

February 11, 2020

## OBLIG 1

### Oppgave 1

“ Vi skal se på den affine avbildningen  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  som speiler ethvert punkt i planet om punktet  $(-1, 1)$ . Finn en  $2 \times 2$ -matrise  $A$  og en vektor  $\vec{c}$  som er slik at  $T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c}$  for alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . ”

Siden søylene  $e_1$  og  $e_2$  er definert ved  $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , og vi vet at vi reflekterer over et punkt vil  $\vec{c}$  være  $2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \implies T(x, y) &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

“ Finn lineariseringen  $T_a \vec{F}$  til funksjonen definert ved

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

”

i punktet  $a = (-1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y) &= \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}, a = (-1, 1). \\ T_{(-1,1)}(\vec{F}(x, y)) &= \vec{F}(-1, 1) + \vec{F}'(-1, 1) \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 2y & -2x \\ 2y & 2y + 2x \end{pmatrix}_{(-1,1)} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 - 2 & 2 \\ 2 & 2 - 2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + 2y \\ 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 + 2 \\ -2 + 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4x + 2y - 6 \\ 2x - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4x + 2y - 3 \\ 2x - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

## Oppgave 2

“

Finn et uttrykk for jordas bane i forhold til sola (kall denne for  $r_1(t)$ ), og et uttrykk for månens bane i forhold til jorda (kall denne for  $r_2(t)$ ). Disse er illustrert i Figur 2. Forklar også at månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j \cos(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m \cos(2\pi \frac{t}{T_m}) \\ r_j \sin(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m \sin(2\pi \frac{t}{T_m}) \end{pmatrix},$$

”

der tiden  $t$  måles i dager.

$$\begin{aligned} r_m &= 0.384, & r_j &= 150, \\ T_m &= 27.3, & T_j &= 365 \\ \omega_m &= \frac{2\pi}{T_m} = \frac{2\pi}{27.3} & \omega_j &= \frac{2\pi}{T_j} = \frac{2\pi}{365} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(t) &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(\omega_j t) \\ r_j \cdot \sin(\omega_j t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(2\pi/365 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(2\pi/365 \cdot t) \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2(t) &= \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(\omega_m t) \\ r_m \cdot \sin(\omega_m t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(2\pi/27.3 \cdot t) \\ r_m \cdot \sin(2\pi/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siden funksjonene er uavhengige, og posisjonen til månen er relativ til jorden kan begge funksjonene summeres, da startposisjonen til månen alltid vil følge jordens sentrum. Dermed blir  $\vec{r}(t) = \vec{r}_j(t) + \vec{r}_m(t)$ .

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_j(t) + \vec{r}_m(t) \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(2\pi/365 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(2\pi/365 \cdot t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(2\pi/27.3 \cdot t) \\ r_m \cdot \sin(2\pi/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(\tau/365 \cdot t) + r_m \cdot \cos(\tau/27.3 \cdot t) \\ r_j \cdot \sin(\tau/365 \cdot t) + r_m \cdot \sin(\tau/27.3 \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

“

Plott  $\vec{r}_1(t)$  og  $\vec{r}(t)$  i samme koordinatsystem, og over en periode på ett år. Klarer du å adskille de to kurvene? Klarer du å gjenkjenne “sykloide-bevegelsene” fra Figur 1 i plottet ditt? Du trenger bare legge ved koden som lager plottet ditt, ikke selve plottet. Du kan selv velge om du

”

