NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES;

PAR A. M. LEGENDRE,
Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Éditions stéréotypes, rue de Thionville, n° 116.

AN XIII — 1805.

NOUVELLES MÉTHODES
POUR LA DÉTERMINATION
DES ORBITES DES COMÈTES.

Le problême dont je m'occuperai dans ce Mémoire, consiste à déterminer l'orbite d'une comète d'après trois observations données de sa longitude et de sa latitude. Depuis Newton, qui le premier a donné pour sa solution des constructions géométriques fort ingénieuses, ce problême a fait successivement l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres.

Parmi ceux qui l'ont traité avec le plus de succès, on doit distinguer particulièrement Lambert, qui a donné de très-beaux théorêmes sur le mouvement des planètes et des comètes dans son ouvrage intitulé : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, et dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1771.

Dans ce même recueil, année 1778, La Grange a discuté les principales méthodes connues jusqu'alors, et après avoir fait connoître les causes de leur imperfection, il a donné l'analyse complète du problême, fondée sur une belle théorie à laquelle il a ajouté ensuite de nouveaux développemens dans le volume de 1783. Cette méthode n'auroit sans doute rien laissé à desirer, si son illustre auteur en eût fait l'application à des exemples, ce qui l'auroit conduit lui-même à y apporter les modifications nécessaires pour en rendre l'usage facile dans la pratique.

La Place, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1780, a proposé une autre méthode qui revient à supposer connue une portion infiniment petite de la trajectoire apparente de la comète, et à conclure de cette portion la grandeur et la position de la trajectoire vraie. Par la supposition des quantités infiniment petites, les formules se simplifient et conduisent à une solution peu compliquée; mais la difficulté est de déterminer avec précision les coëfficiens différentiels du premier et du second ordre, tant de la longitude que de la latitude.

Il semble, au premier coup-d'œil, qu'en liant ensemble plusieurs observations par la méthode des interpolations, on en déduira les coëfficiens dont il s'agit avec d'autant plus d'exactitude qu'il y a plus d'observations combinées; et cela auroit lieu en effet, si les observations étoient exemptes d'erreur, ou si les lieux de la comète étoient calculés d'après une formule exacte; mais il en est autrement dans l'état réel des choses. Comme toutes les observations sont affectées de quelqu'erreur, et que cette erreur ne suit aucune loi d'une observation à l'autre, il s'ensuit que plus on combinera d'observations, et plus l'erreur des coëfficiens différentiels qui en sont déduits pourra devenir sensible.

En effet, considérons trois observations de longitude a', a'', a''', faites à des intervalles de temps que pour plus de simplicité nous supposerons égaux à l'unité. Ces longitudes répondront aux temps $-1, 0, +1$, et la longitude pour un temps quelconque t compris entre -1 et $+1$, aura pour expression générale,

$$x = a'' + \tfrac{1}{2}(a''' - a')t + \tfrac{1}{2}(a''' - 2a'' + a')t^2;$$

d'où l'on déduit les coëfficiens différentiels

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \tfrac{1}{2}(a''' - a') \\ \frac{ddx}{dt^2} &= a''' - 2a'' + a'. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Considérons ensuite les cinq longitudes a, a', a'', a''', a^{IV}, qui répondent pareillement aux temps -2, -1, 0, $+1$, $+2$, respectivement; on en déduira la longitude au bout du temps t, $x = a'' + At + Bt^2 + Ct^3 + \&c.$, où l'on aura

$$\left.\begin{aligned} \text{A ou } \frac{dx}{dt} &= \tfrac{2}{3}(a''' - a') - \tfrac{1}{12}(a^{\text{IV}} - a) \\ 2\text{B ou } \frac{ddx}{dt^2} &= \tfrac{4}{3}(a''' - 2a'' + a') - \tfrac{1}{12}(a^{\text{IV}} - 2a'' + a). \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Supposons maintenant que l'erreur sur la longitude a' soit $\delta a'$; alors, suivant les équations (a), les erreurs des coëfficiens différentiels, dues à cette cause, seront

$$\delta\frac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2}\delta a', \quad \delta\frac{ddx}{dt^2} = \delta a'.$$

Mais par les équations (b) les erreurs de ces coëfficiens seroient

$$\delta\frac{dx}{dt} = -\tfrac{2}{3}\delta a', \quad \delta\frac{ddx}{dt^2} = \tfrac{4}{3}\delta a';$$

d'où l'on voit que dans le cas de cinq observations combinées, l'erreur des coëfficiens différentiels, due à la cause mentionnée, est plus grande dans le rapport de 4 à 3, que celle qui a lieu dans le cas de trois observations. Elle augmenteroit encore si on combinoit ensemble plus de cinq observations.

