Newton-Gregory (kasus khusus dari polinom Newton)

Metode interpolasi yang berbeda-beda tersebut dapat menghasilkan polinom yang sama meskipun bentuk dan penggunaan sumber daya komputasi yang berbeda.

Polinom Lagrange

Pada bagian interpolasi linier, fungsi hampirannya dapat dihitung dengan cara

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Atau bentuk lainnya

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Polinom Lagrange

Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x)$$

dengan

$$a_0 = y_0, \qquad L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

$$a_1 = y_1, \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Persamaan tersebut disebut sebagai polinom Lagrange derajat 1

Polinom Lagrange

Secara umum, polinom Lagrange berderajat n (atau kurang) untuk $n+1$ buah titik adalah

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \cdots + a_n L_n(x)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_i &= y_i, \qquad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \ldots, n \\ L_i(x) &= \prod_{j=0; j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n)} \end{aligned}$$

Polinom Lagrange

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } i = j \\ 0 & \text{, jika } i \neq j \end{cases}$$

sehingga polinom $p_n(x)$ melewati semua titik data.

bukti?

Contoh

Diketahui 4 buah titik

x_i	0	0.4	0.8	1.2
y_i	1.0000	0.9211	0.6967	0.3624

Gunakan polinom interpolasi Lagrange derajat 3 untuk mencari nilai $p_3(0.5)$!

Contoh

x_i	0	0.4	0.8	1.2
y_i	1.0000	0.9211	0.6967	0.3624

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x) \\
&= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3(x) = -&2.6042(x-0.4)(x-0.8)(x-1.2) \\
+&\,7.1958(x-0.0)(x-0.8)(x-1.2) \\
-&\,5.4430(x-0.0)(x-0.4)(x-1.2) \\
+&\,0.9436(x-0.0)(x-0.4)(x-0.8)
\end{aligned}
$$

Contoh

$$
\begin{aligned}
p_3(0.5) &= -2.6042(0.5-0.4)(0.5-0.8)(0.5-1.2) \\
&\quad + 7.1958(0.5-0.0)(0.5-0.8)(0.5-1.2) \\
&\quad - 5.4430(0.5-0.0)(0.5-0.4)(0.5-1.2) \\
&\quad + 0.9436(0.5-0.0)(0.5-0.4)(0.5-0.8) \\
&= 0.8772
\end{aligned}
$$

Polinom Lagrange

Polinom Lagrange tidak hanya berlaku untuk titik-titik berjarak sama. Polinom Lagrange juga dapat dipergunakan untuk titik yang berjarak tidak sama.

Contoh :

x	1	4	6
y	1.5709	1.5727	1.5751

Tentukan $p_2(3.5)$ dengan polinom Lagrange derajat 2!

Kelemahan Polinom Lagrange

- Jumlah komputasi yang besar untuk satu kali interpolasi
- Bila titik data berubah, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan karena tidak ada hubungan antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$

Polinom Newton

Polinom yang dibuat sebelumnya dapat digunakan lagi untuk membentuk polinom baru dengan derajat lebih tinggi.

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Interpolasi linier tersebut kita ubah menjadi

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

dengan
$a_0 = y_0 = f(x_0)$ dan
$a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Bentuk

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

merupakan bentuk selisih terbagi (*divided-difference*) dan dapat dituliskan sebagai

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Polinom Newton

Sekarang kita pandang interpolasi kuadratik. Interpolasi kuadratik dapat kita ubah menjadi bentuk :

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

dengan

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Polinom Newton

Dengan memasukkan nilai a_0 dan a_1 , kita bisa ubah bentuk a_2 menjadi

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Polinom Newton

Langkah tersebut kita lakukan terus menerus, kita bisa mendapatkan rumus umum polinom newton sebagai berikut :

- $p_0(x) = a_0$
- $p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$

dengan nilai konstanta $a_0, a_1, \dots, a_n$ merupakan nilai selisih terbagi :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) \\
a_1 &= f[x_1, x_0] \\
a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\vdots \\
a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]
\end{aligned}
$$

Polinom Newton

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k])}{x_i - x_k}$$

$$\vdots$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Untuk menghitung konstanta tersebut, kita dapat menggunakan tabel selisih terbagi. Misalnya untuk 4 buah titik

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Contoh

Diberikan 4 buah titik $(8, 2.0794), (9, 2.1972), (9.5, 2.2513), (11, 2.3979)$. Carilah fungsi polinom yang melewati titik-titik tersebut dengan polinom newton derajat 3 dan hitunglah $f(9.2)$!

