$n\mathcal{K}$三次曲线的一个有关交比的研究结论

马子恒*

2023 年 12 月 16 日

1 研究结果

我们独立发现了以下结果。

Theorem 1.1. 对于$\mathcal{K}$上面四点K, L, M, N，设它们的等共轭像是K', L', M', N'。那么对于$\mathcal{K}$上的一点O，有$O[K, L; M, N] = O[K', L'; M', N']$。

2 理论体系与证明

2.1 笛沙格对合定理

Theorem 2.1. （笛沙格对合定理/*Desargures Involution Theorem*）给定完全四点形$q = (P_{1\ 4})$及一条直线$\mathcal{L}$使得$q \cap \mathcal{L} = \emptyset$。设$Q_{ij} = P_iP_j \cap \mathcal{L}$。那么

- 存在对合变换$\psi \in \hom \mathcal{L}, \mathcal{L}$使得$(Q_{14}, Q_{23}), (Q_{13}, Q_{24}), (Q_{12}, Q_{34})$是$\psi$下的对合对。
- 对于$\mathcal{L}$上两点A, B，(A, B)是ψ下的对合对当且仅当$A, B, P_{1\ 4}$共圆锥曲线。

还有它的对偶命题。

Theorem 2.2. （双笛沙格对合定理/*Dual of Desargures Involution Theorem*）给定完全四线形$q = (l_{1\ 4})$及一点P使得$P \cap q = \emptyset$。设$\mathcal{L}_{ij} = (l_i \cap l_j)P$。那么

- 存在对合变换$\psi \in \hom \mathbf{T}_P, \mathbf{T}_P$使得$(\mathcal{L}_{14}, \mathcal{L}_{23}), (\mathcal{L}_{13}, \mathcal{L}_{24}), (\mathcal{L}_{12}, \mathcal{L}_{34})$是$\psi$下的对合线束。
- 对于$\mathbf{T}_P$中两线束$\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B$，$(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)$是$\psi$下的对合线束当且仅当$\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B, l_{1\ 4}$共切圆锥曲线。

证明见[1]。

*北京市十一学校

2.2 $Cayley - Bacharach$定理

Theorem 2.3. （三次曲线的$Cayley - Bacharach$）若两个三次曲线$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$交于$P_{1-9}$九个点，且第三条三次曲线$\mathcal{K}_3$经过其中八个点$P_{1-8}$，那么$\mathcal{K}_3$也过$P_9$。

证明见代数几何。或是陶哲轩的网站[2]。

下面是推论。

Theorem 2.4. （帕斯卡定理/$Pascal\ Theorem$）平面上六点A, B, C, D, E, F，$AC \cap BF = G, AD \cap BE = H, CE \cap DF = I$。则$G, H, I$共线 $\iff$ A, B, C, D, E, F共圆锥曲线。

2.3 牛顿定理

Theorem 2.5. （牛顿二号）给定四边形$\mathcal{A} = PQRS$以及一个内切圆锥曲线$\mathcal{D}$。那么$\mathcal{D}$的中心位于$\mathcal{A}$的牛顿线上。

它的等价表述是这样

Theorem 2.6. 给定四边形$\mathcal{A} = PQRS$，那么任意关于$\mathcal{A}$的等角共轭点的中点都在牛顿线上。(这一对等角共轭点对应着一个内切椭圆，它们是内切椭圆的焦点)。

证明见[3]。

Theorem 2.7. （牛顿三号）圆锥曲上c上四点A, B, C, D，过四点的切线构成四边形E, F, G, H，则EG, FH, AC, BD四线共点。

证明. 定义$I = AC \cap BD, K = BC \cap IF, J = AB \cap IF$，则

$$C\,[D, C; B, A] = [A, B; C, D] = B\,[J, F; K, I] = C[D', C; B, A]$$

故J, C, D共线，即若设$J = AB \cap CD$，有IFJ共线。
由对称性，HIJ共线，故HIF共线。同理EIG共线，证毕。 □

证明. 考虑圆锥曲线内接六点形$ABBDCC$，$AB \cap DC = J, BB \cap CC = F, BD \cap AC = I$，由$Pascal$定理（Theorem2.4）有$I, F, J$共线。以后同上。 □