D'après ces réflexions, j'ai pensé que ce qu'il y avoit de mieux à faire dans le problême des comètes, étoit de partir des données immédiates de l'observation, et d'employer tous les moyens pour simplifier autant qu'il est possible, les formules et les équations qui servent à déterminer les élémens de l'orbite. C'est l'objet que je me suis proposé dans ce Mémoire.

Je l'ai divisé en deux parties : la première comprend l'analyse générale du problême, avec deux applications détaillées de la solution qui en résulte aux comètes de 1781 et de 1769.

Dans l'analyse je suppose, comme cela est indispensable, que les trois observations données ne comprennent pas un intervalle de temps de plus de 15 à 20 jours, afin que les séries qui expriment les coordonnées, tant de l'orbite de la comète que de celle de la terre, soient suffisamment convergentes, et qu'on ne soit pas obligé d'employer les termes qui contiennent des puissances du temps supérieures à la troisième.

Après avoir mis les équations générales du problême sous la forme la plus simple dont elles paroissent susceptibles, je développe en particulier, avec beaucoup d'étendue, le cas où les trois observations sont faites à des intervalles de temps égaux. Cette supposition, qui ne restreint guère la généralité du problême, simplifie beaucoup les formules, et contribue même à les rendre plus exactes, par la disparition de plusieurs termes dont il faudroit tenir compte, si les intervalles de temps entre les observations n'étoient pas égaux.

Lorsqu'on ne fait aucune supposition sur la nature de l'orbite, le problême offre précisément autant d'équations que d'inconnues ; mais alors il y a une circonstance dans laquelle les formules pourroient ne pas donner des résultats assez exacts. C'est lorsque l'orbite apparente est située à très-peu près dans le plan d'un même grand cercle, et dans ce cas, la distance de la comète au soleil, lors de l'observation moyenne, diffère toujours très-peu de la distance de la terre au soleil. Si les méthodes analytiques ont peu de succès dans ce cas particulier, il en résulte au moins une connoissance utile sur la distance de la comète au soleil, laquelle servira toujours à diriger les premiers essais des calculateurs. D'ailleurs, en choisissant trois autres observations, à quelque distance des premières, on évitera l'inconvénient de ce cas particulier, à moins qu'il ne se rencontre tout à-la-fois que la comète soit très-voisine du périhélie, et que la distance périhélie diffère très-peu de la distance de la terre au soleil ; circonstances qui, tout en faisant exception, avanceroient beaucoup vers la connoissance de la véritable orbite.

Mais comme on suppose communément, d'après les résultats de l'observation, que l'orbite est parabolique, cette condition donne une équation de plus que d'inconnues, et on a la faculté de choisir entre les diverses combinaisons des équations, celle qui doit conduire aux résultats les plus exacts. Je suis entré à ce sujet dans une discussion fort étendue. J'ai fait voir quelles sont les équations qui mèneroient, dans certains cas, à des résultats défectueux, et quelles sont celles sur lesquelles on peut établir la solution la moins sujette à être affectée des erreurs des observations.

Les équations dont il s'agit donnent immédiatement par leur résolution les distances de la comète au soleil et à la terre ; il faut ensuite en conclure les élémens de l'orbite. Je donne pour cet effet toutes les formules nécessaires, et j'ajoute les moyens de reconnoître avec certitude si le mouvement est direct ou rétrograde; si la comète marche vers le périhélie, ou si elle a déjà passé par ce point; si le nœud dont on a calculé la longitude est le nœud descendant ou le nœud ascendant; de sorte qu'avec toutes ces directions les calculs pourront s'exécuter en quelque sorte mécaniquement, sans qu'on ait lieu de craindre de se tromper sur le signe d'aucune quantité, ou sur la position d'aucun des points qu'il importe de déterminer.

Après avoir traité complètement le cas où les intervalles de temps entre les observations sont égaux, il falloit au moins tenter de vaincre les difficultés d'analyse que présente le problême considéré dans toute sa généralité. Je suis donc revenu sur les équations générales du problême, et après leur avoir fait subir différentes réductions successives, j'ai trouvé assez heureusement qu'elles étoient susceptibles d'une solution presque aussi simple que celle du premier cas; de sorte que sans aucune interpolation, on pourra appliquer immédiatement le calcul à trois observations données, quels que soient les intervalles de temps qui les séparent.

