

September 12, 2019

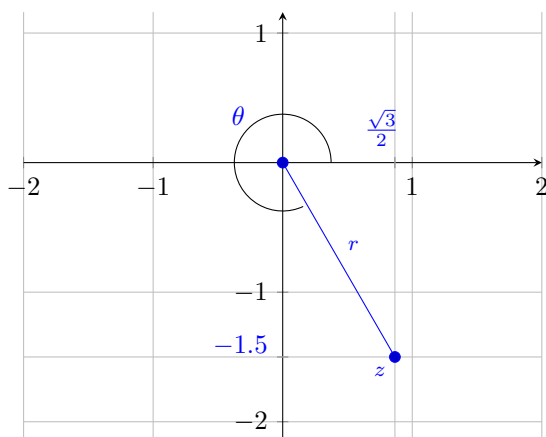
OBLIG 1 — Obligatorisk oppgave 1 av 2

“Skriv det komplekse tallet $z = \frac{6}{\sqrt{3}+3i}$ først på formen $a + ib$ også på polarformen $re^{i\theta}$.”

$$\begin{aligned} z &= \frac{6}{\sqrt{3} + 3i} \\ z &= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}} + i} \\ z &= \frac{2 \times (\sqrt{\frac{1}{3}} - i)}{(\sqrt{\frac{1}{3}} + i) \times (\sqrt{\frac{1}{3}} - i)} \\ z &= \frac{2 \times (\sqrt{\frac{1}{3}} - i)}{\frac{1}{3} - i^2} \\ z &= \frac{2 \times (\sqrt{\frac{1}{3}} - i)}{\frac{4}{3}} \\ z &= \frac{3 \times (\sqrt{\frac{1}{3}} - i)}{2} \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

□

Using $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$:



With Pythagora's Theorem

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ r &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} \\ r &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

■

By the laws of trigonometry

$$\theta' := 2\pi - \theta$$

$$\sin(\theta') = \frac{-1.5}{\sqrt{3}}$$

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{-1.5\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\theta' = -\frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

■

And since z is in the fourth quadrant, as $\operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0$ we know to use θ' :

$$r : \sqrt{3} \wedge \theta : \frac{5\pi}{3} \therefore z = \sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{3}} \equiv \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{3}}$$

□

“
 Finn de to løsningene til likningen $w^2 - w + 1 = \theta$, og bruk disse til å finne alle komplekse løsninger til likningen $z^4 - z^2 + 1 = \theta$. Gi en faktorisering av $z^4 - z^2 + 1$, først i komplekse
 ”
 førstegradspolynomer og så i reelle andregradspolynomer.

□

“
 Finn grensene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{\sqrt{4n^2-1}}$ og $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n} - n)$.
 ”

□

“
 Finn de komplekse tallene z som oppfyller likningen $2|z-1| = |z-4|$ og skisser løsningsmengden i det komplekse planet. (Hint: Sett inn $z = x+iy$ og finn en polynomlikning i x og y for løsningsmengden.)
 ”

□

“
 En følge $\{a_n\}$ er definert ved $a_1 = 3, a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ for $n \geq 1$. Vis at $a_n < 9$ og at $a_{n+1} > a_n$
 ”
 for alle n . Forklar hvorfor følgen konvergerer og finn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

□.

Submitted by Rolf Vidar Hoksaas on September 12, 2019.