Comment 2.8. 上述证明中也表明H, F, J共线。这在射影几何题中也比较常用。本文中也将它称作牛顿定理。(实际上对原先的牛顿定理配极即可)

Corollary 2.9. $HDCFBA$六点共圆锥曲线。

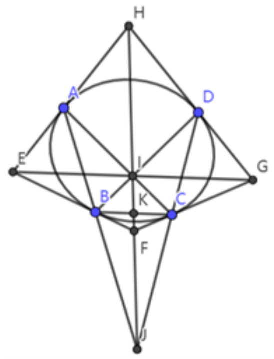

图 1: Theorem2.7

证明. 设$HC \cap DF = P$，考虑完全四边形$GDHFJC$，熟知$G\,[H,F;P,J] = -1$又J对c的极线为EIG，故$G\,[H,F;I,J] = G[D,F;I,J] = -1$，故$G,I,P$共线，即$P$在$EIG$上。
同理，定义$Q = HB \cap AC$，则Q也在EIG上。P,Q,I共线。
考虑六点形$AFDBHC$，$AF \cap BH = Q$，$FD \cap HC = P$，$AC \cap DB = I$，已有Q,P,I共线。
由$Pascal$定理之逆有$HDCFBA$六点共圆锥曲线，证毕。 □

2.4 配极三角形

这是来自于[3]的定理，不过证明是我自己给出的。

Theorem 2.10. 给定三角形$\triangle JKL$以及一圆锥曲线c。设$\triangle JKL$关于c的配极三角形为$\triangle IGH$，证明：$\triangle IGH$与$\triangle JKL$透视。

证明. 设$\mathfrak{P}_c(J) \cap c = A,B$，类似定义$C,D;E,F$。则由Corollary2.9有
$J,A,D,K,C,B;J,A,F,L,E,B;F,L,E,D,K,C$共圆锥曲线。先证明两个引理：

Lemma 2.11. 设J,A,D,K,C,B共的圆锥曲线为ω，J,A,F,L,E,B共的圆锥曲线为ϵ，则ω与ϵ的第四个交点在LK上。

证明. 设P为它们的第四个交点。则

$$P[A,B;J,K]_\omega = C[A,B;J,K]_\omega \overset{C}{=} C[A,B;CJ\cap c,C]_c = [A,B;CJ\cap c,C]_c = -1$$

$$= [A,B;FJ\cap c,F]_c = F[A,B;FJ\cap c,F]_c \overset{F}{=} F[A,B;J,L]_\epsilon = P[A,B;J,L]_\epsilon$$

因此$P[A,B;J,K] = P[A,B;J,L]$，即K,P,L共线，故$P \in KL$，证毕！ □

Lemma 2.12. 设三个圆锥曲线与$\triangle KLJ$交于P,N,O三个点，则KN,JP,LO共点。

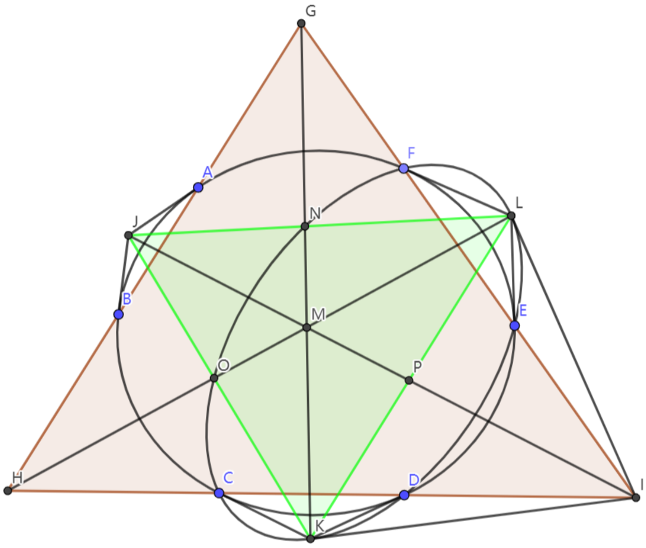

图 2: Theorem2.10

证明. 我们设$KN\cap JP=M$。设F,L,E,D,K,C共的圆锥曲线为σ，则

$$N[A,J;B,M]\overset{N}{=}N[A,J;B,K]_\omega=P[A,J;B,K]_\omega=P[A,J;B,K]$$

$$\overset{P}{=}P[A,J;B,L]=P[A,J;B,L]_\sigma=O[A,J;B,L]_\sigma\overset{O}{=}O[A,J;B,M]$$