Polinom newton derajat 3 berbentuk

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Contoh

Sebagai bantuan kita dapat buat tabel selisih terbaginya

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.0794	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	9.0	2.1972	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	9.5	2.2513	$f[x_3, x_2]$		
3	11.0	2.3979			

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2.1972 - 2.0794}{9.0 - 8.0} = 0.1178$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.1082$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 0.0977$$

Contoh

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.0794	$f[x_1, x_0] = 0.1178$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	9.0	2.1972	$f[x_2, x_1] = 0.1082$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	9.5	2.2513	$f[x_3, x_2] = 0.0977$		
3	11.0	2.3979			

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0.1082 - 0.1178}{9.5 - 8.0} = -0.0064$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = -0.0052$$

Contoh

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	2.0794	0.1178	$f[x_2, x_1, x_0] = -0.0064$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	9.0	2.1972	0.1082	$f[x_3, x_2, x_1] = -0.0052$	
2	9.5	2.2513	0.0977		
3	11.0	2.3979			

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

$$= \frac{-0.0052 - (-0.0064)}{11.0 - 8.0} = 0.0004$$

Contoh

Polinom interpolasi newton derajat 3

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	ST-1	ST-2	ST-3
0	8.0	**2.0794** $= a_0$	**0.1178** $= a_1$	**-0.0064** $= a_2$	**0.0004** $= a_3$
1	9.0	2.1972	0.1082	-0.0052	
2	9.5	2.2513	0.0977		
3	11.0	2.3979			

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 2.0794 + 0.1178(x - 8) - 0.0064(x - 8)(x - 9) \\
&\quad + 0.0004(x - 8)(x - 9)(x - 9.5)
\end{aligned}
$$

Contoh

Hitung $f(9.2)$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 2.0794 + 0.1178(x-8) - 0.0064(x-8)(x-9) \\ &\quad + 0.0004(x-8)(x-9)(x-9.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(9.2) = p_3(9.2) &= 2.0794 + 0.1178((9.2)-8) \\ &\quad - 0.0064((9.2)-8)((9.2)-9) \\ &\quad + 0.0004((9.2)-8)((9.2)-9)((9.2)-9.5) \\ &= 2.2192 \end{aligned}$$

Latihan

Diberikan 4 buah titik $(0, 1.0000), (1, 0.5403), (2, -0.4161), (4, -0.6536)$. Carilah fungsi polinom yang melewati titik-titik tersebut dengan polinom newton derajat 3 dan hitunglah $f(3)$ dan $f(2.5)$!

Latihan Tambahan

Jika ditambahkan satu titik baru $(3, -0.9900)$, cari fungsi polinom dengan polinom newton derajat 4 dan hitung $f(2.5)$

Algoritma

Polinom Lagrange

```
function Lagrange(x:real; n:integer):real;
{ Menghitung y = pn(x), dengan p(x) adalah polinom Lagrange derajat n.
  Titik-titik data telah disimpan di dalam larik x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, j  : integer;
  pi, L : real;
begin
  L:=0;
  for i:=0 to n do
    begin
       pi:=1;
       for j:=0 to n do
          if i<> j then
            pi:=pi*(x - x[j])/(x[i] - x[j]);
       {endfor}
       L:=L + y[i]*pi;
    end {for};
    Lagrange:=L;
end {Lagrange};
```

Algoritma

Polinom Newton

```
function Newton(x:real; n:integer):real;
{Menghitung y = p(x), dengan p(x) adalah polinom Newton derajat n.
 Titik-titik data telah disimpan di dalam larik x[0..n] dan y[0..n]
}
var
  i, k   : integer;
  ST : array[0..30, 0..30] of real;   {menyimpan tabel selisih terbagi}
  jumlah, suku: real;

begin
  for k:=0 to n do          { simpan y[k] pada kolom 0 dari matriks ST }
     ST[k,0]:=y[k];
  {end for}

  for k:=1 to n do          {buat tabel selisih terbagi}
     for i:=0 to n-k do
         ST[i,k]:=(ST[i+1,k-1] - ST[i,k-1])/(x[i+k]-x[i]);
     {end for}
  {end for}

  {hitung p(x) }
  jumlah:=ST[0,0];
  for i:=1 to n do
   begin
      suku:=ST[0,i];
      for k:=0 to i-1 do
         suku:=suku*(x-x[k])
      {end for}
      jumlah:=jumlah + suku;
   end;
  Newton:=jumlah;
end;
```

Kelebihan Polinom Newton

Polinom Newton lebih disukai untuk diprogram dalam komputer karena beberapa hal, diantaranya :

- Polinom Newton memudahkan perhitungan polinom dengan derajat lebih tinggi dalam program yang sama.
- Penambahan suku-suku secara beruntun dapat dijadikan kriteria pemberhentian program
- Tabel selisih terbagi dapat dipakai berulang-ulang untuk memperkirakan nilai fungsi pada x yang berlainan

Polinom Newton sering digunakan pada kasus yang derajat polinomnya tidak diketahui.

