

February 11, 2020

## OBLIG 1

### Oppgave 1

“ Vi skal se på den affine avbildningen  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som speiler ethvert punkt i planet om punktet  $(-1, 1)$ . Finn en  $2 \times 2$ -matrise  $A$  og en vektor  $\vec{c}$  som er slik at  $T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c}$  for alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . ”

Siden søylene  $e_1$  og  $e_2$  er definert ved  $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , og vi vet at vi reflekterer over et punkt vil  $\vec{c}$  være  $2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \implies T(x, y) &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

“

Finn lineariseringen  $T_a \vec{F}$  til funksjonen definert ved

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

”

i punktet  $a = (-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y) &= \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}, a = (-1, 1). \\ T_{(-1,1)}(\vec{F}(x, y)) &= \vec{F}(-1, 1) + \vec{F}'(-1, 1) \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ 2y & 2y + 2x \end{pmatrix}_{(-1,1)} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2 & 2 \\ 2 & 2 - 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + 2y \\ 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 + 2 \\ -2 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + 2y - 6 \\ 2x - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4x + 2y - 3 \\ 2x - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

## Oppgave 2

“

Finn et uttrykk for jordas bane i forhold til sola (kall denne for  $r_1(t)$ ), og et uttrykk for månens bane i forhold til jorda (kall denne for  $r_2(t)$ ). Disse er illustrert i Figur 2. Forklar også at månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m \cos(2\pi \frac{t}{T_m}) \\ r_j \sin(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m \sin(2\pi \frac{t}{T_m}) \end{pmatrix},$$

”

der tiden  $t$  måles i dager.

$$\begin{aligned} r_m &= 0.384, & r_j &= 150, \\ T_m &= 27.3, & T_j &= 365 \\ \omega_m &= \frac{2\pi}{T_m} = \frac{2\pi}{27.3} & \omega_j &= \frac{2\pi}{T_j} = \frac{2\pi}{365} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(\omega_j t) \\ r_j \cdot \sin(\omega_j t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(2\pi/365 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(2\pi/365 \cdot t) \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(\omega_m t) \\ r_m \cdot \sin(\omega_m t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(2\pi/27.3 \cdot t) \\ r_m \cdot \sin(2\pi/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siden funksjonene er uavhengige, og posisjonen til månen er relativ til jorden kan begge funksjonene summeres, da startposisjonen til månen alltid vil følge jordens sentrum. Dermed blir  $\vec{r}(t) = \vec{r}_j(t) + \vec{r}_m(t)$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_j(t) + \vec{r}_m(t) \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(2\pi/365 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(2\pi/365 \cdot t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(2\pi/27.3 \cdot t) \\ r_m \cdot \sin(2\pi/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(\tau/365 \cdot t) + r_m \cdot \cos(\tau/27.3 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(\tau/365 \cdot t) + r_m \cdot \sin(\tau/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

“  
 Plott  $\vec{r}_1(t)$  og  $\vec{r}(t)$  i samme koordinatsystem, og over en periode på ett år. Klarer du å adskille de to kurvene? Klarer du å gjenkjenne “sykloide-bevegelsene” fra Figur 1 i plottet ditt? Du trenger bare legge ved koden som lager plottet ditt, ikke selve plottet. Du kan selv velge om du bruker Matlab eller Python.”

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import mpl_toolkits.mplot3d as Axes3D
3 from math import tau, cos, sin
4 import numpy as np
5
6 # CONSTANTS
7 r_m, r_j = 10, 150 # fake moon radius for visual aspect
8 #r_m = 0.384
9 T_m, T_j = 27.3, 365
10 w_m, w_j = tau / T_m, tau/T_j
11
12 # earth formulas relative to sun
13 r1_x = lambda t: r_j * cos(w_j * t)
14 r1_y = lambda t: r_j * sin(w_j * t)
15 # moon formulas relative to earth
16 r2_x = lambda t: r_m * cos(w_m * t)
17 r2_y = lambda t: r_m * sin(w_m * t)
18 # moon formulas relative to sun
19 r_x = lambda t: r1_x(t) + r2_x(t)
20 r_y = lambda t: r1_y(t) + r2_y(t)
21
22 # sample points on time axis
23 times = np.arange(0, 365, step=0.1)
24 # earth values
25 xs_r1 = [r1_x(t) for t in times]
26 ys_r1 = [r1_y(t) for t in times]
27 # moon values
28 xs_r2 = [r2_x(t) for t in times]
29 ys_r2 = [r2_y(t) for t in times]
30 # absolute moon values
31 xs_r = [r_x(t) for t in times]
32 ys_r = [r_y(t) for t in times]
33
34 # 3d figure with orthogonal projection
35 fig = plt.figure()
36 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d', proj_type="ortho")
37
38 # adding all three formulas (moon, earth, absolute moon)
39 ax.scatter(times, xs_r, ys_r, s=1) # absolute moon
40 ax.scatter(times, xs_r1, ys_r1, s=1) # earth to sun
41 ax.scatter(times, xs_r2, ys_r2, s=1) # moon to earth
42
43 # visual graph
44 ax.set_xlabel('Time_axis')
45 ax.set_ylabel('X_axis')
46 ax.set_zlabel('Y_axis')
47 ax.view_init(elev=30, azimuth=-60)
48 # fullscreen
49 figManager = plt.get_current_fig_manager()
50 figManager.window.showMaximized()
51
52 plt.show()

```

□

“ Finn et uttrykk for alle tidspunkter for fullmåne (d.v.s. når jorda ligger på en rett linje mellom månen og sola) og nymåne (månen ligger på en rettlinje mellom jorda og sola). Tidsforskjellen mellom to fullmåner kalles også synodisk omløpstid. Hva er størst av siderisk og synodisk omløpstid? ”

Fullmåner og nymåner vil begge danne en rett linje hvis vi tar solen som utgangspunkt. Det vil si at retningsvektoren fra solen til månen, og retningsvektoren fra solen til jorda vil være like. Det samme gjelder fra jorda til månen. Hvis vi måler arealet mellom to vektorer som danner ei rett linje får vi null. Vi ønsker altså å finne alle punktene ved  $\mathbf{t}$  der  $\mathbf{r}_1(\mathbf{t}) \times \mathbf{r}_2^T(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$

□

“ Finn hastighetsvektoren  $\vec{v}(t)$  og et uttrykk for farten  $v(t)$  til månen i banen rundt sola. Når har månen størst og minst fart i banen sin? ”