因此N,M,O,B,J,A共圆锥曲线，因此结合对称性知KN,JP,LO共点，证毕! □

现在我们回到原命题。设$KE\cap c=\psi$，则

$$[L,K;D,C]_\epsilon=E[L,K;D,C]_\epsilon\overset{E}{=}E[E,\psi;D,C]_c=-1$$

因此$[L,K;D,C]=-1$，由对称性有$[L,K;F,E]=-1$，由同一法不难得到过K,L的ϵ切线过I。考虑ϵ内接六点形$LLNKKO$，由$Pascal$定理知J,M,I共线，由对称性知$G,M,K;L,M,H$共线，因此$\triangle IGH$与$\triangle JKL$的透视中心为M。 □

2.5 $n\mathcal{K}$形等共轭三次曲线

Proposition 2.13. 对于形如$ux(ry^2+qz^2)+vy(pz^2+rx^2)+wz(qx^2+py^2)+kxyz=0$的等共轭三次曲线，我们称它为$n\mathcal{K}$形等共轭三次曲线。

做代数变形，得到

$$ux(ry^2+qz^2)+vy(pz^2+rx^2)+wz(qx^2+py^2)+kxyz=0$$

$$\iff(\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w})(\frac{p}{ux}+\frac{q}{vy}+\frac{r}{wz})=\frac{p}{u^2}+\frac{q}{v^2}+\frac{r}{w^2}-\frac{k}{uvw}$$

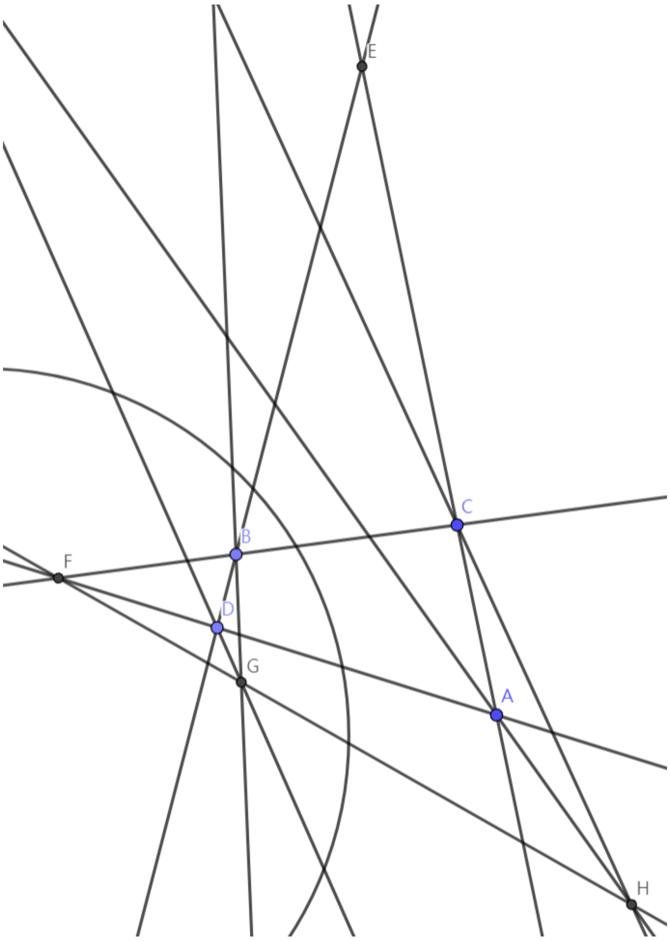

图 3: Theorem 2.15

注意到$\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=0$是$P(u:v:w)$的三线性极线$\mathfrak{P}(P)$的方程，那么$\mathcal{K}$过$\mathfrak{P}(P)$与三个底边的交点（一般记为$D,E,F$）。