Venant ensuite aux applications qui sont relatives à la seconde comète de 1781 et à la comète de 1769, j'entre dans les détails qui peuvent jeter du jour sur toutes les applications en général. J'examine successivement les divers systêmes d'équations qu'on peut former, j'en donne la résolution; je développe les calculs principaux avec beaucoup d'étendue, et en général avec plus de précision qu'il n'est nécessaire dans les applications ordinaires: mais celles-ci étant données pour exemple, et devant faire juger du degré d'exactitude de la méthode, on ne pouvoit y mettre trop de soin. Les résultats, au surplus, en sont très-satisfaisans, et on verra que par cette méthode il est possible de déduire de trois observations données d'une comète, dans un assez petit espace de temps, des valeurs fort approchées des vrais élémens de son orbite.

Cependant la connoissance de la véritable orbite ne sera acquise d'une manière certaine, que lorsqu'on aura pu satisfaire à trois ou à un plus grand nombre d'observations, dont les époques soient assez éloignées entre elles.

La seconde partie contient les méthodes nécessaires pour corriger, à l'aide de ces observations, les élémens connus par une première approximation.

Je prends pour exemple trois observations de la comète de 1769, faites à de grands intervalles de temps, et je fais voir comment, par l'emploi des corrections indéterminées (que j'avois déjà indiqué dans les Mém. de l'Acad: des Sc. ann. 1787), on peut parvenir à déterminer la parabole qui satisfait le plus exactement possible aux observations. La méthode des corrections indéterminées a l'avantage de donner, par un seul calcul et sans aucun tâtonnement, le résultat de toutes les hypothèses peu différentes entre elles qu'on pourroit former sur la valeur des élémens. Il faut ensuite, lorsque toutes les conditions du problême sont exprimées convenablement, déterminer les coëfficiens de manière à rendre les erreurs les plus petites qu'il est possible.

Pour cet effet, la méthode qui me paroît la plus simple et la plus générale, consiste à rendre *minimum* la somme des quarrés des erreurs. On obtient ainsi autant d'équations qu'il y a de coëfficiens inconnus; ce qui achève de déterminer tous les élémens de l'orbite.

Comme la méthode dont je viens de parler, et que j'appelle *Méthode des moindres quarrés*, peut être d'une grande utilité dans toutes les questions de physique et d'astronomie où il s'agit de tirer de l'observation les résultats les plus exacts qu'elle peut offrir; j'ai ajouté, dans une *appendice*, des détails particuliers sur cette méthode, et j'en ai donné l'application à la mesure de la méridienne de France, ce qui pourra servir de complément à ce que j'ai déjà publié sur cette matière.

PREMIÈRE PARTIE.

Analyse du problême.

I. Soit SAT (fig. 1) le plan de l'écliptique, S le soleil, AT l'orbite de la terre, SA le rayon dirigé vers le premier point d'*aries* supposé fixe; soient T et C les lieux de la terre et de la comète, en un même temps t. Du point C abaissez CK perpendiculaire sur le plan de l'écliptique; menez KF, TE, perpendiculaires, et TG parallèle à SA; enfin joignez SC, TC.

Nous appellerons x, y, z, les trois coordonnées SF, FK, KC de la comète, v son rayon vecteur SC, ρ sa distance à la terre TC;

X, Y, les deux coordonnées SE, ET de la terre, V son rayon vecteur ST;

α et β la longitude et la latitude géocentrique de la comète, c'est-à-dire, les angles GTK, CTK.

II. Si l'on prend pour unité la somme des masses du soleil et de la terre, et qu'on néglige par rapport à cette somme, la différence, d'ailleurs inconnue, entre la masse de la comète et celle de la terre; les équations différentielles du mouvement de la comète seront:

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{x}{v^3},\ \frac{ddy}{dt^2} = -\frac{y}{v^3},\ \frac{ddz}{dt^2} = -\frac{z}{v^3};$$

et celles du mouvement de la terre, (1)

$$\frac{ddX}{dt^2} = -\frac{X}{V^3},\ \frac{ddY}{dt^2} = -\frac{Y}{V^3}.$$

Ces équations supposent en outre que le temps t est mesuré par le moyen mouvement du soleil réduit en parties du rayon, et qu'on fait abstraction de l'action réciproque entre la terre et la comète.

III. Cela posé, soient encore m, n, p, r, les valeurs respectives de x, y, z, v; et M, N, R, celles de X, Y, V, lorsque $t = 0$. Si on suppose qu'à compter de l'époque où $t = 0$, les intervalles de temps ne soient pas trop considérables en deçà et au-delà de cette époque; les coordonnées, tant de la comète que de la terre, seront déterminées avec une exactitude suffisante par les équations suivantes, où l'on a omis seulement les termes affectés de t^4 et des puissances supérieures de t.

$$\begin{aligned} x &= m + m't + m''t^2 + m'''t^3 \\ y &= n + n't + n''t^2 + n'''t^3 \\ z &= p + p't + p''t^2 + p'''t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= M + M't + M''t^2 + M'''t^3 \\ Y &= N + N't + N''t^2 + N'''t^3 \end{aligned}$$

Ces valeurs doivent être substituées dans les équations (1), afin de réduire au plus petit nombre les coëfficiens indéterminés, et comme on a

$$v^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \begin{cases} m^2 + n^2 + p^2 \\ + 2t(mm' + nn' + pp') + \text{\&c.} \end{cases}$$

si on fait pour abréger

$$\begin{aligned} k &= mm' + nn' + pp', \\ K &= MM' + NN', \end{aligned}$$

on aura

$$v^2 = r^2 + 2kt + \text{\&c.}, \quad V^2 = R^2 + 2Kt + \text{\&c.};$$

d'où résulte

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3kt}{r^4} + \text{\&c.}, \quad \frac{1}{V^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{3Kt}{R^4} + \text{\&c.}$$

Et la substitution faite dans l'équation différentielle en x donnera

$$m'' = -\frac{m}{2r^3}, \quad m''' = \frac{mk}{2r^5} - \frac{m'}{6r^3}.$$

On obtiendra un semblable résultat des autres équations différentielles, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
x &= m\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + m'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)\\
y &= n\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + n'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)\\
z &= p\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right) + p'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right) \qquad (2).\\
X &= M\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) + M'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)\\
Y &= N\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right) + N'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)
\end{aligned}$$

IV. Au moyen de ces coordonnées, on peut déterminer la longitude α de la comète et sa latitude β, par les équations :

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{y - Y}{x - X}, \quad \frac{\text{tang}\,\beta}{\cos\alpha} = \frac{z}{x - X}.$$

De sorte qu'en général, pour un temps quelconque t qui n'excédera pas certaines limites avant ou après l'époque choisie, on aura les deux équations :

$$\left.\begin{matrix}
n\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right)\\
-N\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right)\\
+n'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)\\
-N'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)
\end{matrix}\right\} = \text{tang}\,\alpha \left\{\begin{matrix}
m\left(1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{kt^3}{2r^5}\right)\\
-M\left(1 - \frac{t^2}{2R^3} + \frac{Kt^3}{2R^5}\right)\\
+m'\left(t - \frac{t^3}{6r^3}\right)\\
-M'\left(t - \frac{t^3}{6R^3}\right)
\end{matrix}\right.$$

$$
(3)\qquad
\left.\begin{array}{l}
p\left(1-\dfrac{t^2}{2r^3}+\dfrac{kt^3}{2r^5}\right)\\
+\,p'\left(t-\dfrac{t^3}{6r^3}\right)
\end{array}\right\}
=\frac{\tang \epsilon}{\cos \alpha}\cdot
\left\{\begin{array}{l}
m\left(1-\dfrac{t^2}{2r^3}+\dfrac{kt^3}{2r^5}\right)\\
-\,M\left(1-\dfrac{t^2}{2R^3}+\dfrac{Kt^3}{2R^5}\right)\\
+\,m'\left(t-\dfrac{t^3}{6r^3}\right)\\
-\,M'\left(t-\dfrac{t^3}{6R^3}\right)
\end{array}\right.
$$

V. Soit pour abréger :

$$
\begin{array}{ll}
m = M + \mu, & m' = M' + \mu' \\
n = N + \nu, & n' = N' + \nu';
\end{array}
\qquad (4)
$$

et de plus,

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{1}{R^3}=\omega \\
\dfrac{k}{r^5}-\dfrac{K}{R^5}=\zeta.
\end{array}
\qquad (5)
$$

Si on multiplie les équations (3) par $1+\dfrac{t^2}{2r^3}-\dfrac{kt^3}{2r^5}$, et qu'on néglige toujours les t^4, elles deviendront :

$$
\left.\begin{array}{l}
\nu+\nu' t\left(1+\dfrac{t^2}{3r^3}\right)\\
-\frac{1}{2}N(\omega t^2-\zeta t^3)\\
-\frac{1}{6}N'\omega t^3
\end{array}\right\}
=\tang \alpha
\left\{\begin{array}{l}
\mu+\mu' t\left(1+\dfrac{t^2}{3r^3}\right)\\
-\frac{1}{2}M(\omega t^2-\zeta t^3)\\
-\frac{1}{6}M'\omega t^3
\end{array}\right.
\qquad (6)
$$

$$
p+p't\left(1+\frac{t^2}{3r^3}\right)=\frac{\tang \epsilon}{\cos \alpha}
\left\{\begin{array}{l}
\mu+\mu' t\left(1+\dfrac{t^2}{3r^3}\right)\\
-\frac{1}{2}M(\omega t^2-\zeta t^3)\\
-\frac{1}{6}M'\omega t^3
\end{array}\right.
$$

On peut simplifier encore ces équations en omettant le facteur $1+\dfrac{t^2}{3r^3}$ qui multiplie μ', ν', p' ; car la suite du calcul prouvera que l'omission peut être faite sans qu'il en résulte d'erreur dans les termes qu'on doit conserver.

VI. Supposons maintenant que les trois observations données de la comète répondent successivement aux temps :

$$-\theta\,,\quad o\,,\quad +\theta',$$

en sorte que l'époque $t=o$ réponde à l'observation moyenne. Soient

les longitudes observées a°, a, a',
et les latitudes .... b°, b, b'.

Faisons de plus, pour abréger,

$$\begin{array}{lll} tang\ a^{\circ}=f^{\circ}, & tang\ a=f, & tang\ a'=f' \\ \dfrac{tang\ b^{\circ}}{cos\ a^{\circ}}=g^{\circ}, & \dfrac{tang\ b}{cos\ a}=g, & \dfrac{tang\ b'}{cos\ a'}=g'. \end{array} \tag{7}$$

Si dans les équations (6) on fait successivement $t=o$, $t=-\theta$, $t=\theta'$, on aura les six équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \nu = f\mu \\ \left.\begin{array}{l}\nu-\theta\nu'-\frac{1}{2}N\omega\theta^2\\ \quad-\frac{1}{2}N\zeta\theta^3+\frac{1}{6}N'\omega\theta^3\end{array}\right\} = f^{\circ}\left\{\begin{array}{l}\mu-\theta\mu'-\frac{1}{2}M\omega\theta^2\\ \quad-\frac{1}{2}M\zeta\theta^3+\frac{1}{6}M'\omega\theta^3\end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l}\nu+\theta'\nu'-\frac{1}{2}N\omega\theta'^2\\ \quad+\frac{1}{2}N\zeta\theta'^3-\frac{1}{6}N'\omega\theta'^3\end{array}\right\} = f'\left\{\begin{array}{l}\mu+\theta'\mu'-\frac{1}{2}M\omega\theta'^2\\ \quad+\frac{1}{2}M\zeta\theta'^3-\frac{1}{6}M'\omega\theta'^3\end{array}\right. \\ p = g\mu \\ p-\theta p' = g^{\circ}\left\{\begin{array}{l}\mu-\theta\mu'-\frac{1}{2}M\omega\theta^2\\ \quad-\frac{1}{2}M\zeta\theta^3+\frac{1}{6}M'\omega\theta^3\end{array}\right. \\ p+\theta'p' = g'\left\{\begin{array}{l}\mu+\theta'\mu'-\frac{1}{2}M\omega\theta'^2\\ \quad+\frac{1}{2}M\zeta\theta'^3-\frac{1}{6}M'\omega\theta'^3.\end{array}\right. \end{array}\right. \tag{8}$$

VII. Après la substitution qui se fait immédiatement des valeurs de ν et de p, ces six équations se réduiront à quatre contenant les quatre inconnues μ, μ', ν', p', sous forme linéaire. Il faut d'abord s'occuper de la résolution de ces quatre équations.

Dans le cas présent, où les équations (8) ne sont exactes qu'aux quantités près de l'ordre θ^4, il faudra omettre, dans le calcul de l'élimination, tous les termes qui seroient de cet ordre ou d'un ordre supérieur, attention qui contribuera à simplifier les résultats. On pourroit aussi établir les formes des diverses inconnues μ, μ', ν', p', en les représentant chacune par $A + B\theta + C\theta' + D\theta^2 + E\theta\theta' + F\theta'^2 +$ &c.; on reconnoîtroit bientôt par la substitution, que ces quatre inconnues ne contiennent aucun terme constant indépendant de θ et θ'; que la quantité μ en particulier, ne contient pas même les termes du premier degré, et qu'elle doit être divisible par $\theta\theta'$, de sorte qu'on doit faire $\mu = A\theta\theta' + B\theta^2\theta' + C\theta\theta'^2$. On trouvera pareillement que les trois autres inconnues doivent être de la forme $A\theta + B\theta' + C\theta^2 + D\theta\theta' + E\theta'^2$, sans aller au-delà, afin de ne pas introduire dans les équations (8) des termes du quatrième ordre; et cette forme justifie l'omission que nous avons faite du facteur $1 + \frac{t^2}{3r^3}$ dans les équations (6). On pourroit donc par les coëfficiens indéterminés, effectuer la résolution des équations (8); mais on y parviendra aussi facilement par les moyens ordinaires, et voici le résultat de ce calcul présenté sous la forme la plus simple dont il paroît susceptible.

VIII. Soit pour abréger,

$$\Delta = (f'g - fg') + (f^\circ g' - f'g^\circ) + (fg^\circ - f^\circ g). \quad (9)$$

Cette quantite qui se présente d'abord dans le résultat de l'élimination mérite une attention particulière : elle peut se mettre sous la forme

$$(f' - f)(g' - g^\circ) - (f' - f^\circ)(g' - g),$$

et alors on voit aisément qu'elle est de l'ordre $\theta\theta'(\theta + \theta')$, c'est-à-dire du troisième ordre, et cette extrême petitesse empêche le plus souvent qu'elle ne soit déterminée assez exactement par les données de l'observation. Soit de plus,

$$\begin{array}{l} M\,(f'g - fg') + N\,(g' - g) = B^{\circ} \\ M\,(f^{\circ}g' - f'g^{\circ}) + N\,(g^{\circ} - g') = B \\ M\,(fg^{\circ} - f^{\circ}g) + N\,(g - g^{\circ}) = B' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M'\,(f'g - fg') + N'\,(g' - g) = E^{\circ} \\ M'\,(f^{\circ}g' - f'g^{\circ}) + N'\,(g^{\circ} - g') = E \\ M'\,(fg^{\circ} - f^{\circ}g) + N'\,(g - g^{\circ}) = E'\,; \end{array}$$

quantités entre lesquelles on a les relations

$$\begin{array}{ll} B^{\circ} + B + B' = M\Delta & E^{\circ} + E + E' = M'\Delta \\ f^{\circ}B^{\circ} + fB + f'B' = N\Delta & f^{\circ}E^{\circ} + fE + f'E' = N'\Delta \\ g^{\circ}B^{\circ} + gB + g'B' = 0 & g^{\circ}E^{\circ} + gE + g'E' = 0\,; \end{array} \qquad (10)$$

les valeurs réduites de nos quatre inconnues seront :

$$\mu = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,\theta\theta' B + \frac{\omega(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,\theta\theta' E \qquad (11)$$

$$\mu' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta B^{\circ} - \theta' B') + \frac{\omega(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,(\theta E^{\circ} - \theta' E')$$
$$+ \frac{M}{2}\,\omega(\theta' - \theta) + (\tfrac{1}{6}M'\omega - \tfrac{1}{2}M\zeta)\,(\theta^2 - \theta\theta' + \theta'^2)$$

$$\nu' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta f^{\circ} B^{\circ} - \theta' f' B') + \frac{\omega(\theta' - \theta)}{6\Delta}(\theta f^{\circ} E^{\circ} - \theta' f' E')$$
$$+ \frac{N}{2}\,\omega(\theta' - \theta) + (\tfrac{1}{6}N'\omega - \tfrac{1}{2}N\zeta)\,(\theta^2 - \theta\theta' + \theta'^2)$$

$$p' = \frac{\omega - \zeta\theta' + \zeta\theta}{2\Delta}\,(\theta g^{\circ} B^{\circ} - \theta' g' B') + \frac{\omega(\theta' - \theta)}{6\Delta}\,(\theta g^{\circ} E^{\circ} - \theta' g' E').$$

IX. Avec ces valeurs, on calculera celles des six coëfficiens m, n, p, m', n', p'; ce qui se fera par les équations

$$\begin{array}{ll} m = \mu + M & m' = \mu' + M' \\ n = f\mu + N & n' = \nu' + N' \\ p = g\mu & p' = p' \end{array} \qquad (12)$$

et ces six valeurs ne contiendront que les deux inconnues

ζ et ω sous forme linéaire. Calculant ensuite la valeur de k par la formule

$$k = mm' + nn' + pp', \tag{13}$$

et substituant cette valeur ainsi que celle de $\omega = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$, dans l'équation

$$\zeta = \frac{k}{r^5} - \frac{K}{R^5}, \tag{14}$$

on aura une première équation entre les quantités ζ et r, dans laquelle ζ ne montera qu'au second degré.

Enfin on a de plus les deux équations

$$m^2 + n^2 + p^2 = r^2 \tag{15}$$

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \tag{16}$$

dans lesquelles il faudra faire de semblables substitutions pour obtenir les équations finales auxquelles se réduit la solution du problême.

L'équation (16) appartient à une orbite elliptique dont le demi-grand axe $= a$; mais comme on suppose ordinairement que l'orbite des comètes est parabolique, on pourra faire $\frac{1}{a} = 0$, ce qui donnera une équation de plus que d'inconnues. Et cette circonstance pourra offrir diverses combinaisons dont on profitera pour rendre moins difficile la détermination des inconnues r et ζ.

Nous donnerons ci-après le moyen de vaincre ces difficultés et de parvenir à des résultats dont la pratique puisse s'accommoder. Mais avant tout, nous examinerons, avec tout le détail nécessaire, le cas où l'on a $\theta' = \theta$; c'est-à-dire où les trois observations sont faites à des intervalles de temps égaux. Cette condition apporte dans les calculs une grande simplification, et on peut toujours y satisfaire, en interpolant les observations faites à peu de distance les unes des autres.

X. Soit donc $\theta' = \theta$, et les formules (11) se réduiront aux suivantes :

$$\mu = \frac{\omega\,\theta^2}{2\Delta} B$$

$$\mu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta}(B^o - B') + (\tfrac{1}{6}M'\omega - \tfrac{1}{2}M\zeta)\,\theta^2$$

$$\nu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta}(f^o B^o - f' B') + (\tfrac{1}{6}N'\omega - \tfrac{1}{2}N\zeta)\,\theta^2$$

$$p' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta}(g^o B^o - g' B').$$

Or j'observe qu'on peut omettre les termes affectés de θ^2 dans les valeurs de μ' et ν'. En effet, dans les équations (6) on a négligé, par rapport à μ', la partie $\frac{\mu'\theta^2}{3r^3}$, parce que le premier terme de μ' étant de la forme $A\theta$, cette partie seroit devenue $\frac{A\theta^3}{3r^3}$; et multipliée par θ, comme l'est μ' dans les équations (6), elle seroit montée au quatrième degré; ainsi elle a dû être exclue des équations (6) qui ne contiennent pas les termes affectés de t^4 ou θ^4. D'un autre côté cependant, en considérant θ comme très-petit, le coëfficient A qui affecte θ doit être très-grand, afin que $A\theta$ ait la valeur finie qui convient à la quantité μ'; de sorte que $A\theta^3$ désigne réellement une quantité de l'ordre θ^2. Ainsi en conservant dans les formules précédentes les termes affectés de θ^2, qui ne peuvent être beaucoup augmentés par leurs coëfficiens, on n'ajoute pas à l'exactitude de ces formules dans lesquelles des quantités du même ordre ont été omises. Donc il faut supprimer entièrement ces termes, et on aura les valeurs très-simples :

$$\mu = \frac{\omega\,\theta^2}{2\Delta} B$$

$$\mu' = \frac{\omega\,\theta}{2\Delta}(B^o - B') \qquad (17)$$

$$r' = \frac{\omega\theta}{2\Delta}(f^{\circ}B^{\circ} - f'B')$$

$$p' = \frac{\omega\theta}{2\Delta}(g^{\circ}B^{\circ} - g'B')$$

dans lesquelles l'inconnue ζ ne se retrouve plus.

XI. Avant d'aller plus loin, il convient de déterminer les quantités M, N, M′, N′, qui dépendent du mouvement de la terre. Et d'abord, si on appelle A la longitude de la terre, ou celle du soleil augmentée de 180°, au moment de la seconde observation, on aura

$$M = R \cos A\ , \quad N = R \sin A.$$

Appelons encore pour un temps quelconque t:

ϵ l'excentricité de l'orbite terrestre,
Φ la longitude héliocentrique de la terre,
γ la longitude de l'aphélie,
V ou R le rayon vecteur,

on aura par les propriétés du mouvement elliptique et en regardant γ comme constant,

$$\frac{1-\epsilon^2}{R} = 1 - \epsilon \cos(\Phi - \gamma)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}{R^2}, \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{\epsilon \sin(\Phi-\gamma)}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}. \tag{18}$$

Or on a $X = R \cos \Phi$, $Y = R \sin \Phi$; de-là on déduira les valeurs de $\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dY}{dt}$, lesquelles en faisant $t = 0$ ou $\Phi = A$, deviendront celles des coëfficiens M′ et N′ : on aura donc

$$M' = \frac{-\sin A + \epsilon \sin \gamma}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}, \quad N' = \frac{\cos A - \epsilon \cos \gamma}{\sqrt{(1-\epsilon^2)}}.$$

XII. Si au lieu de la constante γ on introduit l'anomalie vraie $\Psi = A - \gamma$, ce qui donne $\gamma = A - \Psi$; on aura, en développant ces expressions jusqu'aux ε^2 inclusivement.