Kelebihan Polinom Lagrange

Tapi bukan berarti polinom Lagrange tidak memiliki keunggulan. Polinom Lagrange lebih unggul dari Newton dalam hal :

- Lebih mudah diprogram
- Hemat memori karena tidak perlu menyimpan tabel selisih

Polinom Lagrange biasanya digunakan jika derajat polinom interpolasi diketahui lebih dahulu.

Polinom Interpolasi Unik

Polinom interpolasi hanya ada untuk x_i yang berbeda. Jika terdapat beberapa nilai x_i yang sama, kita tidak bisa membuat polinom interpolasi yang unik.

Contohnya titik-titik berikut :

x	0,1	0,4	0,5	0,7	0,7	0,9
y	0,61	0,92	0,99	1,52	1,47	2,03

$x_3 = x_4$ sehingga kita tidak bisa membuat polinom interpolasi yang unik.

Polinom Interpolasi Unik

Jika polinom interpolasi ada, maka polinom tersebut unik. Dengan kata lain, baik menggunakan metode polinom Lagrange atau Newton, akan menghasilkan polinom yang sama.

Bukti :
Misalkan $p_n(x)$ tidak unik, berarti ada polinom lain $q_n(x)$ yang melewati semua $n+1$ buah titik data $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$ dengan

$$p_n(x_i) = q_n(x_i) = y_i$$

Karena $p_n(x)$ dan $q_n(x)$ tidak sama, maka terdapat selisih sebesar

$$R_n(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

dalam hal ini $R_n(x)$ adalah polinom berderajat $\leq n$

Polinom Interpolasi Unik

Tapi nilai $R_n(x)$ di titik-titik $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ adalah 0 karena

$$R_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$$

Menurut teorema dasar kalkulus, "Polinom derajat $\leq n$ yang mempunyai $(n+1)$ buah akar yang berbeda adalah polinom nol (polinom garis y=0)", sehingga $R_n(x) = 0$ dan

$$p_n(x) - q_n(x) = 0$$

Dengan kata lain,

$$p_n(x) = q_n(x)$$

Kesimpulannya, $p_n(x)$ unik.

Contoh

Diberikan titik data

x	1	2	4
y	4.2	8.5	6.6

Interpolasikan titik-titik tersebut dengan polinom interpolasi Lagrange dan polinom interpolasi Newton derajat maksimalnya.

Contoh : Lagrange

x	1	2	4
y	4.2	8.5	6.6

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) \\
&= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= 4.2 \frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)} + 8.5 \frac{(x-1)(x-4)}{(1)(-2)} \\
&\quad + 6.6 \frac{(x-1)(x-2)}{(3)(2)}
\end{aligned}
$$

Contoh : Lagrange

$$p_2(x) = 4.2\frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)} + 8.5\frac{(x-1)(x-4)}{(1)(-2)} + 6.6\frac{(x-1)(x-2)}{(3)(2)}$$

$$= 1.4(x-2)(x-4) - 4.25(x-1)(x-4) + 1.1(x-1)(x-2)$$

$$= 1.4(x^2-6x+8) - 4.25(x^2-5x+4) + 1.1(x^2-3x+2)$$

$$= \boxed{-1.75x^2 + 9.55x - 3.6}$$

Contoh : Newton

x	1	2	4
y	4.2	8.5	6.6

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Nilai-nilai dari a_0, a_1, dan a_2 dicari menggunakan tabel selisih terbagi

i	x_i	y_i	ST-1	ST-2
0	1	4.2	4.3	-1.75
1	2	8.5	-0.95	
2	4	6.6		

$$a_0 = 4.2, \quad a_1 = 4.3, \quad a_2 = -1.75$$

Contoh : Newton

i	x_i	y_i	ST-1	ST-2
0	1	4.2	4.3	-1.75
1	2	8.5	-0.95	
2	4	6.6		

$$a_0 = 4.2, \quad a_1 = 4.3, \quad a_2 = -1.75$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 4.2 + 4.3(x - 1) - 1.75(x - 1)(x - 2) \\ &= 4.2 + 4.3(x - 1) - 1.75(x^2 - 3x + 2) \\ &= \boxed{-1.75x^2 + 9.55x - 3.6} \end{aligned}$$

Galat Interpolasi Polinom

$p_n(x)$ adalah polinom hampiran untuk fungsi $f(x)$. Meskipun di titik-titik tertentu $(x_i, i = 0, 1, \dots, n)$ nilainya bersesuaian, $p_n(x) \neq f(x)$.