下面给出几何定义。来自[4]。

Definition 2.14. *$n\mathcal{K}$上的任意等共轭点对(X,Y)关于同一个定圆$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$共轭。*

注意到D,E,F,A,B,C以及$\mathcal{K}$过A,B,C三点的切线方向与代数式中常数k无关，那么我们还需要$\mathcal{K}$上的一个点才能够唯一确定出$\mathcal{K}$。事实上，由$\mathcal{K}$在φ下不变，有$\mathbf{T}_{\mathcal{K}}A$与$AU$等共轭。

下面给出一个非常美妙的定理。

Theorem 2.15. *（$DDIT$推广）给定一个圆锥曲线$\mathcal{C}$以及四点A,B,C,D，满足$(A,B),(C,D)$关于$\mathcal{C}$共轭。那么$(AD\cap BC=F,AC\cap BD=E)$关于$\mathcal{C}$共轭。*

证明. 设$\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}A\cap\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}C=G,\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}B\cap\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}D=H$。那么$\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}G=AC,\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}H=BD$，因此$\mathfrak{P}_{\mathcal{C}}E=GH$。

注意到$\triangle BDG$与$\triangle CAH$关于$\mathcal{C}$共轭，由$Theorem(2.10)$有$\triangle BDG$与$\triangle CAH$透视，透视中心即为$BC \cap AD = F$。那么F, G, H共线，即$F \in \mathfrak{P}_{\mathcal{C}}E$。证毕！ $\square$

所以$n\mathcal{K}$具有完全四边形结构（良好的加法群）。

Proposition 2.16. 对于$\mathcal{K}$上的等共轭点$(X, X'), (Y, Y')$，有$XY \cap X'Y' = Z, XY' \cap X'Y = Z' \in \mathcal{K}$。

证明. 由$DDIT(2.2)$，(Z, Z')是等共轭对。
我们这时候取$n\mathcal{K}$几何定义(2.14)中的定圆$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$。由前面的定理(2.15)有$(Z, Z')$关于$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$共轭。那么由几何定义，$Z, Z' \in \mathcal{K}$。 $\square$

Proposition 2.17. $2X = 2Y$，即$Z = \mathbf{T}_{\mathcal{K}}X \cap \mathbf{T}_{\mathcal{K}}X' \in \mathcal{K}$。$A, B, C, X, X', Z$共锥线。

证明. 取$Y = X$即有$Z \in \mathcal{K}$。而且还有Z'为直线XX'与$\mathcal{K}$的第三个交点。即Z', X, X'共线。再取等共轭即得A, B, C, X, X', Z共锥线。 $\square$

Theorem 2.18. 对于$\mathcal{K}$上面四点K, L, M, N，设它们的等共轭像是K', L', M', N'。那么对于$\mathcal{K}$上的一点O，有$O[K, L; M, N] = O[K', L'; M', N']$。

证明. 先证明它的更弱命题。

Corollary 2.19. 对于一点K和它的等共轭点K'，以及$\mathcal{K}$上任一点O，有$O[B, C; K, K'] = O[E, F; K', K]$。

证明. 设$KO, K'O$与$\mathcal{K}$的第三个交点分别为L, M，那么由$Proposition(2.16)$有L, M是等共轭点。且$LK \cap K'M$是O的等共轭点。那么，注意到$K, L, LK \cap K'M$共线，取等共轭有A, B, C, K', O, M共圆锥曲线$\mathcal{C}$。同理A, B, C, K, O, L共锥线。
考虑九点组$A, B, C, D, E, F, K, L, O$。一方面$\mathcal{K}$过这九个点；另一方面$A, B, C, K, O, L$共锥线，$F, D, E$共线，由$Cayley - Bacharach(2.3)$有这九个点是$Cayley$九点组。
注意到B, D, C共线，那么A, F, E, K, O, L共锥线$\mathcal{D}$。

$$O[B, C; K, K'] = O[B, C; M, K']_{\mathcal{C}} = A[B, C; M, K']_{\mathcal{C}}$$

$$\stackrel{A\varphi}{=} A[E, F; L, K]_{\mathcal{D}} = O[E, F; L, K]_{\mathcal{D}} = O[B, F; K, K']$$

