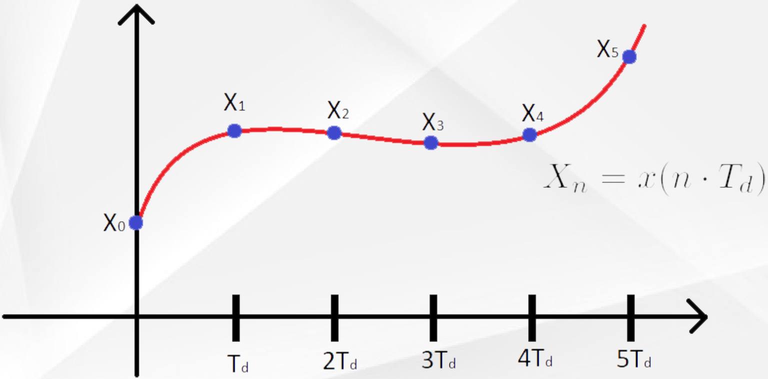
Własności stabilnych systemów dyskretnych

Paweł Szczepaniak, Marcin Gruchała, Michał Bagiński

PLAN PREZENTACJI

Systemy dyskretne - definicja

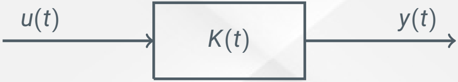
System dyskretny to system, którego sygnał przyjmuje wartości tylko dla określonych (dyskretnych) argumentów czasu. Odległość w czasie pomiędzy tymi argumentami nazywana jest okresem próbkowania.



Model systemu dyskretnego

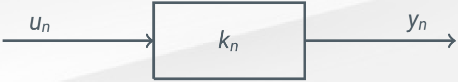
W systemie ciągłym wyjście systemu było splotem odpowiedzi impulsowej $K(t)$ i wejścia układu $u(t)$.

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau)K(\tau)d\tau$$



Analogicznie dla systemów dyskretnych wyjście systemu jest splotem dyskretnym odpowiedzi impulsowej k_n i wejścia układu u_n.

$$y_n = \sum_{\tau=0}^{\infty} u_{n-\tau}k_\tau$$



Model systemu dyskretnego

Zasadniczym opisem systemu dyskretnego jest równanie różnicowe

$$a_m y_n + a_{m-1} y_{n-1} + \cdots + a_1 y_{n-(m-1)} + a_0 y_{n-m} = b_l u_{n-(m-l)} + \cdots + b_1 U_{n-(m-1)} + b_0 u_{n-m}$$

Warunkiem początkowym jest

$$y_{-m}, \cdots, y_{-2}, y_{-1}$$

Do wyznaczenia rozwiązania równania różnicowego wykorzystujemy transformację $\mathcal{Z}$

$$Y(Z) = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0} U(z) + \frac{W(z)}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}$$

Gdzie $W(z)$ to wielomian warunków początkowych.

Politechnika Wrocławska

Ogólna definicja stabilności to:
Jeśli, przy zerowym pobudzeniu i każdym warunku początkowym,

$$\lim_{n \to \infty} y_n = 0$$

to system nazywamy stabilnym.
W przypadku systemów dyskretnych stabilność ich zależy od biegunów transmitancji systemu:

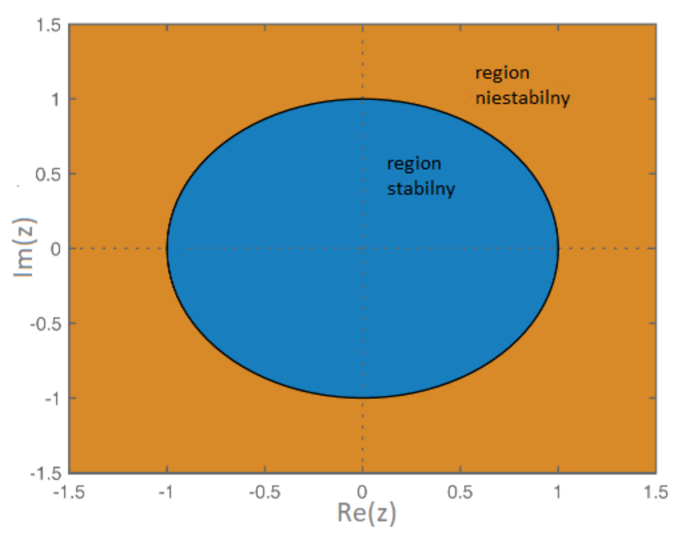
$$K(z) = \frac{b_l z^l + b_{l-1} z^{l-1} + \cdots + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_0}$$

System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$|z_1| < 1, |z_2| < 1, \ldots, |z_m| < 1$$

Oznacza to że po przeniesieniu biegunów transmitancji na płaszczyznę liczb zespolonych system będzie stabilny gdy wszystkie bieguny jego transmitancji leżą wewnątrz koła o promieniu 1 i środku $z = 0$.

