Rolf Vidar Mazunki Hoksaas
Institutt for Informatikk
Universitetet i Oslo

February 11, 2020

OBLIG 1

Oppgave 1

> *"Vi skal se på den affine avbildningen $T : R^2 \to R^2$ som speiler ethvertpunkt i planet om punktet $(-1, 1)$. Finn en 2×2-matrise A og en vektor $\vec{c}$ som er slik at $T(x, y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c}$ for alle $x, y \in \mathbb{R}$."*

Siden søylene $\boldsymbol{e_1}$ og $\boldsymbol{e_2}$ er definert ved $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, og vi vet at vi reflekterer over et punkt vil $\vec{c}$ være $\mathbf{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
\vec{c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\implies \boldsymbol{T(x, y)} &= \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□

“ *Finn lineariseringen $T_a\vec{F}$ til funksjonen definert ved*

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy \\ y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

i punktet $a = (-1,1)$. ”

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\vec{F}(x,y)} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x^2 - 2xy} \\ \boldsymbol{y^2 + 2xy} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a = (-1,1).} \\
\boldsymbol{T_{(-1,1)}(\vec{F}(x,y))} &= \boldsymbol{\vec{F}(-1,1) + \vec{F}'(-1,1) \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}) =} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{1+2} \\ \boldsymbol{1-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{2x-2y} & \boldsymbol{-2x} \\ \boldsymbol{2y} & \boldsymbol{2y+2x} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{(-1,1)}} \cdot (\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2-2} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2-2} \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4x+2y} \\ \boldsymbol{2x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{4+2} \\ \boldsymbol{-2+0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4x+2y-6} \\ \boldsymbol{2x-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-4x+2y-3} \\ \boldsymbol{2x-3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Oppgave 2

> *Finn et uttrykk for jordas bane i forhold til sola (kall denne for $r_1(t)$), og et uttrykk for månens bane i forhold til jorda (kall denne for $r_2(t)$). Disse er illustrert i Figur 2. Forklar også at månens bane i forhold til sola kan parametriseres ved*
>
> $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j cos(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m cos(2\pi \frac{t}{T_m}) \\ r_j sin(2\pi \frac{t}{T_j}) + r_m sin(2\pi \frac{t}{T_m}) \end{pmatrix},$$
>
> *der tiden t måles i dager.*

$$\begin{aligned} r_m &= 0.384, & r_j &= 150, \\ T_m &= 27.3, & T_j &= 365 \\ \omega_m &= \frac{2\pi}{T_m} = \frac{2\pi}{27.3} & \omega_j &= \frac{2\pi}{T_j} = \frac{2\pi}{365} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r_1}(t) &= \begin{pmatrix} r_j \cdot cos(\omega_j t) \\ r_j \cdot sin(\omega_j t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_j \cdot cos(^{2\pi}/_{365} \cdot t) \\ r_j \cdot sin(^{2\pi}/_{365} \cdot t) \end{pmatrix} \\ \vec{r_2}(t) &= \begin{pmatrix} r_m \cdot cos(\omega_m t) \\ r_m \cdot sin(\omega_m t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_m \cdot cos(^{2\pi}/_{27.3} \cdot t) \\ r_m \cdot sin(^{2\pi}/_{27.3} \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siden funskjonene er uavhengige, og posisjonen til månen er relativ til jorden kan begge funsjonene summeres, da startposisjonen til månen alltid vil følge jordens sentrum. Dermed blir $\vec{r}(t) = \vec{r_j}(t) + \vec{r_m}(t)$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r_j}(t) + \vec{r_m}(t) \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot cos(^{2\pi}/_{365} \cdot t) \\ r_j \cdot sin(^{2\pi}/_{365} \cdot t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_m \cdot cos(^{2\pi}/_{27.3} \cdot t) \\ r_m \cdot sin(^{2\pi}/_{27.3} \cdot t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_j \cdot cos(^{\tau}/_{365} \cdot t) + r_m \cdot cos(^{\tau}/_{27.3} \cdot t) \\ r_j \cdot sin(^{\tau}/_{365} \cdot t) + r_m \cdot sin(^{\tau}/_{27.3} \cdot t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

> *"Plott $\vec{r}_1(t)$ og $\vec{r}(t)$ i samme koordinatsystem, og over en periode på ett år. Klarer du å adskille de to kurvene? Klarer du å gjenkjenne "sykloide-bevegelsene" fra Figur 1 i plottet ditt? Du trenger bare legge ved koden som lager plottet ditt, ikke selve plottet. Du kan selv velge om du bruker Matlab eller Python."*

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import mpl_toolkits.mplot3d as Axes3D
from math import tau, cos, sin
import numpy as np

# CONSTANTS
r_m, r_j = 10, 150  # fake moon radius for visual aspect
# r_m = 0.384  # real value
T_m, T_j = 27.3, 365
w_m, w_j = tau / T_m, tau/T_j

# earth formulas relative to sun
r1_x = lambda t: r_j * cos(w_j * t)
r1_y = lambda t: r_j * sin(w_j * t)
r1 = lambda t: (r1_x(t)**2 + r1_y(t)**2)**(0.5)
# moon formulas relative to earth
r2_x = lambda t: r_m * cos(w_m * t)
r2_y = lambda t: r_m * sin(w_m * t)
r2 = lambda t: (r2_x(t)**2 + r2_y(t)**2)**(0.5)
# moon formulas relative to sun
r_x = lambda t: r1_x(t) + r2_x(t)
r_y = lambda t: r1_y(t) + r2_y(t)
r = lambda t: (r_x(t)**2 + r_y(t)**2)**(0.5)

# sample points on time axis
times = np.arange(0, 365, step=0.1)
# earth values
xs_r1 = [r1_x(t) for t in times]
ys_r1 = [r1_y(t) for t in times]
# moon values
xs_r2 = [r2_x(t) for t in times]
ys_r2 = [r2_y(t) for t in times]
# absolute moon values
xs_r = [r_x(t) for t in times]
ys_r = [r_y(t) for t in times]

# 3d figure with orthogonal projection
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d',proj_type="ortho")
ax.set_xlabel('Time axis')
ax.set_ylabel('X axis')
ax.set_zlabel('Y axis')
ax.view_init(elev=30, azim=-30)
plt.get_current_fig_manager().window.showMaximized()  # fullscreen

# adding all three formulas (moon, earth, absolute moon)
ax.scatter(times, xs_r,  ys_r,  s=1) # absolute moon
ax.scatter(times, xs_r1, ys_r1, s=1) # earth to sun
ax.scatter(times, xs_r2, ys_r2, s=1) # moon to earth

plt.show()
```

Som kommentert har jeg endret radiusen fra jorda til månen for visuelle nytelsen. □

"*Finn et uttrykk for alle tidspunkter for fullmåne (d.v.s. når jorda ligger på en rett linje mellom månen og sola) og nymåne (månen ligger på en rettlinje mellom jorda og sola). Tidsforskjellen mellom to fullmåner kalles også synodisk omløpstid. Hva er størst av siderisk og synodisk omløpstid?*"

Fullmåner og nymåner vil begge danne en rett linje hvis vi tar solen som utgangspunkt. Det vil si at retningsvektoren fra solen til månen, og retningsvektoren fra solen til jorda vil være like. Det samme gjelder fra jorda til månen. Hvis vi måler arealet mellom to vektorer som danner ei rett linje får vi null. Vi ønsker altså å finne alle punktene ved $\boldsymbol{t}$ der $\boldsymbol{det}(\begin{bmatrix}\vec{r_1}(t)\\ \vec{r_2}(t)\end{bmatrix}) = 0$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}\vec{r_2}(t)\\ \vec{r_1}(t)\end{vmatrix} &= 0\\
\begin{pmatrix} r_m \cdot cos(\omega_m \cdot t) & r_m \cdot sin(\omega_m \cdot t)\\ r_j \cdot cos(\omega_j \cdot t) & r_j \cdot sin(\omega_j \cdot t)\end{pmatrix} &= 0\\
r_m \cdot cos(\omega_m \cdot t) \times r_j \cdot sin(\omega_j \cdot t) - r_m \cdot sin(\omega_m \cdot t) \times r_j \cdot cos(\omega_j \cdot t) &= 0\\
-r_m \cdot r_j \cdot sin(w_m \cdot t - w_j \cdot t) &= 0\\
sin(w_m \cdot t - w_j \cdot t) &= 0\\
sin((w_m - w_j)t) &= 0\\
(w_m - w_j)t &= arcsin(0)\\
({}^{\tau}/_{27.3} - {}^{\tau}/_{365})t &= arcsin(0)\\
{}^{(365\tau - 27.3\tau)}/_{9964.5} \cdot t &= arcsin(0)\\
t &= \frac{9964.5 \cdot arcsin(0)}{337.7\tau}\\
t &\approx 29.507 \cdot \frac{arcsin(0)}{\tau}\\
t &\approx 29.507 \cdot \frac{n \cdot {}^{\tau}/_{2}}{\tau}\\
t &\approx 29.507 \cdot \frac{n}{2} = 14.753 \cdot n
\end{aligned}$$

Ved $\boldsymbol{t_n = 14.753n}$, der $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ vil vi observere enten fullmåne eller nymåne. Siden vi ikke har tatt i betraktning at jorden roterer over sin egen akse, og siden vi vet at månen sin periode over jorden er under en tiendedel (altså ganske mye lavere) av jorden sin periode rundt solen er det nok og si at fullmåne og nymåne kommer annehvert. Ved å sjekke ved $\boldsymbol{t_0}$ ser vi at $\boldsymbol{\vec{r_1}(t_0) = 150.384}$ som tilsvarer, pga. avrunding, $\boldsymbol{r_j + r_m}$. Dette er altså en fullmåne. Ved $\boldsymbol{n = 2i, i} \in \mathbb{N}$ vil vi se fullmåner, og ved $\boldsymbol{n = 2i + 1}$ vil vi se nymåner.

Den synodiske omløpstiden er større en den sideriske, i og med at månen månen må, i tilleg til å gårundt jorda, må den også følge etter jorda, og dermed tar en syonodisk runde mer en $\boldsymbol{\tau}$ radianer. □

> *Finn hastighetsvektoren $\vec{v}(t)$ og et uttrykk for farten $v(t)$ til månen i banen rundt sola. Når har månen størst og minst fart i banen sin?*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_j \cdot cos(\omega_j t) + r_m \cdot cos(\omega_m t) \\ r_j \cdot sin(\omega_j t) + r_m \cdot sin(\omega_m t) \end{pmatrix} \tag{6-1}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -r_j \cdot sin(\omega_j t) \cdot \omega_j - r_m \cdot sin(\omega_m t) \cdot \omega_m \\ r_j \cdot cos(\omega_j t) \cdot \omega_j + r_m \cdot cos(\omega_m t) \cdot \omega_m \end{pmatrix} \tag{6-2}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{[-r_j \cdot sin(\omega_j t) \cdot \omega_j - r_m \cdot sin(\omega_m t) \cdot \omega_m]^2 + [r_j \cdot cos(\omega_j t) \cdot \omega_j + r_m \cdot cos(\omega_m t) \cdot \omega_m]^2} \tag{6-3}$$

$$v(t) = \sqrt{[-C_j \cdot sin(\omega_j t) - C_m \cdot sin(\omega_m t)]^2 + [C_j \cdot cos(\omega_j t) + C_m \cdot cos(\omega_m t)]^2}, \text{ where } C_i = \omega_i r_i \tag{6-4}$$

$$v(t) = \sqrt{\begin{array}{l}[{C_j}^2 \cdot sin^2(\omega_j t) + 2C_j C_m \cdot sin(w_j t) sin(w_m t) + {C_m}^2 \cdot sin^2(\omega_m t)] + \\ [{C_j}^2 \cdot cos^2(\omega_j t) + 2C_j C_m \cdot cos(w_j t) cos(w_m t) + {C_m}^2 \cdot cos^2(\omega_m t)]\end{array}} \tag{6-5}$$

$$v(t) = \sqrt{\begin{array}{l}{C_j}^2[sin^2(\omega_j t) + cos^2(\omega_j t)] + \\ 2C_j C_m[sin(w_j t) sin(w_m t) + cos(w_j t) cos(w_m t)] + \\ {C_m}^2[sin^2(\omega_m t) + cos^2(\omega_m t)]\end{array}} \tag{6-6}$$

$$v(t) = \sqrt{{C_j}^2 + 2C_j C_m \cdot cos((\omega_m - \omega_j)t) + {C_m}^2} \tag{6-7}$$

$$v(t) = \sqrt{(\omega_j \cdot r_j)^2 + 2\omega_j \omega_m r_j r_m \cdot cos((\omega_m - \omega_j)t) + (\omega_m r_m)^2} \tag{6-8}$$

$$v(t) = \sqrt{(150\tau/365)^2 + 2 \cdot 150 \cdot 0.384\tau/365\tau/27.3 \cdot cos((\tau/27.3 - \tau/365)t) + (0.384\tau/27.3)^2} \tag{6-9}$$

$$v(t) = \sqrt{(30\tau/73)^2 + 115.2\tau^2/9964.5 \cdot cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) + (0.384\tau/27.3)^2} \tag{6-10}$$

□

Når $cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5)$ er lik -1 og 1 finner vi maksimum- og minimums-verdiene til farten. Minimumsverdiene finner vi ved:

$$cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) = -1 \tag{6-11}$$

$$t \cdot 337.7\tau/9964.5 = arccos(-1) \tag{6-12}$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7\tau}(\tau/2 + n\tau) \tag{6-13}$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7}(n + 1/2) \tag{6-14}$$

Maksimumsverdiene finner vi ved:

$$cos(t \cdot 337.7\tau/9964.5) = 1 \tag{6-15}$$

$$t \cdot 337.7\tau/9964.5 = arccos(1) \tag{6-16}$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7\tau}(n\tau) \tag{6-17}$$

$$t_n = \frac{9964.5}{337.7}(n) \tag{6-18}$$

□

Submitted by Rolf Vidar Mazunki Hoksaas *on February 11, 2020.*