Teoria Regulacji - ZADANIE 8

Michał Bagiński, 241587

31 maj 2020

1 Zadanie 2

1.1 podpunkt a) dla kryterium Hurwitza

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = K_o(s) \cdot K_R(s) = \frac{k}{s^3+6s^2+11s+6}$

$K_z(s) = \frac{K_{otw}(s)}{1+K_{otw}(s)} = \frac{\frac{k}{s^3+6s^2+11s+6}}{\frac{s^3+6s^2+11s+6+k}{s^3+6s^2+11s+6}} = \frac{k}{s^3+6s^2+11s+6+k}$

$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} 6 & 6+k & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6+k \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 6, \Delta_2 = 66-6-k = 60-k, \Delta_3 = (60-k)(6+k)$

$\Delta_2 > 0 \leftrightarrow 60-k > 0 \rightarrow 60 > k$

$\Delta_3 > 0 \leftrightarrow (60-k)(6+k) > 0 \rightarrow k > -6 \wedge k < 60$

Aby układ był stabilny k musi należeć do podanego przedziału: $k \in (-6; 60)$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{k}{s^3+6s^2+11s+6}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+6s^2+11s+6+k}$

$\epsilon_{ust} = \frac{6}{6+k}$

1.2 podpunkt a) dla kryterium Nyquista

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = K_o(s) \cdot K_R(s) = \frac{k}{s^3+6s^2+11s+6}$

$K_{otw}(j\omega) = \frac{k}{j^3\omega^3+6j^2\omega^2+11j\omega+6} = \frac{k}{-j\omega^3-6\omega^2+11k\omega+6}$

$K_{otw}(j\omega) = k\frac{1}{-6\omega^2+6-j\omega^3+11j\omega} \cdot \frac{-6\omega^2+6+j\omega^3-11j\omega}{-6\omega^2+6+j\omega^3-11j\omega} = k \cdot \frac{-6\omega^2+6+j\omega^3-11j\omega}{(-6\omega^2+6)^2+(\omega^3-11\omega)^2}$

$Re(K_{otw}) = 0 \leftrightarrow -6k(\omega^2-1) = 0 \rightarrow k = 0 \vee \omega_1 = 1 \vee \omega_2 = -1$

$\omega \geqslant 0$ **zatem** ω_2 **nie należy**

$Im(K_{otw}) = 0 \leftrightarrow \omega(\omega^2-11) = 0 \rightarrow \omega_3 = 0 \vee \omega_4 = \sqrt{11} \vee \omega_5 = -\sqrt{11}$

ω	Re	Im
1	0	$-\frac{k}{10}$
$\sqrt{11}$	$-\frac{k}{60}$	0

$\omega \geqslant 0$ **zatem** ω_5 **nie należy**

$k \geqslant 0 : -\frac{k}{60} \neq -1 \rightarrow k \neq 60, -\frac{k}{60} \geqslant -1 \rightarrow k < 60$

$k < 0 : \frac{k}{6} \neq -1 \rightarrow k \neq -1, \frac{k}{6} > -1 \rightarrow k > -6$

Łączac rozwiązania wynika, że aby układ był stabilny to k: $k \in (-6; 60)$

1.3 podpunkt b) dla kryterium Hurwitza

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = K_o(s) \cdot K_R(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s+2)}$

$K_z(s) = \frac{K_{otw}(s)}{1+K_{otw}(s)} = \frac{\frac{k}{(s+1)^2(s+2)}}{1+\frac{k}{(s+1)^2(s+2)}} = \frac{k}{s^3+4s^2+5s+2+k}$

$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} 4 & 2+k & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2+k \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 4, \Delta_2 = 20 - 2 - k = 18 - k, \Delta_3 = (18-k)(2+k)$

$\Delta_2 > 0 \leftrightarrow 18 - k > 0 \rightarrow 18 > k$

$\Delta_3 > 0 \leftrightarrow (18-k)(2+k) > 0 \rightarrow k > -2 \wedge k < 18$

Aby układ był stabilny k **musi należeć do podanego przedziału:** $k \in (-2; 18)$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{k}{(s+1)^2(s+2)}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+4s^2+5s+2}{s^3+4s^2+5s+2+k}$

$\epsilon_{ust} = \frac{2}{2+k}$

1.4 podpunkt b) dla kryterium Nyquista

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = K_o(s) \cdot K_R(s) = \frac{k}{(s+1)^2(s+2)}$

$K_{otw}(j\omega) = \frac{k}{j^3\omega^3+4j^2\omega^2+5j\omega+2} = \frac{k}{-j\omega^3-4\omega^2+5j\omega+2}$

$K_{otw}(j\omega) = k \cdot \frac{1}{-j\omega^3-4\omega^2+5j\omega+2} \frac{j\omega^3-4\omega^2-5j\omega+2}{j\omega^3-4\omega^2-5j\omega+2} = k\frac{j\omega^3-4\omega^2-5j\omega+2}{(-4\omega^2+2)^2+(\omega^3-5\omega)^2}$