Stabilność systemu dyskretnego



Własności stabilnych systemów.

Własność związana z odpowiedzią impulsową
Odpowiedź impulsowa układu dyskretnego posiada obie z podanych własności:

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |k_n| < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny.

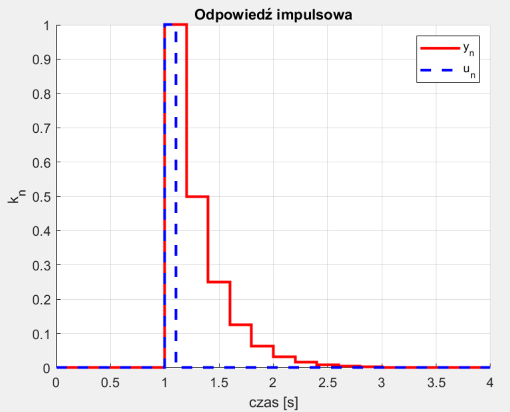
Politechnika Wrocławska

Przykład

Gdy systemu o transmitancji:

$$K(Z) = \frac{2z}{2z-1}$$

pobudzimy deltą Diraca otrzymamy taką odpowiedź impulsową:



Sprawdzenie przykładu

$$u_n = \delta_n$$

$$U(z) = 1$$

$$Y(z) = K(z)U(z) = \frac{2z}{2z-1} = K(z)$$

$$k_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 0$$

Własności stabilnych systemów

Własność związana z odpowiedzią skokową.
Jeśli system jest stabilny, istnieje również wzmocnienie systemu w stanie ustalonym. Zatem poniższa granica istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy system jest stabilny

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n$$

Ponadto, w systemie stabilnym wzmocnienie w stanie ustalonym jest równe:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = K(1) = G$$

Oznacza to również, że tylko układy stabilne z systemów dyskretnych posiadają charakterystykę statyczną tzn. charakterystykę wiążącą wysokość skoku na wejściu z poziomem, na którym ustala się reakcja systemu. Można ją wyrazić wzorem:

$$y = K(1)u$$

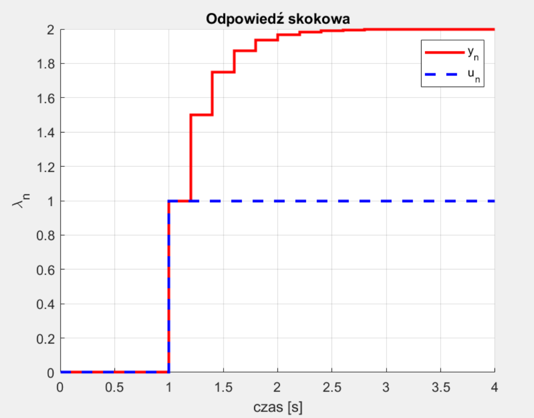
Politechnika Wrocławska

Przykład

Gdy systemu o transmitancji:

$$K(Z) = \frac{2z}{2z-1}$$

pobudzimy skokiem jednostkowym to otrzymamy taką odpowiedź skokową:



Sprawdzenie przykładu

$$u_n = 1_n$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = K(z)U(z) = \frac{2z}{2z-1}\frac{z}{z-1} = \Lambda(z)$$

$$\lambda_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 2 = G$$

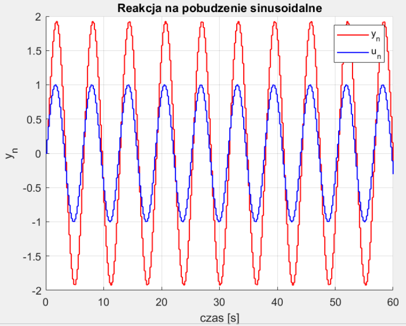
$$K(1) = 2$$

Własności stabilnych systemów

Reakcja na pobudzenie sinusoidalne.
Własności składowej ustalonej reakcji systemu stabilnego na pobudzenie ciągiem $u_n = sin\omega n$, czyli dyskretną sinusoidą:

- jest dyskretną sinusoidą o tej samej pulsacji co pobudzenie,
- wzmocnienie amplitudowe zależy od ω i jest równe $|K(e^{j\omega})|$,
- przesunięcie fazowe zależy od ω i jest równe $|argK(e^{j\omega})|$.

Powyższe własności można wyprowadzić dokonując transmitancji widmowej układu.

