

MATEMATIKA DISKRET

Penarikan Kesimpulan (Inference Rule)



Nugroho Dwi Saputra
nugroho.dsaputra@gmail.com

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Dapat memahami aturan dalam pengambilan kesimpulan
- Dapat membuktikan kebasahan dari pengambilan kesimpulan

Suatu **argumentasi** dalam logika proposes adalah suatu barisan pernyataan p_1, p_2, \dots, p_n , yang diakhiri dengan sebuah pernyataan q . Pernyataan-pernyataan p_1, p_2, \dots, p_n disebut premis atau hipotesa dan q disebut **konklusi**.

Suatu argumentasi dikatakan **absah** (*valid*) atau berlaku, jika semua hipotesanya (premisnya) p_1, p_2, \dots, p_n bernilai benar mengakibatkan konklusinya q juga bernilai benar.

Dengan perkataan lain, suatu argumentasi p_1, p_2, \dots, p_n, q adalah valid apabila $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ adalah sebuah tautology.

Rule of inference	Tautology	Name
$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	Modus ponens
$\frac{\neg q}{p \rightarrow q} \therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	Modus tollens
$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism
$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Disjunctive syllogism
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	Addition
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Simplification
$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Conjunction
$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \rightarrow (p \vee r)$	Resolution

Contoh Aturan *Addition* atau *Disjunction introduction*

Hari ini hujan.

Maka dapat disimpulkan bahwa

Hari ini hujan **atau** kita pergi ke pameran.

Contoh Aturan *Simplification* atau *Conjunction elimination*

(1) Hari ini hujan **dan** kita pergi ke pameran.

Maka dapat disimpulkan bahwa Hari ini hujan.

(2) Hari ini hujan **dan** kita pergi ke pameran.

Maka dapat disimpulkan bahwa Kita pergi ke pameran.

Contoh Aturan *Modus Tollens*

(1) Jika n habis dibagi oleh 3, maka n^2 habis dibagi oleh 9.

n^2 tidak habis dibagi oleh 9.

Maka dapat disimpulkan bahwa n tidak habis dibagi oleh 3.

(2) Jika hari hujan maka kita tidak jadi berlayar.

Kita jadi berlayar.

Maka dapat disimpulkan bahwa Hari tidak hujan.

(3) Dari teori bilangan diketahui bahwa kalimat

‘Jika n habis dibagi oleh 3, maka n^2 habis dibagi oleh 9’ adalah *true*.

Jadi, jika diketahui bahwa n habis dibagi oleh 3, maka berdasarkan modus ponens dapat disimpulkan bahwa n^2 habis dibagi oleh 9.

Contoh Aturan *Hypothetical Syllogism*

Jika A rajin belajar, maka A akan mengerti kuliah Matematika Diskret

Jika A mengerti kuliah matematika diskret, maka A akan lulus kuliah.

Kesimpulan:

Jika A rajin belajar, maka A akan lulus kuliah.

Contoh Aturan *Disjunctive Syllogism*

(1) Hari ini hujan atau hari ini lalu lintas macet.

Hari ini tidak hujan.

Maka dapat disimpulkan bahwa Hari ini lalu lintas macet.

(2) Hari ini hujan atau lalu lintas macet.

Hari ini lalu lintas tidak macet.

Maka dapat disimpulkan bahwa Hari ini hujan

Contoh 1

Contoh:

Tunjukkan bahwa argumentasi berikut adalah absah: Hipotesa:

- (i) *It is not sunny this afternoon and it is colder than yesterday.* (ii) *We will go swimming only if it is sunny.*
- (iii) *If we do not go swimming, then we will take a canoe trip.* (iv) *If we take a canoe trip, then we will be home by sunset.*

Konklusi: *We will be home by sunset.*

Contoh 1

Solusi:

Tuliskan argumentasi tersebut dalam logika proposisi. Misalkan

$p := It\ is\ not\ sunny\ this\ afternoon$ $q := It\ is\ colder\ than\ yesterday$

$r := We\ will\ go\ swimming$

$s := We\ will\ take\ a\ canoe\ trip$

$t := We\ will\ be\ home\ by\ sunset$

Maka hipotesa (i) menjadi $p \wedge q$,

hipotesa (ii) menjadi $r \rightarrow \neg p$,

hipotesa (iii) menjadi $\neg r \rightarrow s$,

hipotesa (iv) menjadi $s \rightarrow t$.

Jadi harus ditunjukkan bahwa apabila

$p \wedge q$, $r \rightarrow \neg p$, $\neg r \rightarrow s$, dan $s \rightarrow t$ bernilai benar

maka konklusi t juga benar. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

Contoh 1

1. $p \wedge q$ *hipotesa (i)*
2. $r \rightarrow \neg p$ *hipotesa (ii)*
3. $\neg r \rightarrow s$ *hipotesa (iii)*
4. $s \rightarrow t$ *hipotesa (iv)*
5. p *simplification rule diterapkan pada step 1*
6. $\neg(\neg p)$ *double negation introduction diterapkan pada step 5*
7. $\neg r$ *modus tollens diterapkan pada step 2 dan step 6*
8. s *modus ponens diterapkan pada step 3 dan step 7*
9. t *modus ponens diterapkan pada step 4 dan step 8.*

Jadi konklusinya, yaitu t , *adalah benar.*

Catatan: Bandingkan terhadap bukti dengan tabel kebenaran.

Contoh 2

Contoh:

Tunjukkan bahwa argumentasi berikut adalah absah:

- (i) *If you send me an email message, then I will finish writing the program.*
- (ii) *If you do not send me an email message, then I will go to sleep early.*
- (iii) *If I go to sleep early, then I will wake up feeling refreshed.*

Konklusi:

If I do not finish writing the program, then I will wake up feeling

Hipotesa:

refreshed.

Contoh 2

Solusi:

Tuliskan argumentasi tersebut dalam logika proposisi. Misalkan

$p := \text{you send me an email message}$

$q := \text{I will finish writing the program}$

$r := \text{I will go to sleep early}$

$s := \text{I will wake up feeling refreshed}$

Maka

hipotesa (i) menjadi $p \rightarrow q$,

hipotesa (ii) menjadi $\neg p \rightarrow r$,

hipotesa (iii) menjadi $r \rightarrow s$,

konklusi $\neg q \rightarrow s$.

Jadi harus ditunjukkan bahwa apabila $p \rightarrow q$, $\neg p \rightarrow r$, dan $r \rightarrow s$

bernilai benar maka konklusi $\neg q \rightarrow s$ juga benar. Hal ini

ditunjukkan sebagai berikut:

Contoh 2

1. $p \rightarrow q$ *hipotesa (i)*
2. $\neg p \rightarrow r$ *hipotesa (ii)*
3. $r \rightarrow s$ *hipotesa (iii)*
4. $\neg q \rightarrow \neg p$ *contrapositive dari step 1*
5. $\neg q \rightarrow r$ *hypothetical syllogism diterapkan pada step 4 dan step 2*
6. $\neg q \rightarrow s$ *hypothetical syllogism diterapkan pada step 5 dan step 3*

Jadi konklusinya, yaitu $\neg q \rightarrow s$, *adalah benar.*

Contoh 3

Contoh:

Tunjukkan bahwa argumentasi berikut adalah absah:

Hipotesa: (i) *Jasmine is skiing or it is not snowing.*

(ii) *It is snowing or Bart is playing hockey.*

Konklusi: *Jasmine is skiing or Bart is playing hockey.*

Solusi: