

Министерство образования и науки Российской Федерации

—  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

Приоритетный национальный проект «Образование»  
Национальный исследовательский университет

***В. П. ЮРКИНСКИЙ***

# ТЕПЛОФИЗИКА

## СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСУ

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2012

УДК 536.24 : 621.184 (075.8)

ББК 31.3я73

Ю 744

Рецензенты:

Доктор технических наук, начальник производственного  
комплекса. ОАО «Гириконд» *В. П. Кузнецов*

Доктор химических наук, профессор СПбГПУ *Р. А. Мирзоев*

*Юркинский В. П. Теплофизика. Сборник задач по тепломассопереносу:* Учеб.  
пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. –129 с.

В сборнике собраны задачи по основным разделам учебной дисциплины «Теплофизика» (законы молекулярного тепломассообмена; кинематика и гидродинамика жидкостей и газов; тепло- и массоперенос в стационарных и нестационарных условиях; теория подобия; конвективный теплообмен и теплообмен излучением). В начале каждой главы приведены основные теоретические формулы, необходимые для решения задач, представлен справочный материал в форме таблиц или графиков. Для всех типовых задач приведены примеры задач и подробно рассмотрено их решение.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров «Металлургия - 150400». Оно может быть также использовано при обучении студентов по направлению подготовки бакалавров и магистров «Материаловедение и технологии материалов - 150100», а также в системах повышения квалификации, в учреждениях дополнительного профессионального образования и пр.

Работа выполнена в рамках реализации Инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета «Развитие политехнической системы подготовки кадров в инновационной среде науки и высокотехнологичных производств Северо-Западного региона России».

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Юркинский В. П. , 2012

© Санкт- Петербургский государственный  
политехнический университет, 2012

ISBN

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Законы молекулярного тепло- и массопереноса .....	6
1.1. Закон молекулярной теплопроводности.....	6
1.2. Закон молекулярной диффузии.....	7
1.3. Закон молекулярного переноса количества движения.....	9
2. Кинематика жидкости и газа.....	19
3. Уравнение Бернулли и его приложения.....	28
3.1. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости.....	28
3.2. Уравнение Бернулли для вязкой жидкости.....	29
3.3. Время истечения жидкости через малое отверстие.....	38
4. Движение вязкой жидкости в трубах.....	42
5. Теплопроводность при стационарном режиме.....	48
5.1. Неограниченная пластина.....	48
5.2. Неограниченная цилиндрическая труба.....	50
6. Теория подобия.....	61
6.1. Гидродинамическое подобие.....	61
6.2. Подобие температурных полей в твердых телах.....	63
6.3. Условия подобия процессов конвективного теплообмена.....	64
7. Теплопроводность и диффузия при нестационарном режиме.....	73
7.1. Нестационарная теплопроводность.....	73
7.2. Двух- и трехмерные задачи нестационарной теплопроводности.....	79
7.3. Полуограниченное твердое тело.....	83
7.4. Регулярный режим нагревания и охлаждения тел.....	82
7.5. Нестационарная диффузия.....	84
8. Конвективный теплообмен.....	98
9. Теплообмен излучением.....	109
Библиографический список.....	128

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый сборник задач соответствует программе учебной дисциплины «Теплофизика» и предназначен для студентов, изучающих данную дисциплину в соответствии с образовательным стандартом ФГОС ВПО направления бакалаврской и магистерской подготовки: «Теплофизика» 150400 – «Металлургия» (циклы Б2 и М.2.Б.02) и «Процессы передачи энергии и переноса массы в технологии материалов» 150100 – «Материаловедение и технологии материалов» (цикл Б2.В).

В сборнике собраны задачи по основным разделам учебной дисциплины «Теплофизика» (законы молекулярного теплообмена; кинематика и гидродинамика жидкостей и газов; тепло- и массоперенос в стационарных и нестационарных условиях; теория подобия; конвективный теплообмен и теплообмен излучением). В начале каждой главы приведены основные теоретические формулы, необходимые для решения задач, представлен справочный материал в форме таблиц или графиков. Для всех типовых задач приведены примеры задач и подробно рассмотрено их решение.

Большинство задач, приведенных в сборнике, являются оригинальными, а часть заимствована из учебных пособий других авторов, сведения о которых представлены в библиографическом списке.

Задачник можно использовать не только для практических занятий в аудитории, но также и для самостоятельной домашней работы студентов.

Часть задач, относящихся к разделам стационарной и нестационарной теплопроводности и диффузии, теплообмена

излучением может быть рекомендована в качестве индивидуальных расчетных студенческих домашних заданий.

Предлагаемый сборник задач относится к учебным пособиям практической направленности, которые выполняют как информационную функцию, так и функцию закрепления пройденного материала и самоконтроля.

Основная функция данного сборника задач направлена на формирование инструментальной функции, связанной с формированием умений студентов использовать теоретические знания для решения практических задач, формирования умений и навыков выпускника как специалиста, его профессиональной компетентности.

В предлагаемом сборнике использован принцип представления учебного материала от более простых задач (3 – 5) последовательно к более сложным задачам.

Материал данного сборника задач может быть использован для домашней работы студентов в виде расчетно-графических индивидуальных заданий, связанных с их дальнейшей профессиональной деятельностью.

# 1. ЗАКОНЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

## 1.1. Закон молекулярной теплопроводности

Молекулярная теплопроводность имеет место в неподвижной среде.

Закон молекулярного теплопереноса эмпирическим путем был установлен **Фурье**:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dn} = -\lambda \text{grad}T, \quad (1.1)$$

где  **$q$**  – **вектор плотности теплового потока** (представляет собой количество тепла, проходящее через единицу поверхности за единицу времени), [Дж/(м<sup>2</sup>·с) или Вт/м<sup>2</sup>];  **$\lambda$**  – **коэффициент теплопроводности**, который характеризует теплопроводность среды и является физической константой. Количественно  $\lambda$  определяет тепловой поток (Вт), проходящий через единицу поверхности (м<sup>2</sup>) при единичном градиенте температуры (К/м) и имеет следующую размерность:

$$[\lambda] = \left[ \frac{q}{dT / dn} \right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В соответствии с законом Фурье (1.1) плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры. Знак «—» показывает, что тепловой поток направлен в противоположном направлении относительно направления градиента температуры.

Коэффициент теплопроводности зависит от природы вещества, температуры и ряда других факторов. Сопоставление значений теплопроводности различных материалов показывает, что максимальной теплопроводностью обладают металлы и их сплавы, а минимальной – газы.

## 1.2. Закон молекулярной диффузии

Как и в случае теплопроводности, молекулярная диффузия имеет место в неподвижной среде.

В основе теории молекулярной диффузии лежит эмпирический **закон Фика**:

$$j = -D \frac{dC}{dn} = -D \text{grad} C, \quad (1.2)$$

здесь  $j$  – вектор плотности диффузионного потока [кг/(м<sup>2</sup>·с)];

$C$  – концентрация диффундирующего вещества (кг/м<sup>3</sup>);

$D$  – **коэффициент диффузии**, размерность которого следующая:

$$[D] = \frac{[j]}{\left[ \frac{dC}{dn} \right]} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{м}}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

В соответствии с законом Фика (1.2) плотность диффузионного потока пропорциональна градиенту концентрации диффундирующего вещества.

Как и в случае молекулярного теплопереноса, знак «—» показывает, что диффузионный поток направлен в противоположном направлении относительно направления градиента концентрации.

Коэффициент диффузии  $D$  определяет массу вещества, переносимую в процессе диффузии через единицу поверхности за единицу времени при единичном градиенте концентрации.

Если молекулярная диффузия двух газов происходит при наличии твердой или жидкой поверхности (перпендикулярной направлению диффузии), которая оказывается непроницаемой для одного из компонентов, то возникает дополнительный конвективный поток газовой смеси от поверхности вверх. Такой случай реализуется при диффузии паров жидкости или твердого тела в поток газа, проходящего над поверхностью тела. В этих условиях закон Фика дополняется конвективной составляющей массопереноса:

$$j = D \frac{dC}{dn} + C v,$$

где  $v$  – скорость потока газовой смеси.

Учет конвективной составляющей приводит к уравнению для плотности диффузионного потока, называемому **уравнением Стефана**:

$$j_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} D \frac{dC_1}{dn}. \quad (1.3)$$

В этом уравнении символ 1 относится к пару вещества, а символ 2 – к газу, проходящему над твердой или жидкой поверхностью.

При  $C_1 \ll C_2$  (малолетучее вещество) уравнение Стефана переходит в закон Фика.

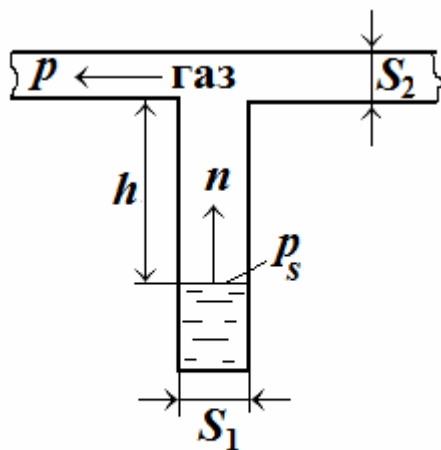


Рис. 1.1. К выводу уравнения Стефана

Переходя от концентраций компонентов к их парциальным давлениям, уравнение Стефана можно переписать в виде:

$$j_1 = \frac{D}{RT} \frac{p}{p - p_1} \frac{dp_1}{dn},$$

где  $p$  – общее давление парогазовой смеси.

Интегрирование этого уравнения для случая, когда проходящий над твердой или жидкой поверхностью газ первоначально не содержит паров этого вещества, приводит к следующему выражению для плотности диффузионного потока:

$$j_1 = \frac{Dp}{RT} \frac{[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}, \quad (1.4)$$

где  $p_s$  – давление насыщенного пара вещества;  $h$  – расстояние от твердой или жидкой поверхности до потока проходящего газа (рис. 1.1).

Если использовать значение универсальной газовой постоянной  $R = 8,2 \cdot 10^{-5} \text{ (м}^3 \cdot \text{атм)} / (\text{моль} \cdot \text{К})$  и подставить значение коэффициента



диффузии в м<sup>2</sup>/с, давление в атм, температуру в градусах К, высоту в м, то плотность диффузионного потока будет иметь размерность:

$$[j_1] = \text{моль}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

### **1.3. Закон молекулярного переноса количества движения**

В учебной дисциплине «Теплофизика» кроме молекулярного тепломассопереноса в неподвижных средах рассматриваются также конвективные процессы тепло- и массопереноса в движущейся жидкости.

При движении жидкости между ее слоями возникает сила внутреннего трения, обусловленная ее вязкостью. Напряжение силы трения определяется эмпирическим **законом Ньютона**:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}. \quad (1.5)$$

Величина  $\tau$  имеет размерность в системе СИ:

$$[\tau] = \text{Н}/\text{м}^2.$$

Вязкие свойства среды учитываются коэффициентом динамической вязкости  $\mu$ , имеющим размерность:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{[dv/dn]} = \frac{\text{Н}/\text{м}^2}{\text{м}/(\text{с} \cdot \text{м})} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{(\text{м} \cdot \text{с})} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Соответственно за единицу динамической вязкости принимают величину:

$$1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{кг}}{(\text{м} \cdot \text{с})} = 1 \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Ранее в системе CGS за единицу динамической вязкости принимали 1 пуаз (1П):  $1 \text{П} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$  и  $1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{Па} \cdot \text{с} = 10 \text{П}.$

Анализ размерности величины  $\tau$ :  $[\tau] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}/(\text{с}^2 \cdot \text{м}^2) = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с})/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$  показывает, что эта величина, наряду с напряжением трения, также имеет смысл плотности потока количества движения.

Следовательно, в движущейся жидкости имеет место молекулярный перенос количества движения, определяемый значением  $\tau$ .

Учитывая противоположное направление векторов  $\tau$  и  $dv/dn$ , в правой части закона Ньютона (1.5), как в случае рассмотренных ранее законов тепломассопереноса, обычно записывают знак минус.

Рассмотрим примеры типовых задач с использованием законов молекулярного переноса количества движения, тепла и массы.

## П Р И М Е Р Ы

1. Один из способов экспериментального определения вязкости среды заключается в определении усилия, которое требуется преодолевать при вращении в этой среде (с определенной скоростью) легкого металлического цилиндра.

Определить вязкость жидкости, если для вращения цилиндра со скоростью  $n = 100$  об/мин в жидкости, заполняющей стакан радиусом  $R_{01} = 13$  см, требуется преодолевать сопротивление  $F = 6 \cdot 10^{-4}$  Н. Размеры погруженного в жидкость цилиндра равны: радиус  $R_{02} = 3$  см, высота  $h = 10$  см.

Р е ш е н и е.

Напряжение трения на боковой поверхности цилиндра равно:

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{F}{2\pi R_{02}h} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{6,28 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 3,18 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}^2.$$

Линейная скорость вращения цилиндра составит:

$$v = 2\pi R_{02} n = \frac{6,28 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2}{60} = 0,314 \text{ м/с.}$$

Поскольку на стенке стакана жидкость неподвижна, градиент скорости равен:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{v-0}{R_{01}-R_{02}} = \frac{0,314}{0,1} = 3,14 \text{ 1/с.}$$

Динамический коэффициент вязкости определится по закону

Ньютона:  $\mu = \tau / \frac{dv}{dn} = \frac{3,18 \cdot 10^{-2}}{3,14} = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 0,1 \text{ П.}$

2. Тепловыделяющий элемент нагревательного устройства представляет собой фарфоровую трубку с внутренним радиусом  $R_{01} = 10 \text{ мм}$  и толщиной стенки  $\delta = 2 \text{ мм}$ , нагреваемую внутренним токонесущим стержнем с удельным сопротивлением материала  $\rho = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

Найти перепад температур на стенках трубки, если по стержню идет ток  $I = 100 \text{ А}$ . Теплопроводность фарфора  $\lambda = 1 \text{ Вт} / \text{м} \cdot \text{К}$ .

Р е ш е н и е.

Перепад температур может быть определен по закону теплопроводности Фурье:

$$q = \lambda \frac{\Delta T}{\delta}.$$

Плотность теплового потока можно связать с мощностью тока и боковой поверхностью нагревательного элемента, через которую происходит перенос тепла,  $S_{\text{бок}}$ :

$$q = \frac{I^2 R}{S_{\text{бок}}} = \frac{I^2 R}{2\pi R_0 l},$$

где  $l$  – длина нагревательного элемента. С другой стороны, сопротивление стержня  $R$  можно выразить через его длину и площадь поперечного сечения  $S_{\text{сеч}}$ :

$$R = \rho l / S_{\text{сеч}} = \rho l / \pi R_0^2.$$

Тогда

$$q = \frac{I^2 \rho l}{2\pi R_0 l \cdot \pi R_0^2} = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3},$$

или 
$$\lambda \frac{\Delta T}{\delta} = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 R_0^3}.$$

Откуда 
$$\Delta T = \frac{I^2 \rho \delta}{2\pi^2 R_0^3 \lambda} = \frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10 \cdot (10^{-2})^3 \cdot 1} = 4^\circ.$$

3. Чистый водород получают диффузией этого газа через палладий при повышенных температурах. Определить массовую (в молях за час) и объемную (в литрах за минуту) производительность палладиевой мембраны радиусом  $R_0 = 10$  см и толщиной  $\delta = 0,1$  мм, если давления водорода по обе стороны от мембраны  $p_1 = 5$  атм и  $p_2 = 1$  атм. Рабочая температура палладиевого диффузора  $T_1 = 527^\circ\text{C}$ , коэффициент диффузии водорода через палладий при этой температуре  $D = 3 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с. Температура чистого водорода, выходящего из диффузора,  $T_2 = 27^\circ\text{C}$ . Считать водород идеальным газом.

Р е ш е н и е.

Производительность палладиевой мембраны или диффузионный поток водорода равны:  $J = jS$ , где  $j$  – плотность диффузионного потока, которая по закону Фика равна:

$$j = D \frac{dC}{dn}.$$

Перейдем от концентраций к давлениям:  $C_1 = p_1/RT_1$ ;  $C_2 = p_2/RT_1$ . Тогда градиент концентрации составит:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dn} &= \frac{C_2 - C_1}{\delta} = \frac{p_2 - p_1}{RT_1 \delta} = \frac{4}{8,2 \cdot 10^{-5} \cdot 800 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = \frac{4}{65,6 \cdot 10^{-7}} = \\ &= 6,1 \cdot 10^5 \text{ моль/м}^4; \end{aligned}$$

плотность диффузионного потока водорода:

$$j = 3 \cdot 10^{-7} \cdot 6,1 \cdot 10^5 = 0,183 \text{ моль/(м}^2 \cdot \text{с)};$$

массовая производительность диффузора равна:

$$J = jS = j\pi R_0^2 = 0,183 \cdot \pi \cdot 0,1^2 = 5,746 \cdot 10^{-3} \text{ моль/с.}$$

Если время выражать в часах, то

$$J = 5,746 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 = 20,686 \text{ моль/ч.}$$

Объемный расход (производительность) равен:

$$Q = J \frac{RT^2}{p} = 20,686 \cdot 0,082 \cdot 300 / 1 = 508,8 \text{ л/ч.}$$

Если время выражать в минутах, то  $Q = 8,48$  л/мин.

4. Определить состав парогазовой смеси, выходящей из диффузионного дозатора с жидким четыреххлористым кремнием (см. рис. 1.1), через который проходит водород под атмосферным давлением. Расход водорода через дозатор  $J = 0,1$  л/мин.

Размеры дозатора:  $S_1 = 1 \text{ см}^2$ ,  $S_2 = 1 \text{ см}^2$ ,  $h = 10 \text{ см}$ . Температура дозатора  $20^\circ\text{C}$ , при данной температуре давление насыщенного пара четыреххлористого кремния составляет  $p_s = 200 \text{ мм рт. ст.}$ , а коэффициент диффузии паров  $\text{SiCl}_4$  в водороде  $D = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Р е ш е н и е.

Содержание паров четыреххлористого кремния в водороде, выраженное в объемных процентах, составит:

$$x = \frac{j(\text{SiCl}_4)}{j(\text{SiCl}_4) + j(\text{H}_2)} \cdot 100 \text{ об. \%},$$

где  $j$  – плотность диффузионного потока в  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

Для водорода  $j(\text{H}_2) = J/S_2$ . Для четыреххлористого кремния по уравнению (1.4) имеем:

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{Dp}{RT} \frac{[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}.$$

Из этой формулы плотность диффузионного потока получается в моль/ $(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ . Чтобы получить ее в объемных единицах, следует воспользоваться уравнением состояния идеального газа  $pV = nRT$  и умножить правую часть на  $RT/p$ . Тогда получим:

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{D[-\ln(1 - p_s / p)]}{h}.$$

Вычисляем:

$$j(\text{H}_2) = \frac{0,1}{1} = 0,1 \text{ л / (см}^2 \cdot \text{мин)} = 0,0167 \text{ м}^3 \text{ / (м}^2 \cdot \text{с)};$$

$$j(\text{SiCl}_4) = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot [-\ln(1 - 200 / 760)]}{10} = 0,92 \cdot 10^{-4} \cdot \text{м}^3 \text{ / (м}^2 \cdot \text{с)}$$

Содержание паров четыреххлористого кремния в водороде составит:

$$x = \frac{0,92 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{0,0167 + 0,92 \cdot 10^{-4}} = 0,547 \% \text{ об.}$$

### ЗАДАЧИ

1.1. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено воздухом, находящимся при комнатной температуре. Внешний цилиндр приводится во вращение силой  $F = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$ .

С какой скоростью будет вращаться внутренний цилиндр, если в установившемся режиме скорость вращения внешнего цилиндра  $n = 1000 \text{ об/мин}$ ? Размеры внешнего цилиндра: высота  $h_1 = 10 \text{ см}$ , радиус  $R_{01} = 10 \text{ см}$ .

Соответствующие размеры внутреннего цилиндра равны  $h_2 = 10 \text{ см}$  и  $R_{02} = 8 \text{ см}$ . Динамическую вязкость воздуха принять равной  $2 \cdot 10^{-4} \text{ П}$ .

1.2. Один из методов определения теплопроводности твердых тел заключается в следующем. Два цилиндрических стержня, один из

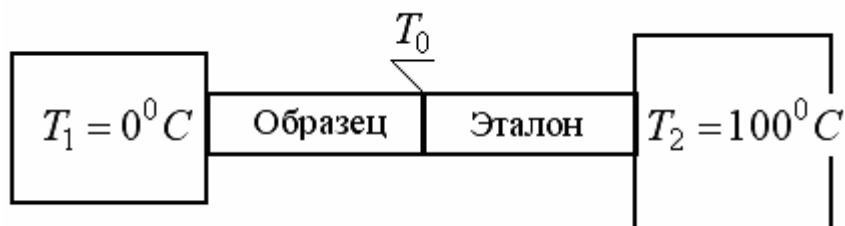


Рис.2. К задаче 1.2

исследуемого материала, а другой из эталонного, соосно размещаются между двумя резервуарами, обеспечивающими поддержание постоянной температуры на концах стержней. Обычно

используются медные резервуары, в одном циркулирует кипящая вода, в другом смесь воды со льдом (рис. 1.2).

По достижении стационарного состояния измеряют температуру на стыке цилиндров  $T_0$ . Определить теплопроводность образца  $\lambda_x$ , если  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ , теплопроводность эталона  $\lambda_э = 100 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Боковые поверхности цилиндров хорошо теплоизолированы.

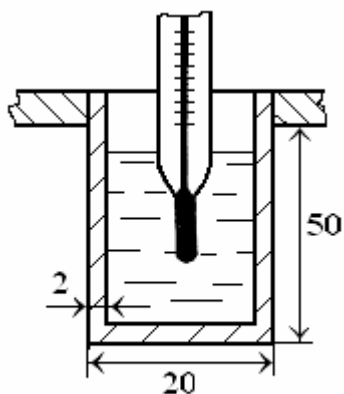
1.3. Температура нагревательного элемента электрической печи (удельное сопротивление материала  $\rho = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}\cdot\text{см}$ , радиус  $R_0 = 1 \text{ см}$ ) измеряется термопарой, находящейся в кварцевом колпачке, толщина кварца  $\delta = 1 \text{ мм}$ , его удельная теплопроводность  $\lambda = 0,02 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

Определить истинную температуру поверхности  $T_{\text{п}}$  нагревательного элемента, если термопара показывает температуру  $T_{\text{т}} = 1200^\circ\text{C}$  при токе через элемент  $I = 100 \text{ А}$ .

1.4. Слиток осмия весом  $100 \text{ г}$  (начальная температур  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) нагревается в герметичном цилиндрическом контейнере из двуокиси циркония с размерами внутренней полости: радиус  $R_0 = 3 \text{ см}$ , высота  $h = 10 \text{ см}$ , толщина стенок  $\delta = 5 \text{ мм}$ .

Определить время  $t$ , за которое расплавится металл, если перепад температур на стенках контейнера поддерживается постоянным и равным  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$ . Теплофизические характеристики осмия:  $T_{\text{пл}} = 2700^\circ\text{C}$ ,  $Q_{\text{пл}} = 140 \text{ Дж/г}$ , средняя теплоемкость  $C_p = 0,13 \text{ Дж/(г}\cdot\text{К)}$ . Теплопроводность двуокиси циркония  $\lambda = 1,2 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

1.5. Температура плавиковой кислоты, проходящей по трубо-



проводу, измеряется термометром, помещенным во фторопластовую цилиндрическую гильзу, заполненную маслом (рис. 1.3). Термометр показывает температуру  $T_{\text{т}} = 29,5^\circ\text{C}$ .

Определить истинную температуру  $T$  плавиковой кислоты, если масло в гильзе нагревается за счет передачи тепла через

Рис.1.3. К задаче 1.5

гильзу на  $5^\circ$  за 12 мин. Теплоемкость масла  $C_p = 1,26$  кДж/(кг·К), объем масла в гильзе  $V = 10$  мл, плотность масла  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>.

Теплопроводность фторопласта  $\lambda = 0,1$  Вт/(м·К). Перепадом температуры в слое масла пренебречь.

1.6. Антикатоде рентгеновской трубки представляет собой цилиндрический стержень длиной  $l = 300$  мм и радиусом  $R_0 = 10$  мм.

Определить разницу в температурах, горячего и холодного концов антикатада, если через боковую поверхность стержня тепло не передается, а холодный конец омывается проточной водой, которая нагревается на  $1,5^\circ$  при расходе 1 л/мин.

Теплопроводность стержня  $\lambda = 100$  Вт/(м·К).  $C_{p,H_2O} = 4,2$  Дж/(г·К).

1.7. Водород диффундирует через пластину из медно-палладиевого сплава при температуре  $T = 327^\circ\text{C}$  и давлении на противоположных сторонах пластины 6 и 1 атм.

Соответственно определить, какую площадь  $S$  должна иметь пластина толщиной  $\delta = 0,2$  мм, чтобы обеспечить поток водорода 0,002 моль/ч. Коэффициент диффузии водорода через сплав составляет  $D = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с.

1.8. Плотность диффузионного потока водорода через никелевую пластину толщиной  $\delta = 1$  мм при температуре  $T = 627^\circ\text{C}$  и перепаде давлений по обе стороны пластины  $\Delta p = 1$  атм составляет 10 микролитров (при  $0^\circ\text{C}$ ) на см<sup>2</sup> за минуту. Определить коэффициент диффузии  $D$  водорода через никель.

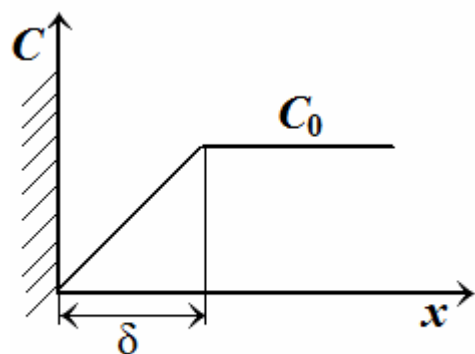


Рис. 1.4. К задаче 1.9

1.9. Пластина окиси магния ( $\text{MgO}$ ) протравливается в проточном растворе серной кислоты с концентрацией  $C_0 = 1$  моль/л. Процесс растворения окиси магния лимитируется диффузией серной кислоты из глубины раствора к поверхности пластины (коэффициент диффузии  $\text{H}_2\text{SO}_4$  в воде  $D = 2 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с).

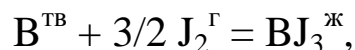


Сколько миллиметров окиси магния стравится за 5 мин, если распределение концентрации кислоты по глубине раствора имеет вид, показанный на рис. 1.4?

Толщина диффузионного слоя  $\delta = 2$  мм. Плотность окиси магния  $\rho = 3600$  кг/м<sup>3</sup>, а ее молярная масса  $M = 40$  г/моль.

**Указание:** Толщина стравленного слоя  $\Delta$  связана с потерей массы оксида магния соотношением:  $\Delta = m/2\rho S$ .

1.10. Ампула, заполненная аргоном и содержащая на одном конце навеску бора, а на другом – навеску йода, нагревается в печи до температуры 400 К. При этой температуре протекает реакция:



скорость которой лимитируется диффузией паров йода с одного конца ампулы в другой.

Определить, какое количество трийодида бора образуется за один час, если при этой температуре давление паров йода  $p = 200$  мм рт. ст., а коэффициент диффузии паров йода в аргоне  $D = 1,3 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с. Диаметр ампулы  $2R_0 = 3$  см, расстояние между месторасположением навесок  $l = 10$  см. Молярные массы йода и бора принять равными 127 г/моль и 11 г/моль. Считать пары йода идеальным газом.

1.11. При каком расходе аргона  $J$  (в л/мин) через диффузионный дозатор с диэтиловым эфиром парогазовая смесь на выходе из дозатора будет содержать 2 мол. % диэтилового эфира? Аргон проходит через дозатор под атмосферным давлением. Размеры дозатора: сечение  $S_1 = 2$  см<sup>2</sup>, высота  $h = 25$  см (см. рис. 1.1).

Температура дозатора  $T = 20$  °С, при данной температуре давление насыщенного пара диэтилового эфира  $p_s = 440$  мм рт. ст., коэффициент диффузии паров диэтилового эфира в аргоне  $D = 0,35$  см<sup>2</sup>/с.

**Указание:** Для решения воспользуйтесь интегральной формой уравнения Стефана.

1.12. Вычислить плотность теплового потока через оконное стекло толщиной  $\delta = 3$  мм, если температуры его поверхностей  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  и  $T_2 = -2^\circ\text{C}$ . Известно, что плотность, теплоемкость и коэффициент температуропроводности стекла при этих параметрах составляют соответственно  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ ,  $C_p = 0,67 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$  и  $a = 4,42 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ .

1.13. Плотность теплового потока через плоскую стенку толщиной 300 мм составляет  $100 \text{ Вт/м}^2$ , а разность температур ее поверхностей  $150^\circ\text{C}$ .

Определить коэффициент температуропроводности стенки, если  $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$ ,  $C_p = 0,88 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$ .

1.14. Через нагреватель цилиндрической формы диаметром 100 мм и длиной 1.2 м проходит ток 50 А. Сопротивление нагревателя  $15 \text{ ом/м}$ . Толщина теплоизоляции нагревателя  $\delta = 5$  мм. Определить коэффициент теплопроводности изоляции, если перепад температур на ее стенках составил  $15^\circ\text{C}$ .

1.15. Наружные стены и плоская крыша одноэтажного склада без окон ( $28 \times 8 \times 4,5$  м) сооружены из бетонных плит толщиной 200 мм. Какова мощность электронагревателя, необходимая для обогрева всего строения, если температура внутренней и внешней поверхностей плит составляют  $15^\circ\text{C}$  и  $-15^\circ\text{C}$  соответственно. Теплопроводность бетона  $1,28 \text{ Вт/м}\cdot\text{K}$  (потерями тепла через пол пренебречь).

1.16. Плоскую поверхность ( $500 \times 1000$ ), нагретую до  $T_1 = 250^\circ\text{C}$  решено изолировать листовым асбестом, у которого  $\lambda = 0,18 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ . Какой толщины должен быть слой изоляции, если допустимая температура наружной ее поверхности  $50^\circ\text{C}$ , а тепловые потери не должны превышать  $400 \text{ Вт}$ .

1.17. Цилиндрический образец гипса ( $d = 5 \text{ см}$ ;  $l = 10 \text{ см}$ ) растворяется в воде, объемом 2,5 л. при  $18^\circ\text{C}$ . Распределение

концентрации гипса ( $\text{CaSO}_4$ ) от поверхности образца в растворе приведено на рис. 1.5 ( $C_{\text{нас}} = 0,2$  г/л;

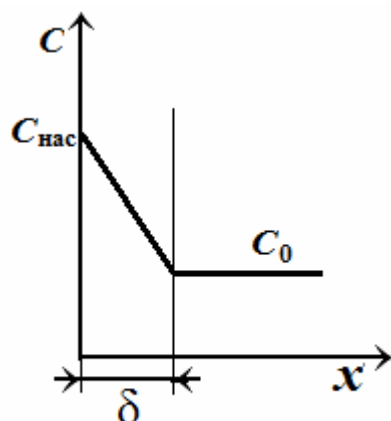


Рис. 1.5. К задаче 1.17

$C_0 = 0 - 0,2$  г/л;  $\delta = 3,0$  мм). Коэффициент диффузии гипса в воде принять  $1,5 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с. Определить время насыщения водного раствора гипсом.

**Указание:** Значение диффузионного потока принять равным  $j_{\text{ср}} = \frac{j_{\text{нач}} + j_{\text{кон}}}{2}$ .

## 2. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Существуют два метода описания движения жидкости. Один из них, называемый **методом Лагранжа**, сводится к определению траекторий движения каждой частицы жидкости. Дифференцирование уравнений, описывающих траекторию частицы, по времени позволяет определить ее скорость и ускорение.

Другой, более распространенный метод анализа движения жидкости, именуемый **методом Эйлера**, заключается в исследовании зависимости скоростей от времени  $t$  и от координат  $x, y, z$  точек пространства:

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t); \\ v_y &= v_y(x, y, z, t); \\ v_z &= v_z(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Данные уравнения описывают поле скоростей. Ускорение жидких частиц в методе Эйлера находят посредством дифференцирования уравнений (2.1) по времени, рассматривая при этом скорость как

сложную функцию от времени  $t$ , зависящую от него как явно, так и опосредованно через координаты  $x, y, z$ , в свою очередь являющиеся функциями времени:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_x,$$

и аналогично для проекций на оси  $y$  и  $z$ .

Геометрической характеристикой потока в методе Эйлера является линия тока.

Линия тока – это линия, касательные которой в любой точке совпадают с направлением вектора скорости в данный момент времени. Дифференциальное уравнение линии тока имеет вид:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (2.2)$$

В случае стационарного движения жидкости линии тока совпадают с траекториями частиц.

Объемный расход жидкости через сечение  $S$  определяется потоком вектора скорости через это сечение:

$$Q = \int_S v_n dS = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}.$$

Скорость относительного объемного расширения жидкости в данной точке:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} (\Delta V) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Движение жидкости, не сопровождающееся вращением ее частиц ( $\omega = \text{rot } \mathbf{v} = 0$ ), называется безвихревым. Такое движение называют также потенциальным, так как для него характерно существование потенциала скорости  $\varphi$ :

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$$

или 
$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Геометрической характеристикой вихревого движения ( $\text{rot} v \neq 0$ ) является вихревая линия, дифференциальные уравнения которой имеют вид

$$\frac{dx}{\text{rot}_x v} = \frac{dy}{\text{rot}_y v} = \frac{dz}{\text{rot}_z v}. \quad (2.5)$$

Составляющие вихря вектора скорости описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x v &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \\ \text{rot}_y v &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \\ \text{rot}_z v &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вихревые линии, проведенные через все точки контура, взятого в вихревом поле, образуют вихревую поверхность. Часть жидкости, ограниченная вихревой поверхностью, охватывающей замкнутый контур, представляет собой вихревую трубку. Поток вектора вихря скорости через сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени для всех сечений трубки. Эту величину называют интенсивностью вихревой трубки:

$$i = \int_S \text{rot} v \cdot n dS.$$

Интенсивность вихревой трубки можно определить как циркуляцию скорости  $\Gamma$  по контуру, опоясывающему вихревую трубку:

$$\Gamma = \oint_L v \cdot dr = \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_S \text{rot} v \cdot n dS. \quad (2.7)$$

## П Р И М Е Р Ы

1. Траектория жидкой частицы задана уравнениями:

$$x = y = z = at^2,$$

где  $a = 0,03 \text{ м/с}^2$ .

Определить величину скорости жидкой частицы через 10 с после начала ее движения.

**Р е ш е н и е.**

Компоненты скорости определяются дифференцированием координат по времени:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(0,03t^2) = 0,06t; \quad v_y = 0,06t \quad \text{и} \quad v_z = 0,06t.$$

Величина скорости определяется следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(0,06t)^2 + (0,06t)^2 + (0,06t)^2} = 0,104t.$$

Следовательно, через  $t=10 \text{ с}$  получим:  $v = 0,104 \text{ м/с}$ .

2. Стационарное поле скоростей задано следующим образом:

$$v_x = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$v_y = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$v_z = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Найти уравнения линий тока.

**Указание:**  $Q$  – постоянная величина.

**Р е ш е н и е.**

Используя дифференциальное уравнение (2.2) и учитывая значения компонентов скорости, получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя далее эти уравнения, находим:

$$\ln y = \ln x + \ln C_1; \quad \ln z = \ln x + \ln C_2,$$

или  $y = C_1x$  и  $z = C_2x$ .

Первое из этих уравнений геометрически изображается семейством плоскостей, проходящих через ось  $z$ , а второе – семейством плоскостей, проходящих через ось  $y$ .

Линии тока лежат на пересечении этих плоскостей. Они представляют собой прямые, проходящие через начало координат.

Так как поток стационарен, то линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости. При положительном значении  $Q$  движение жидкости будет направлено из начала координат наружу.

Если же  $Q$  отрицательно, то движение частиц будет направлено радиально внутрь и начало координат будет центром стока жидкости.

Постоянная  $Q = 4\pi r^2 v$  (м<sup>3</sup>/с) представляет собой объемный расход жидкости.

3. Проекция скоростей при стационарном движении определяются уравнениями:

$$v_x = 2x^2 + y; \quad v_y = 2y^2 + z; \quad v_z = 2z^2 + x.$$

Определить относительную скорость объемного расширения жидкости в точке  $A$  с координатами  $x = 2$ ;  $y = 3$ ;  $z = 5$  (м).

**Р е ш е н и е.**

Скорость относительного объемного расширения жидкости в данной точке определяется уравнением (2.3):

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} (\Delta V) &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} v = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + y) + \frac{\partial}{\partial y} (2y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z} (2z^2 + x) = 4x + 4y + 4z. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\operatorname{div} v_A = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 40 \text{ с}^{-1}$ .

4. Определить, будет ли вихревым или потенциальным движение жидкости, если проекции скоростей частиц при установившемся движении заданы следующими уравнениями:

$$v_x = 2xy; \quad v_y = 2yz; \quad v_z = 2zx.$$

Р е ш е н и е.

В случае безвихревого (потенциального) потока должны выполняться следующие условия:

$$\text{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0;$$

$$\text{rot}_y v = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0;$$

$$\text{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

В данном случае  $\text{rot}_x v = -2y$ ,  $\text{rot}_y v = -2z$ ,  $\text{rot}_z v = -2x$ , т. е. компоненты вектора вихря скорости не равны нулю. Следовательно, движение вихревое.

5. Какова скорость движения потока, потенциал скорости которого выражается уравнением  $\varphi = 2x - 3y$ .

Р е ш е н и е.

Компоненты вектора скорости связаны с потенциалом скорости уравнением (2.4). Имеем:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) = 2; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -3; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4 + 9} = 3,62 \text{ м/с}.$$

6. Поле скоростей при установившемся движении описывается уравнениями:

$$v_x = y + 2; \quad v_y = z + 2x; \quad v_z = x + 2y.$$

Найти уравнения, определяющие вихревые линии в потоке.

Р е ш е н и е.

Используя заданное поле скоростей, находим по уравнениям (2.6) компоненты вихря скорости:



$$\text{rot}_x v = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2 - 1 = 1;$$

$$\text{rot}_y v = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2 - 1 = 1;$$

$$\text{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2 - 1 = 1.$$

Дифференциальные уравнения вихревых линий [уравнения (2.5)] принимают вид:  $dx = dy$ ;  $dz = dy$ .

В результате их интегрирования получим:

$$x = y + C_1; \quad z = y + C_2.$$

7. Определить интенсивность вихревой трубки, сечением которой является окружность радиусом  $R = 0,3$  м, если скорость во всех точках окружности направлена по касательной и равна  $2,0$  м/с.

**Р е ш е н и е.**

Интенсивность вихревой трубки в соответствии с уравнением (2.7) равна циркуляции скорости по контуру, опоясывающему вихревую трубку.

$$\begin{aligned} i &= \int_S \text{rot } v \cdot n dS = \oint_L v \cdot dr = \oint_L v \cos(v \wedge dr) dl = \oint_L 2 \cos 0 dl = \\ &= \int_0^{2\pi R} 2 dl = 4\pi R = 4\pi \cdot 0,3 = 3,77 \text{ м}^2/\text{с}. \end{aligned}$$

### З А Д А Ч И

2.1. Найти скорость движения жидкой частицы через  $20$  с после начала движения, если траектории движения ее заданы следующими уравнениями:

$$x = 3 + \sqrt{0,2t^3}; \quad y = 1,5 + 0,04\sqrt{t^3}; \quad z = 3,0.$$

2.2. Найти уравнения для скорости частиц жидкости, траектории которых описываются уравнениями:  $x = a \cdot \cos t$ ;  $y = b \cdot \sin t$ .

2.3. Поле скоростей установившегося потока жидкости задано следующим образом:

$$v_x = -\frac{\Gamma \cdot y}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_y = \frac{\Gamma \cdot x}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_z = 0.$$

Найти уравнения линий тока и выражение для скорости частиц в потоке.

**Указание:**  $\Gamma$  – постоянная величина.

2.4. Проекция вектора скорости представлены уравнениями:

$$v_x = -\frac{Q \cdot x}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_y = -\frac{Q \cdot y}{2\pi(x^2 + y^2)}; v_z = 0.$$

Составить уравнения для линий тока и найти скорость в точке  $A$  с координатами:  $x = 1$ ;  $y = 5$  (м).

**Указание:**  $Q$  – постоянная величина.

2.5. Найти уравнения для компонентов вектора скорости и линий тока в случае потенциального потока, для которого потенциал скорости задан уравнением:  $\varphi = 3xy$ .

2.6. Установившийся плоский поток жидкости задан проекциями скоростей на оси координат:  $v_x = \frac{2x}{\sqrt{r}}; v_y = \frac{2y}{\sqrt{r}}$ .

Найти уравнение линий тока.

2.7. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = x + 2; v_y = y + 3; v_z = z + 1.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.8. Установившийся поток жидкости характеризуется уравнениями:  $v_x = x^2; v_y = y^2; v_z = z^2$ .

Найти уравнения линий тока.

2.9. По условию предыдущей задачи составить уравнение линии тока, проходящей через точку  $A$  с координатами:  $x = 1$ ;  $y = 3$  и  $z = 4$ .

2.10. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = ax; v_y = by; v_z = 0.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.11. Поле скоростей определяется следующими уравнениями:

$$v_x = a; v_y = b; v_z = c.$$

Найти уравнения для линий тока.

2.12. Проекции вектора скорости при установившемся движении передаются уравнениями:

$$v_x = 2x^2 + 1; v_y = 4y^2 + 2; v_z = 6z^2 + 3.$$

Найти относительную скорость объемного расширения жидкости в точке  $A$  с координатами:  $x = 3; y = 2$  и  $z = 1$ .

2.13. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = x^2 + y^2; v_y = y^2 + z^2; v_z = x^2 + z^2.$$

Составить уравнение неразрывности.

2.14. Определить поле скоростей потока, для которого потенциал скорости задан уравнением:  $\varphi = 2x^2 + 4y^2$ .

2.15. Найти скорость в точке потока  $A$  с координатами  $x = 5$  и  $y = 8$ , если потенциал скорости задан уравнением:  $\varphi = 4(x^2 - y^2)$ .

Составить уравнение эквипотенциальной поверхности.

2.16. Для условий задачи № 2.6 определить потенциал скорости и найти уравнение эквипотенциальной поверхности.

2.17. Скорость частиц жидкости задается следующими уравнениями:  $v_x = C(y^2 + z^2); v_y = v_z = 0$ .

Найти уравнение вихревых линий.

2.18. Поле скоростей задано уравнениями:

$$v_x = -\frac{C \cdot y}{x^2}; v_y = \frac{C \cdot x}{y^2}; v_z = 0.$$

Установить, является ли движение вихревым или безвихревым?

2.19. Потенциал скорости задан уравнением:  $\varphi = x^2 + y^2$ .

Найти уравнения для поля скоростей и линий тока.

2.20. Поле скоростей задано уравнениями:  $v_x = Cy$ ;  $v_y = 0$ .

Определить циркуляцию скорости по окружности радиусом  $R$ .

### 3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

#### 3.1. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Уравнение Бернулли, представляющее собой частный случай общего закона сохранения и превращения энергии, записывается для двух сечений потока жидкости в виде приведенных ниже форм:

$$\text{а) } \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (3.1)$$

где  $\frac{v^2}{2}$  – кинетическая, а  $gz$  и  $p/\rho$  – потенциальные энергии единицы массы жидкости, связанные с действием силы тяжести и давления соответственно;

$$\text{б) } \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}, \quad (3.2)$$

здесь  $\frac{v^2}{2g}$ ,  $z$  и  $p/\gamma$  имеют размерность длины [м] и называются поэтому скоростной, геометрической (или нивелирной) и пьезометрической высотами, соответственно. В энергетическом смысле каждое слагаемое уравнения (3.2) выражает удельную энергию, т. е. энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости;

$$\text{в) } \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + p = \text{const}. \quad (3.3)$$

Каждому члену уравнения (3.3) присвоено название напора: первому – скоростного или динамического, второму – высотного или геометрического, а третьему – пьезометрического.

Часто при использовании уравнения Бернулли приходится прибегать к закону постоянства расхода (уравнение неразрывности), который для жидкости может быть записан в виде:

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = \dots = S_n v_n = \text{const}, \quad (3.4)$$

где  $v_1, v_2, \dots, v_n$  – средние скорости в соответствующих сечениях потока  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

К числу процессов, описываемых уравнением Бернулли, относится процесс истечения несжимаемой жидкости из большого сосуда через малое отверстие. Применение этого уравнения к определению скорости истечения жидкости из открытого сосуда приводит к формуле:

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (3.5)$$

Это формула Торричелли. Здесь  $H$  – высота столба жидкости над отверстием.

Соответственно уравнение расхода жидкости приобретает вид:

$$Q = S \sqrt{2gH}, \quad (3.6)$$

где  $S$  – площадь сечения отверстия.

### **3.2. Уравнение Бернулли для вязкой жидкости**

Для определения скорости истечения реальной (вязкой) жидкости пользуются формулой:  $v = \varphi \sqrt{2gH}$ . (3.7)

Здесь  $\varphi$  – безразмерный коэффициент скорости, определяемый по выражению:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \xi}}, \quad (3.8)$$

где  $\xi$  – коэффициент сопротивления отверстия, учитывающий потери напора при истечении жидкости.

Степень сжатия струи, вытекающей из отверстия, характеризуется коэффициентом сжатия  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \frac{d_c^2}{d_0^2}, \quad (3.9)$$

где  $S_c, d_c$  – площадь и диаметр сжатого сечения струи, а  $S_0, d_0$  – площадь и диаметр отверстия.

Расход жидкости через отверстие определяется по формуле:

$$Q = \mu^* S_0 \sqrt{2gH}, \quad (3.10)$$

где  $\mu^*$  – коэффициент расхода, равный:

$$\mu^* = \varepsilon \varphi. \quad (3.11)$$

Значения коэффициентов истечения  $\mu^*$ ,  $\varepsilon$  и  $\varphi$  для круглого отверстия зависят от формы его кромок, условий потока жидкости к отверстию и характера движения.

## П Р И М Е Р Ы

1. Найти давления в сечениях трубопровода, указанных на рис. 3.1, если расход воды по трубопроводу  $Q = 2,5$  л/с, а истечение жидкости происходит в атмосферу ( $p_{\text{атм}} = 1$  атм).

Действием сил вязкости пренебречь.

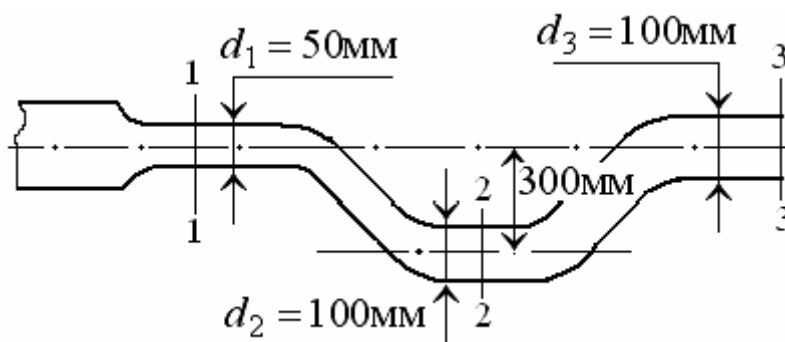


Рис. 3.1. К примеру 1

Р е ш е н и е.

Запишем интеграл Бернулли (3.2) для сечений 2 – 2 и 3 – 3:

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\gamma}.$$

Учтя, что  $p_3 = p_{\text{атм}} = 1$  атм (истечение воды происходит в атмосферу),  $z_2 = 0$  (отсчет высоты производится от оси трубы во втором сечении) и  $v_2 = v_3$ , что следует из уравнения (3.4), поскольку  $S_2 = S_3$ , имеем:

$$\frac{p_2 - p_{\text{атм}}}{\gamma} = z_3.$$

Или  $p_2 = p_{\text{атм}} + z_3 \gamma = 9,81 \cdot 10^4 + 0,3 \cdot 9,81 \cdot 10^3 = 10,1 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1,03$  атм.

Запишем далее интеграл Бернулли (3.2) для сечений 1 – 1 и 3 – 3:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + z_3 + \frac{p_3}{\gamma}.$$

Здесь,  $z_1 = z_3$ ,  $p_3 = p_{\text{атм}}$ , а скорости  $v_1$  и  $v_3$  можно выразить через величину расхода  $Q$  из уравнения (3.4):

$$v_1 = \frac{Q}{S_1}, v_3 = \frac{Q}{S_3}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{p_1 - p_{\text{атм}}}{\gamma} = \frac{v_3^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gS_1^2} \left( \frac{S_1^2}{S_3^2} - 1 \right);$$

или

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\text{атм}} + \gamma \left[ \frac{Q^2}{2gS_1^2} \left( \frac{S_1^2}{S_3^2} - 1 \right) \right] = p_{\text{атм}} + \gamma \left[ \frac{Q^2 \cdot 4^2}{2g\pi^2 d_1^4} \left( \frac{d_1}{d_3} \right)^4 - 1 \right] = \\ &= 9,81 \cdot 10^4 + 9,81 \cdot 10^3 \left[ \frac{2,5^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2}{2 \cdot 9,81 \cdot \pi^2 \cdot 0,05^4} \left( \frac{0,05}{0,1} \right)^4 - 1 \right] = \\ &= 8,83 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2 = 0,9 \text{ атм.} \end{aligned}$$

2. Определить расход нефти ( $\rho_n = 850 \text{ кг/м}^3$ ), протекающей по трубопроводу, имеющему сужение (рис. 3.2), если  $d_1 = 15 \text{ см}$ ,  $d_2 = 10 \text{ см}$  и разность уровней в ртутном дифференциальном пьезометре  $\Delta h = 15 \text{ мм}$ . Потерями напора пренебречь.

Р е ш е н и е.

Запишем интеграл Бернулли (3.2) для сечений 1 – 1 и 2 – 2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_n} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_n},$$

где  $z_1 = z_2$ , а  $v_1 = \frac{Q}{S_1}$ ;  $v_2 = \frac{Q}{S_2}$  (см. пример 1).

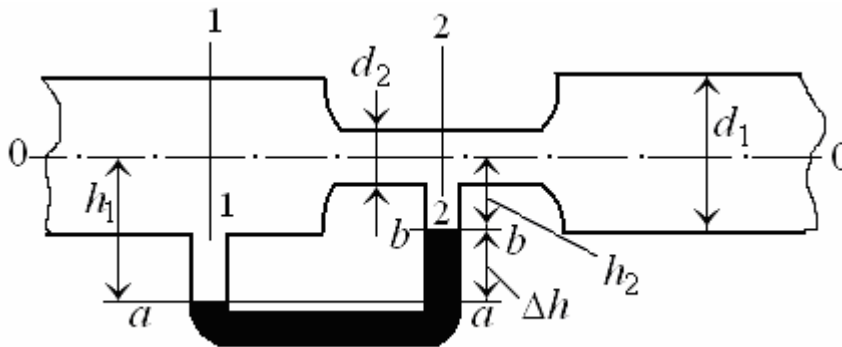


Рис. 3.2. К примеру 2.

Тогда имеем:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_n} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{Q^2}{2gS_1^2} \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right).$$

Для нахождения разности давлений в сечениях 1 – 1 и 2 – 2 запишем уравнение равновесия в плоскости  $a - a$  ртутного пьезометра:

$$\gamma_n h_1 + p_1 = \gamma_n h_2 + \Delta h \gamma_{рт} + p_2.$$

Отсюда разность давлений  $\frac{p_1 - p_2}{\gamma_n}$  будет равна:



$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_H} = (h_2 - h_1) + \frac{\gamma_{PT}}{\gamma_H} \Delta h = \Delta h \left( \frac{\gamma_{PT}}{\gamma_H} - 1 \right).$$

Окончательно для расхода нефти  $Q$  получаем:

$$Q = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta h \left( \frac{\gamma_{PT}}{\gamma_H} - 1 \right)}{\left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1}} = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h \left( \frac{\rho_{PT}}{\rho_H} - 1 \right)}{\left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1}} =$$

$$= 0,0177 \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,015 \left( \frac{13600}{850} - 1 \right)}{1,5^4 - 1}} = 0,0183 \text{ м}^3 / \text{с} = 18,3 \text{ л/с}.$$

3. Вода вытекает из открытого бака через малое отверстие в дне ( $d = 10$  мм). Определить высоту уровня воды в баке, если расход  $Q = 0,48$  л/с. Силами вязкости пренебречь.

Р е ш е н и е.

Запишем формулу для расхода (3.6)

$$Q = S_0 \sqrt{2gH}.$$

Отсюда

$$H = \frac{Q^2}{S_0^2 \cdot 2g} = \frac{4^2 Q^2}{\pi^2 d^4 \cdot 2g} = \frac{4^2 \cdot 0,48^2}{3,14^2 \cdot 0,1^4 \cdot 2 \cdot 98,1} = 19,2 \text{ дм} = 1,92 \text{ м}.$$

4. При истечении жидкости под постоянным напором  $H = 1,70$  м из круглого отверстия ( $d_0 = 12$  мм) в атмосферу диаметр струи в сжатом сечении оказался равным  $d_c = 9,6$  мм. Поставленный под струю мерный бак объемом  $V = 10$  л наполнился за время  $t = 25$  с. Определить коэффициенты  $\varphi$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu^*$  и  $\xi$ .

Р е ш е н и е.

Из формулы для расхода (3.10) найдем  $\mu^*$ :

$$\mu^* = \frac{Q}{S_0 \sqrt{2gH}} = \frac{V}{\pi d_0^2 \sqrt{2gH}} = \frac{10 \cdot 10^3}{25 \cdot 3,14 \cdot 1,2^2 \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 170}} = 0,615.$$

Зная  $S_c = \frac{\pi d_c^2}{4}$  и  $S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$ , найдем  $\varepsilon$  по формуле (3.9):

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \frac{d_c^2}{d_0^2} = \frac{9,6^2}{12^2} = 0,64.$$

Из уравнений (3.8) и (3.11) определим  $\varphi$  и  $\xi$ :

$$\varphi = \frac{\mu^*}{\varepsilon} = \frac{0,615}{0,64} = 0,97$$

и 
$$\xi = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,97^2} - 1 = 0,065.$$

### ЗАДАЧИ

3.1. На водопроводной трубе диаметром  $d_1 = 10$  см установлен водомер в виде сужения диаметром  $d_2 = 5$  см (рис. 3.3, а).

Нормальное сечение 1 – 1 и суженное сечение 2 – 2 снабжены пьезометрическими трубками. Отметки свободной поверхности в пьезометрах  $z_1 = 0,8$  м и  $z_2 = 0,5$  м.

Определить расход воды в трубе, пренебрегая потерями напора.

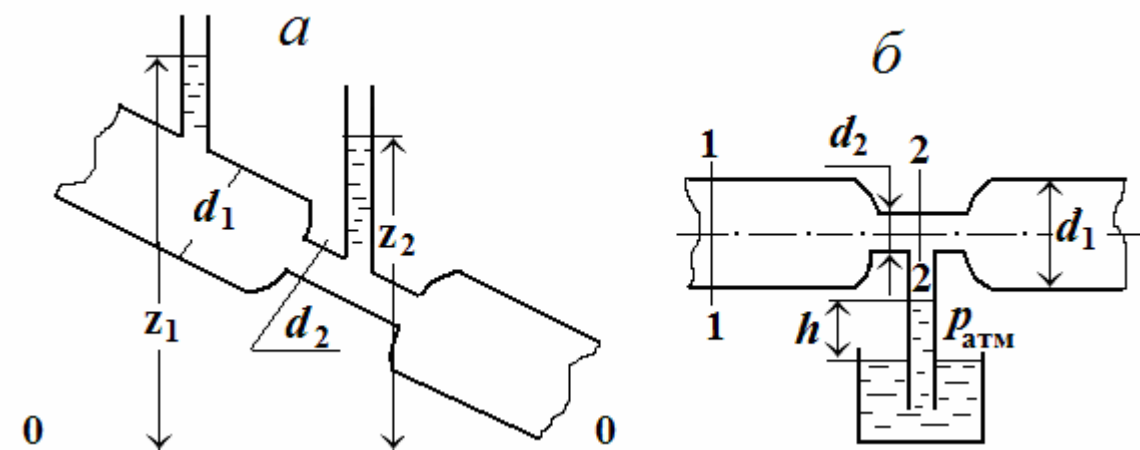


Рис. 3.3. а – к задаче 3.1; б – к задаче 3.2

3.2. На какую высоту  $h$  может засасываться вода из резервуара по трубке, присоединенной к узкому сечению горизонтального трубопровода (рис. 3.3,б), если расход воды по нему  $Q = 2,7$  л/с; диаметры  $d_1 = 5$  см,  $d_2 = 2,5$  см, а избыточное давление  $p_1 = 0,08$  атм. Потери напора не учитывать.

3.3. В водопроводной трубе ( $d = 150$  мм) установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром, показывающим разность уровней  $\Delta h = 20$  мм (рис. 3.4,а). Считая  $v_{\text{ср}} = \beta v_{\text{max}}$ , где  $\beta$  – коэффициент перехода, равный  $\beta = 0,84$ . Определить расход воды, протекающей по трубе. Потерями напора пренебречь.

3.4. Цилиндрические трубы  $A$  и  $B$  одинакового диаметра  $d_1 = 0,1$  м соединяются цилиндрической вставкой диаметром  $d_2 = 0,05$  м с помощью двух конических участков (рис. 3.4,б). На участках  $A$  и  $C$  имеются пьезометрические трубки, позволяющие отсчитывать разность пьезометрических высот.

Определить расход воды в трубах, пренебрегая потерями напора, если  $h = 1,0$  м.

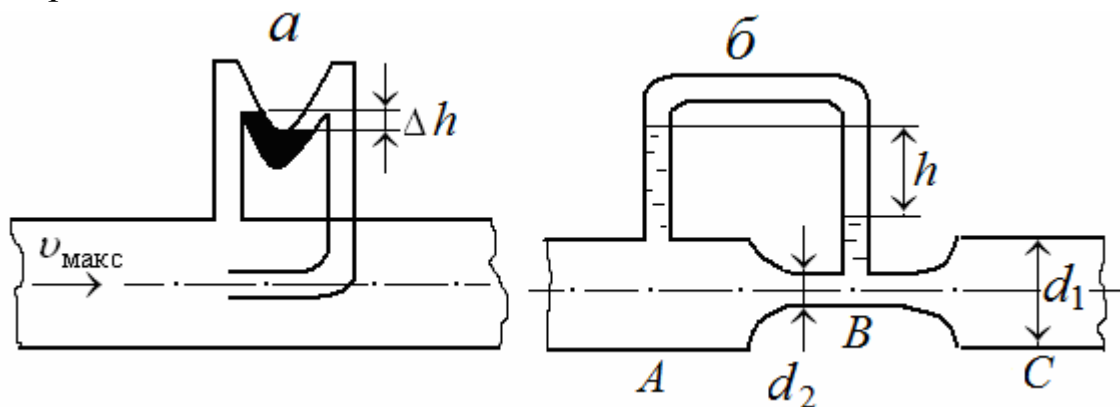


Рис. 3.4. а – к задаче 3.3; б – к задаче 3.4

3.5. Предполагая уровень воды в сосуде постоянным, определить расход воды  $Q$  и распределение пьезометрических высот в сечениях: 0 – 0, 1 – 1, 2 – 2 и 3 – 3, пренебрегая сопротивлениями (рис. 3.5), если  $z_0 = 4$  м,  $z_1 = 2$  м,  $z_2 = 0,5$  м,  $S_0 = 1$  м<sup>2</sup>,  $S_1 = 0,015$  м<sup>2</sup>,  $S_2 = 0,04$  м<sup>2</sup>,  $S_3 = 0,02$  м<sup>2</sup>.

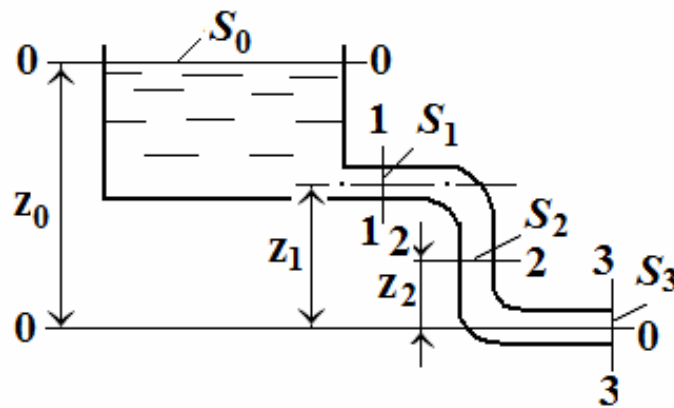


Рис. 3.5. К задаче 3.5

3.6. Определить расход воды по трубопроводу переменного сечения (рис. 3.6) и скорость на каждом из участков, если  $H = 5$  м,  $d_1 = 15$  мм,  $d_2 = 20$  мм и  $d_3 = 10$  мм. Потери напора не учитывать.

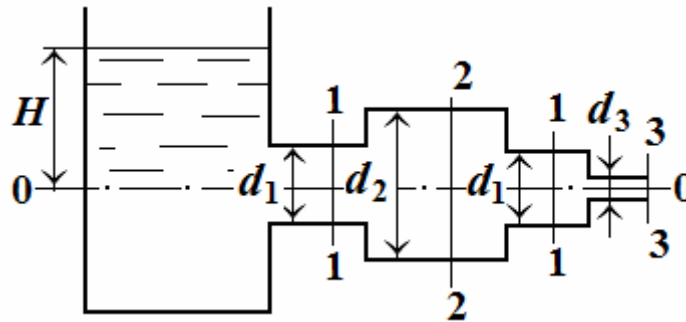


Рис. 3.6. К задаче 3.6

3.7. Будет ли понижаться уровень топлива в цистерне, если производительность насоса, подающего топливо в цистерну, равна 2,0 т/ч, диаметр отверстия  $d = 20$  мм, а начальный уровень в цистерне 1 м. Коэффициент расхода  $\mu^* = 0,65$ . Плотность топлива  $\rho = 0,93$  т/м<sup>3</sup>.

3.8. Определить пропускную способность (расход  $Q$ ) трубы диаметром  $d = 2,26$  м, расположенной в теле водоудерживающей плотины, если напор над центром тяжести отверстия трубы  $H = 8$  м (рис. 3.7,а). Принять  $\mu^* = 0,61$ , как в случае отверстия в тонкой стенке.

3.9. Определить расход воды, вытекающей из бака 1 в бак 2, через круглое отверстие диаметром  $d = 0,1$  м, расположенное в дне

бака 1 (рис. 3.7,б), если уровни воды в обоих баках постоянны, причем  $h_1 = 2$  м,  $h_2 = 1,5$  м,  $\mu^* = 0,61$ .

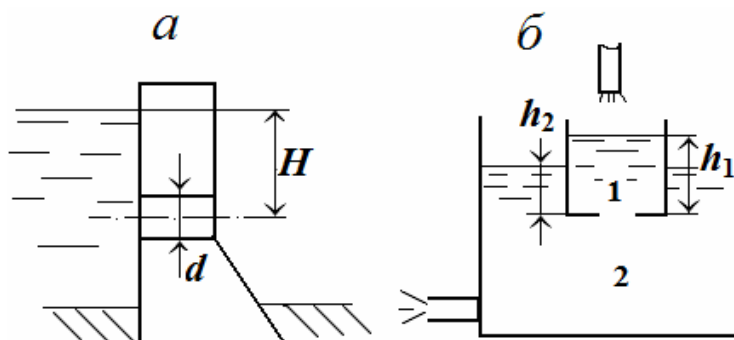


Рис.3.7. а – к задаче 3.8; б – к задаче 3.9

3.10. Бак, употребляющийся для измерения расхода и сжатия струи, вытекающей в атмосферу через круглое отверстие в тонкой боковой стенке диаметром  $d_2 = 0,2$  м, снабжен для успокоения воды вертикальной перегородкой с круглым отверстием диаметром  $d_1 = 0,1$  м

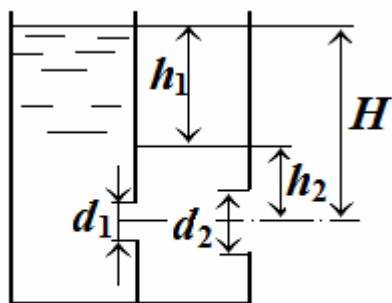


Рис. 3.8. К задаче 3.10

(рис. 3.8). Определить расход  $Q$  и распределение напоров  $h_1, h_2$ , если полный напор над центром тяжести наружного отверстия  $H = 2$  м поддерживается постоянным, а  $\mu^* = 0,61$ .

3.11. Определить количество воды, вытекающей из бака через отверстие ( $d = 10$  мм), в течение 3 мин при уровне воды в баке, равном 0,36 м. Уровень поддерживается постоянным. Давление на поверхность воды в баке в три раза превосходит атмосферное. Принять коэффициент расхода  $\mu^* = 0,64$ .

3.12. Истечение воды в атмосферу через отверстие ( $d = 10$  мм) происходит под напором  $H = 2$  м. Определить коэффициент сжатия струи, если расход  $Q = 0,294$  л/с. Принять коэффициент сопротивления отверстия равным  $\xi = 0,065$ .

3.13. Вода выливается из открытого сосуда через малое отверстие в тонкой стенке диаметром  $d = 15$  мм при постоянном напоре  $H = 1$  м в атмосферу. Определить коэффициент сопротивления  $\xi$  отверстия, если расход  $Q = 486$  см<sup>3</sup>/с, а диаметр струи в сжатом состоянии  $d_c = 12$  мм.

3.14. Жидкость вытекает из открытого бака при постоянном напоре  $H = 1,5$  м через малое отверстие диаметром  $d = 12$  мм в дне. Определить коэффициенты расхода, скорости и сжатия струи, а также время заполнения бака емкостью 20 л, подставленного под струю, если время заполнения того же бака при  $H = 1,0$  м и  $d = 10$  мм составило 93 с. Принять коэффициент сопротивления  $\xi = 0,065$ .

3.15. В верхний сосуд поступает вода ( $Q = 0,25$  л/с), которая затем перетекает через малое отверстие в дне диаметром  $d_1 = 10$  мм в нижний сосуд, имеющий также малое отверстие в дне диаметром  $d_2 = 15$  мм (рис. 3.9,а). Принять  $\mu^* = 0,62$  в обоих случаях.

Определить: а) напоры  $H_1$  и  $H_2$  в обоих сосудах; б) при каком диаметре  $d_2$  напор  $H_2$  будет вдвое меньше, чем  $H_1$ .

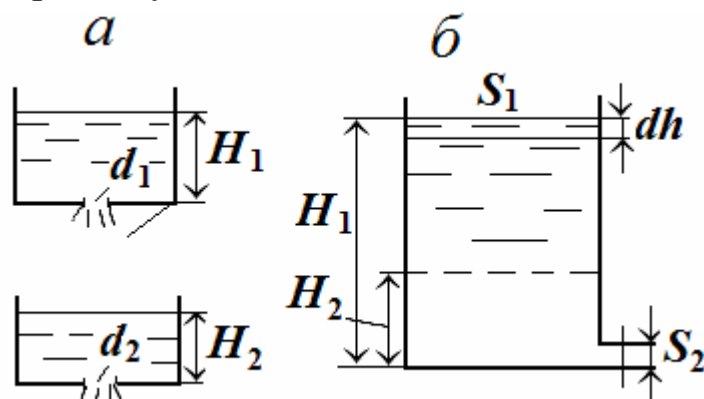


Рис. 3.9. а – к задаче 3.15; б – к вопросу о времени истечения жидкости

### 3.3. Время истечения жидкости через малое отверстие

Рассмотрим вопрос о времени истечения идеальной жидкости из цилиндрической емкости (рис. 3.9,б) через малое отверстие в нижнем основании. Определим объем жидкости, который выливается из

емкости за бесконечно малый промежуток времени:

$$dV = S_2 v_2 dt.$$

На эту же самую величину уменьшится объем жидкости в емкости, причем изменение объема можно связать с изменением уровня жидкости:

$$dV = S_1 dh.$$

Приравнявая правые части записанных уравнений, получаем:

$$S_2 v_2 dt = -S_1 dh.$$

Знак минус в правой части согласовывает разноименное изменение двух переменных: по мере увеличения времени уровень жидкости в емкости уменьшается.

Из полученного соотношения вытекает следующее дифференциальное уравнение истечения:

$$dt = -\frac{S_1}{S_2 v_2} dh.$$

Поскольку:  $v_2 = \sqrt{2gh}$ ,

то 
$$dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать  $S_1 = f(h)$ .

Рассмотрим применение уравнения истечения к сосудам постоянного сечения ( $S_1 = \text{const}$ ). Найдем время  $\Delta t$ , за которое уровень жидкости в сосуде уменьшится от  $H_1$  до  $H_2$ . Для этого проинтегрируем уравнение истечения в пределах:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Получим: 
$$\Delta t = t_2 - t_1 = -\frac{S_1}{S_2 \sqrt{2g}} 2\sqrt{h} \Big|_{H_1}^{H_2},$$

или 
$$\Delta t = \frac{2S_1}{S_2\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}).$$

Полное время истечения (при этом  $H_2 = 0$ ) равно:

$$t = \frac{2S_1}{S_2\sqrt{2g}} \sqrt{H_1}.$$

Если сечение емкости меняется по высоте, то перед интегрированием необходимо найти математическую связь между  $S_1$  и  $h$ .

### П Р И М Е Р

5. Найти время опорожнения цилиндрической цистерны диаметром  $d_1 = 2$  м и длиной  $L = 20$  м (рис. 3.10) через малое отверстие в нижнем основании диаметром  $d_2 = 10$  см. Внутреннее пространство цистерны сообщается с атмосферой.

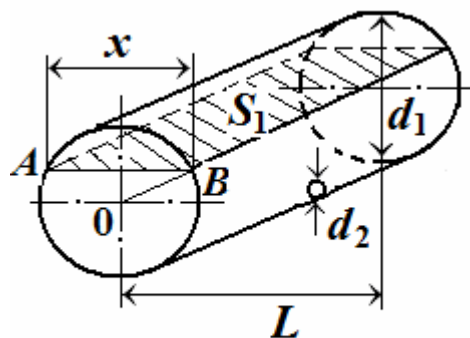


Рис. 3.10. К примеру 5

Р е ш е н и е.

Поскольку сечение, совпадающее со свободной поверхностью  $S_1$ , изменяется с высотой, то прежде всего нужно найти  $S_1 = f(h)$ .

Обозначим переменную сторону этого сечения через  $x$ , тогда из рассмотрения прямоугольного треугольника OAB следует, что

$$x = 2\sqrt{r^2 - (h - r)^2} = 2\sqrt{h(2r - h)}.$$

Таким образом,

$$S_1 = Lx = 2L\sqrt{h(2r - h)}.$$

Дифференциальное уравнение истечения для нашего случая принимает вид:

$$\int_0^t dt = -\frac{2L}{S_2\sqrt{2g}} \int_{2r}^0 \frac{\sqrt{h(2r - h)}}{\sqrt{h}} dh.$$



Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_{2r}^0 \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{\sqrt{h}} dh = \int_{2r}^0 \sqrt{2r-h} dh.$$

Произведем замену переменной:

$$I = - \int_{2r}^0 \sqrt{2r-h} d(2r-h).$$

Тогда 
$$I = - \frac{2}{3} (2r-h)^{3/2} \Big|_{2r}^0 = - \frac{2}{3} (2r)^{3/2} = - \frac{2}{3} d_1^{3/2}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{2L}{\pi d_2^2 / 4 (\sqrt{2g})} \frac{2}{3} d_1^{3/2} = \frac{16Ld_1^{3/2}}{3\pi d_2^2 \sqrt{2g}}.$$

Подставляя численные значения, будем иметь:

$$t = \frac{16 \cdot 20 \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 0,01 \cdot \pi \sqrt{20}} = 2130 \text{ с} \cong 0,6 \text{ ч.}$$

### ЗАДАЧИ

3.16. Цилиндрический резервуар радиусом основания  $R_{01} = 5$  м заполнен водой до высоты  $H = 25$  м. Определить время  $t$ , необходимое для отбора  $628 \text{ м}^3$  воды через отверстие в нижнем основании радиусом  $R_{02} = 5$  см. Пространство резервуара сообщается с атмосферой.

3.17. Определить время  $t$ , за которое вода выльется из прямоугольной призматической емкости  $(5 \times 7 \times 10 \text{ м})$  через отверстие сечением  $S_2 = 31,4 \text{ см}^2$  в нижнем основании. В начальный момент емкость заполнена полностью, а ее внутреннее пространство сообщается с атмосферой.

3.18. Определить время  $t$ , за которое вода выльется из полностью заполненной цилиндрической емкости (радиус основания  $R_{01} = 10$  м, высота  $H = 20$  м) через отверстие радиусом  $R_{02} = 10$  см в

нижнем основании. Внутреннее пространство емкости сообщается с атмосферой.

3.19. Сравнить время опорожнения призматической емкости через малое отверстие, если один раз она стоит на торце, а другой раз лежит на боковой грани. Сечение призмы – прямоугольник.

3.20. Определить время  $t$ , за которое выльется  $150 \text{ м}^3$  воды из прямоугольной призматической емкости ( $3 \times 5 \times 15 \text{ м}$ ) через отверстие сечением  $S_2 = 25 \text{ см}^2$  в нижнем основании. В начальный момент емкость заполнена полностью, а ее внутреннее пространство сообщается с атмосферой.

#### 4. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Существуют два режима движения вязкой жидкости: ламинарный и турбулентный.

При ламинарном движении отдельные слои жидкости скользят друг по другу не перемешиваясь, а в случае турбулентного движения имеет место перемешивание слоев жидкости, обусловленное хаотическим перемещением конечных масс жидкости в разных направлениях. Смена характера движения происходит, когда число Рейнольдса  $Re = v_{\text{ср}} d / \nu$  достигает критического значения  $Re_{\text{кр}}$ . Для цилиндрических труб  $Re_{\text{кр}} \cong 2300$ . При ламинарном режиме движения по цилиндрической трубе распределение скорости по сечению трубы носит параболический характер:

$$v = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R_0^2 - R^2).$$

Здесь  $\Delta p$  – падение давления (потеря напора) на участке трубы длиной  $l$ ,  $R_0$  – радиус трубы.

Перепад давления характеризует гидравлическое сопротивление трубы и связан со скоростным напором следующим соотношением:

$$\Delta p = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (4.1)$$

справедливым как для ламинарного, так и для турбулентного движения.

Безразмерный множитель  $\lambda_{\text{тр}}$  носит название коэффициента гидравлического сопротивления (трения). Для ламинарного движения он равен:

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ср}}} = 64 \frac{\nu}{v_{\text{ср}} d}.$$

Объемный расход жидкости через сечение трубы при ламинарном движении определяется уравнением:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu l} R_0^4.$$

Средняя скорость по сечению равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{S} = \frac{\Delta p R_0^2}{8 \mu l}.$$

В случае турбулентного движения распределение скорости по сечению трубы носит логарифмический характер:

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{v_* \cdot y}{\nu} + 5,5. \quad (4.2)$$

Величину  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_{\omega}}{\rho}}$ , м/с (где  $\tau_{\omega}$  – напряжение трения на стенке трубы) называют динамической скоростью.

Выражению (4.2) соответствует логарифмический закон сопротивления при турбулентном движении (формула Никурадзе):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{тр}}}} = 2 \lg(\text{Re}_{\text{ср}} \sqrt{\lambda_{\text{тр}}}) - 0,85. \quad (4.3)$$

Зависимости (4.2) и (4.3) справедливы при любых значениях числа Re.

Иногда для расчета поля скоростей и коэффициента сопротивления при турбулентном движении удобнее пользоваться степенными зависимостями (Блазиус):

$$\frac{v}{v_*} = 8,57 \left( \frac{v_* y}{v} \right)^{1/7}$$

и

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{0,3164}{\text{Re}_{\text{ср}}^{0,25}}, \quad (4.4)$$

пригодными при  $\text{Re}_{\text{ср}} \leq 1 \cdot 10^5$ .

Формулы (4.3) и (4.4) справедливы лишь для гидравлически гладких труб, т. е. для случаев, когда шероховатость трубы не сказывается на коэффициенте сопротивления  $\lambda_{\text{тр}}$ . В случае гидравлически шероховатых труб для расчета  $\lambda_{\text{тр}}$  можно воспользоваться формулой Никурадзе:

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{d}{\Delta} + 1,14 \right)^2}, \quad (4.5)$$

справедливой при  $\text{Re} \geq 560 \cdot (d/\Delta)$ . Здесь  $\Delta$  – абсолютная шероховатость трубы, под которой понимается средняя высота бугорков шероховатости.

Для расчета  $\lambda_{\text{тр}}$  в этом случае можно также воспользоваться формулой Шифринсона:

$$\lambda_{\text{тр}} = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}, \quad (4.6)$$

справедливой для тех же условий, что и формула (4.5).

Во всей области турбулентного движения для расчета  $\lambda_{\text{тр}}$  можно также воспользоваться эмпирической универсальной формулой Альтшулля:

$$\lambda_{\text{тр}} = 0,1 \left( \frac{1,46\Delta}{d} + \frac{100}{\text{Re}_{\text{ср}}} \right)^{0,25} \quad (4.7)$$

## П Р И М Е Р Ы

1. Определить режим движения воды при 4°C по трубопроводу, диаметром  $d = 5$  см, если скорость  $v_{\text{ср}} = 1$  м/с.

Кинематический коэффициент вязкости воды при указанной температуре  $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

Р е ш е н и е.

Определяем число Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} = \frac{1 \cdot 0,05}{1,57 \cdot 10^{-6}} = 3180.$$

Так как  $\text{Re}_{\text{ср}} > \text{Re}_{\text{кр}} (\cong 2300)$ , то режим движения является турбулентным.

2. Определить потерю напора при движении топливной смеси, имеющей коэффициент вязкости  $\mu = 0,059$  Н·с/м<sup>2</sup> и плотность  $\rho = 920$  кг/м<sup>3</sup> по трубопроводу длиной  $l = 15$  м и диаметром  $d = 100$  мм, если расход топлива  $Q = 25$  т/ч.

Р е ш е н и е.

Определяем число Рейнольдса

$$\text{Re}_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{ср}} d}{\nu} = \frac{Q}{\rho S} \frac{d \cdot \rho}{\mu} = \frac{Q \cdot d}{\mu S} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 4}{0,059 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot 3600} = 1472.$$

Так как  $\text{Re}_{\text{ср}} < \text{Re}_{\text{кр}} (\cong 2300)$ , то режим движения ламинарный. Для ламинарного режима имеем:

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{64}{\text{Re}_{\text{ср}}} = \frac{64}{1472} = 0,0434.$$

Потерю напора находим по формуле (4.1)

$$\Delta p = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d} \rho \frac{Q^2}{2\rho^2 S^2} = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2\rho S^2} =$$

$$= 0,0434 \cdot \frac{15}{0,1 \cdot 0,92 \cdot 10^3} \cdot \left( \frac{25 \cdot 10^3}{3600} \right)^2 \cdot \frac{16}{2 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{-4}} = 268 \text{ Н/м}^2.$$

### ЗАДАЧИ

4.1. Каков режим движения мазута в трубопроводе диаметром 10 см, если коэффициент вязкости мазута  $\mu = 587 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ , а расход составляет  $Q = 2 \text{ л/с}$ ? Плотность мазута  $\rho = 950 \text{ кг/м}^3$ .

4.2. Каков может быть максимальный расход в трубопроводе, диаметром  $d = 80 \text{ мм}$ , чтобы при протекании в нем воды наблюдался устойчивый ламинарный режим движения ( $v = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ )?

4.3. Определить скорости, при которых сохраняется устойчивый ламинарный режим при протекании мазута ( $v_m = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ) и воды ( $v_v = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) по трубопроводу диаметром  $d = 100 \text{ мм}$ .

4.4. Каков режим движения мазута по трубе диаметром  $d = 110 \text{ мм}$ , если производительность насоса, с помощью которого его откачивают, составляет  $Q = 5 \text{ т/ч}$ ? Вязкость мазута  $\mu = 0,064 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ .

4.5. Определить, при какой скорости движения воды в трубе диаметром  $d = 100 \text{ мм}$  будет иметь место ламинарный режим движения ( $v = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

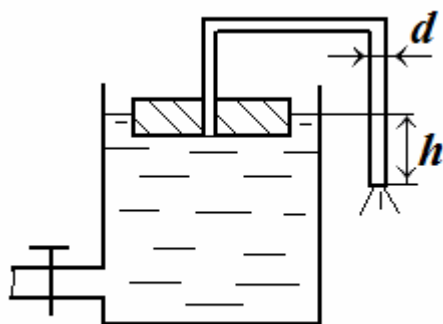


Рис. 4.1. К задаче 4.6

4.6. Прибор для подачи небольших количеств агрессивной жидкости состоит из цилиндра, в котором находится поплавок, снабженный сифонной трубкой (рис. 4.1).

Определить расход жидкости ( $v = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ), если диаметр трубки  $d = 5 \text{ мм}$ , а длина ее  $l = 600 \text{ мм}$ .

Выходное сечение трубы расположено ниже свободной поверхности  $h = 250$  мм. Режим движения ламинарный. Учитывать только потери на трение по длине трубки.

4.7. Как изменится расход жидкости в задаче 4.6, если заменить агрессивную жидкость водой ( $\nu_v = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ )?

4.8. По трубопроводу длиной  $500$  м и диаметром  $d = 100$  мм протекает жидкость со средней скоростью  $0,4$  м/с. Кинематическая вязкость жидкости  $\nu = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , а плотность  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Определить режим движения, коэффициент сопротивления  $\lambda_{\text{тр}}$  и сопротивление  $\Delta p$ .

4.9. По горизонтальному трубопроводу (диаметром  $200$  мм и длиной  $24\,000$  м) перекачивается жидкость, имеющая плотность  $\rho = 850 \text{ кг/м}^3$  и вязкость  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Определить массовый расход, если перепад давления в трубопроводе составляет  $\Delta p = 9,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ .

**Указание:** При расчете коэффициента сопротивления воспользуйтесь формулой (4.4).

4.10. При движении жидкости по стальной трубе диаметром  $d = 300$  мм было найдено, что при скоростях выше  $2,6$  м/с коэффициент сопротивления  $\lambda_{\text{тр}}$  остается постоянным и равным  $0,016$ . Вязкость жидкости  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Пользуясь этими данными, определить среднюю шероховатость трубы  $\Delta$ .

**Указание:** Для расчета воспользуйтесь формулой (4.6).

4.11. Трубопровод был рассчитан на перекачку жидкости с плотностью  $900 \text{ кг/м}^3$  и кинематической вязкостью  $\nu = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ . После его сооружения выяснилось, что жидкость имеет плотность  $\rho = 880 \text{ кг/м}^3$  и вязкость  $\mu = 1 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ . Определить, полагая течение ламинарным и перепад давления постоянным, во сколько раз при этом придется изменить объемный расход.

4.12. Определить  $\Delta p$  на входе в насос системы смазки, подающий  $Q = 60$  л/мин масла при температуре  $T = 20^\circ \text{C}$  (кинематическая вязкость масла  $\nu = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , плотность  $\rho = 930 \text{ кг/м}^3$ ). Длина трубопровода 10,0 м и диаметр 35 мм, его шероховатость  $\Delta = 0,13 \text{ мм}$ .

4.13. По самотечному трубопроводу длиной  $L = 54$  м необходимо обеспечить транспорт нефти ( $\rho = 912 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ) при  $Q = 1,3$  л/с и напоре  $\Delta p = 0,2$  атм.

Найти диаметр  $D$  трубопровода, учитывая только потери напора на трение по его длине.

4.14. Температура мазута, перекачиваемого по горизонтальному трубопроводу диаметром 200 мм и длиной 10 км, меняется от  $T = 10^\circ \text{C}$  до  $30^\circ \text{C}$ .

Определить потерю давления в трубопроводе при постоянном расходе мазута  $Q = 50$  л/с. Параметры мазута при  $10^\circ \text{C}$ :  $\rho = 910 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$  и  $30^\circ \text{C}$ :  $\rho = 895 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

4.15. Сравнить расход воды ( $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) и турбинного масла ( $\nu = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ) при температуре  $T = 20^\circ \text{C}$  по стальному трубопроводу длиной 500 м и диаметром 150 мм (шероховатость  $\Delta = 0,11 \text{ мм}$ ) при одинаковом напоре  $\Delta p = 1,2$  атм.

## 5. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

### 5.1. Неограниченная пластина

При стационарном режиме температурное поле в неограниченной пластине описывается уравнением:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{\delta} x + T_1$$

и, следовательно, носит линейный характер (рис. 5.1).

Плотность теплового потока, проходящего через пластину, определяется по формуле:



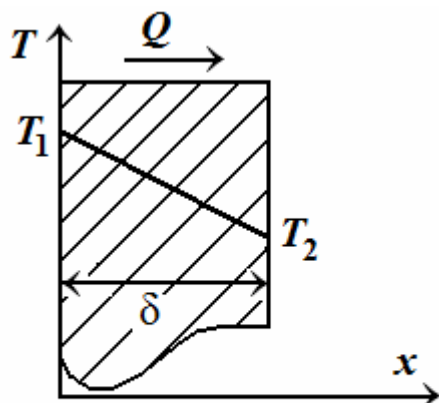


Рис. 5.1. Теплопроводность в плоской стенке

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\delta/\lambda},$$

где  $T_1 - T_2 = \Delta T$  – температурный напор, а  $\delta/\lambda$  – тепловое сопротивление пластины толщиной  $\delta$  и единичной площадью  $S = 1,0 \text{ м}^2$ . Размерность  $\delta/\lambda$ :

$$\left[ \frac{\delta}{\lambda} \right] = \frac{[T_1 - T_2]}{[q]} = \text{К} / (\text{Вт/м}^2), \text{ т.е.}$$

тепловое сопротивление  $\delta/\lambda$  определяет перепад температуры, при котором плотность теплового потока, проходящего через пластину, равна  $1,0 \text{ Вт/м}^2$ . Плотность теплового потока  $q$ , проходящего через многослойную пластину, состоящую

из  $n$  слоев, определяется уравнением:

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (5.1)$$

а температурный напор в  $i$ -м слое стенки – уравнением:

$$T_i - T_{i+1} = q \frac{\delta_i}{\lambda_i}. \quad (5.2)$$

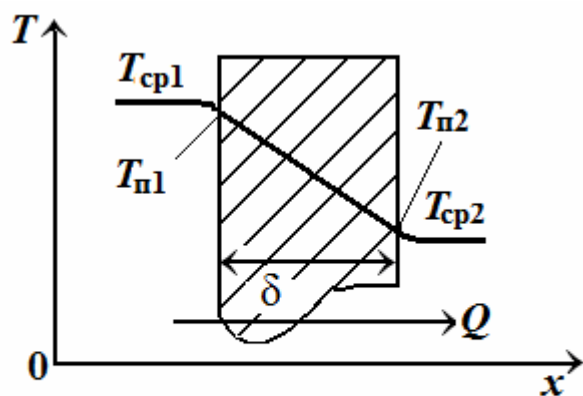


Рис. 5.2. Теплопередача в плоской стенке

В случае процессов теплопередачи, когда имеет место перенос тепла из одной среды в другую через разделяющую их стенку (рис. 5.2), должны быть предварительно найдены коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Плотность теплового потока  $q$ , проходящего через многослойную пластину, состоящую из  $n$  слоев, в случае теплопередачи определяется уравнением:

$$q = \frac{T_{\text{ср},1} - T_{\text{ср},2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (5.3)$$

где  $1/\alpha_1$  и  $1/\alpha_2$  – внешние тепловые сопротивления единицы поверхности стенки. Если обозначить:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

то уравнение (19) примет вид:  $q = K (T_{\text{ср},1} - T_{\text{ср},2})$ ,

где  $K$  – коэффициент теплопередачи  $[\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$ .

Температурный напор между средой и контактирующей с ней поверхностью стенки определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} T_{\text{ср}1} - T_{\text{п}1} &= \frac{1}{\alpha_1} q, \\ T_{\text{п}2} - T_{\text{ср}2} &= \frac{1}{\alpha_2} q. \end{aligned} \quad (5.4)$$

## 5.2. Неограниченная цилиндрическая труба

В случае неограниченной цилиндрической трубы (рис. 5.3), когда тепловой поток имеет лишь радиальное направление, выражение для распределения температуры в трубе имеет вид:

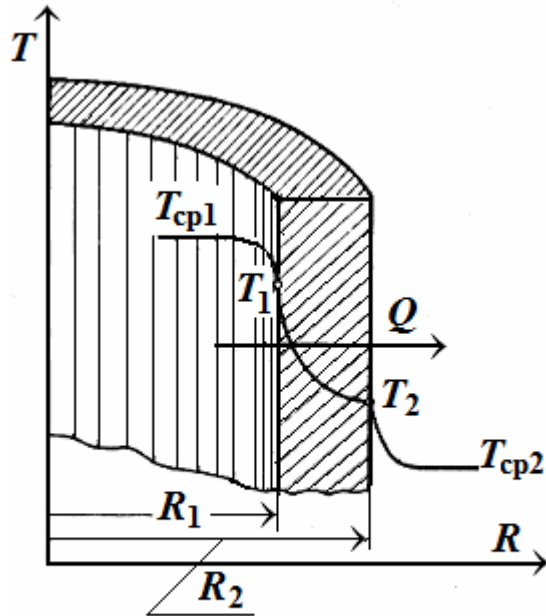
$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_{01} / R_{02})} \ln \frac{R}{R_{01}}.$$

В этом случае плотность теплового потока  $q$  изменяется по толщине трубы и зависит от цилиндрической поверхности, для которой она определяется. Ее значение будет наибольшим для внутренней поверхности и наименьшим для внешней.

Поэтому удобнее говорить о полном потоке тепла  $Q^*$  за единицу времени, так как он имеет одно и то же значение для внутренней и внешней поверхности трубы:  $Q^* = q_1 S_1 = q_2 S_2$ .

Этот поток тепла описывается уравнением:

$$Q^* = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln(R_{02} / R_{01})}.$$



Удобной характеристикой интенсивности теплового потока для трубы, не зависящей от радиуса цилиндрической поверхности, является линейная (погонная) плотность теплового потока  $q_L$ :

$$q_L = \frac{Q^*}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02} / R_{01})},$$

где  $\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02} / R_{01})$  – линейное

Рис. 5.3. Температурное поле в цилиндрической стенке

тепловое сопротивление трубы.

Для многослойной трубы

получим:

$$q_L = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln(R_{0,i+1} / R_{0,i})}. \quad (5.5)$$

Для процесса теплопередачи плотность теплового потока  $q_L$ , проходящего через многослойную трубу, определяется уравнением:

$$q_L = \frac{T_{ср1} - T_{ср2}}{\frac{1}{2\pi R_{01} \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{R_{0,i+1}}{R_{0,i}} + \frac{1}{2\pi R_{02} \alpha_2}}, \quad (5.6)$$

где  $\frac{1}{2\pi R_{01} \alpha_1}$  и  $\frac{1}{2\pi R_{02} \alpha_2}$  – внешние тепловые сопротивления.

Если ввести обозначение:

$$K_{\text{л}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{R_{0,i+1}}{R_{0,i}} + \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}},$$

то уравнение (5.6) примет вид:

$$q_{\text{л}} = K_{\text{л}}(T_{\text{ср},1} - T_{\text{ср},2}),$$

где  $K_{\text{л}}$  – линейный коэффициент теплопередачи [Вт/(м·К)].

Температурный напор между средой и контактирующей поверхностью определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ср}1} - T_{\text{п}1} &= \frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} q_{\text{л}}; \\ T_{\text{п}2} - T_{\text{ср}2} &= \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2} q_{\text{л}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

## П Р И М Е Р Ы

1. Обмуровка топки парового котла состоит из двух слоев. Внутренний слой выполнен из шамотного кирпича:  $\delta_1 = 400$  мм,  $\lambda_1 = 1,4$  Вт/(м·К), а наружный – из красного кирпича:  $\delta_2 = 200$  мм,  $\lambda_2 = 0,58$  Вт/(м·К). Температуры внутренней и наружной поверхности обмуровки соответственно  $T_1 = 900^\circ\text{C}$  и  $T_3 = 90^\circ\text{C}$ .

Определить потери тепла  $q$  через обмуровку и наибольшую температуру  $T_2$  красного кирпича.

**Р е ш е н и е.**

Для определения потерь тепла  $q$  воспользуемся уравнением (5.1) для  $n = 2,0$ :

$$q = \frac{T_1 - T_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{900 - 90}{\frac{400 \cdot 10^{-3}}{1,2} + \frac{200 \cdot 10^{-3}}{0,5}} = 1292 \text{ Вт/м}^2.$$

Для определения температуры на границе наружного и внутреннего слоя обмуровки ( $T_2$ ) воспользуемся уравнением (5.2):

$$T_1 - T_2 = \frac{\delta_1}{\lambda_1} q.$$

Отсюда 
$$T_2 = T_1 - \frac{\delta_1}{\lambda_1} q = 900 - \frac{400 \cdot 10^{-3}}{1,2} \cdot 1292 = 530 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2. Определить потерю тепла  $Q$  [Вт] через стенку из красного кирпича [ $\lambda = 0,8$  Вт/(м·К)] длиной  $l = 5$  м, высотой  $h = 4$  м и толщиной  $\delta = 510$  мм, если температура воздуха внутри помещения  $T_{\text{ср1}} = 18^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи к внутренней поверхности стенки  $\alpha_1 = 7,5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), температура наружного воздуха  $T_{\text{ср2}} = -30^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности стенки  $\alpha_2 = 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Вычислить также температуры на поверхностях стены  $T_{\text{п1}}$  и  $T_{\text{п2}}$ .

Р е ш е н и е.

Пользуясь уравнением (5.3) для  $n = 1$ , находим плотность теплового потока:

$$q = \frac{T_{\text{ср1}} - T_{\text{ср2}}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{18 - (-30)}{\frac{1}{7,5} + \frac{510 \cdot 10^{-3}}{0,8} + \frac{1}{20}} = 58,5 \text{ Вт/м}^2.$$

Следовательно, потери тепла через стенку будут равны:

$$Q = q \cdot S = 58,5 \cdot 5 \cdot 4 = 1170 \text{ Вт}.$$

Для определения температур поверхностей стенки воспользуемся уравнениями (5.4). Из них следует:

$$T_{\text{п1}} = T_{\text{ср1}} - \frac{1}{\alpha_1} q = 18 - \frac{1}{7,5} \cdot 58,5 = 10,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

и 
$$T_{\text{п2}} = T_{\text{ср2}} - \frac{1}{\alpha_2} q = -30 - \frac{1}{20} \cdot 58,5 = -27,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

3. Определить расход тепла  $q_{\text{л}}$  через стенку трубы ( $d_1/d_2 = 20/30$  мм) из жаропрочной стали, коэффициент теплопроводности которой  $\lambda = 17,4$  Вт/(м·К), а температуры внешней и внутренней поверхностей  $T_1 = 600^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 450^\circ\text{C}$ .

Р е ш е н и е.

Для определения расхода тепла через стенку трубы воспользуемся уравнением (5.5) для  $n = 1$ :

$$q_{\text{л}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln(R_{02}/R_{01})} = \frac{600 - 450}{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 17,4} \ln \frac{15 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-2}}} = 40750 \text{ Вт/м.}$$

4. Вычислить потерю тепла с 1 м неизолированного трубопровода диаметром  $d_1/d_2 = 300/330$  мм, проложенного на открытом воздухе, если внутри трубы протекает вода со средней температурой  $T_{\text{ср1}} = 90^\circ\text{C}$ . Температура окружающего воздуха  $T_{\text{ср2}} = -15^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплопроводности материала трубы  $\lambda = 50$  Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи от воды к стенке трубы  $\alpha_1 = 1000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) и от трубы к окружающему воздуху  $\alpha_2 = 12$  Вт/м<sup>2</sup>·К. Определить также температуры на внутренней и внешней поверхностях трубы.

Р е ш е н и е.

Потери тепла с 1,0 м трубопровода находим воспользовавшись уравнением (5.6) для  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} q_{\text{л}} &= \frac{T_{\text{ср1}} - T_{\text{ср2}}}{\frac{1}{2\pi R_{01}\alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_{02}}{R_{01}} + \frac{1}{2\pi R_{02}\alpha_2}} = \\ &= \frac{90 - (-15)}{\frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \ln \frac{16,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-2}} + \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 16,5 \cdot 10^{-2} \cdot 12}} = \\ &= 652 \text{ Вт/м.} \end{aligned}$$

Для нахождения температуры поверхностей трубы  $T_{п1}$  и  $T_{п2}$  воспользуемся уравнениями (5.7) и (5.5) соответственно.

Из уравнения (5.7) следует, что

$$T_{п1} = T_{ср1} - \frac{1}{2\pi R_{01} \alpha_1} q_{л} = 90 - \frac{1}{2\pi \cdot 15 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} \cdot 652 = 89,8 \text{ } ^\circ\text{C},$$

а из (5.5) находим:

$$T_{п2} = T_{п1} - \frac{1}{2\pi\lambda} q_{л} \ln(R_{02} / R_{01}) = 89,8 - \\ - \frac{1}{2 \pi \cdot 50} \ln \frac{16,5 \cdot 10^{-2}}{15 \cdot 10^{-2}} \cdot 652 = 89,6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

### З А Д А Ч И

5.1. Определить коэффициент теплопроводности кирпичной стенки толщиной  $\delta = 390$  мм, если температура на внутренней поверхности стенки  $T_1 = 300^\circ\text{C}$  и на наружной  $T_2 = 60^\circ\text{C}$ .

Потери тепла через стенку  $q = 178 \text{ Вт/м}^2$ .

5.2. Через плоскую металлическую стенку топки котла толщиной  $\delta = 14$  мм от газов к кипящей воде проходит удельный тепловой поток  $q = 25000 \text{ Вт/м}^2$ . Коэффициент теплопроводности стали  $\lambda = 50 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ .

Определить перепад температур на поверхностях стенки.

5.3. Определить удельный тепловой поток через бетонную стенку толщиной  $\delta = 300$  мм, если температуры на внутренней и наружных поверхностях стенки соответственно равны  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  и  $T_2 = -15^\circ\text{C}$ .

Коэффициент теплопроводности бетона  $\lambda = 1,0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ .

5.4. Определить потерю тепла  $q$  через свод пламенной печи, выложенной из шамотного кирпича [ $\delta = 250$  мм,  $\lambda = 1,28 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ ]. Температура свода печи на горячей стороне  $T_1 = 1000^\circ\text{C}$ , а на холодной  $T_2 = 200^\circ\text{C}$ .

5.5. Определить расход тепла  $Q$  [Вт] через кирпичную стенку толщиной  $\delta = 250$  мм на площади  $3 \times 5$  м<sup>2</sup>, если температуры поверхностей стенки  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  и  $T_2 = -20^\circ\text{C}$ , а коэффициент теплопроводности кирпича  $\lambda = 1,16$  Вт/(м·К).

5.6. Вычислить плотность теплового потока  $q$  через плоскую однородную стенку, толщина которой значительно меньше ширины и высоты, если стенка выполнена:

а) из стали  $\lambda_{\text{ст}} = 40$  Вт/(м·К); из бетона  $\lambda_{\text{б}} = 1,1$  Вт/(м·К); в) из диатомитового кирпича  $\lambda_{\text{к}} = 0,11$  Вт/(м·К). Во всех случаях толщина стенки  $\delta = 50$  мм. Температуры на поверхностях стенки поддерживаются постоянными и равными  $T_1 = 100^\circ\text{C}$  и  $T_2 = 90^\circ\text{C}$ .

5.7. Стенка нагревательной печи имеет два слоя кирпича. Внутренний слой выполнен из огнеупорного кирпича толщиной  $\delta_1 = 350$  мм, а наружный из красного кирпича толщиной  $\delta_2 = 250$  мм. Определить температуру на внутренней поверхности стенки  $T_1$  и на внутренней стороне красного кирпича  $T_2$ , если на наружной стороне температура стенки  $T_3 = 90^\circ\text{C}$ , а потеря тепла через 1 м<sup>2</sup> поверхности стенки равна 1 кВт. Коэффициенты теплопроводности огнеупорного и красного кирпича соответственно равны:  $\lambda_{\text{ок}} = 1,4$  Вт/(м·К) и  $\lambda_{\text{кк}} = 0,58$  Вт/(м·К).

5.8. Обмуровка печи состоит из слоев шамотного и красного кирпича и диатомитовой засыпки между ними. Диатомитовая засыпка имеет толщину  $\delta_2 = 50$  мм и  $\lambda_2 = 0,14$  Вт/(м·К), а красный кирпич имеет  $\delta_3 = 250$  мм и  $\lambda_3 = 0,7$  Вт/(м·К).

Во сколько раз необходимо увеличить толщину красного кирпича для того, чтобы обмуровка печи без диатомитовой засыпки имела такое же внутреннее термическое сопротивление, как и с засыпкой?

5.9. Определить поток тепла  $q$  через поверхность стальной стенки котла [ $\delta_1 = 20$  мм,  $\lambda_1 = 58$  Вт/(м·К)], покрытую слоем накипи



$[\delta_2 = 2 \text{ мм}, \lambda_2 = 1,16 \text{ Вт/(м·К)}]$ . Наибольшая температура поверхности стенки равна  $250^\circ\text{C}$ , а наименьшая температура накипи  $100^\circ\text{C}$ . Определить также наибольшую температуру накипи.

5.10. Вычислить тепловой поток через  $1 \text{ м}^2$  чистой поверхности нагрева парового котла и температуры на поверхностях стенки, если заданы следующие величины: температура дымовых газов  $T_{\text{ср1}} = 1000^\circ\text{C}$ , температура кипящей воды  $T_{\text{ср2}} = 200^\circ\text{C}$ , коэффициенты теплоотдачи от газов к стенке  $\alpha_1 = 100 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  и от стенки к кипящей воде  $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Коэффициент теплопроводности материала стенки  $\lambda = 50 \text{ Вт/(м·К)}$  и толщина стенки  $\delta = 12 \text{ мм}$ .

5.11. Решить задачу 10 при условии, что в процессе эксплуатации поверхность нагрева парового котла со стороны дымовых газов покрылась слоем сажи толщиной  $\delta_{\text{с}} = 1 \text{ мм}$  [ $\lambda_{\text{с}} = 0,08 \text{ Вт/(м·К)}$ ], а со стороны воды – слоем накипи толщиной  $\delta_{\text{н}} = 2 \text{ мм}$  [ $\lambda_{\text{н}} = 0,8 \text{ Вт/(м·К)}$ ]. Вычислить тепловой поток через  $1 \text{ м}^2$  загрязненной поверхности нагрева и температуры на поверхностях соответствующих слоев  $T_{\text{п1}}, T_{\text{п2}}, T_{\text{п3}}$  и  $T_{\text{п4}}$ .

Сравнить результаты расчета с ответом задачи 10 и определить уменьшение тепловой нагрузки  $\Delta q$  (в %).

5.12. Определить плотность теплового потока  $q$  [ $\text{Вт/м}^2$ ] через кирпичную стенку толщиной  $510 \text{ мм}$  с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{\text{к}} = 0,8 \text{ Вт/(м·К)}$ , покрытую снаружи слоем теплоизоляции толщиной  $50 \text{ мм}$  с  $\lambda_{\text{из}} = 0,08 \text{ Вт/(м·К)}$ .

Температура воздуха внутри помещения  $T_{\text{ср1}} = 18^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи к внутренней поверхности стенки  $\alpha_1 = 7,5 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , температура наружного воздуха,  $T_{\text{ср2}} = -30^\circ\text{C}$ , коэффициент теплоотдачи от наружной поверхности  $\alpha_2 = 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Вычислить также температуры на поверхностях стены  $T_{\text{п1}}, T_{\text{п2}}$  и на поверхности слоя  $T_{\text{п3}}$ .

5.13. Змеевики пароподогревателя выполнены из труб жароупорной стали диаметром  $d_1/d_2 = 32/42$  мм с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 14$  Вт/(м·К). Температура внешней поверхности трубы  $T_2 = 580^\circ\text{C}$  и внутренней поверхности  $T_1 = 450^\circ\text{C}$ . Вычислить удельный тепловой поток через стенку на единицу длины трубы  $q_{\text{л}}$  [Вт/м].

5.14. Железобетонная дымовая труба [ $d_2/d_3 = 800/1300$  мм,  $\lambda_2 = 1,10$  Вт/(м·К)] покрыта с внутренней стороны слоем огнеупорной футеровки  $\lambda_1 = 0,5$  Вт/(м·К).

Определить толщину футеровки  $\delta_1$  и температуру наружной поверхности трубы  $T_3$  при условии, чтобы потери тепла не превышали  $q_{\text{л}} = 2000$  Вт/м, а наибольшие температуры футеровки и бетона не превышали  $T_1 = 421^\circ\text{C}$  и  $T_2 = 200^\circ\text{C}$ .

5.15. Стальной паропровод [ $d_1/d_2 = 100/110$ ;  $\lambda_1 = 58$  Вт/(м·К),  $T_1 = 250^\circ\text{C}$ ] покрыт двумя слоями тепловой изоляции одинаковой толщины [ $\delta = 50$  мм,  $\lambda_2 = 0,07$  Вт/(м·К),  $\lambda_3 = 0,14$  Вт/(м·К)].

Определить потери тепла  $q_{\text{л}}$  [Вт/м] и температуру  $T_3$  на границе соприкосновения этих слоев. Повторить эти расчеты при условии, что изоляция первого слоя установлена на место второго. Температура  $T_4$  на внешней поверхности в обоих случаях одинакова и равна  $50^\circ\text{C}$ .

5.16. Определить температуру на границах слоев трехслойной изоляции трубы. Внутренний диаметр трубы  $d = 245$  мм. Толщина слоев и коэффициенты теплопроводности изоляционных материалов соответственно равны:  $\delta_1 = 100$  мм,  $\delta_2 = 20$  мм,  $\delta_3 = 30$  мм,  $\lambda_1 = 0,03$  Вт/(м·К),  $\lambda_2 = 0,06$  Вт/(м·К) и  $\lambda_3 = 0,12$  Вт/(м·К). Температура внутренней поверхности трубопровода  $250^\circ\text{C}$ , а наружной поверхности изоляции  $65^\circ\text{C}$ .

5.17. Определить тепловой поток через поверхность 1 м паропровода ( $d_1/d_2 = 140/150$ ), изолированного двумя слоями тепловой

изоляции толщиной  $\delta_2 = 20$  мм и  $\delta_3 = 40$  мм. Коэффициенты теплопроводности трубы и изоляции соответственно равны:

$$\lambda_1 = 55 \text{ Вт/(м·К)}, \quad \lambda_2 = 0,037 \text{ Вт/(м·К)} \quad \text{и} \quad \lambda_3 = 0,14 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Температура на внутренней поверхности трубопровода  $T_1 = 300^\circ\text{C}$ , а на наружной поверхности изоляции  $T_4 = 55^\circ\text{C}$ .

Как изменится потеря тепла через изолированную стенку, если изоляционные слои поменять местами?

5.18. Трубопровод диаметром  $d_1/d_2 = 44/51$  мм, по которому течет масло, покрыт слоем бетона толщиной  $\delta_2 = 80$  мм. Коэффициенты теплопроводности материала трубопровода и бетона  $\lambda_1 = 50 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $\lambda_2 = 1,28 \text{ Вт/(м·К)}$ . Средняя температура масла на рассматриваемом участке трубопровода  $T_{\text{ср1}} = 120^\circ\text{C}$ , температура окружающего воздуха  $T_{\text{ср2}} = 20^\circ\text{C}$ . Коэффициенты теплоотдачи от масла к стенке  $\alpha_1 = 100 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  и от поверхности бетона к воздуху  $\alpha_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

Определить потери тепла с 1 м трубопровода, покрытого бетоном.

5.19. Плоский алюминиевый лист толщиной 0,8 мм пластинчатого теплообменника омывается с одной стороны газом, с другой – воздухом, средние температуры которых  $T_{\text{ср1}} = 280^\circ\text{C}$  и  $T_{\text{ср2}} = 210^\circ\text{C}$ , а коэффициенты теплоотдачи соответственно  $\alpha_1 = 81,5 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  и  $\alpha_2 = 232,6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Коэффициент теплопроводности стенки  $\lambda = 203,5 \text{ Вт/(м·К)}$ . Определить удельный тепловой поток, переданный через стенку.

5.20. Оценить тепловые потери с 1,0 м трубопровода диаметром  $d_1/d_2 = 150/165$  мм, покрытого слоем изоляции толщиной  $\delta_1 = 60$  мм, если трубопровод проложен на воздухе с  $T_{\text{ср2}} = -15^\circ\text{C}$  и по нему течет вода со средней температурой  $T_{\text{ср1}} = 90^\circ\text{C}$ . Коэффициенты теплопроводности материала трубы и изоляции соответственно равны  $\lambda_1 = 50 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $\lambda_2 = 0,15 \text{ Вт/(м·К)}$ , а коэффициенты теплоотдачи от поверхности изоляции к окружающему воздуху  $\alpha_2 = 8 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ , а от воды к стенке трубы  $\alpha_1 = 1000 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ . Вычислить также

температуру на внешней поверхности трубы и внешней поверхности изоляции.

5.21. Определить необходимую мощность радиаторов отопления аудитории, если кладка ее наружной стены ( $8 \times 4,5$  м,  $\delta = 500$  мм) выполнена из красного кирпича ( $\lambda = 0,7$  Вт/м·К), а температуры поверхностей  $T_1 = 12^\circ\text{C}$  и  $T_2 = -15^\circ\text{C}$ . (Окна условно отсутствуют). Какова глубина промерзания стены.

5.22. Окно в аудитории имеет сдвоенные рамы с зазором между стеклами 60 мм. Вычислить тепловые потери через оконный проем  $5 \times 3$  м, если толщина стекол  $\delta = 4$  мм, а температуры их соответствующих поверхностей  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  и  $T_4 = -18^\circ\text{C}$ .  $\lambda_{\text{ст}} = 0,74$  и  $\lambda_{\text{возд}} = 0,0244$  Вт/м·К.

5.23. Вычислить линейную плотность теплового потока через стенку змеевика из труб ( $d_1 / d_2 = 40 / 47$  мм) жароупорной стали ( $\lambda = 16,5$  Вт/(м·К)), если температуры ее внутренней и наружной поверхностей составляют  $400^\circ\text{C}$  и  $600^\circ\text{C}$  соответственно. При каком значении радиуса трубы температура в стенке равна  $500^\circ\text{C}$ .

5.24. Стальной паропровод ( $d_2 = 100$  и  $\delta = 5$  мм) проложен на открытом воздухе  $T_{\text{ср}2} = 20^\circ\text{C}$ . Тепловая изоляция паропровода выполнена из двух слоев - минеральной ваты и асбеста ( $\delta_{\text{мв}} = \delta_{\text{ас}} = 50$  мм;  $\lambda_{\text{мв}} = 0,047$  и  $\lambda_{\text{ас}} = 0,11$  Вт/м·К).

Вычислить потери тепла с погонного метра паропровода и температуры на его границах, если температура пара  $T_{\text{ср}1} = 300^\circ\text{C}$ , а коэффициенты теплоотдачи от пара к внутренней поверхности паропровода и с внешней поверхности второго слоя изоляции к воздуху соответственно 90 и 15 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

## 6. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Два физических явления подобны друг другу, если они протекают в геометрически подобных системах и если отношения одноименных физических величин в сходственные моменты времени одинаковы во всех сходственных точках этих систем. Необходимое условие подобия физических явлений, протекающих в натуральном объекте и в его модели, заключается в одинаковости инвариантов, составленных из величин, входящих в условия однозначности явления. Эти величины именуются критериями подобия.

### 6.1. Гидродинамическое подобие

Общее уравнение подобия, вытекающее из анализа уравнения движения реальной жидкости, имеет вид:

$$Eu = (Sh, Re, Fr), \quad (6.1)$$

где  $Eu = \Delta p / \rho v^2$  – критерий (число) Эйлера;  $Sh = \nu l / l$  – критерий (число) Струхалля;  $Re = \nu l / \nu$  – критерий (число) Рейнольдса;  $Fr = v^2 / gl$  – критерий (число) Фруда.

Здесь  $\rho$  и  $\nu$  – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно, а  $l$  – характеристический линейный размер тела.

Критерий Эйлера представляет собой безразмерную форму выражения перепада давления (сопротивления) на заданном участке потока жидкости.

Критерий Струхалля в случае апериодического нестационарного движения жидкости представляет собой безразмерную форму выражения текущего времени.

Критерий Рейнольдса выражает меру отношения сил инерции и сил сопротивления, обусловленных вязкостью, а критерий Фруда – меру отношения сил инерции и сил тяжести.

В случае стационарного потока критерий Струхалля отпадает и уравнение (6.1) приобретает вид:

$$Eu = (Re, Fr). \quad (6.2)$$

Одновременное соблюдение для натурального объекта и модели равенства критериев Re и Fr, а именно:

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{H}} l_{\text{H}}}{\nu_{\text{H}}} = \frac{v_{\text{M}} l_{\text{M}}}{\nu_{\text{M}}}$$

и

$$\text{Fr} = \frac{v_{\text{H}}^2}{g l_{\text{H}}} = \frac{v_{\text{M}}^2}{g l_{\text{M}}}, \quad (6.3)$$

далеко не всегда возможно, так как в моделях, меньших по сравнению с натурой размеров, должна применяться менее вязкая жидкость. Отношение кинематических вязкостей «модельной» и «натуральной» жидкости определяется из условий, выраженных равенствами (6.3):

$$\frac{\nu_{\text{M}}}{\nu_{\text{H}}} = \frac{v_{\text{M}} l_{\text{M}}}{v_{\text{H}} l_{\text{H}}} = \frac{l_{\text{M}}}{l_{\text{H}}} \sqrt{\frac{l_{\text{M}}}{l_{\text{H}}}} = \left( \frac{l_{\text{M}}}{l_{\text{H}}} \right)^{3/2}.$$

Естественно, что чем меньше будет масштаб модели, тем сложнее окажется подбор «модельной» жидкости.

В связи с этим при моделировании чаще всего руководствуются лишь одним из критериев, входящих в уравнение (6.3), а именно тем, который для данной задачи имеет более существенное значение.

В случае движения жидкости по трубопроводу решающую роль в определении величины перепада давления играют силы вязкости, а силы тяжести оказываются либо очень малы, либо вовсе отсутствуют (при горизонтальном расположении трубопровода). В таком случае уравнение подобия принимает вид:

$$\text{Eu} = f(\text{Re}). \quad (6.4)$$

При больших значениях критерия Рейнольдса, свидетельствующих о значительном преобладании инерционных сил над вязкими, последними можно пренебречь. Тем самым критерий Рейнольдса оказывается исключенным из уравнения (6.4), определяющего существование гидродинамического подобия, и критерий Эйлера становится постоянной

величиной:

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = \text{const}.$$

Область значений критерия  $Re$ , в которой он практически лишается роли критерия подобия, называется областью турбулентной автомодельности.

## 6.2. Подобие температурных полей в твердых телах

Анализ дифференциального уравнения молекулярной теплопроводности и уравнения, выражающего закон теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей средой, приводит к следующему уравнению подобия:

$$\bar{\vartheta} = f\left(\frac{x}{l_0}, \frac{y}{l_0}, \frac{z}{l_0}, Bi, Fo, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}, \dots, \frac{l_n}{l_0}\right). \quad (6.5)$$

Здесь  $Bi = \alpha l_0 / \lambda$  – критерий Био, характеризующий связь между температурным полем внутри тела и интенсивностью теплообмена на его границах ( $\alpha$  – коэффициент теплообмена, задаваемый по условию задачи);  $Fo = at / l_0^2$  – критерий Фурье, который в случае апериодического процесса теплопроводности представляет собой безразмерную форму выражения текущего времени;  $l_1 / l_0, \dots$  – геометрические параметры тела, выраженные в долях одного из них, выбранного в качестве масштаба измерения длин, а  $x / l_0, \dots$  – безразмерные переменные координаты.

Определяемой величиной в уравнении (6.5) является текущая безразмерная температура:

$$\bar{\vartheta} = \frac{T - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}},$$

где  $T_0$  и  $T_{\text{ср}}$  – начальная температура тела и температура среды, соответственно.

Для одномерного температурного поля уравнение (6.5) принимает вид:  $\bar{\vartheta} = f\left(\frac{x}{l_0}, Bi, Fo\right).$

### 6.3. Условия подобия процессов конвективного теплообмена

**Вынужденная конвекция.** При обтекании твердого тела потоком жидкости, имеющей иную температуру, чем поверхность самого твердого тела, между ними возникает процесс конвективного теплообмена.

Для определения критериев подобия, отвечающих этому процессу в условиях вынужденного движения жидкости, следует рассмотреть дифференциальные уравнения конвективного теплообмена, гидродинамики (уравнения Навье-Стокса и неразрывности) и закон теплообмена между поверхностью тела и жидкостью (граничное условие третьего рода). Анализ этих уравнений дает уравнение подобия в виде:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = \frac{\alpha_{\text{cp}} \ell_0}{\lambda} = f \left( \text{Re}, \text{Pr}, \frac{\ell_1}{\ell_0}, \frac{\ell_2}{\ell_0}, \dots, \frac{\ell_n}{\ell_0} \right). \quad (6.6)$$

Или в случае одномерных тел:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = f(\text{Re}, \text{Pr}). \quad (6.6, \text{a})$$

Здесь  $\text{Nu}_{\text{cp}} = \frac{\alpha_{\text{cp}} \ell_0}{\lambda} = \bar{\alpha}_{\text{cp}}$  – тепловой критерий Нуссельта, определяющий в безразмерной форме коэффициент теплообмена. В задачах конвективного теплообмена  $\alpha$  всегда является определяемой величиной;  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  – тепловой критерий Прандтля, сопоставляющий подобие температурного и скоростного полей и  $\text{Re}$  – гидродинамический критерий, рассмотренный выше.

При обработке экспериментальных данных методами теории подобия уравнение (6.6,а) представляют в случае жидкости:

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = C \cdot (\text{Re}^m \cdot \text{Pr}^n), \text{ а в случае газов: } \text{Nu}_{\text{cp}} = C \cdot \text{Re}^m.$$

**Свободная конвекция.** Свободное движение жидкости возникает под влиянием различия плотностей в отдельных ее областях. Наиболее распространенным и вместе с тем практически важным случаем свободного движения является тепловая конвекция, когда неоднородность поля плотностей обусловлена неоднород-



ностью температурного поля. Уравнение подобия для свободной конвекции имеет вид:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} h}{\lambda} = f(\text{Gr}, \text{Pr}), \quad (6.7)$$

где  $\frac{g \ell^3}{\nu^2} \beta_T \Delta T = \text{Gr}$  - гидродинамический критерий Грасгофа.

Критерий Грасгофа характеризует отношение подъемной силы, обусловленной неоднородностью поля плотностей, к силам трения.

## П Р И М Е Р Ы

1. Сопротивление сложного участка трубопровода диаметром  $d_{\text{н}} = 200$  мм, по которому протекает окись углерода при  $T = 327^\circ\text{C}$  и  $p = 1$  атм ( $\nu_{\text{н}} = 5,206 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho_{\text{н}} = 0,5685 \text{ кг/м}^3$ ), решено определить на модели, изготовленной в 1/4 натуральной величины, путем продувания воздуха при  $T = 20^\circ\text{C}$  и  $p = 1,0$  атм; ( $\nu_{\text{м}} = 1,511 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho_{\text{м}} = 1,2045 \text{ кг/м}^3$ ).

Определить:

а) с какой средней скоростью  $u_{\text{м}}$  следует вести продувку на модели, если средняя скорость потока окиси углерода в трубе составляет

$$u_{\text{н}} = 10 \text{ м/с}.$$

б) какова будет потеря напора на исследуемом участке трубопровода при указанной скорости, если на модели при требуемой для нее скорости потеря напора оказалась равной  $\Delta p_{\text{м}} = 1,20$  м вод. ст.

Р е ш е н и е.

Среднюю скорость воздуха, которая должна быть задана на модели, определяем из условия равенства для натуре и модели

критерия Рейнольдса: 
$$\text{Re} = \frac{u_{\text{н}} d_{\text{н}}}{\nu_{\text{н}}} = \frac{u_{\text{м}} d_{\text{м}}}{\nu_{\text{м}}},$$

откуда следует, что

$$v_M = v_H \frac{d_H \nu_M}{d_M \nu_H} = 10 \frac{0,2 \cdot 1,511 \cdot 10^{-5}}{0,05 \cdot 5,206 \cdot 10^{-5}} = 11,6 \text{ м/с}.$$

Сопротивление исследуемого участка трубопровода найдем из условия равенства для натурн и модели числа Эйлера:

$$Eu = \frac{\Delta p_H}{\rho_H v_H^2} = \frac{\Delta p_M}{\rho_M v_M^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta p_H = \Delta p_M \frac{\rho_H}{\rho_M} \left( \frac{v_H}{v_M} \right)^2 = 1,2 \frac{0,5685}{1,2045} \left( \frac{10}{11,6} \right)^2 = 0,42 \text{ м вод. ст.}$$

2. Необходимо методом моделирования исследовать распределение температур в длинном стальном вале ( $d_H = 2R_{0H} = 400$  мм) через  $t_H = 2$  ч после загрузки его в печь.

Для стального вала  $\lambda_H = 38$  Вт/(м·К),  $a_H = 9,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплоотдачи к поверхности вала в печи  $\alpha_H = 110$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Модель вала выполнена из легированной стали, для которой  $\lambda_M = 14,5$  Вт/(м·К),  $a_M = 4,8 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплоотдачи к модели вала в лабораторной печи  $\alpha_M = 150$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Определить диаметр  $d_M$  модели вала и интервал времени  $t_M$ , через который необходимо начать измерение поля температур в модели.

Р е ш е н и е.

Определяем значения критерия Био и числа Фурье для вала:

$$Bi = \frac{\alpha_H R_{0H}}{\lambda_H} = \frac{110 \cdot 0,2}{38} = 0,578;$$

$$Fo = \frac{a_H t_H}{R_{0H}^2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,2^2} = 1,64.$$

Из условия  $Bi_M = Bi_H$  находим диаметр вала модели:

$$d_M = 2R_{0M} = 2 \frac{\lambda_M}{\alpha_M} Bi = 2 \frac{14,5}{150} \cdot 0,578 = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм}.$$

Из условия  $Fo_M = Fo_H$  находим интервал времени:

$$t_M = \frac{R_{0M}^2}{a_M} Fo = \frac{0,056^2}{4,8 \cdot 10^{-6}} 1,64 = 1070 \text{ с.}$$

3. Определить диаметр модели вала  $d_M$  и необходимое значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha_M$ , при которых температурное поле в модели вала станет подобным температурному полю в образце в условиях примера 2 через  $t_M = 10$  мин после загрузки его в печь.

Определить также соотношение между значениями температур сходственных точек образца и модели, если известно, что их начальные температуры при загрузке были одинаковы и равны  $T_{0H} = T_{0M} = 20^\circ\text{C}$ , а температуры сред составляли  $T_{ср, H} = 1000^\circ\text{C}$  и  $T_{ср, M} = 200^\circ\text{C}$ .

Р е ш е н и е.

Диаметр модели вала, удовлетворяющий заданному интервалу времени  $t_M$ , находим из условия  $Fo_M = Fo_H$ :

$$d_M = 2R_{0M} = 2\sqrt{\frac{a_M t_M}{Fo}} = 2\sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 60}{1,64}} = 0,084 \text{ м.}$$

Из условия  $Bi_M = Bi_H$  находим требуемое значение коэффициента теплоотдачи для модели:

$$\alpha_M = \frac{\lambda_M}{R_{0M}} Bi = \frac{14,5}{0,042} 0,578 = 200 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Соотношение между температурами для сходственных точек образца и модели найдем из равенства безразмерных температур:

$$\bar{\vartheta}_H = \bar{\vartheta}_M \text{ или } \frac{T_H - T_{ср H}}{T_{0H} - T_{ср H}} = \frac{T_M - T_{ср M}}{T_{0M} - T_{ср M}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } T_H &= \frac{T_{ср H} - T_{0H}}{T_{ср M} - T_{0M}} (T_M - T_{ср M}) + T_{ср H} = \\ &= \frac{1000 - 20}{200 - 20} (T_M - 200) + 1000 = 5,44 T_M - 88 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

4. Интенсивность конвективного теплообмена газов в газоотводящей трубе решено моделировать теплообменом потока воздуха на модели в масштабе 1/5.  $T_m = 20^\circ\text{C}$ . При этой температуре:  $v_m = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda_m = 0,026 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ . Диаметр трубы модели 15 мм. Установлено, что при скоростях потока воздуха 2,0 и 3,0 м/с коэффициент теплообмена  $\alpha_{\text{ср,м}}$  составлял 50 и 70 Вт/м<sup>2</sup>·К. Установить зависимость  $\text{Nu}_{\text{ср}} = f(\text{Re})$ .

**Р е ш е н и е.**

В условиях подобия газовых потоков:  $\text{Nu}_{\text{ср,г}} = \text{Nu}_{\text{ср,воз}} = C \cdot \text{Re}^m$ . Коэффициенты  $C$  и  $m$  определим, составив систему двух уравнений:

$$1. \text{Nu}_{\text{ср,1}} = C \cdot \text{Re}_1^m; \text{Nu}_{\text{ср}} = \alpha_{\text{ср}} \cdot d / \lambda; \text{Re} = v \cdot d / \nu.$$

$$2. \text{Nu}_{\text{ср,2}} = C \cdot \text{Re}_2^m.$$

$$1. \ln \frac{50 \cdot 0,015}{0,026} = \ln C + m \ln \frac{2 \cdot 0,015}{15,06 \cdot 10^{-6}}$$

$$3,362 = \ln C + 7,597 m;$$

$$2. \ln \frac{70 \cdot 0,015}{0,026} = \ln C + m \ln \frac{3 \cdot 0,015}{15,06 \cdot 10^{-6}}.$$

$$3,698 = \ln C + 8,0 m$$

Решая систему уравнений, находим:  $m = 0,193$ ;  $C = 8,62$ .

### **З А Д А Ч И**

6.1. По трубе диаметром  $d_1 = 300 \text{ мм}$  протекает воздух со средней скоростью  $v_1 = 4 \text{ м/с}$  при  $T = 20^\circ\text{C}$  и  $p = 1 \text{ атм}$ , ( $\nu_1 = 1,511 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ).

Определить, какая скорость  $v_2$  должна быть задана для воды при  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $\nu_2 = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ) в трубе диаметром  $d_2 = 100 \text{ мм}$ , чтобы потоки в обеих трубах были гидродинамически подобными.

6.2. Для измерения расхода природного газа в газопроводе диаметром  $d_{\text{н}} = 400 \text{ мм}$  предполагается установить диафрагму, характеристики которой определялись на модели, изготовленной в 1/4 натуральной величины. В модели протекала вода при  $20^\circ\text{C}$ .

Опыты показали, что при расходе воды  $Q_m \geq 39,4 \text{ м}^3/\text{ч}$  на модели устанавливается режим автомодельной турбулентности.

Определить соответствующий этому режиму минимальный расход природного газа в натуре  $Q_n$ .

Температура и давление природного газа  $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $p = 1,0 \text{ атм}$  ( $\rho_n = 0,72 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_n = 1,09 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ ). Для воды при  $20^\circ\text{C}$   $\nu_m = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

**Указание:** Для режима автомодельной турбулентности  $Eu = \text{const}$ .

6.3. Пользуясь условиями предыдущей задачи, определить каким должен быть перепад пьезометрических высот на диафрагме в газопроводе  $\Delta h_n$  при расходе природного газа  $Q_n = 5000 \text{ м}^3/\text{ч}$ , если на модели при расходе воды  $Q_m = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$  он оказался равным  $\Delta h_m = 136,0 \text{ мм рт. ст.}$

6.4. Исследование сопротивления элемента воздушного подогревателя выполнено на водяной модели, изготовленной в 1/5 натуральной величины.

Средняя скорость и температура воздуха, протекающего в образце, равны соответственно  $u_n = 5 \text{ м/с}$ ,  $T_n = 100^\circ\text{C}$ .

Физические параметры воздуха при этой температуре:  
 $\rho_n = 0,972 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu_n = 23,13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

В модели протекала вода при температуре  $T_m = 20^\circ\text{C}$  ( $\rho_m = 998,2 \text{ кг/м}^3$ ,  $\nu_m = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ). Сопротивление модели оказалось равным  $\Delta p_m = 200 \text{ мм вод. ст.}$

Определить среднюю скорость воды  $u_m$ , которую следовало задать на модели, и сопротивление элемента воздушного подогревателя  $\Delta p_n$ .

6.5. На паропроводе перегретого пара ( $T_n = 300^\circ\text{C}$ ,  $\nu_n = 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\rho_n = 46,2 \text{ кг/м}^3$ ) диаметром  $d = 500 \text{ мм}$  установлена измерительная диафрагма, калибровка которой проводилась на модели, изготовленной в 1/4 натуральной величины.

В результате испытаний модели на воде, температура которой  $T_m = 20^\circ\text{C}$  ( $v_m = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ), установлено, что при значении числа Рейнольдса  $Re_m \geq 1,42 \cdot 10^5$  на модели устанавливается режим автомодельности. Определить расход пара  $G_n$  (кг/с), соответствующий данному режиму.

6.6. При условиях предыдущей задачи на модели были получены значения перепадов давлений на диафрагме при различных расходах воды. Найдено, что при расходе воды  $G_m = 9,0 \text{ кг/с}$  перепад давления составил  $\Delta p_m = 4600 \text{ Па}$ . Определить соответствующие значения  $G_n$  и  $\Delta p_n$ .

6.7. По трубе диаметром  $d_1 = 200 \text{ мм}$  протекает масло МК со средним расходом  $G_n = 15 \text{ кг/с}$  при  $T = 120^\circ\text{C}$  ( $v_n = 13,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\rho_n = 825 \text{ кг/м}^3$ ).

Определить, какой расход  $G_m$  должен быть задан для воздуха при  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $v_m = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; ) в трубе диаметром  $d_2 = 150 \text{ мм}$ , чтобы потоки в обеих трубах были гидродинамически подобными.

6.8. Стальной слиток в форме куба с длиной ребра  $l_n = 0,5 \text{ м}$ , начальная температура которого  $T_{0n} = 20^\circ\text{C}$ , помещен для нагрева в печь с температурой  $T_{\text{ср},n} = 800^\circ\text{C}$ .

Исследование распределений температур в слитке в процессе нагрева проводится на модели, выполненной из титана. Начальная температура титанового слитка  $T_{0m} = 20^\circ\text{C}$ . Температура лабораторной печи  $T_{\text{ср},m} = 300^\circ\text{C}$ .

Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи для слитков соответственно равны.

Стального:

$$\lambda_n = 65,8 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, a_n = 21 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_n = 120 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Титанового:

$$\lambda_m = 15,1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, a_m = 6,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_m = 100 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Определить характеристический размер титанового слитка (длину ребра  $l_m$ ) и интервал времени  $t_m$ , через который необходимо

начать измерение поля температур в модели, если желательно выяснить, каково распределение температур в стальном слитке через  $t_n = 1$  ч после его загрузки в печь? Определить также соотношение между температурами в сходственных точках образца и модели.

6.9. По условиям предыдущей задачи определить, какими должны быть характеристический размер модели слитка  $l_m$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha_m$ , чтобы температурное поле в модели слитка стало подобным температурному полю в образце через  $t_m = 5$  мин после загрузки модели в печь?

6.10. Стальной шар диаметром  $d_n = 2R_{0n} = 0,2$  м, нагретый до температуры  $T_{0,n} = 900^\circ\text{C}$ , погружен в масляную ванну, имеющую температуру  $T_{ср,n} = 100^\circ\text{C}$ .

Исследование температурного поля в шаре проводится на модели выполненной из бетона, нагретой до температуры  $T_{0m} = 100^\circ\text{C}$  и охлаждаемой в потоке воздуха, температура которого  $T_{ср,m} = 20^\circ\text{C}$ .

Коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи для шара соответственно равны.

Стального:

$$\lambda_n = 57,0 \text{ Вт/(м·К)}, a_n = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_n = 600 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Бетонного:

$$\lambda_m = 1,275 \text{ Вт/(м·К)}, a_m = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \alpha_m = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Определить диаметр модели  $d_m$ , интервал времени  $t_m$ , через который температурное поле в модели будет подобно температурному полю в образце через  $t_n = 3$  мин после начала охлаждения, и соотношение между температурами для образца и модели в сходственных точках.

6.11. Необходимо определить распределение температур в стальном вале диаметром  $d_n = 300$  мм через  $\tau_n = 3,0$  ч после загрузки его в печь.

Для стали коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно  $\lambda_n = 42 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $a_n = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент теплоотдачи к валу в печи  $\alpha_n = 116 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

Исследование проведено в небольшой печи на геометрически подобной модели вала, выполненной из легированной стали. Для модели  $\lambda_m = 16 \text{ Вт/(м·К)}$ ;  $a_m = 0,53 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\alpha_m = 1150 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

Определить диаметр  $d_m$  модели вала и промежуток времени, через который после загрузки модели в печь необходимо измерить распределение температур в модели.

6.12. На модельной установке исследовалась теплоотдача при поперечном обтекании цилиндра воздухом. В результате опытов получены значения коэффициентов теплоотдачи  $\alpha_1 = 40$  и  $\alpha_2 = 32 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  для двух цилиндров диаметром соответственно  $d_1 = 10 \text{ мм}$  и  $d_2 = 20 \text{ мм}$  при постоянной температуре  $t_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$  при скорости набегающего потока  $v = 2,0 \text{ м/с}$ . Найти критериальную зависимость для теплоотдачи в виде:  $\text{Nu}_{\text{ж}} = C \cdot \text{Re}_{\text{ж}}$ .

Физические параметры воздуха при этой температуре:

$$\lambda_{\text{ж}} = 0,026 \text{ Вт/м·К}, v_{\text{ж}} = 23,13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

6.13. Исследование тепловых потерь с поверхности паропроводов в условиях естественной конвекции проводилось на модельной установке, при этом измерения производились на трубе диаметром  $d = 40 \text{ мм}$ .

Опыты проводились при различных температурах стенки трубы.

Были получены значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha_1 = 11,8$  и  $\alpha_2 = 13,35 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$  при температурах стенки трубы  $T_1 = 215$  и  $T_2 = 330^\circ\text{C}$ . Температура окружающего воздуха  $T_{\text{ж}}$  вдали от поверхности трубы оставалась постоянной и равной  $30^\circ\text{C}$ .

Найти обобщенную зависимость для расчета теплоотдачи в условиях естественной конвекции в виде:  $\text{Nu} = f(\text{Gr})$ .

Физические параметры воздуха при этой температуре:

$$\lambda_{\text{ж}} = 0,0267 \text{ Вт/м·К}, v_{\text{ж}} = 16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$



## 7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ДИФФУЗИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

### 7.1. Нестационарная теплопроводность

К числу наиболее распространенных задач нестационарной теплопроводности относятся задачи об определении температурного поля при нагревании или охлаждении тел. Для тел, в которых распределение температуры зависит только от одной координаты (неограниченная пластина, неограниченный цилиндр и шар), интегрирование уравнения теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \quad (7.1)$$

при начальном условии  $t = 0, T = T_0$  и граничном условии третьего

рода:  $\alpha(T_{\text{п}} - T_{\text{ср}}) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{п}},$

где  $T_{\text{п}}$  и  $T_{\text{ср}}$  – температуры поверхности тела и окружающей среды, соответственно, а  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\text{п}}$  – градиент температуры в тонком поверхностном слое тела, дает следующие решения. Для неограниченной пластины:

$$\bar{\vartheta} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Sin}(\beta_i) \text{Cos}(\beta_i \bar{x})}{\beta_i + \text{Sin}(\beta_i) \text{Cos}(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 \text{Fo}), \quad (7.2)$$

где  $\bar{\vartheta} = \frac{T - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}}$  – текущая безразмерная температура;  $\bar{x} = x/\delta$  –

безразмерная координата и  $\delta$  – полутолщина пластины, принятая в качестве характерного размера;  $\text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}$  – критерий Фурье,  $\beta_i$  – корни трансцендентного уравнения:

$$\text{ctg} \beta = \frac{\beta}{\text{Bi}}. \quad (7.3)$$

Здесь  $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$  – критерий Био.

Из уравнений (7.2) и (7.3) следует, что безразмерная температура  $\bar{\vartheta}$  является функцией трех величин:  $\bar{x}$ ,  $Bi$ ,  $Fo$ :

$$\bar{\vartheta} = f(\bar{x}, Bi, Fo). \quad (7.4)$$

Для температуры  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$  в средней плоскости пластины и  $\bar{\vartheta}_{\text{п}}$  на ее поверхности безразмерная координата  $\bar{x}$ , являющаяся одним из аргументов в уравнении (7.2) или (7.4), становится постоянной величиной (для средней плоскости:  $\bar{x}_{\text{ц}} = 0$ , а для поверхности:

$\bar{x}_{\text{п}} = \delta/\delta = 1$ ). Следовательно, для этих случаев указанное уравнение упрощается. Для температуры средней плоскости пластины оно принимает вид:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_i)}{\beta_i + \sin(\beta_i)\cos(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.5)$$

или 
$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = f_1(Bi, Fo),$$

а для температуры поверхности:

$$\bar{\vartheta}_{\text{п}} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_i)\cos(\beta_i)}{\beta_i + \sin(\beta_i)\cos(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.6)$$

или 
$$\bar{\vartheta}_{\text{п}} = f_2(Bi, Fo).$$

Для определения безразмерных температур  $\bar{\vartheta}_{\text{п}}$  и  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$  удобно пользоваться номограммами  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}(Bi, Fo)$  и  $\bar{\vartheta}_{\text{п}}(Bi, Fo)$ , построенными по уравнениям (7.5) и (7.6) и представленными на рис. 7.1 и 7.2 соответственно. Относительное изменение энтальпии пластины определяется уравнением:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\beta_i)}{\beta_i^2 + \beta_i \sin(\beta_i)\cos(\beta_i)} [1 - \exp(-\beta_i^2 Fo)], \quad (7.7)$$

где  $Q_t$  – изменение энтальпии пластины (количество тепла, поглощенного пластиной при нагревании или отданного ею в процессе охлаждения) за время  $t$ , а  $Q_0$  – полное изменение энтальпии пластины по достижении теплового равновесия с окружающей средой, вычисляемое по формуле:  $Q_0 = 2C_p \rho S \delta (T_0 - T_{cp})$ .

Здесь  $C_p$ ,  $\rho$  и  $S$  – теплоемкость, плотность и площадь поверхности пластины. Выражение (7.7) может быть представлено в следующей

общей форме:  $\frac{Q_t}{Q_0} = f(Bi, Fo)$ .

График этой функции, изображен на рис. 7.3.

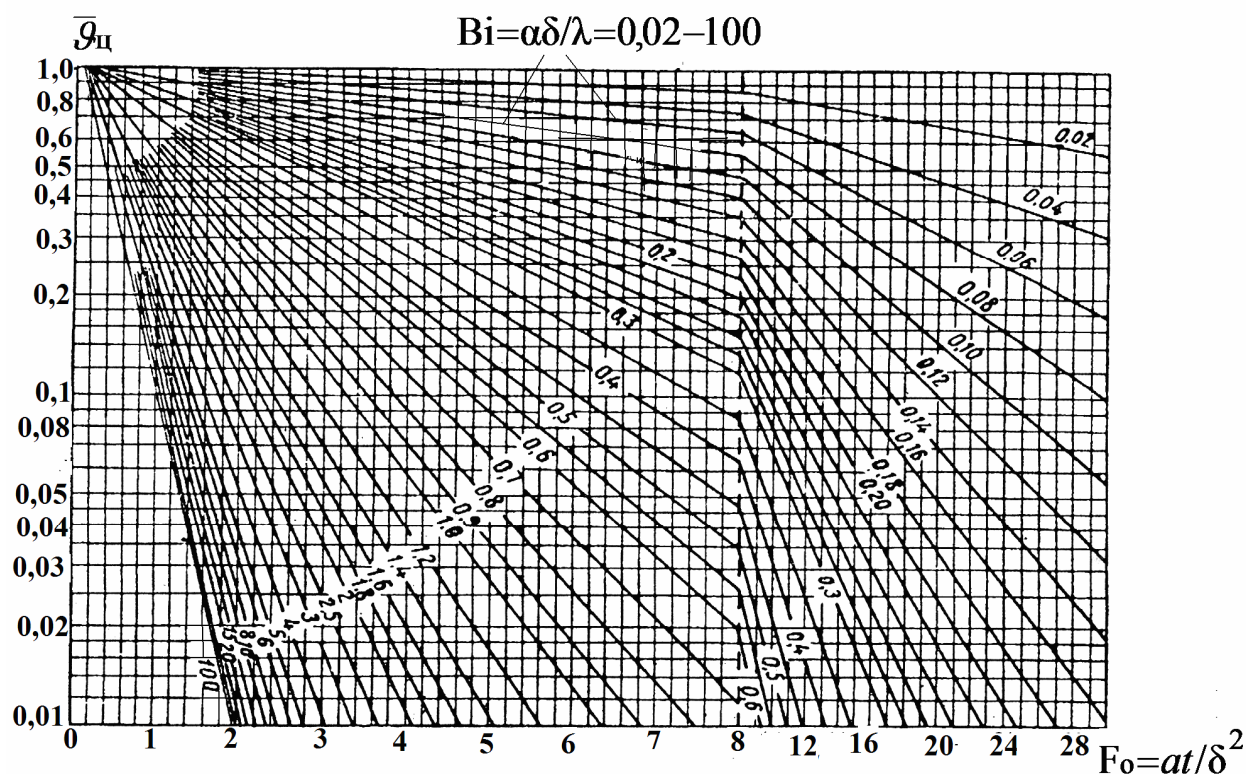


Рис.7.1. Номограмма для расчета температуры в средней плоскости пластины

При малых значениях критерия Био ( $Bi \ll 1$ ) безразмерные температуры поверхности и середины нагреваемого или охлаждаемого тела почти совпадают.

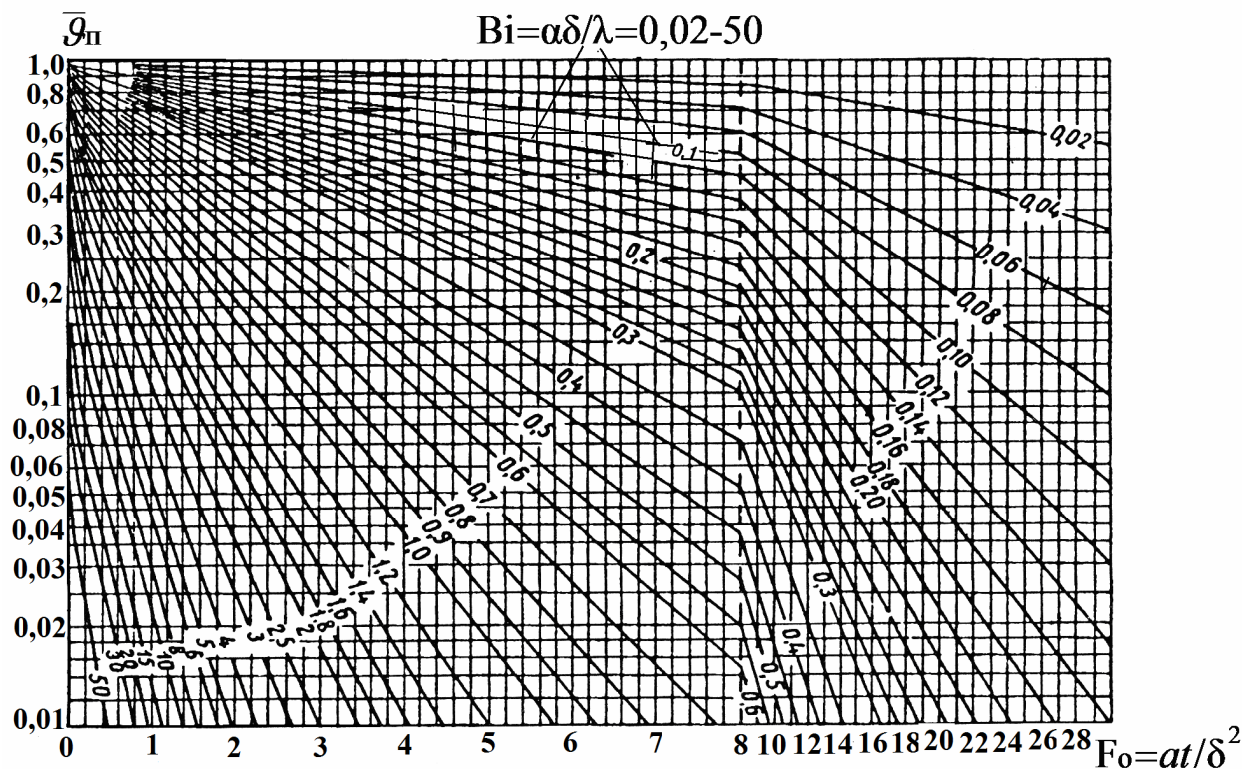


Рис. 7.2. Номограмма для расчета температуры на поверхности  
Пластины

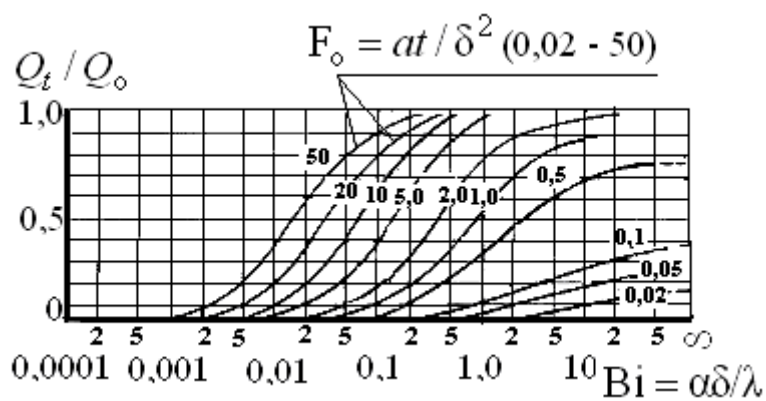


Рис. 7.3. График относительного изменения теплосодержания  
пластины

Действительно, разделив друг на друга уравнения (7.6) и (7.5) для неограниченной пластины и учтя, что при  $Bi \rightarrow 0$  бесконечный ряд в каждом из этих уравнений практически сходится к первому члену, получим:

$$\frac{\vartheta_{\Pi}}{\vartheta_{\Pi}} = \cos \beta_1 \cdot \vartheta_{\Pi}$$

Так как при  $Bi \rightarrow 0$   $\beta_1 \rightarrow 0$ , то  $\cos \beta_1 \approx 1$ . Следовательно,  $\bar{\vartheta}_{\Pi} \approx \vartheta_{\Pi}$ .

Таким образом безразмерную температуру  $\bar{\vartheta}$  можно рассматривать как одинаковую во всех точках сечения пластины. Можно показать, что для  $0 < Bi \leq 0,1$  величина  $\bar{\vartheta}$  дается простым уравнением:  $\bar{\vartheta} = \exp(-Bi \cdot Fo)$ . (7.8)

Для неограниченного цилиндра имеем:

$$\bar{\vartheta} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i) J_0(\beta_i \bar{R})}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo) \quad (7.9)$$

Здесь  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка;  $\bar{R} = R/R_0$  – безразмерный текущий радиус, отнесенный к радиусу цилиндра ( $R_0$ ).

Произвольные постоянные  $\beta_i$  определяются как корни трансцендентного уравнения  $\beta J_1(\beta) = Bi J_0(\beta)$ , выражающего граничное условие третьего рода для данной задачи.

В качестве характеристического размера при вычислении числа Фурье и критерия Био принят радиус цилиндра:  $Fo = \frac{at}{R_0^2}$ ,  $Bi = \frac{\alpha R_0}{\lambda}$ .

В применении к оси цилиндра ( $\bar{R} = 0$ ) и его поверхности ( $\bar{R} = 1$ ) выражение (7.9) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{\Pi} &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo); \\ \bar{\vartheta}_{\Pi} &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i} \frac{J_1(\beta_i) J_0(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} \exp(-\beta_i^2 Fo). \end{aligned}$$

Относительное изменение теплосодержания участка цилиндра длиной  $l$  за время  $t$  определяется уравнением:

$$\frac{Q_t}{Q_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_i^2} \frac{J_1^2(\beta_i)}{J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)} [1 - \exp(-\beta_i^2 Fo)],$$

где  $Q_0 = C_p \pi R_0^2 l (T_0 - T_{cp})$  – полное изменение теплосодержания рассматриваемого участка цилиндра при достижении теплового равновесия с окружающей средой.

Графики функций:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = f_1(\text{Bi}, Fo), \quad \bar{\vartheta}_{\text{п}} = f_2(\text{Bi}, Fo) \quad \text{и} \quad \frac{Q_t}{Q_0} = f(\text{Bi}, Fo)$$

для неограниченного цилиндра представлены на рис. 7.4, 7.5 и 7.6, соответственно.

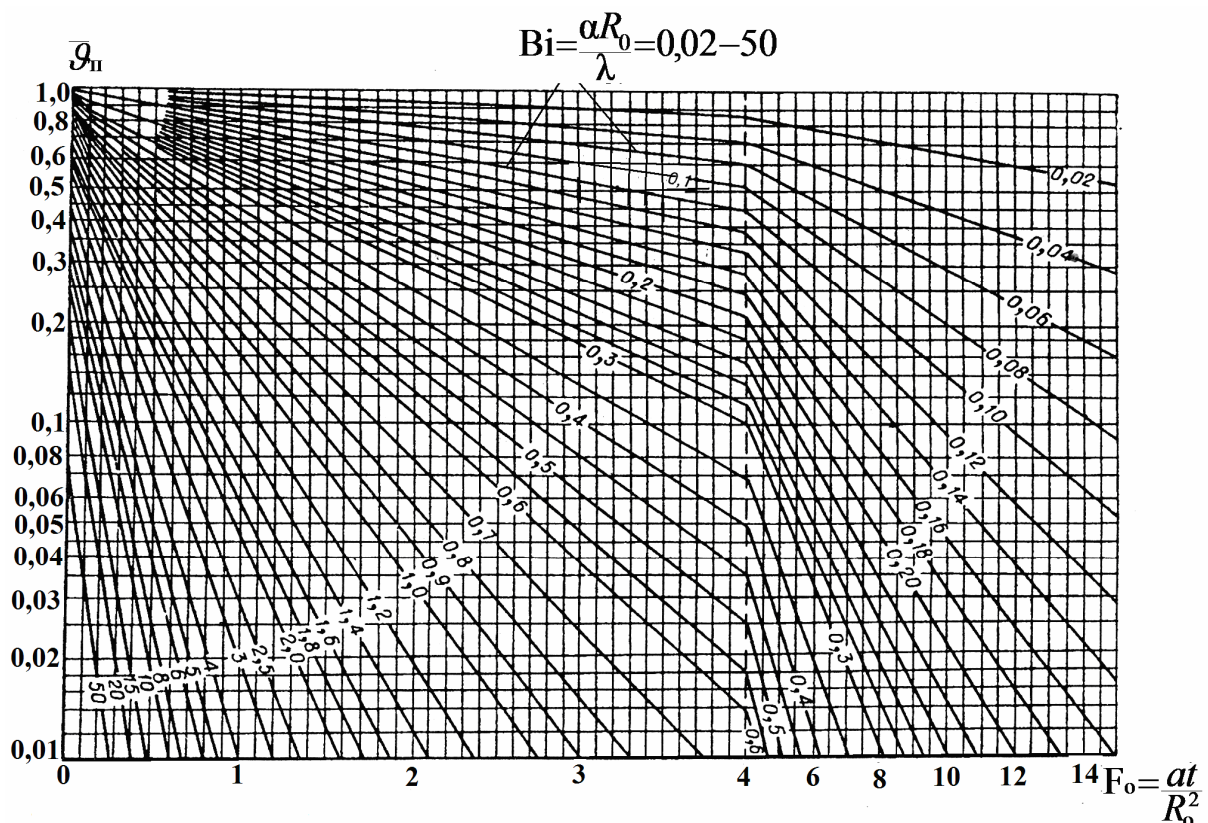


Рис. 7.4. Безразмерная температура ( $\bar{\vartheta}_{\text{п}}$ ) на поверхности цилиндра



## 7.2. Двух- и трехмерные задачи нестационарной теплопроводности

Для неограниченного прямоугольного стержня, который можно рассматривать как тело, образованное пересечением двух взаимно перпендикулярных неограниченных пластин, решение уравнения (7.1) можно представить в виде:

$$\bar{\vartheta}(x, y, t) = \bar{\vartheta}(x, t) \cdot \bar{\vartheta}(y, t). \quad (7.10)$$

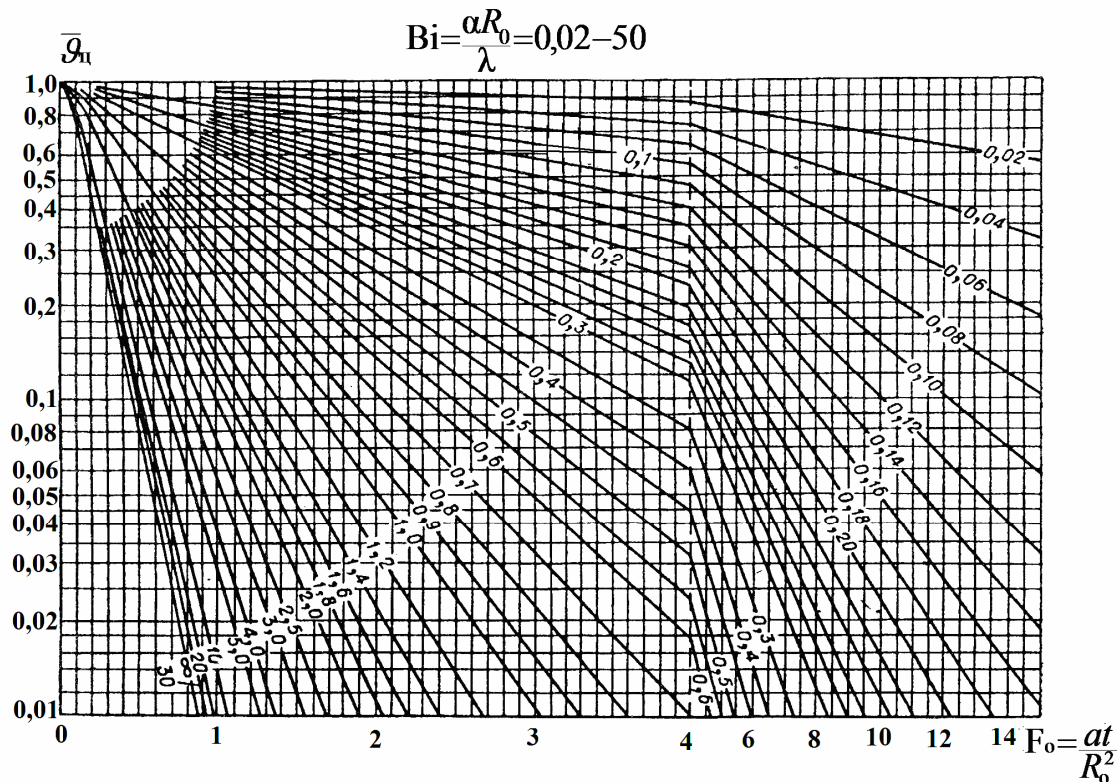


Рис. 7.5. Безразмерная температура на оси ( $\bar{\vartheta}_c$ ) цилиндра

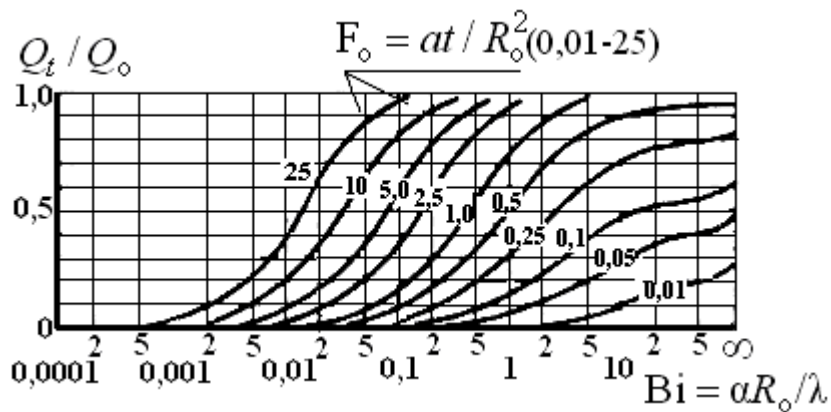


Рис. 7.6. График относительного изменения теплосодержания цилиндра

Аналогичные формы имеют решения уравнения теплопроводности параллелепипеда, который можно рассматривать как тело, образованное пересечением трех взаимно перпендикулярных пластин:

$$\bar{\vartheta}(x, y, z, t) = \bar{\vartheta}(x, t) \cdot \bar{\vartheta}(y, t) \cdot \bar{\vartheta}(z, t). \quad (7.10 \text{ а})$$

Для короткого цилиндра, т. е. для цилиндра, ограниченного торцовыми поверхностями, имеем:

$$\bar{\vartheta}(R, x, t) = \bar{\vartheta}(R, t) \cdot \bar{\vartheta}(x, t). \quad (7.10 \text{ б})$$

### 7.3. Полуограниченное твердое тело

Для полуограниченного твердого тела решение уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$$

при граничном условии  $T_{x=0} = T_{\Pi} = \text{const}$  имеет вид:

$$\bar{\theta} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right), \quad (7.11)$$

где  $\bar{\theta} = \frac{T - T_{\Pi}}{T_0 - T_{\Pi}}$ ;  $\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz$  и  $z = \frac{x}{2\sqrt{at}}$ .

Здесь  $T_{\Pi}$  – температура поверхности тела;  $T_0$  – начальная температура, одинаковая во всех точках тела, а  $\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$  – функция ошибок

Гаусса. Значения этой функции в зависимости от значений аргумента  $z$  приводятся в табл. 7.1.

Плотность теплового потока на поверхности полуограниченного твердого тела определяется уравнением:

$$q_{\Pi} = \frac{b}{\sqrt{\pi t}} (T_{\Pi} - T_0),$$

где  $b = \sqrt{\lambda C_p \rho}$  – коэффициент теплоусвоения  $[\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}^{1/2})]$ .



**Т а б л и ц а 7.1**

**Функция ошибок Гаусса**

$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$
0.00	0.000 000	0.60	0.603 856	1.20	0.910 314	1.80	0.989 091
0.01	0.011 283	0.61	0.611 681	1.21	0.912 956	1.81	0.989 525
0.02	0.022 565	0.62	0.619 411	1.22	0.915 534	1.82	0.989 943
0.03	0.033 841	0.63	0.627 046	1.23	0.918 050	1.83	0.990 347
0.04	0.045 111	0.64	0.634 586	1.24	0.920 505	1.84	0.990 736
0.05	0.056 372	0.65	0.642 029	1.25	0.922 900	1.85	0.991 111
0.06	0.067 622	0.66	0.649 377	1.26	0.925 236	1.86	0.991 472
0.07	0.078 858	0.67	0.656 628	1.27	0.927 514	1.87	0.991 821
0.08	0.090 078	0.68	0.663 782	1.28	0.929 734	1.88	0.992 156
0.09	0.101 281	0.69	0.670 840	1.29	0.931 899	1.89	0.992 479
0.10	0.112 463	0.70	0.677 801	1.30	0.934 008	1.90	0.992 790
0.11	0.123 623	0.71	0.684 666	1.31	0.936 063	1.91	0.993 090
0.12	0.134 738	0.72	0.691 433	1.32	0.938 065	1.92	0.993 378
0.13	0.145 867	0.73	0.698 104	1.33	0.940 015	1.93	0.993 656
0.14	0.156 947	0.74	0.704 678	1.34	0.941 914	1.94	0.993 923
0.15	0.167 996	0.75	0.711 156	1.35	0.943 762	1.95	0.994 179
0.16	0.179 012	0.76	0.717 537	1.36	0.945 561	1.96	0.994 426
0.17	0.189 992	0.77	0.723 822	1.37	0.947 312	1.97	0.994 664
0.18	0.200 936	0.78	0.730 010	1.38	0.949 016	1.98	0.994 892
0.19	0.211 840	0.79	0.736 103	1.39	0.950 673	1.99	0.995 111
0.20	0.222 703	0.80	0.742 101	1.40	0.952 285	2.00	0.995 322
0.21	0.233 522	0.81	0.748 003	1.41	0.953 852	2.01	0.995 525
0.22	0.244 296	0.82	0.753 811	1.42	0.955 376	2.02	0.995 719
0.23	0.255 023	0.83	0.759 524	1.43	0.956 857	2.03	0.995 906
0.24	0.265 700	0.84	0.765 143	1.44	0.958 297	2.04	0.996 086
0.25	0.276 326	0.85	0.770 668	1.45	0.959 695	2.05	0.996 258
0.26	0.286 900	0.86	0.776 100	1.46	0.961 054	2.06	0.996 423
0.27	0.297 418	0.87	0.781 440	1.47	0.962 373	2.07	0.996 582
0.28	0.307 880	0.88	0.786 687	1.48	0.963 654	2.08	0.996 734
0.29	0.318 283	0.89	0.791 843	1.49	0.964 898	2.09	0.996 880
0.30	0.328 627	0.90	0.796 908	1.50	0.966 105	2.10	0.997 021
0.31	0.338 908	0.91	0.801 883	1.51	0.967 277	2.11	0.997 155
0.32	0.349 126	0.92	0.806 768	1.52	0.968 413	2.12	0.997 284
0.33	0.359 279	0.93	0.811 564	1.53	0.969 516	2.13	0.997 407
0.34	0.369 365	0.94	0.816 271	1.54	0.970 586	2.14	0.997 525
0.35	0.379 382	0.95	0.820 891	1.55	0.971 623	2.15	0.997 639
0.36	0.389 330	0.96	0.825 424	1.56	0.972 628	2.16	0.997 747
0.37	0.399 206	0.97	0.829 870	1.57	0.973 603	2.17	0.997 851
0.38	0.409 009	0.98	0.834 232	1.58	0.974 547	2.18	0.997 951
0.39	0.418 739	0.99	0.838 508	1.59	0.975 462	2.19	0.998 046
0.40	0.428 392	1.00	0.842 701	1.60	0.976 348	2.20	0.998 137

**Окончание табл. 7.1**

$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$	$z$	$\text{erf}(z)$
0.41	0.437 969	1.01	0.846 810	1.61	0.977 207	2.21	0.998 224
0.42	0.447 468	1.02	0.850 838	1.62	0.978 038	2.22	0.998 308
0.43	0.456 887	1.03	0.854 784	1.63	0.978 843	2.23	0.998 388
0.44	0.466 225	1.04	0.858 650	1.64	0.979 622	2.24	0.998 464
0.45	0.475 482	1.05	0.862 436	1.65	0.980 376	2.25	0.998 537
0.46	0.484 655	1.06	0.866 144	1.66	0.981 105	2.26	0.998 607
0.47	0.493 745	1.07	0.869 773	1.67	0.981 810	2.27	0.998 674
0.48	0.502 750	1.08	0.873 326	1.68	0.982 493	2.28	0.998 738
0.49	0.511 668	1.09	0.876 803	1.69	0.983 153	2.29	0.998 799
0.50	0.520 500	1.10	0.880 205	1.70	0.983 790	2.30	0.998 857
0.51	0.529 244	1.11	0.883 533	1.71	0.984 407	2.31	0.998 912
0.52	0.537 899	1.12	0.886 788	1.72	0.985 003	2.32	0.998 966
0.53	0.546 464	1.13	0.889 971	1.73	0.985 578	2.35	0.999 016
0.54	0.554 939	1.14	0.893 082	1.74	0.986 135	2.34	0.999 065
0.55	0.563 323	1.15	0.896 124	1.75	0.986 672	2.35	0.999 111
0.56	0.571 616	1.16	0.899 096	1.76	0.987 190	2.36	0.999 155
0.57	0.579 816	1.17	0.902 000	1.77	0.987 691	2.37	0.999 197
0.58	0.587 923	1.18	0.904 837	1.78	0.988 174	2.38	0.999 237
0.59	0.595 936	1.19	0.907 608	1.79	0.988 641	2.39	0.999 275

Расход тепла через единицу поверхности тела за время  $t$  составляет:

$$Q_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b(T_{\Pi} - T_0) \sqrt{t}. \quad (7.12)$$

#### **7.4. Регулярный режим нагревания и охлаждения тел**

Режим нагревания или охлаждения тела, в котором наблюдается линейная зависимость между  $\ln \bar{\vartheta}$  и  $Fo$ , получил название регулярного:

$$\ln \bar{\vartheta} = A - B \cdot Fo. \quad (7.13)$$

Относительная скорость изменения температуры в регулярном режиме называется темпом регулярного режима и определяется выражением:

$$-\frac{\partial \ln \bar{\vartheta}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta} \partial t} = m = \beta_1^2 \frac{a}{l_0^2},$$

где  $l_0$  – характеристический линейный размер тела.

Когда  $Bi \rightarrow \infty$ , то  $\beta_1 \rightarrow \beta_{1, \max}$ , а темп регулярного режима  $m$  растёт и стремится к своему предельному значению:  $m \rightarrow m_\infty$ .

Таким образом, имеем (теорема Кондратьева):

$$m_\infty = \beta_{1, \max}^2 \frac{a}{l_0^2} = \frac{a}{k_\Phi}. \quad (7.14)$$

Величина  $k_\Phi = (l_0 / \beta_{1, \max})^2$  зависит от формы, размеров тела и называется коэффициентом формы.

Для некоторых тел коэффициент формы  $k_\Phi$  может быть вычислен.

Так, для неограниченной пластины ( $\beta_{1, \max} = \frac{\pi}{2}$ ;  $l_0 = \delta$ ):

$$k_\Phi = \left(\frac{\delta}{\pi/2}\right)^2 = 4\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2;$$

для неограниченного цилиндра ( $\beta_{1, \max} = 2,405$ ;  $l_0 = R_0$ ):

$$k_\Phi = (R_0 / 2,405)^2 = 0,173 R_0^2;$$

для шара:  $k_\Phi = (R_0 / \pi)^2$ ;

для цилиндра длиной  $l$ :

$$k_\Phi = 1 / [(2,405 / R_0)^2 + (\pi / l)^2];$$

для параллелепипеда со сторонами  $l_1, l_2, l_3$ :

$$k_\Phi = 1 / [(\pi / l_1)^2 + (\pi / l_2)^2 + (\pi / l_3)^2].$$

Методом регулярного режима часто пользуются для оценки времени нагревания или охлаждения тел. Для этого применяют формулу:

$$\Delta t = \frac{1}{m} \ln \frac{T_1 - T_{\text{ср}}}{T_2 - T_{\text{ср}}}.$$

Здесь  $\Delta t = t_2 - t_1$  – время, в течение которого температура в какой-либо точке тела изменяется от  $T_1$  до  $T_2$ . Подобная задача может быть

решена чисто теоретически, если известны коэффициенты формы тела  $k_{\phi}$  и температуропроводности  $a$ , необходимые для вычисления темпа изменения температуры  $m$ .

### 7.5. Нестационарная диффузия

Одной из наиболее распространенных задач нестационарной диффузии в твердом теле является задача о диффузии из постоянного источника. Если на поверхности твердого тела концентрация растворенного вещества поддерживается постоянной во время всего процесса диффузии, то распределение концентрации диффундирующего вещества по глубине полуограниченного твердого тела описывается функцией ошибок Гаусса [см. (7.11) и соответствующие пояснения]:

$$\bar{C} = \frac{C - C_{\Pi}}{C_0 - C_{\Pi}} = \operatorname{erf}(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (7.15)$$

Плотность диффузионного потока  $[кг/(м^2 \cdot с)]$  на поверхности тела определяется уравнением:

$$j_{x=0} = (C_{\Pi} - C_0) \sqrt{\frac{D}{\pi t}}.$$

Количество вещества, проходящее через единичную поверхность за время  $t$ , равно  $(кг/м^2)$ :  $J = 2(C_{\Pi} - C_0) \sqrt{\frac{Dt}{\pi}}.$

В этих уравнениях  $C_{\Pi}$  – концентрация диффундирующего вещества на поверхности тела;  $C_0$  – начальная концентрация диффундирующего вещества в твердом теле.

## П Р И М Е Р Ы

1. Пластина из хромоникелевой стали (25 % Cr, 20 % Ni), толщиной  $2\delta = 40$  мм, имеющая температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещена в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 1200^\circ\text{C}$ .

Определить температуру пластины в ее центре  $T_{\text{ц}}$  и на поверхности  $T_{\text{п}}$  через  $t = 15$  мин после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно  $\lambda = 12,7 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $a = 3,60 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины  $\alpha = 150 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

**Р е ш е н и е.**

Определяем значения критериев Фурье и Био для пластины:

$$Fo = \frac{at}{\delta^2} = \frac{3,6 \cdot 10^{-6} \cdot 15 \cdot 60}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = 8,1;$$

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{150 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{12,7} = 0,236.$$

Пользуясь графиками  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}(Bi, Fo)$  и  $\bar{\vartheta}_{\text{п}}(Bi, Fo)$ , представленными на рис. 7.1 и 7.2, находим:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,176 \text{ и } \bar{\vartheta}_{\text{п}} = \frac{T_{\text{п}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,158,$$

откуда  $T_{\text{ц}} = T_{\text{ср}} + \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(T_0 - T_{\text{ср}}) = 1200 + 0,176(20 - 1200) = 850 \text{ }^\circ\text{C}$   
и  $T_{\text{п}} = T_{\text{ср}} + \bar{\vartheta}_{\text{п}}(T_0 - T_{\text{ср}}) = 1200 + 0,158(20 - 1200) = 886 \text{ }^\circ\text{C}$ .

2. Длинный стальной вал диаметром  $2R_0 = 400 \text{ мм}$ , нагретый до температуры  $T_0 = 800^\circ\text{C}$ , охлаждается в среде с постоянной температурой  $T_{\text{ср}} = 20^\circ\text{C}$ .

Определить время  $t$ , в течение которого температура поверхности цилиндра понизится до  $T_{\text{п}} = 300^\circ\text{C}$ .

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали соответственно равны  $\lambda = 45,5 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $C_p = 502 \text{ Дж/(кг·К)}$  и  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

Коэффициент теплоотдачи с поверхности вала в процессе охлаждения остается постоянным и равным  $\alpha = 150 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

**Р е ш е н и е.**

Определяем коэффициент температуропроводности, безразмерную температуру и критерий Био:

$$a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = \frac{45,5}{502 \cdot 7800} = 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с};$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = \frac{300 - 20}{800 - 20} = 0,359;$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R_0}{\lambda} = \frac{150 \cdot 0,2}{45,5} = 0,658.$$

Пользуясь графиком на рис. 7.4 для цилиндра, находим критерий Фурье:  $\text{Fo} = \frac{at}{R_0^2} = 0,8.$

Откуда 
$$t = \frac{R_0^2}{a} \text{Fo} = \frac{0,2^2 \cdot 0,8}{11,6 \cdot 10^{-6}} = 2760 \text{ с} = 46 \text{ мин.}$$

3. При условиях охлаждения стального вала, рассмотренных в примере 2, определить, какова будет к найденному моменту времени  $t = 46$  мин температура на оси вала  $T_{\text{ц}}$ .

Определить также количество тепла  $Q_t$ , которое будет в течение этого времени отдано окружающей среде от  $l = 1$  м вала.

**Р е ш е н и е.**

Температуру на оси вала находим при помощи графика, рассмотренного на рис. 7.6,  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = f_1(\text{Bi}, \text{Fo})$  для цилиндра, откуда следует, что при  $\text{Bi} = 0,658$  и  $\text{Fo} = 0,8$  безразмерная температура  $\bar{\vartheta}_{\text{ц}}$  равна:

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,46.$$

Следовательно,  $T_{\text{ц}} = \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(T_0 - T_{\text{ср}}) + T_{\text{ср}} = 0,46(800 - 20) + 20 = 379 \text{ }^\circ\text{C}.$

Для определения количества тепла  $Q_t$  воспользуемся графиком  $Q_t/Q_0 = f(\text{Bi}, \text{Fo})$ , представленным на рис. 7.6. При указанных значениях критерия Био и числа Фурье относительное изменение теплосодержания вала оказывается равным  $Q_t/Q_0 \approx 0,6.$

Полное количество тепла  $Q_o$ , которое должно быть отдано 1 м вала по достижении теплового равновесия с окружающей средой, найдем по формуле:

$$Q_o = \pi R_0^2 \rho C_p (T_0 - T_{cp}) = 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 7800 \cdot 502 (800 - 20) = \\ = 396 \cdot 10^6 \text{ Дж/м} = 396 \cdot 10^3 \text{ кДж/м}.$$

Следовательно,  $Q_t \cong 0,6 Q_o = 0,6 \cdot 396 \cdot 10^3 = 238 \cdot 10^3 \text{ кДж/м}.$

4. Лист алюминия толщиной  $2\delta = 20 \text{ мм}$ , прогретый до температуры  $T_o = 500^\circ\text{C}$ , помещен в воздушную среду, температура которой  $T_{cp} = 20^\circ\text{C}$ .

Определить промежуток времени  $t$ , по истечении которого лист примет температуру, отличающуюся не более чем на 1 % от температуры окружающей среды.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности алюминия равны соответственно:  $\lambda = 203 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $a = 8,32 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи от поверхности листа к окружающему воздуху  $\alpha = 60 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

**Р е ш е н и е.**

Определяем значение критерия Био:

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} = \frac{60 \cdot 0,01}{203} = 2,96 \cdot 10^{-3} \ll 0,1.$$

Так как  $Bi \ll 0,1$ , то можно температуру во всех точках сечения листа считать одинаковой и воспользоваться предельным законом (7.8):

$$\bar{\vartheta} = \exp(-Bi \cdot Fo) = \exp\left[-Bi \left(\frac{at}{\delta^2}\right)\right].$$

Из этого уравнения находим:

$$t = -\frac{\delta^2 \ln \bar{\vartheta}}{a \cdot Bi} = -\frac{0,01^2 \cdot 2,303 \lg \frac{20,2 - 2}{500 - 20}}{8,32 \cdot 10^{-5} \cdot 2,96 \cdot 10^{-3}} = 3190 \text{ с} = 53,2 \text{ мин}.$$

5. Слиток из хромоникелевой стали (18% Cr, 8% Ni) в форме параллелепипеда размерами  $300 \times 500 \times 800 \text{ мм}$ , имеющий

начальную температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещен для нагрева в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 1200^\circ\text{C}$ .

Определить температуру  $T_{\text{ц}}$  в центре слитка через  $t = 2$  ч после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:  $\lambda = 16,0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $a = 4,57 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи на поверхности слитка  $\alpha = 160 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

**Р е ш е н и е.**

Для определения температуры  $T_{\text{ц}}$  в центре параллелепипеда воспользуемся уравнением (7.10 а):

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}}(x, y, z, t) = \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(x, t) \cdot \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(y, t) \cdot \bar{\vartheta}_{\text{ц}}(z, t),$$

причем безразмерные температуры в средней плоскости каждой пластины, описываемые уравнениями:

$$\bar{\vartheta}_{\text{цх}} = f_1(\text{Bi}_x, \text{Fo}_x);$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{цy}} = f_2(\text{Bi}_y, \text{Fo}_y);$$

$$\bar{\vartheta}_{\text{цz}} = f_3(\text{Bi}_z, \text{Fo}_z),$$

найдем из графика, представленного на рис. 7.2.

Вычисляем значения критериев Био и Фурье для каждой пластины и, пользуясь указанным графиком, находим для них безразмерные температуры:

$$\text{Bi}_x = \frac{\alpha \delta_x}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,15}{16} = 1,5 \text{ и } \text{Fo}_x = \frac{at}{\delta_x^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,15^2} = 1,46,$$

откуда  $\bar{\vartheta}_{\text{цх}} = 0,28$ ;

$$\text{Bi}_y = \frac{\alpha \delta_y}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,25}{16} = 2,5 \text{ и } \text{Fo}_y = \frac{at}{\delta_y^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,25^2} = 0,527,$$

откуда  $\bar{\vartheta}_{\text{цy}} = 0,6$ ;

$$\text{Bi}_z = \frac{\alpha \delta_z}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,4}{16} = 4,0 \text{ и } \text{Fo}_z = \frac{at}{\delta_z^2} = \frac{4,57 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600}{0,4^2} = 0,206,$$



откуда  $\bar{\vartheta}_{\text{цз}} = 0,9$ .

Подставляя полученные величины в выражение (7.10 а), получаем

$$\bar{\vartheta}_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}} = 0,28 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 0,151.$$

Следовательно, температура в центре слитка равна

$$T_{\text{ц}} = T_{\text{ср}} - \vartheta_{\text{ц}}(T_{\text{ср}} - T_0) = 1200 - 0,151(1200 - 20) = 1022^\circ\text{C}.$$

6. Два листа стали, имеющие начальную температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  свариваются вместе посредством заливания расплавленного металла между ними. Температура, поддерживаемая на торцах листов в процессе сварки,  $T_{\text{п}} = 1500^\circ\text{C}$ .

Считая, что температура  $T_{\text{п}}$  устанавливается внезапно, и пренебрегая потерями тепла с поверхности листов, определить температуру на расстоянии  $x = 10$  мм от торца листа через  $t = 20$  с после начала сварки.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали соответственно равны:  $\lambda = 46,3$  Вт/(м·К);  $C_p = 478$  Дж/(г·К) и  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Р е ш е н и е.

Для расчета воспользуемся уравнением (7.11), описывающим температурное поле в полуограниченном теле:

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_{\text{п}}}{T_0 - T_{\text{п}}} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right).$$

Вычисляем коэффициент температуропроводности:

$$a = \frac{\lambda}{C_p \rho} = \frac{46,3}{478 \cdot 7800} = 12,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Определяем значение аргумента функции ошибок Гаусса

$$z = \frac{x}{2\sqrt{at}} = \frac{0,01}{2\sqrt{12,4 \cdot 10^{-6} \cdot 20}} = 0,315.$$

По таблице функции ошибок Гаусса находим, что этому значению аргумента отвечает функция, равная 0,344. Следовательно,

$$\frac{T - T_{\text{п}}}{T_0 - T_{\text{п}}} = 0,344.$$

Откуда  $T = T_{\text{п}} - 0,344(T_{\text{п}} - T_0) = 1500 - 0,344(1500 - 20) = 992 \text{ } ^\circ\text{C}.$

7. По условиям предыдущего примера определить расход тепла  $Q_t$  через  $1 \text{ м}^2$  торца листа за время  $t = 20 \text{ с}$  после начала сварки.

Р е ш е н и е.

Определяем коэффициент теплоусвоения:

$$b = \sqrt{\lambda C_p \rho} = \sqrt{46,3 \cdot 478 \cdot 7800} = 13,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}^{1/2}).$$

Пользуясь уравнением (7.12), находим

$$Q_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} b (T_{\text{п}} - T_0) \sqrt{t} = \frac{2 \cdot 13,2 \cdot 10^3 (1500 - 20) \sqrt{20}}{\sqrt{3,14}} = 98,5 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{м}^2.$$

8. Шар из плавленного кварца радиусом  $10 \text{ см}$ , имеющий начальную температуру  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ , помещен в среду с температурой  $T_{\text{ср}} = 120^\circ\text{C}$ . Найти время  $t$ , за которое его температура понизится до  $T_2 = 130^\circ\text{C}$ , если охлаждение протекает в регулярном режиме.

Коэффициент температуропроводности плавленного кварца  $a = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}.$

Р е ш е н и е.

Определим коэффициент формы шара:

$$k_{\text{ф}} = \left( \frac{R_0}{\pi} \right)^2 = \left( \frac{10}{\pi} \right)^2 = 10 \text{ см}^2 = 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Темп охлаждения шара:  $m = \frac{a}{k_{\text{ф}}} = \frac{3 \cdot 10^{-7}}{10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} 1/\text{с}.$

Время охлаждения составит:

$$t = \frac{1}{m} \ln \frac{T_1 - T_{\text{ср}}}{T_2 - T_{\text{ср}}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{300 - 120}{130 - 120} = 6940 \text{ с} = 1,93 \text{ ч}.$$

9. Углерод диффундирует в  $\beta$ -цирконий при температуре  $1600^\circ\text{C}$  из источника с постоянной концентрацией углерода 3 % атом. Через какое время концентрация углерода на расстоянии 1 мм от поверхности станет равной 0,3 % атом. Коэффициент диффузии углерода в  $\beta$ -цирконии при указанной температуре составляет  $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Р е ш е н и е.

В рассматриваемой задаче первоначальная концентрация углерода в цирконии равна нулю, поэтому формула (7.15), описывающая распределение концентрации по глубине твердого тела, принимает вид:

$$-\frac{C - C_{\Pi}}{C_{\Pi}} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right),$$

отсюда 
$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) = 1 - \frac{C}{C_{\Pi}} = 1 - 0,1 = 0,9.$$

По таблице функции ошибок Гаусса находим, что значению функции 0,9 соответствует значение аргумента 1,17, следовательно,

$$\frac{x}{2\sqrt{Dt}} = 1,17.$$

Таким образом, имеем:

$$t = \frac{x^2}{1,17^2 \cdot 4D} = \frac{(10^{-3})^2}{1,17^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^{-10}} = 608 \text{ с} \cong 10 \text{ мин.}$$

### З А Д А Ч И

7.1. Стальная пластина толщиной  $2\delta = 80 \text{ мм}$ , имеющая температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещена в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 1000^\circ\text{C}$ .

Определить время нагрева  $t$ , необходимое для того, чтобы температура в средней плоскости пластины достигла величины  $T_{\text{ц}} = 800^\circ\text{C}$ .

Определить также температуру  $T_{\text{п}}$  на поверхности пластины в конце нагрева.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно:  $\lambda = 40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $C_p = 445 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ;  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины  $\alpha = 120 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

7.2. Определить количество тепла  $Q$ , воспринятого  $1 \text{ м}^2$  поверхности пластины, описанной в задаче 7.1, за найденное по условиям этой задачи время нагрева.

7.3. Для условий задачи 7.1 определить значения температур в средней плоскости и на поверхности пластины через  $t = 20$  мин после начала нагрева.

7.4. Стальная пластина толщиной  $2\delta = 200 \text{ мм}$ , имевшая температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , была помещена в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 1000^\circ\text{C}$ .

Определить температуру пластины в ее средней плоскости  $T_{\text{ц}}$  и на поверхности  $T_{\text{п}}$  через  $t = 1,5 \text{ ч}$  после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:  $\lambda = 45,7 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $a = 10,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины  $\alpha = 160 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

7.5. Используя условия задачи 7.4, определить промежуток времени  $t$ , по истечении которого температура на поверхности пластины достигнет величины  $T_{\text{п}} = 980^\circ\text{C}$ .

Определить также температуру  $T_{\text{ц}}$  в средней плоскости пластины в конце нагрева.

7.6. Длинный стальной вал диаметром  $2R_0 = 300 \text{ мм}$ , нагретый до температуры  $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ , помещен для охлаждения в воздушную среду с температурой  $T_{\text{ср}} = 20^\circ\text{C}$ .

Рассчитать температуру на оси вала для интервалов времени  $t = 0,5, 1, 2$  и  $3 \text{ ч}$  после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно  $\lambda = 48,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $C_p = 511 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ;  $\rho = 7860 \text{ кг/м}^3$ . Коэффициент теплоотдачи с поверхности вала в процессе охлаждения остается постоянным и равным  $\alpha = 150 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

7.7. Для условий задачи 7.6 определить количество тепла, отданное окружающей среде 1 м вала в процессе охлаждения за указанные промежутки времени.

7.8. Длинный стальной цилиндр диаметром  $2R_0 = 360 \text{ мм}$ , имеющий температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещен в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 800^\circ\text{C}$ .

Определить температуру цилиндра на его оси  $T_{\text{ц}}$  и на поверхности  $T_{\text{п}}$  через  $t = 1 \text{ ч}$  после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно:  $\lambda = 40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $a = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент теплоотдачи на поверхности цилиндра  $\alpha = 120 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

7.9. По условиям задачи 7.8 определить время  $t$ , в течение которого температура поверхности цилиндра достигнет величины  $T_{\text{п}} = 780^\circ\text{C}$ . Определить также температуру  $T_{\text{ц}}$  на оси цилиндра в конце нагрева.

7.10. Определить время  $t$ , необходимое для нагрева листа меди толщиной  $2\delta = 40 \text{ мм}$  до  $600^\circ\text{C}$ .

Лист имел начальную температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  и был помещен в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 750^\circ\text{C}$ . Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности меди равны соответственно:  $\lambda = 395 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ;  $a = 1,164 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент теплоотдачи на поверхности листа  $\alpha = 60 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$ .

**Указание:** Так как при данных условиях  $Bi \ll 0,1$ , то можно для расчета воспользоваться предельным законом:  $\bar{\vartheta} = \exp(-Bi \cdot Fo)$ .

7.11. Длинный прямоугольный стержень из углеродистой стали размерами  $80 \times 160$  мм помещен в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 1200^\circ\text{C}$ .  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Определить температуру на оси стержня  $T_{x=0,y=0}$  и на осевых линиях его граней  $\left( T_{x=\delta_x,y=0} \text{ и } T_{x=0,y=\delta_y} \right)$  через  $t = 25$  мин после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:  $\lambda = 53,3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $a = 14,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи на поверхности стержня  $\alpha = 160 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

7.12. Используя условия предыдущей задачи, найти температуру  $T_{x=\delta_x,y=\delta_y}$  на ребрах стержня.

7.13. Стальной брусок размерами  $160 \times 240 \times 800$  мм, нагретый до температуры  $T_0 = 850^\circ\text{C}$ , погружен в масляную ванну, имеющую температуру  $T_{\text{ср}} = 60^\circ\text{C}$ .

Определить температуру  $T_{x=0,y=0,z=0}$  в центре бруска через 30 мин после начала охлаждения.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:  $\lambda = 57 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $a = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент теплоотдачи на поверхности бруска  $\alpha = 600 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

7.14. При условиях охлаждения стального бруска, указанных в задаче 7.13, определить температуры  $T_{x=\delta_x,y=0,z=0}$ ;  $T_{x=0,y=\delta_y,z=0}$  и  $T_{x=0,y=0,z=\delta_z}$  в середине граней бруска.

7.15. Болванка из алюминиевой бронзы (95 % Cu, 5 % Al) цилиндрической формы диаметром  $2R_0 = 200$  мм и длиной  $2\delta = 400$  мм, имеющая температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещена в печь с температурой  $T_{\text{ср}} = 800^\circ\text{C}$ .

Определить температуру  $T_{x=0,R=0}$  в центре болванки и  $T_{x=\delta,R=0}$  в середине торцевой поверхности через  $t = 30$  мин после начала нагрева.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:  $\lambda = 82,5 \text{ Вт/(м·К)}$ ;  $a = 23,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Коэффициент теплоотдачи на поверхности болванки  $\alpha = 116 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

7.16. Графитовый блок в форме параллелепипеда размерами  $400 \times 600 \times 800 \text{ мм}$ , нагретый до температуры  $T_0 = 1000^\circ\text{C}$ , охлаждается на воздухе, который имеет температуру  $T_{\text{ср}} = 20^\circ\text{C}$ .

Определить температуру  $T_{\text{ц}}$  в центре блока через  $t = 1 \text{ ч}$  после начала охлаждения.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности графита равны соответственно:  $\lambda = 144,5 \text{ Вт/(м·К)}$ ;  $a = 110 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Коэффициент теплоотдачи на поверхности блока  $\alpha = 130 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ .

7.17. При условиях охлаждения графитового блока, указанных в задаче 7.16, определить температуры  $T_{x=\delta_x, y=0, z=0}$  ;

$T_{x=0, y=\delta_y, z=0}$  и  $T_{x=0, y=0, z=\delta_z}$  в середине граней блока.

7.18. Поверхность стального слитка, равномерно нагретого до температуры  $T_0 = 700^\circ\text{C}$ , внезапно охлаждена до  $T_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$ . Рассматривая температурное поле в слитке как одномерное, определить температуру на глубине  $x = 200 \text{ мм}$  от поверхности через  $t = 1 \text{ ч}$  после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность стали равны соответственно:  $\lambda = 48,5 \text{ Вт/(м·К)}$ ;  $C_p = 511 \text{ Дж/(кг·К)}$ ;  $\rho = 7860 \text{ кг/м}^3$ .

7.19. При условиях охлаждения стального слитка, рассмотренных в задаче 7.18, определить количество тепла  $Q_t$ , отданное  $1 \text{ м}^2$  поверхности слитка, за время охлаждения.

7.20. По условиям задачи 7.18 определить время, в течение которого температура на глубине  $x = 200$  мм от поверхности слитка понизится до  $50^\circ\text{C}$ .

7.21. Одна из сторон толстой асбестовой пластины, имеющей начальную температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , внезапно нагрета до  $T_{\text{п}} = 800^\circ\text{C}$ . Определить температуру на расстоянии  $x = 10$  мм от поверхности через 1 ч после начала нагрева.

Коэффициент температуропроводности асбеста  $a = 2,54 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ .

7.22. Используя условия задачи 7.21, определить расстояние  $x$  от поверхности асбестовой пластины, на котором через  $t = 10$  мин после начала нагрева температура повысится не более чем на 1 % от ее начального значения.

7.23. Определить температуру по оси длинного асбоцементного цилиндра радиусом  $R_0 = 9,62$  см после двадцатиминутного охлаждения в среде с температурой  $T_{\text{ср}} = 20^\circ\text{C}$  по регулярному режиму. Начальная температура цилиндра  $T_0 = 200^\circ\text{C}$ .

Теплофизические свойства асбоцемента: теплопроводность  $\lambda = 0,26 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , теплоемкость  $C_p = 0,838 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , плотность  $\rho = 1300 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

7.24. Цилиндрический слиток германия с начальной температурой  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  нагревается в среде с постоянной температурой  $T_{\text{ср}} = 150^\circ\text{C}$ , обеспечивающей изменение температуры в регулярном режиме. Определить время  $t$  нагрева слитка до температуры  $T = 145^\circ\text{C}$ . Размеры слитка: радиус  $R_0 = 4,81$  см, высота  $h = 31,4$  см.

Теплофизические свойства германия: теплопроводность  $\lambda = 60 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ , теплоемкость  $C_p = 0,419 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , плотность  $\rho = 5320 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

7.25. Испаритель с жидким четыреххлористым кремнием (радиус  $R_0 = 2,405$  см, высота  $h = 12,56$  см) с начальной температурой  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  опускается в термостат с температурой  $T_{\text{ср}} = 0^\circ\text{C}$ . Через какое время  $t$  его температура будет отличаться от темпера-



туры термостата на  $0,5^{\circ}\text{C}$ ? Теплофизические свойства четыреххлористого кремния:

$$\lambda = 0,12 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}, C_p = 0,85 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}, \rho = 1500 \text{ кг/м}^3.$$

7.26. Шамотный тигель сложной конфигурации охлаждается в регулярном режиме с темпом изменения температуры  $m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$ .

Определить коэффициент формы тигля, если шамот обладает следующими теплофизическими свойствами: теплопроводность  $\lambda = 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{K}$ , теплоемкость  $C_p = 0,84 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$ , плотность  $\rho = 950 \text{ кг/м}^3$ .

7.27. Пластина из талькохлорита толщиной  $2\delta = 2 \text{ см}$  охлаждается в регулярном режиме в среде с температурой  $T_{\text{ср}} = 0^{\circ}\text{C}$ .

Определить коэффициент теплопроводности талькохлорита  $\lambda$ , если за 12,8 мин его температура изменилась от  $400$  до  $300^{\circ}\text{C}$ .

Считать пластину неограниченной. Теплоемкость талькохлорита  $C_p = 1 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{K)}$ , а его плотность  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ .

7.28. Два нагретых шаровых слитка радиусом  $R_0 = 10 \text{ см}$ , один из меди, другой из сурьмы, охлаждаются в среде, обеспечивающей коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 10 \text{ кВт/(м}^2\cdot\text{K)}$ . Считая условием наступления регулярного режима величину  $Bi > 50$ , определить, для какого материала в указанных условиях справедлива теорема Кондратьева. Теплопроводности меди и сурьмы соответственно равны  $420$  и  $15 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$ .

7.29. Коэффициент диффузии урана в графите при  $1800^{\circ}\text{C}$  составляет  $3,14 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2/\text{с}$ .

Определить количество урана, переходящее в графит через  $1 \text{ см}^2$  поверхности за час, если диффузия происходит из источника с постоянной концентрацией урана, равной  $10 \text{ мг/см}^3$ .

7.30. На толстой пластинке кремния создан источник бора с постоянной концентрацией  $10^{21} \text{ атом./см}^3$ . Пластика подвергается диффузионному отжигу в течение одного часа при  $1300^{\circ}\text{C}$ .

Определить коэффициент диффузии бора в кремнии при этой температуре, если после отжига концентрация бора на расстоянии  $x = 10$  мкм от поверхности составляет  $10^{18}$  атом./см<sup>3</sup>.

7.31. Галлий диффундирует в толстую пластинку кремния при температуре 1100°C в течение трех часов. Какова концентрация галлия на расстоянии  $x = 4$  мкм от поверхности, если коэффициент диффузии галлия в кремнии при этой температуре  $D = 7 \cdot 10^{-17}$  м<sup>2</sup>/с, а поверхностная концентрация галлия поддерживается постоянной, равной  $10^{18}$  атом./см<sup>3</sup>.

7.32. Фосфор диффундирует в слиток кремния из источника с постоянной концентрацией  $10^{21}$  атом./см<sup>3</sup>. Определить количество атомов фосфора, проникающих в кремний через 1 см<sup>2</sup> поверхности за 31,4 мин, если диффузия происходит при температуре 1250°C, при которой коэффициент диффузии фосфора в кремнии  $D = 1 \cdot 10^{-14}$  м<sup>2</sup>/с. Начальная концентрация фосфора в кремнии составляет  $10^{20}$  атом./см<sup>3</sup>.

## 8. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Процессы конвективного теплообмена имеют место в потоке жидкости (или газа) и всегда протекают совместно с молекулярным теплопереносом (теплопроводностью).

В зависимости от причины, которой обусловлено движение жидкости, различают *вынужденную конвекцию и свободную (или естественную)*.

Тепловой поток при конвективном теплообмене между жидкостью (теплоносителем) и поверхностью твердого тела (стенкой) определяется по закону Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha(T_{\text{ср}} - T_{\text{п}}), \quad (8.1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена (теплоотдачи), Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $T_{\text{п}}$  ( $T_{\text{с}}$ ) и  $T_{\text{ср}}$  ( $T_{\text{ж}}$ ) – температуры поверхности твердого тела (стенки) и жидкости (теплоносителя).

Основная трудность расчета конвективной теплоотдачи, с учетом уравнения (8.1), заключается в определении коэффициента  $\alpha$ .

Во многих случаях коэффициент теплоотдачи определяют с помощью эмпирических формул, полученных путем статистической обработки экспериментальных данных, с использованием методов, разработанных в теории подобия (см. разд. 7).

Проведенный анализ в теории подобия позволил найти решение уравнений конвективного теплообмена, представив его как уравнение подобия, где коэффициент теплообмена представлен в безразмерной форме в виде критерия Нуссельта (Nu):

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} \cdot l}{\lambda_{\text{ж}}} = f(\text{Re}_{\text{ж}}, \text{Pr}_{\text{ж}}), \quad (8.2)$$

где  $\alpha_{\text{ср}}$  – среднее значение коэффициента теплоотдачи;  $\text{Re} = \frac{vl}{\nu_{\text{ж}}}$  и

$\text{Pr}_{\text{ж}} = \frac{\nu_{\text{ж}}}{a_{\text{ж}}}$  – критерии Рейнольдса и Прандтля;  $\lambda_{\text{ж}}, \nu_{\text{ж}}, a_{\text{ж}}$  –

соответственно теплопроводность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости (теплоносителя).

С использованием теории пограничного слоя было найдено аналитическое решение дифференциальных уравнений конвективного теплообмена. Так, в случае вынужденной конвекции (появление потока жидкости обусловлено действием внешних сил), с учетом анализа многочисленных опытных данных, для расчета числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи  $\alpha_{\text{ср}}$  предложено следующее уравнение:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = \frac{\alpha_{\text{ср}} l}{\lambda} = B \text{Re}_{\text{ж}}^n \text{Pr}_{\text{ж}}^m \text{Gr}_{\text{ж}}^{0,1} \left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_{\text{с}}} \right)^{0,25}, \quad (8.3)$$

где  $Gr_{ж} = \frac{g\beta_T \Delta T l^3}{\nu_{ж}^2}$  – критерий Грасгофа;  $\beta_T$  – температурный

коэффициент объемного расширения (для газов:  $\beta_T = \frac{1}{T}$ );

$\Delta T$  – температурный напор между жидкой средой и поверхностью теплообмена.

При этом множитель  $Gr_{ж}^{0,1}$  в расчетах используется только при ламинарном движении жидкости в трубах или обтекании пластины.

В табл. 8.1 приведены значения коэффициентов  $B$ ,  $n$  и  $m$  в зависимости от вида движения жидкости и его гидродинамических характеристик.

В случае свободной конвекции (при движении теплоносителя за счет разности плотности нагретых и холодных объемов жидкости) расчет числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи проводится по формуле:

$$Nu_{ср} = A (Gr_{ж} Pr_{ж})^n \left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{с}} \right)^{0,25}. \quad (8.4)$$

Если в качестве теплоносителя служит поток газа, значения критериев Прандтля  $Pr_{ж}$  и  $Pr_{с}$  близки, поэтому в уравнениях (8.3) и

(8.4) можно принять их отношение  $\left( \frac{Pr_{ж}}{Pr_{с}} \right)^{0,25} \approx 1,0$ .

## П Р И М Е Р Ы

1. Плоская пластина длиной  $l = 2$  м и шириной  $b = 1,0$  м, имеющая температуру  $T_c = 50^\circ\text{C}$ , омывается с обеих сторон продольным потоком воздуха, скорость и температура которого соответственно равны  $v = 3$  м/с и  $T_{ж} = 10^\circ\text{C}$ . Физические параметры воздуха при этой температуре:

$\nu = 14,16 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 2,51 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К) и  $a = 20,0 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

**Т а б л и ц а    8.1**  
**Значения коэффициентов  $B$ ,  $n$  и  $m$  в зависимости от вида**  
**движения жидкости**

Вид движения жидкости (теплоносителя)	$B$	$n$	$m$
Ламинарное движение около горизонтальной пластины	0,664	0,5	0,33
Турбулентное движение около горизонтальной пластины	0,037	0,8	0,43
Ламинарное движение в трубе	0,15	0,33	0,43
Турбулентное движение в трубе	0,021	0,8	0,43
Поперечное обтекание трубы ( $5 < Re_{ж} < 10^3$ )	0,5	0,5	0,38
Поперечное обтекание трубы ( $10^3 < Re_{ж} < 2 \cdot 10^5$ )	0,25	0,6	0,38
Поперечное обтекание коридорных пучков труб	0,26	0,65	0,33
Поперечное обтекание шахматных пучков труб	0,41	0,6	0,33

В табл. 8.2 приведены значения величин  $A$  и  $m$  для различных условий теплообмена (свободная конвекция).

**Т а б л и ц а    8.2**  
**Значения величин  $A$  и  $m$  для различных условий теплообмена**

Вид поверхности	$A$	$m$	$Gr_{ж} Pr_{ж}$
Горизонтальные трубы: ламинарный режим	0,5	0,25	$10^3 < Gr_{ж} Pr_{ж} < 10^8$
Вертикальные трубы и плоские вертикальные поверхности:			
ламинарный режим	0,76	0,25	$10^3 < Gr_{ж} Pr_{ж} < 10^9$
турбулентный режим	0,15	0,33	$Gr_{ж} Pr_{ж} > 10^9$

Определить средний коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{ср}}$  и количество тепла  $Q$ , отдаваемое пластиной потоку воздуха за 1 с.

**Р е ш е н и е.**

Определяем значения критериев Прандтля, Рейнольдса и Грасгофа:

$$\text{Pr}_{\text{ж}} = \frac{\nu}{a} = \frac{14,16 \cdot 10^{-6}}{20,0 \cdot 10^{-6}} = 0,708;$$

$$\text{Re}_{\text{ж}} = \frac{vl}{\nu} = \frac{3 \cdot 2}{14,16 \cdot 10^{-6}} = 4,23 \cdot 10^5 < \text{Re}_{\text{кр}} = 5 \cdot 10^5.$$

$$\text{Gr}_{\text{ж}} = \frac{g\beta_{\text{T}}\Delta T l^3}{\nu^2} = \frac{9,8 \cdot 1/283 \cdot 40 \cdot 2^3}{14,16 \cdot 10^{-6}} = 7,83 \cdot 10^5$$

Следовательно, течение в пограничном слое можно рассматривать как ламинарное.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи определяем по формуле (8.3):

$$\alpha_{\text{ср}} = 0,66 \frac{\lambda}{l} \text{Re}_{\text{ж}}^{1/2} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} \text{Gr}_{\text{ж}}^{0,1} = 0,66 \cdot \frac{2,51 \cdot 10^{-2}}{2} \times \\ \times (4,23 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0,708^{0,43} \cdot (7,83 \cdot 10^5)^{0,1} = 70,06 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Количество тепла, передаваемого воздуху обеими сторонами пластины, за 1 с составит:

$$Q = \alpha_{\text{ср}} (T_{\text{с}} - T_{\text{ж}}) 2lb = 70,06 \cdot (50 - 10) \cdot 4 = 11,2 \text{ кВт}.$$

2. Температура поверхности вертикальной стенки высотой 3 м равна 10 °С. Температура воздуха в помещении 20 °С. Определить коэффициент теплоотдачи от воздуха к стенке.

**Р е ш е н и е.**

Теплообмен осуществляется в условиях свободной конвекции.

Определяем значение критериев  $\text{Gr}_{\text{ж}}$  и  $\text{Pr}_{\text{ж}}$ :

$$\text{Gr}_{\text{ж}} = \frac{g\beta_{\text{T}}\Delta T l^3}{\nu_{\text{ж}}^2} = \frac{9,81 \cdot 10 \cdot 3^3}{293 \cdot (15,06 \cdot 10^{-6})^2} = 3,98 \cdot 10^{10};$$

$$\text{Pr}_{\text{ж}} = 0,701; \text{Gr}_{\text{ж}} \cdot \text{Pr}_{\text{ж}} = 2,79 \cdot 10^{10}.$$

Как следует из табл. 8.2, режим движения воздуха турбулентный. Определяем коэффициент теплоотдачи:

$$\text{Nu}_{\text{ср,ж}} = 0,15(\text{Gr}_{\text{ж}} \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,33} = 0,15 \cdot (2,79 \cdot 10^{10})^{0,33} = 423;$$

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ж}} \lambda_{\text{ж}}}{h} = \frac{423 \cdot 0,02593}{3} = 3,66 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

3. Отопление помещения производится горизонтальным трубопроводом с наружным диаметром 25 мм, обогреваемым конденсирующимся паром. Температура наружной поверхности трубопровода  $T_{\text{с}} = 104^{\circ}\text{C}$ , температура в помещении  $T_{\text{ж}} = 22^{\circ}\text{C}$ . Определить необходимую длину трубопровода, если расчетная мощность отопительной системы 1,5 кВт.

Р е ш е н и е.

Теплоотдача горизонтальной трубы при свободной конвекции определяется зависимостью:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,5(\text{Gr}_{\text{ж}} \text{Pr}_{\text{ж}})^{0,25}.$$

Для воздуха, когда критерий Прандтля изменяется незначительно, расчет теплообмена можно производить по более простой формуле:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,47 \text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25}.$$

Критерий Грасгофа определяется по температуре омывающей жидкости вдали от стенки трубы:

$$\text{Gr}_{\text{ж}} = \frac{g \beta_{\text{т}} \Delta T h^3}{\nu_{\text{ж}}^2} = \frac{9,81 \cdot 82 \cdot 0,025^3}{295 \cdot (15,15 \cdot 10^{-6})^2} = 1,86 \cdot 10^5;$$

$$\text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25} = (1,86 \cdot 10^5)^{0,25} = 20,7;$$

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,47 \text{Gr}_{\text{ж}}^{0,25} = 0,47 \cdot 20,7 = 9,74;$$

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ср}} \lambda_{\text{ж}}}{d} = \frac{9,74 \cdot 0,0261}{0,025} = 10,17 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

Требуемая поверхность теплообмена определяется из уравнения:

$$S = \frac{Q}{\alpha_{\text{ср}} \Delta T} = \frac{1500}{10,17 \cdot 82} = 1,8 \text{ м}^2.$$

Поверхность 1 м трубы:

$$s = 3,14 \cdot 0,025 \cdot 1 = 0,0785 \text{ м}^2.$$

Необходимая длина отопительного трубопровода:

$$L = \frac{S}{s} = \frac{1,8}{0,0785} = 22,9 \text{ м}.$$

4. Определить коэффициент теплоотдачи от воды к внутренней стенке трубы диаметром 17 мм, если температура стенки  $T_c = 30^\circ\text{C}$ , а температура воды в трубе  $T_{\text{ж}} = 60^\circ\text{C}$ . Скорость воды в трубе  $v = 0,5 \text{ м/с}$ .

Р е ш е н и е.

Определим критерий Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{ж}} = \frac{vl}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{0,5 \cdot 0,017}{0,478 \cdot 10^{-6}} = 17800 \gg \text{Re}_{\text{кр}} \cong 2300.$$

Так как режим движения турбулентный, то расчет теплообмена производится по формуле:

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,021 \text{Re}_{\text{ж}}^{0,8} \text{Pr}_{\text{ж}}^{0,43} \left( \frac{\text{Pr}_{\text{ж}}}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}.$$

При  $T_{\text{ж}} = 60^\circ\text{C}$ :  $\text{Pr}_{\text{ж}} = 2,98$  и  $\lambda_{\text{ж}} = 65,9 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ , а при  $T_c = 30^\circ\text{C}$ :  $\text{Pr}_c = 5,42$ .

$$\text{Nu}_{\text{ср}} = 0,021 \cdot 17800^{0,8} \cdot (2,98)^{0,43} \cdot \left( \frac{2,98}{5,42} \right)^{0,25} = 72,6.$$

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{\text{Nu}_{\text{ср}} \cdot \lambda_{\text{ж}}}{d} = \frac{72,6 \cdot 0,659}{0,017} = 2810 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}.$$

5. Труба диаметром 100 мм охлаждается поперечным потоком воды со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$ . Температура воды  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ .



Температура стенки трубы  $T_c = 50^\circ\text{C}$ .  $\text{Pr}_c = 3,54$ . Определить коэффициент теплоотдачи и значение теплового потока  $q_l$ .

Свойства воды при данной температуре:

$$\nu = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda = 0,6 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; a = 14,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}.$$

**Р е ш е н и е.**

Определим критерий Рейнольдса:

$$\text{Re}_ж = \frac{\nu d}{\nu_ж} = \frac{1 \cdot 0,1}{1,006 \cdot 10^{-6}} \cong 10^5 > 10^3.$$

При этих условиях расчет теплообмена для поперечного обтекания трубы, с учетом табл.8.1, производится по формуле:

$$\text{Nu}_{cp} = 0,25 \text{Re}_ж^{0,6} \text{Pr}_ж^{0,38} \left( \frac{\text{Pr}_ж}{\text{Pr}_c} \right)^{0,25}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{cp} &= 0,25(10^5)^{0,6} \left( \frac{10^{-6}}{14,3 \cdot 10^{-8}} \right)^{0,38} \left( \frac{6,99}{3,54} \right)^{0,25} = \\ &= 0,25 \cdot 10 \cdot 2,094 \cdot 5,096 = 26,68. \end{aligned}$$

$$\alpha_{cp} = \text{Nu}_{cp} \cdot \frac{\lambda}{d} = 26,68 \frac{0,6}{0,1} = 160,1 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}.$$

$$q_l = \alpha_{cp} (T_c - T_ж) \cdot \pi d = 160,1 \cdot 30 \cdot 3,14 \cdot 0,1 = 1508,1 \text{ Вт/м}.$$

### З А Д А Ч И

8.1. Плоская пластина длиной  $l = 1,5 \text{ м}$  и шириной  $b = 0,8 \text{ м}$  обтекается с обеих сторон продольным потоком воздуха, скорость и температура которого соответственно равны  $\nu = 4 \text{ м/с}$ ,  $T_ж = 20^\circ\text{C}$ . Температура поверхности пластины  $T_c = 60^\circ\text{C}$ .

Определить количество тепла  $Q$  отдаваемое пластиной воздуху. Физические параметры воздуха при  $20^\circ\text{C}$ :

$$\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, \quad a = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

8.2. Как изменится для условий задачи 8.1 количество тепла, отдаваемое пластиной, если обтекающий ее поток воздуха направить вдоль ширины пластины ?

8.3. Во сколько раз увеличится количество тепла  $Q$ , отдаваемое пластиной воздуху, если, сохранив неизменными условия задачи 8.1, установить впереди пластины турбулизирующую решетку, под влиянием которой ламинарный режим течения перейдет в турбулентный ?

8.4. Плоская пластина длиной  $l = 1,2$  м обтекается продольным потоком воздуха со скоростью  $v = 2$  м/с. Температура воздуха  $T = 10^\circ\text{C}$ .  $T_c = 50^\circ\text{C}$ . Физические параметры воздуха при этой температуре:

$$\nu = 14,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda = 2,51 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; a = 20,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Определить средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{ср}}$ .

8.5. Как изменится средний коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{ср}}$  в условиях предыдущей задачи, если скорость набегающего потока воздуха увеличить в 2,5 и 10 раз ?

**Указание:** Для второго случая принять, что по всей длине пластины режим течения в пограничном слое турбулентный.

8.6. Плоская пластина длиной  $l = 2$  м и шириной  $b = 0,8$  м омывается с обеих сторон потоком воды со скоростью  $v = 2$  м/с. Температура поверхности пластины  $T_c = 80^\circ\text{C}$ , температура воды  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ .

Физические параметры воды при указанных температурах имеют следующие значения:

$T, ^\circ\text{C}$	$\nu \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	$\lambda \cdot 10^2, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$	$a \cdot 10^8, \text{ м}^2/\text{с}$
20	1,006	59,9	14,3
80	0,365	67,4	16,6

Полагая режим движения в пограничном слое вдоль всей пластины турбулентным, определить средний коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{ср}}$  и количество тепла  $Q$ , отдаваемое пластиной воде.

8.7. Вертикальный неизолированный трубопровод диаметром 76 мм и высотой 4 м омывается воздухом, средняя температура которого  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ . Температура поверхности трубопровода  $T_{\text{с}} = 60^\circ\text{C}$ . Определить потерю теплоты трубопроводом.

8.8. Определить потерю теплоты в окружающую среду конвективным теплообменом от горизонтального неизолированного паропровода диаметром 100 мм и длиной 25 м с температурой наружной поверхности  $T_{\text{с}} = 115^\circ\text{C}$ , если температура воздуха  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ . Как изменится потеря теплоты трубопроводом, если его температуру снизить до  $T_{\text{с}2} = 80^\circ\text{C}$ , заменив греющий пар горячей водой? Физические параметры воздуха при  $20^\circ\text{C}$ :

$$\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad a = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

8.9. По трубопроводу с внутренним диаметром  $d = 70$  мм проходит воздух, нагретый до температуры  $T_{\text{ж}} = 100^\circ\text{C}$  и  $T_{\text{с}} = 50^\circ\text{C}$ . Определить значение коэффициента теплоотдачи, если скорость воздуха в трубопроводе  $\nu = 4,5$  м/с.  $\lambda_{\text{ж}} = 0,0321 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;

$$\nu_{\text{ж}} = 23,13 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \text{ Pr}_{\text{ж}} = 0,71.$$

8.10. По трубопроводу с внутренним диаметром  $d_1 = 50$  мм протекает вода со скоростью  $\nu = 0,8$  м/с при средней температуре  $T_{\text{ж}} = 50^\circ\text{C}$ . Температура стенки трубы  $T_{\text{с}} = 65^\circ\text{C}$ .  $\text{Pr}_{\text{с}} = 3,28$ .

Определить коэффициент теплообмена и значение  $q_{\text{л}}$ .

8.11. Определить коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании воздухом трубы, диаметр которой 25 мм, если температура воздуха  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$  и скорость  $\nu = 5$  м/с.

Физические параметры воздуха при  $20^\circ\text{C}$ :

$$\nu = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad a = 21,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

8.12. Змеевик из труб диаметром 10 мм омывается поперечным потоком воды со скоростью  $v = 0,75$  м/с. Температура воды  $T_{\text{ж}} = 80^{\circ}\text{C}$ . Температура стенки трубы  $T_{\text{с}} = 50^{\circ}\text{C}$ .  $\text{Pr}_{\text{с}} = 3,54$ .

Определить коэффициент теплоотдачи.

8.13. По трубе диаметром 16 мм и длиной 10 м движется вода со скоростью 0,3 м/с. Температура стенки трубы  $T_{\text{с}} = 90^{\circ}\text{C}$ .  $T_{\text{ж}} = 20^{\circ}\text{C}$ . Определить коэффициент теплоотдачи и тепловой поток в процессе теплообмена.

Свойства воды при данной температуре:

$\nu = 1,006 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,6$  Вт/м·К;  $\alpha = 14,3 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 1,95$ .

8.14. По трубе диаметром 25 мм течет масло марки МК. Температура масла  $100^{\circ}\text{C}$ . Расход масла 120 кг/ч. Температура стенки  $30^{\circ}\text{C}$ . Свойства масла при данной температуре:  $\nu = 24,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,13$  Вт/м·К;  $\alpha = 7,3 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с;  $\rho = 840,7$  кг/м<sup>3</sup>.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 7450$ .

Определить коэффициент теплоотдачи и величину теплового потока.

8.15. По трубкам радиатора диаметром 5 мм и длиной 0,4 м течет масло марки МС-20. Температура стенок трубок  $T_{\text{с}} = 30^{\circ}\text{C}$ . Средняя температура масла по длине радиатора  $T_{\text{ж}} = 80^{\circ}\text{C}$ .

Определить коэффициент теплоотдачи и общее количество отдаваемого тепла, если радиатор имеет 120 параллельно включенных трубок, а общий расход масла через радиатор составляет 2,5 кг/с. Свойства масла при данной температуре:  $\nu = 39,2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,13$  Вт/м·К;  $\alpha = 6,7 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с;  $\rho = 858$  кг/м<sup>3</sup>.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 7310$ .

8.16. Определить значения коэффициента теплоотдачи и температуры поверхности трубы диаметром 35 мм.

Труба участвует в процессе теплообмена при постоянной плотности теплового потока  $q = 103$  Вт/м<sup>2</sup> с трансформаторным маслом, которое поступает с температурой  $T_{\text{ж}} = 20^{\circ}\text{C}$  и движется по трубе со средней скоростью 1,5 м/с. Свойства масла при данной температуре:  $\nu = 22,5 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,11$  Вт/м·К;  $\alpha = 7,6 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 60$ .

8.17. Тонкая пластина длиной 3 м и шириной 1,5 м обтекается продольным потоком воздуха. Скорость и температура набегающего потока равны соответственно  $v = 3$  м/с;  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ . Температура поверхности пластины  $T_{\text{с}} = 90^\circ\text{C}$ . Физические параметры воздуха при  $20^\circ\text{C}$ :  $\nu = 15,06 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К),  $a = 21,4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

Определить коэффициент теплообмена и количество тепла, отдаваемое пластиной воздуху.

8.18. Как изменятся значения  $\alpha_{\text{ср}}$  и  $Q$  при условиях задачи 8.17, если заменить воздух на воду? Свойства воды при данной температуре:  $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,6$  Вт/м·К;  $a = 14,3 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 1,95$ .

8.19. Тонкая константановая лента сечением  $0,2 \times 7$  мм и длиной 2 м нагревается электрическим током силой 20 А. Электрическое сопротивление 1 м ленты 2,0 Ом/м.  $T_{\text{с}} = 85^\circ\text{C}$ . Лента обтекается продольным потоком воды. Скорость и температура набегающего потока 1,5 м/с и  $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$ . Свойства воды при данной температуре:  $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\lambda = 0,6$  Вт/м·К;  $a = 14,3 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с.  $\text{Pr}_{\text{с}} = 2,15$ .

Определить коэффициент теплообмена и количество тепла, отдаваемое пластиной воде.

8.20. Определить коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании воздухом трубы, диаметр которой 35 мм, если температура воздуха  $T_{\text{ж}} = 30^\circ\text{C}$  и его расход 1,5 л/с.  $T_{\text{с}} = 90^\circ\text{C}$ . Свойства воздуха при  $30^\circ\text{C}$ :  $\nu = 16,01 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\lambda = 2,78 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К),  $a = 22,9 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

## 9. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Особенностью процесса теплообмена излучением является отсутствие непосредственного контакта тел в отличие от теплопроводности и конвективного теплопереноса.

**Излучение** (или **лучеиспускание**) — это процесс распространения электромагнитных волн, испускаемых телом при преобразовании внутренней энергии тела в лучистую энергию в результате

внутримолекулярных и внутриатомных взаимодействий различного рода.

**Лучистой тепловой энергией** является энергия, излучаемая от непрерывного электромагнитного поля в интервале длин волн:

$\lambda = (0,01 - 2000)$  мкм, которая включает: ультрафиолетовое (0,01 – 0,4) мкм, видимое (0,4 – 0,8) мкм и инфракрасное (или тепловое) излучение (0,8 – 2000) мкм.

Наибольший интерес для теплопередачи представляют тепловые лучи (0,8 – 40) мкм.

Количество излучаемой энергии зависит от физических свойств, температуры и состояния поверхности излучающего тела.

Лучеиспускание может быть **непрерывным** ( $\lambda = 0 - \infty$ ) или **селективным** (происходит избирательное излучение в определенной области длин волн). Оно также может быть **диффузным**, когда энергия излучается равномерно по всем направлениям, или **направленным**.

**Перенос лучистой энергии** — это процесс ее распространения, определяемый физическими свойствами среды и **спектральным составом** излучения.

**Поглощение** — процесс превращения части лучистой энергии во внутреннюю энергию данного тела.

**Отражение** лучистой энергии от поверхности тела может быть диффузным (т. е. равномерным во всех направлениях) или зеркальным (в соответствии с законами геометрической оптики).

Совокупность процессов **испускания, переноса, поглощения, отражения и пропускания теплового излучения называют лучистым теплообменом**.

Общее количество лучистой энергии, испускаемой телом в единицу времени, называется **интегральным лучистым потоком** ( $Q$ , Вт).

Поток излучения, проходящий через единицу поверхности по всем направлениям полусферического пространства, является **плотностью интегрального потока излучения** ( $E$ , Вт/м<sup>2</sup>):

$$E = dQ / dS, \quad (9.1)$$

где  $dQ$  — элементарный поток излучения, испускаемый поверхностью  $dS$ .

Излучение в узком интервале длин волн называют **монохроматическим излучением**  $Q_\lambda$ . Отношение плотности потока монохроматического излучения ( $E_\lambda = dQ_\lambda / dS$ ) в малом интервале длин волн  $d\lambda$  к этому интервалу есть **интенсивность** или **спектральная плотность монохроматического излучения**  $J_\lambda$ :

$$J_\lambda = dE_\lambda / d\lambda, \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{м}.$$

**Интегральное** (в диапазоне длин волн  $\lambda = 0 - \infty$ ) и **монохроматическое излучения** связаны соотношениями:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda \text{ и } Q = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda. \quad (9.2)$$

Излучение, которое излучается телом и зависит только от свойств и температуры тела, называется **собственным**. Излучение, которое тело поглощает от внешнего источника излучения, называют **падающим**.

Закон сохранения энергии для падающего потока излучения  $Q_{\text{пад}}$  имеет вид (рис. 12.1):

$$Q_{\text{пад}} = Q_A + Q_R + Q_D, \quad (9.3)$$

где  $Q_A$  — поглощенная часть энергии излучения;  $Q_R$  — отраженная и  $Q_D$  — соответственно прошедшая сквозь тело.

Поделив соотношение (9.3) на величину  $Q_{\text{пад}}$ , получим:

$$A + R + D = 1, \quad (9.3a)$$

где  $A = Q_A / Q_{\text{пад}}$ ;  $R = Q_R / Q_{\text{пад}}$ ;

$D = Q_D/Q_{\text{пад}}$  — соответственно коэффициенты **поглощения**, **отражения** и **пропускания**.

Эти коэффициенты являются безразмерными величинами, которые характеризуют способность тела поглощать, отражать или пропускать тепловое излучение. В предельном случае имеем:

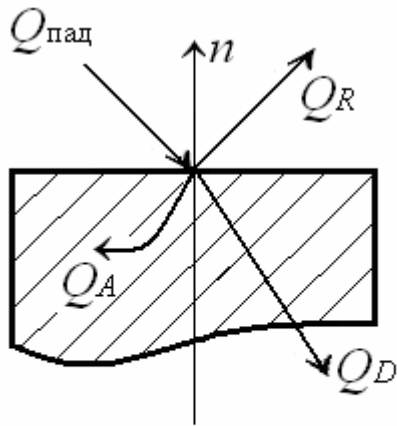


Рис. 12.1. Схема распределения падающей лучистой энергии

$$R = 0; A = 0; D = 1$$

(абсолютно прозрачное для тепловых лучей или диатермическое [гречес. *diatherme*] тело);

$$R = 1; A = 0; D = 0$$

(абсолютно белое или зеркальное тело);

$$R = 0; A = 1; D = 0$$

(абсолютно черное тело).

В дальнейшем все величины, относящиеся к абсолютно черному телу, принято обозначать индексом «0», например  $A_0 = 1$ .

Абсолютно черных, белых и прозрачных тел в природе не существует. Для реальных тел коэффициенты  $A$ ,  $R$  и  $D$  заключены в диапазоне от 0 до 1. К абсолютно черному телу наиболее близки: сажа и бархат ( $A \sim 0,90 - 0,98$ ), к абсолютно белому телу — полированные металлы ( $R \sim 0,97$ ). Одно- и двухатомные газы ( $O_2$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ , инертные газы) практически прозрачны для теплового излучения ( $A + R \sim 0$ ,  $D \sim 1$ ).

Большинство твердых и жидких тел не являются абсолютно черными телами, и для них  $A < 1$ .

Тела, у которых коэффициент поглощения  $0 < A < 1$  и поглощательная способность не зависит от длины волны падающего излучения, называются **серыми телами**. Большинство твердых тел можно рассматривать как серые тела и для многих из них выполняется условие:  $A + R \sim 1$  и  $D \sim 0$ .



Общая энергия, излучаемая телом, состоит из двух составляющих: собственного излучения  $E$ , зависящего от физической природы тела и его температуры, и отраженной лучистой энергии:

$$E_R = RE_{\text{пад}}.$$

Сумма собственного и отраженного излучений носит название **эффективного излучения**  $E_{\text{эф}}$  (рис. 12.2):

$$E_{\text{эф}} = E + E_R = E + RE_{\text{пад}} = E + (1 - A)E_{\text{пад}}. \quad (9.4)$$

Лучистый перенос теплоты характеризуется **результующим излучением**  $E_{\text{рез}}$ , которое определяется разностью между собственным излучением  $E$  и поглощенным лучистым потоком ( $E_{\text{погл}} = AE_{\text{пад}}$ ):

$$E_{\text{рез}} = E - AE_{\text{пад}}, \quad (9.5)$$

или с учетом уравнений (9.4) и (9.5) имеем:

$$E_{\text{рез}} = E_{\text{эф}} - E_{\text{пад}}.$$

Энергия, излучаемая поверхностью абсолютно черного тела, имеющего температуру  $T$ , в соответствии с законом Стефана–Больцмана равна:

$$E_0 = C_0 (T / 100)^4,$$

где  $C_0 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  — **коэффициент излучения абсолютно черного тела**.

Для серых тел, у которых интенсивность излучения меньше, чем у черных тел, при той же температуре  $E < E_0$ . Отношение  $E / E_0 < 1$  называют **степенью черноты серого тела**:  $\varepsilon = E / E_0$ .

В соответствии с законом Кирхгофа степень черноты  $\varepsilon$  равна коэффициенту поглощения серого тела:  $\varepsilon = E / E_0 = A$ . Пользуясь понятием степени черноты, плотность лучистого потока для серого тела можно выразить следующим уравнением:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 (T / 100)^4 = C (T / 100)^4, \quad (9.6)$$

где  $C = \varepsilon C_0$  — *коэффициент излучения серого тела*.

Плотность потока излучения растет с увеличением  $\lambda$  и достигает максимального значения при длине волны  $\lambda_{\text{макс}}$ , которая зависит от температуры.

Зависимость  $\lambda_{\text{макс}}$  от температуры определяется формулой Вина (закон смещения):  $\lambda_{\text{макс}} = 2,898/T$ , мм.

В соответствии с законом Ламберта значение плотности потока излучения зависит от его направления по отношению к излучающей поверхности тела. Наибольшей плотностью обладает поток излучения по нормали к поверхности, его называют **яркостью излучения** и обозначают  $E_n$ . Плотность потока по остальным направлениям  $E_\varphi$ , определяется по формуле:  $E_\varphi = E_n \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между направлением излучения и нормалью. Яркость излучения определяется формулой:

$$E_n = \frac{E}{\pi} = \frac{C(T/100)^4}{\pi} = \frac{\varepsilon C_0(T/100)^4}{\pi}.$$

Количество энергии, излучаемое поверхностью  $S_1$  тела 1 в направлении другого тела 2, равно:

$$Q_{2\varphi} = E_n \cos \varphi \cdot S_1 \cdot \omega \text{ (Вт)}, \quad (9.7)$$

где  $\omega$  — телесный угол, под которым облучается тело 2. При этом:

$\omega = \frac{S}{r^2}$ , причем  $S$  — излучающая поверхность тела 1 и  $r$  — расстояние между телами 1 и 2.

Тепловой поток  $Q$  (Вт) в процессе теплообмена излучением между двумя серыми параллельными поверхностями  $S_1 = S_2 = S$ , имеющими температуры  $T_1$ ,  $T_2$  и степени черноты  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , определяется уравнением:

$$q_{1,2} = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (9.8)$$

При этом использовано обозначение:

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}, \quad (9.9)$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}}$  — приведенная степень черноты для рассмотренного случая двух серых параллельных пластин.