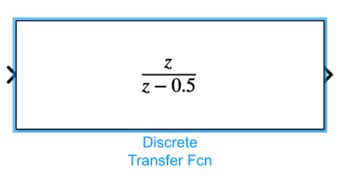


Własności stabilnych systemów

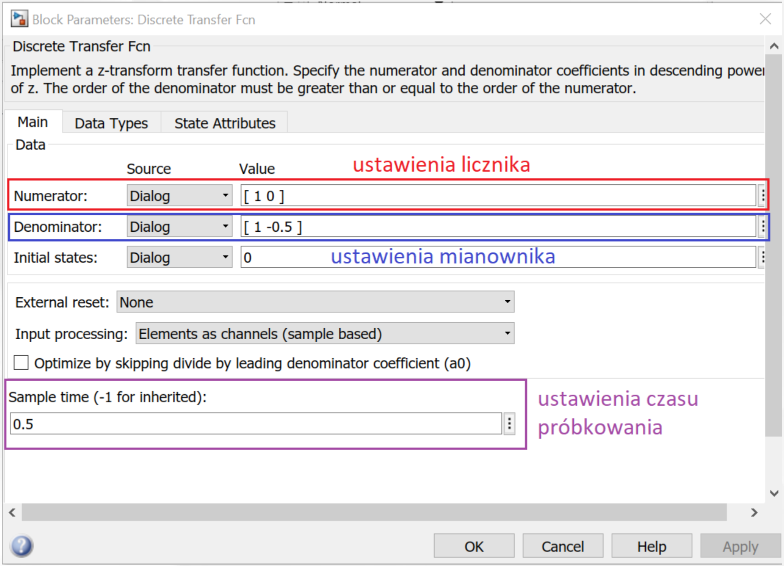
Równanie fazowe.
Równanie fazowe jest stabilne, wtedy i tylko wtedy gdy jego system jest stabilny.

Istnieje również własność mówiąca o tym, że stabilne systemy dyskretne są jednocześnie systemami BIBO. Oznacza to, że podając ograniczone wejście na wyjście również będzie ograniczone.

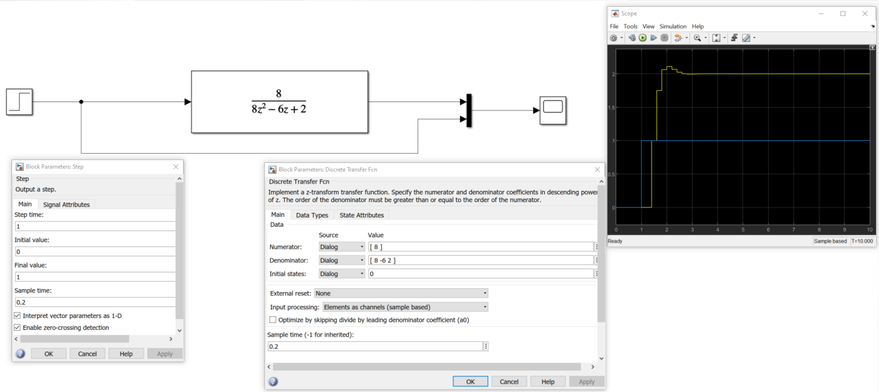
Systemu dyskretne można modelować korzystając z Matlaba oraz Simulinka. W Simulinku do modelowania systemu dyskretnego można użyć bloczka *Discrete Transfer Fcn*.



Manipulując parametrami bloczka możemy zmieniać cechy systemu oraz czas próbkowania. Dodając jakiś bloczek sygnału wejścia np. *Step* można badać sygnał wyjścia za pomocą bloczka *Scope*.


Block Parameters: Discrete Transfer Fcn
Discrete Transfer Fcn
Implement a z-transform transfer function. Specify the numerator and denominator coefficients in descending power of z. The order of the denominator must be greater than or equal to the order of the numerator.
Main
Data Types
State Attributes
Data
Source
Value
ustawienia licznika
Numerator:
Dialog
[1 0]
Denominator:
Dialog
[1 -0.5]
Initial states:
Dialog
0
ustawienia mianownika
External reset:
None
Input processing:
Elements as channels (sample based)
Optimize by skipping divide by leading denominator coefficient (a0)
Sample time (-1 for inherited):
0.5
ustawienia czasu próbkowania
OK
Cancel
Help
Apply

Modelowanie systemów dyskretnych w Simulink



Dziękujemy za uwagę

Bibliografia

1. Podstawy automatyki, Włodzimierz Greblicki, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej Wrocław 2006
2. https://pl.wikipedia.org/wiki/Uk%C%82ad_dyskretny
3. https://www.mathworks.com/help/control/ref/pzmap.html