Sebutlah $E(x)$ sebagai galat antara nilai asli $f(x)$ dan polinom hampiran $p_n(x)$

$$E(x) = f(x) - p_n(x)$$

Nilai $E(x)$ di titik $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ adalah nol, karena $f(x_i) = p_n(x_i)$. Dengan kata lain, $E(x)$ mempunyai $n + 1$ buah akar, yaitu $x_0, x_1, \dots, x_n$ sehingga dapat ditulis sebagai

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)R(x)$$

atau

$$E(x) = Q_{n+1}(x)R(x)$$

Galat Interpolasi Polinom

Cara menentukan $R(x)$, kita mengambil persamaan

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)R(x)$$

dan kita ubah menjadi

$$f(x) - p_n(x) - (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)R(x) = 0$$

Galat Interpolasi Polinom

Definisikan fungsi $W(t)$ sebagai

$$W(t) = f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_n)R(x) = 0$$

$W(t)$ adalah persamaan yang memiliki $n + 2$ akar, yaitu pada $t = x_0, x_1, \dots, x_n$ dan $t = x$

Berdasarkan teorema Rolle

> *Misalkan fungsi f kontinu dalam selang $[a, b]$ dan $f'(x)$ ada untuk semua x di antara a dan b. Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapat nilai c diantara a dan b sedemikian sehingga $f'(c) = 0$*

kita tahu bahwa turunan pertama dari W memiliki $n + 1$ akar

Galat Interpolasi Polinom

Lebih jauh lagi,

$$
\begin{aligned}
W'(t) = 0 &\longrightarrow \text{mempunyai n+1 akar} \\
W''(t) = 0 &\longrightarrow \text{mempunyai n akar} \\
W^{(3)}(t) = W'''(t) = 0 &\longrightarrow \text{mempunyai n-1 akar} \\
&\vdots \\
W^{(n+1)}(t) = 0 &\longrightarrow \text{mempunyai 1 akar}
\end{aligned}
$$

misalnya akar dari $W^{(n+1)}(t)$ adalah di titik c

Galat Interpolasi Polinom

$$W^{(n+1)}(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} W(t) = 0$$

$$= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [f(t) - p_n(t) - (t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_n) R(x)] = 0$$

$$= f^{(n+1)}(c) - 0 - (n+1)!\ R(x)$$

Jadi $R(x)$ adalah

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Galat Interpolasi Polinom

Galatnya menjadi

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

atau

$$E(x) = Q_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Galat tersebut berlaku untuk semua metode interpolasi polinom.

Galat Interpolasi Polinom

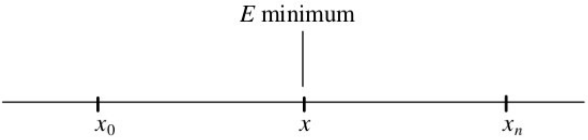
Contoh :

Misalnya kita menginterpolasi 2 buah titik dengan polinom Lagrange derajat 1, maka galatnya

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)\frac{f''(c)}{2!}$$

Galat Minimum

Galat minimum terjadi untuk nilai x di pertengahan selang



Untuk mendapatkan galat interpolasi yang minimum, pilihlah selang $[x_0, x_n]$ sedemikian rupa sehingga nilai x yang dicari berada di tengah selang tersebut!

Galat Minimum

Contoh:

Jika diberikan titik-titik data

x	f(x)
0.025	2.831
0.050	3.246
0.075	4.721
0.100	5.210
0.125	6.310
0.150	7.120
0.175	8.512
0.200	9.760
0.225	10.310

dan hendak dicari $f(0.112)$, maka selang yang dapat dipilih agar galat interpolasi kecil adalah

$$[0.100, 0.125] \longrightarrow \text{untuk polinom derajat 1}$$
$$[0.075, 0.150] \longrightarrow \text{untuk polinom derajat 3}$$
$$[0.050, 0.175] \longrightarrow \text{untuk polinom derajat 5}$$

dst