Теплообмен излучением между поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ , когда поверхность  $S_1$  находится внутри поверхности  $S_2$ , а  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — степени черноты этих тел, может быть рассчитан по следующей формуле:

$$Q = \varepsilon_{\text{пр}} C_o S_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (9.10)$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$  — приведенная степень черноты данной

системы. Формула (9.10) применима для любых тел при условии, что внутреннее тело имеет выпуклую форму.

Если  $S_1$  значительно меньше  $S_2$ , то  $\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_1$ .

Для снижения теплового потока в процессе теплообмена излучением между телами используют постановку экранов. При наличии одного экрана плотность теплового потока  $q_3$  (Вт/м<sup>2</sup>) с экраном определяется формулой:

$$q_3 = \frac{C_o \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)}, \quad (9.11)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  — соответственно степени черноты обоих тел и экрана.

Теплообмен излучением между излучающим газом и окружающей его поверхностью описывается уравнением:

$$q_{\text{г,с}} = \frac{\varepsilon_{\text{с}} C_o}{1 - (1 - \varepsilon_{\text{с}})(1 - \varepsilon_{\text{г}}^{\text{с}})} \left[ \varepsilon_{\text{г}}^{\text{г}} \left( \frac{T_{\text{г}}}{100} \right)^4 - \varepsilon_{\text{г}}^{\text{с}} \left( \frac{T_{\text{с}}}{100} \right)^4 \right], \quad (9.12)$$

где  $T_{\Gamma}$ ,  $T_c$  — температуры газа и стенки;  $\varepsilon_c$  — степень черноты стенки при  $T = T_c$ ;  $\varepsilon_{\Gamma}^c$ ,  $\varepsilon_{\Gamma}^{\Gamma}$  — степень черноты газа при  $T = T_c$  и  $T = T_{\Gamma}$ .

Введем понятие эффективной степени черноты стенки  $\varepsilon_{c,эф}$ :

$$\varepsilon_{c,эф} = \frac{\varepsilon_c}{1 - (1 - \varepsilon_c)(1 - \varepsilon_{\Gamma}^c)}. \quad (9.13)$$

Причем, в случае больших значений  $\varepsilon_c$ , приближенно можно принять:

$$\varepsilon_{c,эф} = (1 + \varepsilon_c) / 2. \quad (9.14)$$

Тогда уравнение (9.12) можно представить в виде:

$$q_{\Gamma,c} = \varepsilon_{c,эф} C_o \left[ \varepsilon_{\Gamma}^{\Gamma} \left( \frac{T_{\Gamma}}{100} \right)^4 - \varepsilon_{\Gamma}^c \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 \right]. \quad (9.15)$$

Степень черноты слоя газа  $\varepsilon_{\Gamma}$ , как и излучаемая им энергия, также зависят от температуры, давления  $p_i$  и толщины слоя  $l$ , которую в случае произвольного направления излучения следует заменить на **среднюю** (или **эффективную**) **длину пути луча**  $l_{cp}$  (м). Величину  $l_{cp}$  можно рассчитать по формуле А. С. Невского:

$$l_{cp} = 4 m_{эф} V / S, \quad (9.16)$$

где  $V$  — объем газа,  $м^3$ ;  $S$  — облучаемая поверхность,  $м^2$ ;  $m_{эф}$  — коэффициент эффективности газа, зависящий от формы газового объема и степени его черноты.

При  $l_{cp} \leq 1$  м величина  $m_{эф} = 0,85$  и при  $l_{cp} > 1$  м —  $m_{эф} = 0,9$ .

В случае углекислого газа и воды степень черноты  $\varepsilon_{\Gamma}$  находят по графикам, приведенным на рис. 9.2 – 9.4, которые построены по опытным данным (номограммы В. Н. Тимофеева и Э. С. Карасиной).

Для пользования этими графиками необходимо знать температуру газов  $T$  °С и произведение парциального давления газа на среднюю длину пути луча:  $p l_{cp}$  (м·кПа).

Для водяного пара степень черноты  $\varepsilon_{H_2O}$  зависит от  $p_{H_2O}$  и  $l_{cp}$  различным образом, поэтому найденную величину  $\varepsilon_{H_2O}$  по графику

9.3 дополнительно необходимо умножить на поправочный коэффициент  $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ , определенный с учетом парциального давления пара на рис. 9.4.

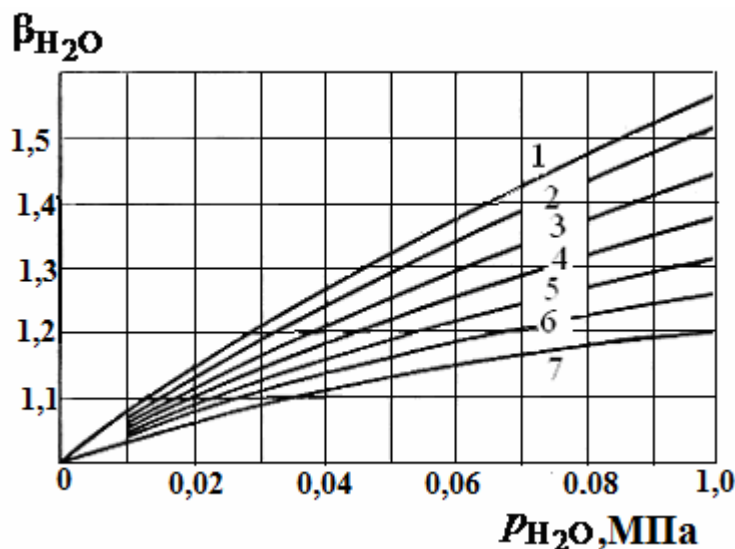


Рис. 9.4. Поправочный коэффициент  $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ , учитывающий влияние  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  на  $\epsilon_{\text{H}_2\text{O}}$ : 1 –  $p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l_{\text{cp}} = 0 - 0,0015$ ; 2 –  $0,0075$ ; 3 –  $0,015$ ; 4 –  $0,02$ ; 5 –  $0,075$ ; 6 –  $0,15$ ; 7 –  $0,3$  м·МПа

## П Р И М Е Р Ы

1. Определить излучательную способность поверхности Солнца, если известно, что ее температура равна  $5700^\circ\text{C}$  и условия излучения близки к излучению абсолютно черного тела. Вычислить также длину волны, при которой будет наблюдаться максимум интенсивности излучения и общее количество лучистой энергии, испускаемой Солнцем в единицу времени, если диаметр Солнца можно принять равным  $1,391 \cdot 10^9$  м.

### Р е ш е н и е

Интенсивность излучения абсолютно черного тела определяется формулой:  $E_0 = C_0 (T / 100)^4 = 5,67 \cdot (5973 / 100)^4 = 72,17 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$ .

Длина волны, соответствующая максимальной интенсивности, равна:

$$\lambda_{\text{макс}} = 2898/T = 2898/5973 = 0,485 \text{ мкм.}$$

Общее количество излучаемой Солнцем энергии равно:

$$Q = E_0 \cdot S = 72,17 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (1,391 \cdot 10^9)^2 = 4,385 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

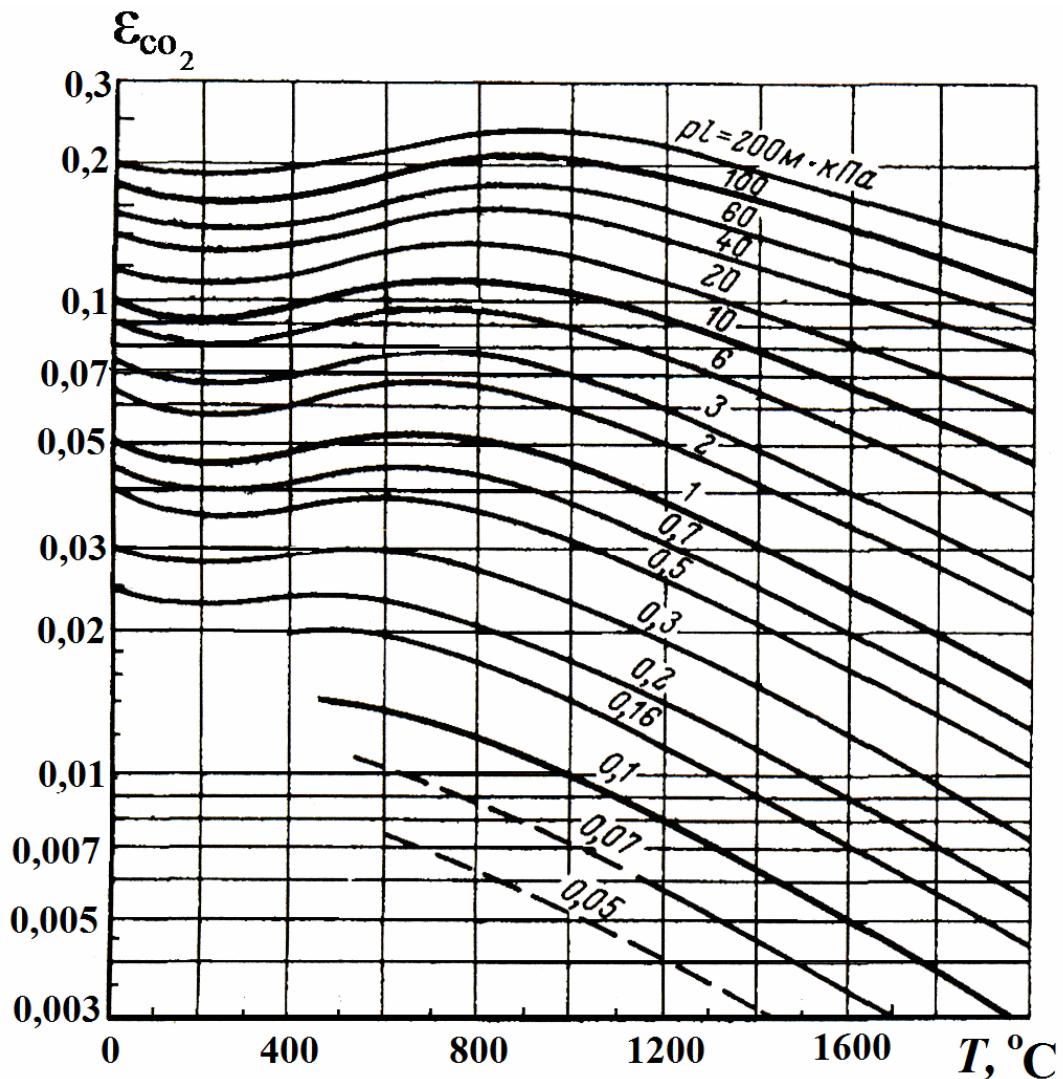


Рис.9.2. Степень черноты для углекислого газа

2. Определить плотность солнечного лучистого потока, падающего на плоскость, нормальную к лучам Солнца и расположенную за пределами атмосферы Земли. Известно, что излучение Солнца близко к излучению абсолютно черного тела с температурой  $5700^\circ\text{C}$ . Диаметр Солнца  $1,391 \cdot 10^6$  км, расстояние от Земли до Солнца  $r = 149,5 \cdot 10^6$  км.

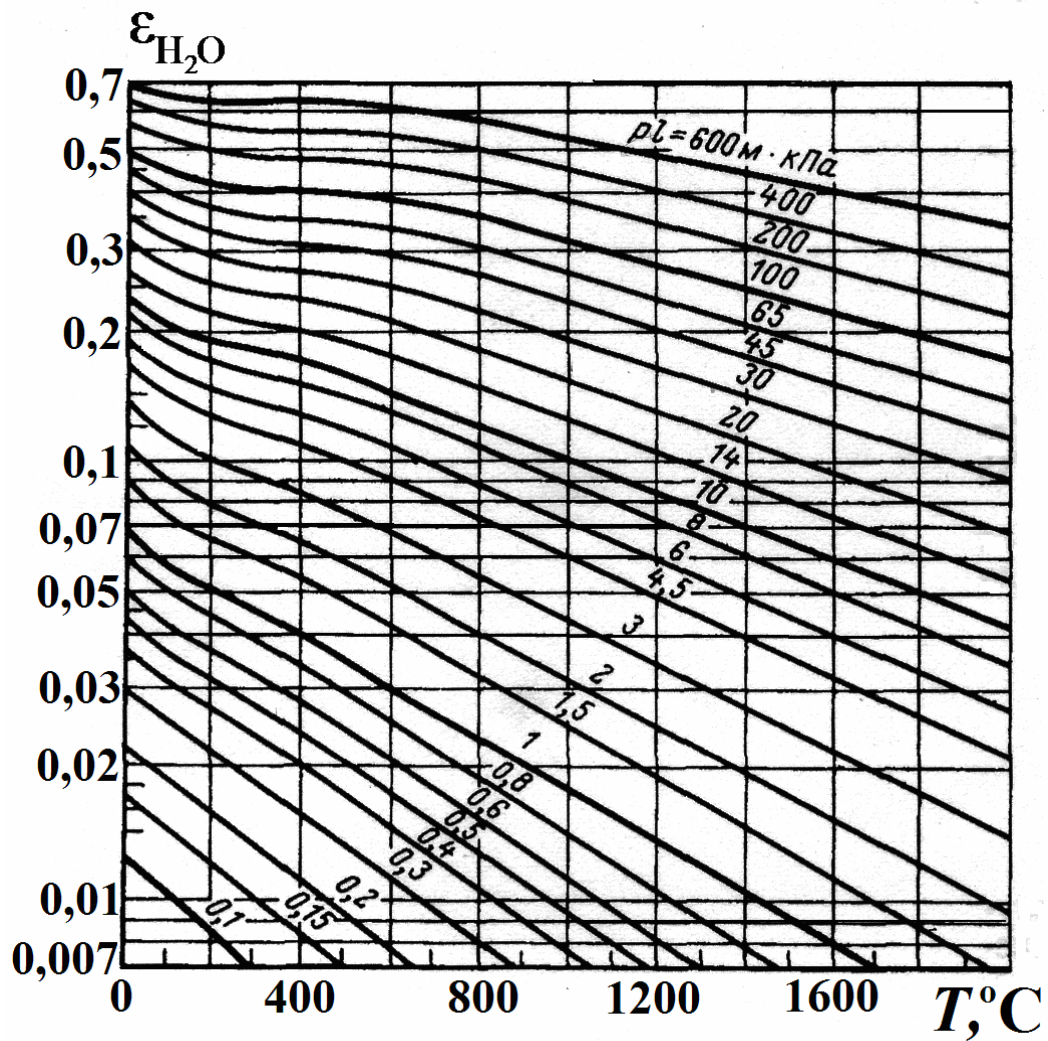


Рис.9.3. Степень черноты для водяного пара

Р е ш е н и е

Яркость солнечного излучения равна:

$$E_n = \frac{E_o}{\pi} = \frac{C_o(T/100)^4}{\pi},$$

откуда имеем:  $E = \frac{C_o(T/100)^4}{\pi} \cdot \omega$ , где  $\omega = \frac{S}{r^2}$ .

С учетом этих соотношений, имеем:

$$E = \frac{C_o(T/100)^4}{\pi} \cdot \frac{\pi d^2/4}{r^2} = \frac{5,67(5973/100)^4 \cdot (1,391 \cdot 10^9)^2}{(4149,5 \cdot 10^9)^2} = 1561,7 \text{ Вт/м}^2.$$

3. Обмуровка топочной камеры парового котла выполнена из шамотного кирпича, а внешняя обшивка — из листовой стали. Расстояние между обшивкой и кирпичной кладкой равно 30 мм, и можно считать его малым по сравнению с размерами стен топки. Вычислить потери тепла в окружающую среду с единицы поверхности в единицу времени в условиях стационарного режима за счет лучистого теплообмена между поверхностями обмуровки и обшивки. Температура внешней поверхности обмуровки  $T_1 = 127^\circ\text{C}$ , а температура стальной обшивки  $T_2 = 50^\circ\text{C}$ . Степень черноты шамота  $\epsilon_{\text{ш}} = 0,8$  и листовой стали  $\epsilon_c = 0,4$ .

#### Р е ш е н и е

Обшивку и кирпичную кладку можно рассматривать как две безграничные плоскопараллельные поверхности, поэтому имеем:

$$q_{1,2} = \epsilon_{\text{пр}} C_o \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

где 
$$\epsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1}.$$

$$q_{1,2} = C_o \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \frac{1}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} = 5,67 \cdot \left[ \left( \frac{400}{100} \right)^4 - \left( \frac{323}{100} \right)^4 \right] \cdot \frac{1}{1/0,8 + 1/0,4 - 1} = 303,4 \text{ Вт/м}^2.$$

4. Как изменятся тепловые потери в окружающую среду, если между обмуровкой и обшивкой топочной камеры, рассмотренной в примере 3, установить стальной экран, имеющий степень черноты  $\epsilon_3 = 0,3$ .



### Р е ш е н и е

В случае наличия экрана плотность теплового потока определяется формулой:

$$q_3 = \frac{C_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} = \frac{5,67 \left[ (400/100)^4 - (323/100)^4 \right]}{1/0,8 + 1/0,4 + 2(1/0,3 - 1)} = 99,1 \text{ Вт/м}^2.$$

5. Нагрев стальной болванки осуществляется в муфельной электрической печи с температурой ее стенок  $T_2 = 900^\circ\text{C}$ . Степень черноты поверхности стальной болванки  $\varepsilon_1 = 0,6$  (средняя за период нагрева) и степень черноты шамотной стенки муфельной печи  $\varepsilon_2 = 0,8$ .

а) Поверхность печи, участвующей в лучистом теплообмене,  $S_2$  существенно превышает поверхность болванки  $S_1$ , т. е.  $S_1 \ll S_2$ .

б) Соотношение  $S_1/S_2 = 1/4$ .

Вычислить значение плотности лучистого потока при температуре болванки  $T_1 = 400^\circ\text{C}$ .

### Р е ш е н и е

Для замкнутой системы, состоящей из двух тел, одно из которых (с поверхностью  $S_1$ ) находится в полости другого (с поверхностью  $S_2$ ), значение плотности лучистого потока определяется по формуле:

$$q = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \right],$$

где  $\varepsilon_{\text{пр}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$  — приведенная степень черноты данной

системы.

а). Для этого случая имеем условие  $S_1 \ll S_2$ , следовательно:

$$q = \varepsilon_1 C_0 \left[ \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \right] = 0,6 \cdot 5,67 \cdot [(1173/100)^4 - (673/100)^4] = 57,4 \text{ кВт/м}^2.$$

б). В этом случае  $S_1/S_2 = 1/4$ , поэтому получим:

$$q = \varepsilon_{\text{пр}} C_0 \left[ \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \right] \cdot \frac{1}{1/\varepsilon_1 + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{5,67 \cdot [(1173/100)^4 - (673/100)^4]}{1/0,6 + 1/4 \cdot (1/0,8 - 1)} = 55,3 \text{ кВт/м}^2.$$

6. В нагревательной печи температура газов по всему объему постоянна и равна  $1200^\circ\text{C}$ . Объем печи  $V = 12 \text{ м}^3$ , и полная поверхность ограждения (печной кладки)  $28 \text{ м}^2$ .

Общее давление продуктов сгорания  $98,1 \text{ кПа}$ , парциальные давления водяных паров  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 10 \text{ кПа}$  и углекислоты  $p_{\text{CO}_2} = 12 \text{ кПа}$ .

Вычислить степень черноты излучающей газовой смеси и собственное излучение продуктов сгорания.

#### Р е ш е н и е

Средняя длина пути луча для газового слоя в объеме печи вычисляется по формуле:

$$l = 4 m_{\text{эф}} V / S = 3,6 V / S = 3,6 \cdot 12 / 28 = 1,54 \text{ м}.$$

Произведение парциального давления углекислоты и водяных паров на длину пути луча равны:

$$p_{\text{CO}_2} \cdot l = 12 \cdot 1,54 = 18,5 \text{ кПа} \cdot \text{м};$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l = 10 \cdot 1,54 = 15,4 \text{ кПа} \cdot \text{м}.$$

Степень черноты  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  при температуре газов  $T_2 = 1200^\circ\text{C}$  найдем по графикам на рис. 9.2 - 9.4:

$$\varepsilon_{\text{Г,см}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 0,11 + 0,11 \cdot 1,05 = 0,225.$$

$$E_{\text{Г}} = \varepsilon_{\text{Г}} \cdot E_0 = \varepsilon_{\text{Г}} \cdot C_0 (T / 100)^4 = 0,225 \cdot 5,67 (1473/100)^4 = 60,05 \text{ кВт/м}^2.$$

7. По прямоугольному кирпичному газоходу размером  $400 \times 400 \times 3000$  мм проходят дымовые газы при атмосферном давлении. Парциальное давление  $\text{CO}_2$  – 25 кПа и  $\text{H}_2\text{O}$  – 10 кПа. Средняя температура газов в газоходе  $750^\circ\text{C}$ . Степень черноты поверхности стенки 0,93.  $T_c = 400^\circ\text{C}$ . Какое количество теплоты излучением передается от газов к стенкам газохода.

### Р е ш е н и е

Средняя длина пути луча для газового слоя в объеме печи вычисляется по формуле:

$$l = 4 m_{\text{эф}} V / S = 3,6 V / S = 3,6 \cdot 0,48 / 4,8 = 0,36 \text{ м.}$$

Произведение парциального давления углекислоты и водяных паров на длину пути луча равны:

$$p_{\text{CO}_2} \cdot l = 25 \cdot 0,36 = 9 \text{ кПа} \cdot \text{м};$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l = 10 \cdot 0,36 = 3,6 \text{ кПа} \cdot \text{м.}$$

Степень черноты  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2\text{O}$  при температуре газов  $T_g = 750^\circ\text{C}$  и температуре стенки  $T_c = 400^\circ\text{C}$  найдем по графикам на рис. 9.2 - 9.4:

$$\epsilon_g^r = \epsilon_{\text{rCO}_2} + \epsilon_{\text{rH}_2\text{O}} = 0,11 + 0,065 \cdot 1,03 = 0,177.$$

$$\epsilon_g^c = \epsilon_{\text{cCO}_2} + \epsilon_{\text{cH}_2\text{O}} = 0,09 + 0,08 \cdot 1,03 = 0,172.$$

$$q_{g,c} = \frac{\epsilon_c C_o}{1 - (1 - \epsilon_c)(1 - \epsilon_g^c)} \left[ \epsilon_g^r \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 - \epsilon_g^c \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 \right],$$

где  $T_g$ ,  $T_c$  — температуры газа и стенки;  $\epsilon_c$  — степень черноты стенки при  $T = T_c$ ;  $\epsilon_g^c$ ,  $\epsilon_g^r$  — степень черноты газа при  $T = T_c$  и  $T = T_g$ .

$$\begin{aligned} q_{g,c} &= \frac{\epsilon_c C_o}{1 - (1 - \epsilon_c)(1 - \epsilon_g^c)} \left[ \epsilon_g^r \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 - \epsilon_g^c \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{0,93 \cdot 5,67}{1 - (1 - 0,93)(1 - 0,172)} \left[ 0,177 \left( \frac{1023}{100} \right)^4 - 0,172 \left( \frac{673}{100} \right)^4 \right] = 8875,9 \text{ Вт/м}^2. \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ

9.1. Поверхность, покрытая слоем ламповой сажи, имеет температуру  $323^{\circ}\text{C}$ . Поглощательная способность сажи равна 0,96. Определить плотность теплового потока излучения лампы.

9.2. Обмуровка топочной камеры парового котла выполнена из шамотного кирпича, а внешняя обшивка – из листовой стали. Расстояние между обшивкой и кирпичной кладкой равно 35 мм, и можно считать его малым по сравнению с размерами стен топки. Вычислить потери тепла с единицы поверхности в единицу времени за счет лучистого теплообмена между поверхностями обмуровки и обшивки. Температура внешней поверхности обмуровки  $T_1 = 57^{\circ}\text{C}$ , а температура стальной обшивки  $T_2 = 27^{\circ}\text{C}$ . Степень черноты шамота  $\epsilon_{\text{ш}} = 0,83$  и листовой стали  $\epsilon_{\text{с}} = 0,6$ .

9.3. Как изменятся тепловые потери в окружающую среду если между обмуровкой и обшивкой топочной камеры, рассмотренной в задаче 9.2, установить стальной экран, имеющий степень черноты  $\epsilon_{\text{э}} = 0,3$ ?

9.4. Какой должна быть степень черноты экрана для того, чтобы при наличии защитного экрана между обмуровкой и стальной обшивкой тепловые потери в окружающую среду за счет излучения не превышали  $80 \text{ Вт/м}^2$ ?

Все другие условия сохраняются, как в задаче 9.2.

9.5. Определить теплоту излучения трубопровода диаметром 25 мм и длиной 10 м, если температура его поверхности  $120^{\circ}\text{C}$ , а температура стен в помещении  $23^{\circ}\text{C}$ .

Степень черноты поверхности трубопровода 0,74.

9.6. Определить, какую долю составляет тепловой поток излучения от общей теплоотдачи отопительного трубопровода с температурой поверхности  $75^{\circ}\text{C}$ , если общий тепловой поток  $560 \text{ Вт/м}^2$ . Степень черноты теплоотдающей поверхности  $\epsilon = 0,80$ . Температуру стен помещения принять равной  $18^{\circ}\text{C}$ .

9.7. Определить температуру провода электронагревателя, если его диаметр и длина соответственно равны 0,4 мм и 5 м. Степень черноты поверхности провода 0,9, а температура ограждающей изоляции 20°C. Мощность, потребляемая нагревателем, равна 0,8 кВт.

9.8. Нагрев стальной болванки осуществляется в муфельной электрической печи с температурой ее стенок 800°C. Степень черноты поверхности стальной болванки  $\varepsilon_1 = 0,4$  и степень черноты шамотной стенки печи  $\varepsilon_2 = 0,83$ . Вычислить значение плотности лучистого потока в зависимости от температуры болванки:

а)  $T_1 = 50^\circ\text{C}$ ; б)  $T_1 = 200^\circ\text{C}$  при условии  $S_1 \ll S_2$ .

9.9. Вычислить плотность лучистого потока от стенок муфельной печи к поверхности стальной болванки в условиях, рассмотренных в задаче 9.8, если соотношение поверхностей, участвующих в лучистом теплообмене, равно: а)  $S_1 / S_2 = 1/3$ ; б)  $S_1 / S_2 = 1/10$ .

9.10. Степень черноты вольфрамовой проволоки определена при температуре 2000°C и равна 0,35. Вычислить значение плотности лучистого потока от поверхности проволоки, если поверхность ограждения имела температуру 20°C.

9.11. Цилиндрический сосуд для хранения жидкого кислорода выполнен с двойными стенками, покрытыми слоем серебра, коэффициент поглощения которого 0,02. На поверхности внутренней стенки температура  $T_1 = -170^\circ\text{C}$ , а на внутренней поверхности наружной стенки температура  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ . Расстояние между стенками мало и поверхности стенок можно считать равными.

Вычислить тепловой поток, проникающий в сосуд через стенки путем лучистого теплообмена, если теплоотдающая поверхность стенки  $S = 0,17 \text{ м}^2$ .

9.12. Температура поверхности паропровода высокого давления  $T_1 = 400^\circ\text{C}$ . Вычислить тепловые потери с поверхности паропровода путем лучистого теплообмена, если его наружный диаметр 150 мм и

длина 20 м. Коэффициент поглощения трубы 0,5 , а температура ограждений  $T_2 = 27^{\circ}\text{C}$ .

9.13. Вычислить тепловые потери с поверхности паропровода, рассмотренного в задаче 9.12, при условии, что его поверхность окружена стальным экраном диаметром 200 мм и степень его черноты равна 0,3.

9.14. Температуры двух параллельных пластин равны 127 и  $427^{\circ}\text{C}$ . Степень черноты пластин соответственно 0,8 и 0,6. Между пластинами установлен экран, имеющий степень черноты 0,1. Вычислить плотность лучистого теплового потока.

9.15. Нагревательную печь с целью уменьшения тепловых потерь снабдили стальным экраном. Размеры печи велики по сравнению с расстоянием между ее наружной поверхностью и экраном.

При этом получено, что температура наружной поверхности кладки печи равна  $87^{\circ}\text{C}$ , а температура стального экрана  $47^{\circ}\text{C}$ .

Найти плотность лучистого потока от поверхности кладки к экрану, приняв степень черноты кладки и экрана равными соответственно 0,93 и 0,45.

9.16. В опытной установке для определения степени черноты тел для поддержания постоянной температуры  $1000^{\circ}\text{C}$  вольфрамовой проволоки диаметром 5 мм и длиной 100 мм затрачивалась электрическая мощность 25 Вт. Поверхность вакуумной камеры, в которую помещена проволока, велика по сравнению с поверхностью проволоки. В процессе испытаний температура камеры поддерживалась постоянной и равной  $T_2 = 30^{\circ}\text{C}$ . Определить степень черноты вольфрамовой проволоки при  $1000^{\circ}\text{C}$ .

9.17. В стальной трубе диаметром 200 мм и длиной 15 м, имеющей температуру стенки  $123^{\circ}\text{C}$ , находится смесь газов, содержащая 10 % паров воды и 20% об. углекислого газа. Полное давление и температура смеси равны соответственно 2 атм. и  $300^{\circ}\text{C}$ . Найти величину теплового лучистого потока от газа к стенке трубы.

9.18. Вычислить плотность теплового потока, обусловленного лучеиспусканием от дымовых газов к поверхности цилиндрического газохода диаметром 800 мм.

Газы содержат 15% углекислоты и 8 % об. водяных паров. Общее давление газов 1 атм. Температура газов в газоходе  $600^{\circ}\text{C}$  и поверхности газохода  $T_c = 200^{\circ}\text{C}$  и степень черноты поверхности  $\epsilon_c = 0,90$ .

9.19. По прямоугольному кирпичному газоходу размером  $300 \times 300 \times 1500$  мм проходят дымовые газы при атмосферном давлении. Парциальное давление  $\text{CO}_2$  – 18 кПа и  $\text{H}_2\text{O}$  – 5 кПа.

Средняя температура газов в газоходе  $400^{\circ}\text{C}$ . Степень черноты поверхности стенки 0,93.  $T_c = 150^{\circ}\text{C}$ . Какое количество теплоты излучением передается от газов к стенкам газохода?

9.20. Решить задачу 9.19 при условии, что парциальное давление  $\text{CO}_2$  и водяных паров увеличилось в 2 раза, а все другие данные остались без изменений.

## Библиографический список

1. Юркинский В.П., Фирсова Е.Г., Сладков И.Б., Зайцев В.А. Теплотехника. Сборник задач по тепломассопереносу. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007, 94 с.
2. Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В., Величко В.И. Задачник по тепломассообмену. М.: Изд-во МЭИ, 1997. 135 с.
3. Задачник по технической термодинамике и теории тепломассообмена / В.Н. Афанасьев, С.И. Исаев, И.А. Кожин и др.; Под ред. В.И. Крутова и Г.В. Петражицкого. М.: Высш. шк., 1986.
4. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. М.: Энергия, 1980.
5. Сборник задач по гидравлике / В.А. Большаков, В.Н. Попов и др.; Под ред. В.А. Большакова. Киев: Вища шк., 1975. 298 с.
6. Сборник задач по термодинамике и теплопередаче/ А.В. Болгарский, В.И. Голдобеев, Н.С. Идиатуллин, Д.Ф. Толкачев. М.: Высш. шк., 1972. 304 с.
7. Ерохин В.Г., Махонько М.Г. Сборник задач по основам теплотехники и гидравлики. М.: Энергия, 1972.
8. Сборник задач по машиностроительной гидравлике / Д.А. Бутаев, З.А. Калмыкова, Л.Г. Подвидз и др.; Под ред. И.И. Куколевского и Л.Г. Подвидза. М.: Машиностроение, 1972. 472 с.



*Юркинский Владимир Павлович*

**Теплофизика.**  
**Сборник задач по тепломассопереносу**

Редактор *Е. А. Пряникова*  
Технический редактор *А. И. Колодяжная*  
Оригинал-макет подготовлен автором

Директор Издательства Политехнического университета *А. В. Иванов*

Свод. темплан 2007 г.

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005 - 93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано в печать	.	Формат	60x84/16.
Усл. печ. л.	.	Уч.-изд. л.	.
Заказ 133		.	

---

---

Санкт-Петербургский государственный политехнический  
университет.

Издательство Политехнического университета, член  
Издательско-полиграфической ассоциации университетов России.

Адрес университета и издательства:  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29.