bruker Matlab eller Python.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import mpl_toolkits.mplot3d as Axes3D
3 from math import tau, cos, sin
4 import numpy as np
5
6 # CONSTANTS
7 r_m, r_j = 10, 150 # fake moon radius for visual aspect
8 # r_m = 0.384 # real value
9 T_m, T_j = 27.3, 365
10 w_m, w_j = tau / T_m, tau/T_j
11
12 # earth formulas relative to sun
13 r1_x = lambda t: r_j * cos(w_j * t)
14 r1_y = lambda t: r_j * sin(w_j * t)
15 r1 = lambda t: (r1_x(t)**2 + r1_y(t)**2)**(0.5)
16 # moon formulas relative to earth
17 r2_x = lambda t: r_m * cos(w_m * t)
18 r2_y = lambda t: r_m * sin(w_m * t)
19 r2 = lambda t: (r2_x(t)**2 + r2_y(t)**2)**(0.5)
20 # moon formulas relative to sun
21 r_x = lambda t: r1_x(t) + r2_x(t)
22 r_y = lambda t: r1_y(t) + r2_y(t)
23 r = lambda t: (r_x(t)**2 + r_y(t)**2)**(0.5)
24
25 # sample points on time axis
26 times = np.arange(0, 365, step=0.1)
27 # earth values
28 xs_r1 = [r1_x(t) for t in times]
29 ys_r1 = [r1_y(t) for t in times]
30 # moon values
31 xs_r2 = [r2_x(t) for t in times]
32 ys_r2 = [r2_y(t) for t in times]
33 # absolute moon values
34 xs_r = [r_x(t) for t in times]
35 ys_r = [r_y(t) for t in times]
36
37 # 3d figure with orthogonal projection
38 fig = plt.figure()
39 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d', proj_type="ortho")
40 ax.set_xlabel('Time_axis')
41 ax.set_ylabel('X_axis')
42 ax.set_zlabel('Y_axis')
43 ax.view_init(elev=30, azimuth=-30)
44 plt.get_current_fig_manager().window.showMaximized() # fullscreen
45
46 # adding all three formulas (moon, earth, absolute moon)
47 ax.scatter(times, xs_r, ys_r, s=1) # absolute moon
48 ax.scatter(times, xs_r1, ys_r1, s=1) # earth to sun
49 ax.scatter(times, xs_r2, ys_r2, s=1) # moon to earth
50
51 plt.show()

```

Som kommentert har jeg endret radiusen fra jorda til månen for visuelle nytelsen.

□

“

Finn et uttrykk for alle tidspunkter for fullmåne (d.v.s. når jorda ligger på en rett linje mellom månen og sola) og nymåne (månen ligger på en rettlinje mellom jorda og sola). Tidsforskjellen mellom to fullmåner kalles også synodisk omløpstid. Hva er størst av siderisk og synodisk omløpstid?

”

Fullmåner og nymåner vil begge danne en rett linje hvis vi tar solen som utgangspunkt. Det vil si at retningsvektoren fra solen til månen, og retningsvektoren fra solen til jorda vil være like. Det samme gjelder fra jorda til månen. Hvis vi måler arealet mellom to vektorer som danner ei rett linje får vi null. Vi ønsker altså å finne alle punktene ved  $t$  der  $\det\left(\begin{bmatrix} \vec{r}_1(t) \\ \vec{r}_2(t) \end{bmatrix}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} \vec{r}_2(t) \\ \vec{r}_1(t) \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t) & r_m \cdot \sin(\omega_m \cdot t) \\ r_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) & r_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t) \end{pmatrix} &= 0 \\ r_m \cdot \cos(\omega_m \cdot t) \times r_j \cdot \sin(\omega_j \cdot t) - r_m \cdot \sin(\omega_m \cdot t) \times r_j \cdot \cos(\omega_j \cdot t) &= 0 \\ -r_m \cdot r_j \cdot \sin(\omega_m \cdot t - \omega_j \cdot t) &= 0 \\ \sin(\omega_m \cdot t - \omega_j \cdot t) &= 0 \\ \sin((\omega_m - \omega_j)t) &= 0 \\ (\omega_m - \omega_j)t &= \arcsin(0) \\ (\tau/27.3 - \tau/365)t &= \arcsin(0) \\ (365\tau - 27.3\tau)/9964.5 \cdot t &= \arcsin(0) \\ t &= \frac{9964.5 \cdot \arcsin(0)}{337.7\tau} \\ t &\approx 29.507 \cdot \frac{\arcsin(0)}{\tau} \\ t &\approx 29.507 \cdot \frac{n \cdot \tau/2}{\tau} \\ t &\approx 29.507 \cdot \frac{n}{2} = 14.753 \cdot n \end{aligned}$$

Ved  $t_n = 14.753n$ , der  $n \in \mathbb{N}$  vil vi observere enten fullmåne eller nymåne. Siden vi ikke har tatt i betraktning at jorden roterer over sin egen akse, og siden vi vet at månen sin periode over jorden er under en tiendedel (altså ganske mye lavere) av jorden sin periode rundt solen er det nok og si at fullmåne og nymåne kommer annenhvert. Ved å sjekke ved  $t_0$  ser vi at  $\vec{r}_1(t_0) = 150.384$  som tilsvarende, pga. avrunding,  $r_j + r_m$ . Dette er altså en fullmåne. Ved  $n = 2i, i \in \mathbb{N}$  vil vi se fullmåner, og ved  $n = 2i + 1$  vil vi se nymåner.

□

“

Finn hastighetsvektoren  $\vec{v}(t)$  og et uttrykk for farten  $v(t)$  til månen i banen rundt

”

sola. Når har månen størst og minst fart i banen sin?

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos(\omega_j t) + r_m \cdot \cos(\omega_m t) \\ r_j \cdot \sin(\omega_j t) + r_m \cdot \sin(\omega_m t) \end{pmatrix} \quad (6-1)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -r_j \cdot \sin(\omega_j t) \cdot \omega_j - r_m \cdot \sin(\omega_m t) \cdot \omega_m \\ r_j \cdot \cos(\omega_j t) \cdot \omega_j + r_m \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \omega_m \end{pmatrix} \quad (6-2)$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{[-r_j \cdot \sin(\omega_j t) \cdot \omega_j - r_m \cdot \sin(\omega_m t) \cdot \omega_m]^2 + [r_j \cdot \cos(\omega_j t) \cdot \omega_j + r_m \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \omega_m]^2} \quad (6-3)$$

$$v(t) = \sqrt{[-C_j \cdot \sin(\omega_j t) - C_m \cdot \sin(\omega_m t)]^2 + [C_j \cdot \cos(\omega_j t) + C_m \cdot \cos(\omega_m t)]^2}, \text{ where } C_i = \omega_i r_i \quad (6-4)$$

$$v(t) = \sqrt{[C_j^2 \cdot \sin^2(\omega_j t) + 2C_j C_m \cdot \sin(\omega_j t) \sin(\omega_m t) + C_m^2 \cdot \sin^2(\omega_m t)] + [C_j^2 \cdot \cos^2(\omega_j t) + 2C_j C_m \cdot \cos(\omega_j t) \cos(\omega_m t) + C_m^2 \cdot \cos^2(\omega_m t)]} \quad (6-5)$$

$$v(t) = \sqrt{C_j^2 [\sin^2(\omega_j t) + \cos^2(\omega_j t)] + 2C_j C_m [\sin(\omega_j t) \sin(\omega_m t) + \cos(\omega_j t) \cos(\omega_m t)] + C_m^2 [\sin^2(\omega_m t) + \cos^2(\omega_m t)]} \quad (6-6)$$

$$v(t) = \sqrt{C_j^2 + 2C_j C_m \cdot \cos((\omega_m - \omega_j)t) + C_m^2} \quad (6-7)$$

$$v(t) = \sqrt{(\omega_j \cdot r_j)^2 + 2\omega_j \omega_m r_j r_m \cdot \cos((\omega_m - \omega_j)t) + (\omega_m r_m)^2} \quad (6-8)$$

$$v(t) = \sqrt{(150\tau/365)^2 + 2 \cdot 150 \cdot 0.384\tau/365\tau/27.3 \cdot \cos((\tau/27.3 - \tau/365)t) + (0.384\tau/27.3)^2} \quad (6-9)$$

$$v(t) = \sqrt{(30\tau/73)^2 + 115.2\tau^2/9964.5 \cdot \cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) + (0.384\tau/27.3)^2} \quad (6-10)$$

□

Når  $\cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5)$  er lik  $-1$  og  $1$  finner vi maksimum- og minimums-verdiene til farten. Minimumsverdiene finner vi ved:

$$\cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) = -1 \quad (6-11)$$

$$t \cdot 337.7\tau/9964.5 = \arccos(-1) \quad (6-12)$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7\tau} (\tau/2 + n\tau) \quad (6-13)$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7} (n + 1/2) \quad (6-14)$$

Maksimumsverdiene finner vi ved:

$$\cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) = 1 \quad (6-15)$$

$$t \cdot 337.7\tau/9964.5 = \arccos(1) \quad (6-16)$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7\tau} (n\tau) \quad (6-17)$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7} (n) \quad (6-18)$$

□

Submitted by Rolf Vidar Mazunki Hoksas on February 11, 2020.