$Re(K_{otw}(j\omega)) = 0 \leftrightarrow k(-4\omega^2+2) = 0 \rightarrow k = 0 \vee \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \omega_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\omega \geqslant 0 \rightarrow \omega_2$ **nie należy**

$Im(K_{otw}(j\omega) = 0 \leftrightarrow \omega(\omega^2-5) = 0 \rightarrow \omega_3 = 0 \vee \omega_4 = \sqrt{5} \vee \omega_5 = -\sqrt{5}$

ω	Re	Im
0	$\frac{k}{2}$	0
$\sqrt{5}$	$-\frac{k}{18}$	0

$\omega \geqslant 0 \rightarrow \omega_5$ **nie należy**

$k \geqslant 0 : -\frac{k}{18} \neq -1 \rightarrow k \neq 18, -\frac{-}{18} \geqslant -1 \rightarrow k \geqslant 18$

$k < 0 : \frac{k}{2} \neq -1 \rightarrow k \neq -2, \frac{k}{2} > -1 \rightarrow k > -2$

Łączac rozwiązania wynika, że aby układ był stabilny to k: $k \in (-2; 18)$

2 Zadanie 3

2.1 podpunkt a)

$K_o(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2}$

$K_z(s) = \frac{\frac{k}{s(s+1)(s+2}}{1+\frac{k}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{k}{s(s+1)(s+2)+k} = \frac{k}{s^3+3s^2+2s+k}$

$$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 3, \Delta_2 = 6-k, \Delta_3 = (6-k)k$$

$\Delta_2 > 0 \leftrightarrow 6-k > 0 \rightarrow 6 > k \wedge \Delta_3 > 0 \leftrightarrow (6-k)k \rightarrow 6 > k \wedge 0 < k$

Aby układ był stabilny k **musi należeć do podanego przedziału:** $k \in (0; 6)$

Wyznaczanie uchybu stabilnego dla podanego $y_0(t)$

2.1.1 $y_0(t) = 1 \rightarrow Y_0(s) = \frac{1}{s}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{k}{s^3+3s^2+2s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k} = 0$

Licznik dąży do zera zatem granica jest równa zero.

2.1.2 $y_0(t) = t \rightarrow Y_0(s) = \frac{1}{s^2}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{s^3+3s^2+2s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+3s^2+2s}{s^4+3s^3+2s^2+ks}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

2.1.3 $y_0(t) = t^2 \rightarrow Y_0(s) = \frac{2}{s^3}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

2.1.4 $y_0(t) = 1+t \rightarrow Y_0(s) = \frac{s+1}{s^2}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

2.2 podpunkt b)

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, K_R(s) = \frac{k}{s}$

$K_{otw}(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2}$

$K_z(s) = \frac{\frac{k}{s(s+1)(s+2}}{1+\frac{k}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{k}{s(s+1)(s+2)+k} = \frac{k}{s^3+3s^2+2s+k}$

$$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} 3 & k & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 3, \Delta_2 = 6-k, \Delta_3 = (6-k)k$$

$\Delta_2 > 0 \leftrightarrow 6-k > 0 \rightarrow 6 > k \wedge \Delta_3 > 0 \leftrightarrow (6-k)k \rightarrow 6 > k \wedge 0 < k$

Aby układ był stabilny k musi należeć do podanego przedziału: $k \in (0;6)$

Wyznaczanie uchybu stabilnego dla podanego $y_0(t)$

2.2.1 $y_0(t) = 1 \rightarrow Y_0(s) = \frac{1}{s}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{k}{s^3+3s^2+2s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k} = 0$

Licznik dąży do zera zatem granica jest równa zero.

2.2.2 $y_0(t) = t \rightarrow Y_0(s) = \frac{1}{s^2}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{s^3+3s^2+2s}} = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+3s^2+2s}{s^4+3s^3+2s^2+ks}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

2.2.3 $y_0(t) = t^2 \rightarrow Y_0(s) = \frac{2}{s^3}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2} \cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

2.2.4 $y_0(t) = 1+t \rightarrow Y_0(s) = \frac{s+1}{s^2}$

$\epsilon_{ust} = \lim_{t\to\infty} \epsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{s} \cdot \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+2s+k}$

Mianownik dąży do zera zatem granica nie istnieje.

Wynika z tego, że jeśli iloczyn transmitancji regulatorów oraz transmitancji obiektów są sobie równe dla różnych układów to analiza tych układów bedzie identyczna.

3 Zadanie 4

$K_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-3)}, K_R(s) = k$

$K_{otw}(s) = \frac{k}{(s+1)(s+2)(s-3)} = \frac{k}{s^3-7s+6}$

$K_z(s) = \frac{\frac{k}{s^3-7s+6}}{1+\frac{k}{s^3-7s+6}} = \frac{k}{s^3-7s+6+k}$

$$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} 0 & 6+k & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 6+k \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -6-k, \Delta_3 = (-6-k)(6+k)$$

Z właściwości kryterium stabilności Hurwitza oraz kryterium o znakach współczynników wynika, że układ jest niestabilny i na stabilność nie ma wpływu współczynnik k. W przypadku układów niestabilnych nie ma uchybu w stanie ustalonym ponieważ granica nie istnieje.