$\square$

上面那个命题等价于$O(K, K'), (B, E), (F, C)$是对合对。这时取出$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$。并且直接配极。我们在这里定义一个保交比变换$\psi := K \to \mathfrak{P}_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}}K \cap \mathfrak{P}_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}}O$。那么，$(\psi(K), \psi(K')), (\psi(B), \psi(E)), (\psi(F), \psi(C))$是对合对。注意到$A, B, C, D, E, F$构成完全四边形，那么它们配极后由$DIT(2.1)$有$(\psi(B), \psi(E)), (\psi(F), \psi(C)), (\psi(A), \psi(D))$是对合对。设这个对合变换为$\phi$。由$K$的任意性，知$n\mathcal{K}$上任意一对等角共轭点配

极完都是ϕ下的对合对。
那么，

$$O[K,L;M,N]\overset{\mathfrak{P}_{\mathcal{C}_\mathcal{K}}}{=}[\psi(K),\psi(L);\psi(M),\psi(N)]\overset{\phi}{=}[\psi(K'),\psi(L');\psi(M'),\psi(N')]\mathfrak{P}_{\mathcal{C}_\mathcal{K}}=O[K',L';M',N']$$

那就证完了。 □

3 在巨龙曲线中的应用

3.1 巨龙曲线简介

Definition 3.1. 给定一个完全四点形$q=(ABCDEF)$，我们定义q的**巨龙曲线**$\mathcal{D}_q$为所有关于q的等角共轭点对的轨迹。

Theorem 3.2. $\mathcal{D}_q$是三次曲线。

证明. 由三次曲线的几何定义，我们只需要找出一个圆$\mathcal{C}$，使得$\mathcal{D}_q$上的任意一对等角共轭点都关于$\mathcal{C}$配极。而这个圆就是牛顿线和无穷远直线的并（半径无穷大）。由牛顿二号的等价表述(2.6)知任意一对等角共轭点都关于$\mathcal{C}$配极。 □

3.2 应用

我们也可以换一个方向思考这个问题。使用$cayley-bacharach$定理可以很容易得到下面的定理。

Theorem 3.3. 给定一条直线交$\triangle ABC$于D,E,F三点，给定一个关于$\triangle ABC$的等共轭变换φ。那么存在无穷多条三次曲线$\mathcal{K}$在φ下不变，且过A,B,C,D,E,F六点。

我们先取等共轭为等角共轭。由前面的$Theorem(3.3)$，我们可以再任意取一点，让它也在这条三次曲线上，这样才能唯一确定这条三次曲线。我们不妨就取AD'上一点K使得$\angle CDK=\angle ADF$。K的等角共轭点K'是$AD\cap\mathcal{K}$。那么，对于$\mathcal{K}$上任意一点P及其等角共轭点Q，有$D[B,F;P,K]=D[E,C;Q,K']$，

即

$$\frac{\sin BDP}{\sin PDF}/\frac{\sin BDK}{\sin KDF}=\frac{\sin EDQ}{\sin QDC}/\frac{\sin EDK'}{\sin K'DC}$$

注意到$\angle BDF=\angle EDC,\angle BDK=\angle EDK',\angle FDK=\angle CDK'$。那么可以得到$\angle FDP=\angle FDQ$。即这条三次曲线上任意的点都关于$q$存在等角共轭点。因此它是巨龙的子集。

参考文献

[1] MarkBcc168, “On the desargues’ involution theorem,” 下载链接.

[2] T. Tao, “Pappus’s theorem and elliptic curves,” https://terrytao.wordpress.com/2011/07/15/pappuss-theorem-and-elliptic-curves/.

[3] Li4, “平面幾何,” http://lii4.github.io/Plane_Geometry.pdf.

[4] J.-P. Ehrmann and B. Gibert, “Special isocubics in the triangle plane,” http://bernard-gibert.fr/files/Resources/SITP.pdf.