$$M' = -\sin A\,(1 - \varepsilon\cos\Psi + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \varepsilon\cos A\sin\Psi$$
$$N' = \quad \cos A\,(1 - \varepsilon\cos\Psi + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \varepsilon\sin A\sin\Psi.$$

Par un semblable développement on a

$$\left.\begin{aligned} R &= 1 + \varepsilon\cos\Psi - \varepsilon^2\sin^2\Psi \\ \frac{1}{R} &= 1 - \varepsilon\cos\Psi + \varepsilon^2; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

De sorte qu'on peut écrire ainsi les valeurs de M′ et N′,

$$\left.\begin{aligned} M' &= -\sin A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon\sin\Psi\cos A \\ N' &= +\cos A\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon\sin\Psi\sin A; \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

d'où résulte

$$\left.\begin{aligned} M'^2 + N'^2 &= \frac{2}{R} - 1, \\ MM' + NN' &= -\varepsilon\sin\Psi . R. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

On conserve dans ces expressions le quarré ε^2 de l'excentricité, quoique ce terme soit très-petit, parce qu'il ne complique presque pas le calcul, et que si on l'omettoit entièrement, la valeur de R se réduiroit à $1 + \varepsilon\cos\Psi$, et ne correspondroit plus assez exactement au logarithme donné par les éphémérides. On peut supposer pour les temps voisins de celui-ci, $\varepsilon = 0{,}01679$, alors on a $\varepsilon^2 = 0.0002819$, et

$$\log\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) = \log\frac{1}{R} - 0.0000612.$$

A l'égard du terme $\varepsilon\sin\Psi$, on le calculera en prenant dans les tables le lieu de l'aphélie γ qui est très-peu variable, d'où l'on conclura l'anomalie $\Psi = A - \gamma$. On peut encore déterminer la quantité $\varepsilon\sin\Psi$ avec une précision suffisante par la seule valeur connue du logarithme de R; car tirant de ce logarithme le nombre $\frac{1}{R} = 1 + u$, on aura $\varepsilon \cos \Psi = \varepsilon^2 - u$, et de-là

$$\varepsilon \sin \Psi = \pm \sqrt{[(\varepsilon + \varepsilon^2 - u)(\varepsilon - \varepsilon^2 + u)]}. \qquad (22)$$

Quant au signe de cette quantité, il sera positif depuis le premier juillet jusqu'au premier janvier, et négatif dans les six autres mois.

Enfin on peut encore observer que les quantités $\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}$ et $\varepsilon \sin \Psi$, qui entreront comme coëfficiens dans nos formules, sont liées entr'elles par cette relation :

$$\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right)^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \Psi = \frac{2}{R} - 1.$$

XIII. Il s'agit maintenant de former les coëfficiens des équations à résoudre, de la manière la plus simple et la plus commode pour la pratique. Pour cela, il convient de remettre à la place de f, g, f°, g°, &c., leurs valeurs en a, b, a°, b°, &c. données immédiates des observations. Cette substitution étant faite d'abord dans la quantité Δ, on prendra pour abréger,

$$\begin{aligned} D = {} & \tang b' \sin(a - a^\circ) + \tang b^\circ \sin(a' - a) \\ & + \tang b \sin(a^\circ - a'), \end{aligned} \qquad (23)$$

et on aura $\Delta = \frac{-D}{\cos a^\circ \cos a \cos a'}$. Faisant ensuite les mêmes substitutions et celles de $M = R \cos A$, $N = R \sin A$, dans les valeurs de B°, B, B', on aura

$$\begin{aligned} \frac{B}{\Delta} &= \frac{R \cos a}{D} [\tang b' \sin(A - a^\circ) - \tang b^\circ \sin(A - a')] \\ \frac{B'}{\Delta} &= \frac{R \cos a'}{D} [\tang b^\circ \sin(A - a) - \tang b \sin(A - a^\circ)] \qquad (24) \\ \frac{B^\circ}{\Delta} &= \frac{R \cos a^\circ}{D} [\tang b \sin(A - a') - \tang b' \sin(A - a)]. \end{aligned}$$

Soit encore pour abréger,

$$C = tang\, b' \sin(A - a^\circ) - tang\, b^\circ \sin(A - a'), \qquad (25)$$

la première des équations (17) donnera $\mu = \frac{R\omega\theta^2}{2D} C \cos a$; or par les triangles rectangles TCK, TKG (fig. 1), on a $TK = \rho \cos b$, et TG ou $\mu = \rho \cos b \cos a$; donc en introduisant ρ à la place de μ, on aura

$$\rho = \frac{R\omega\theta^2 C}{2D \cos b} = \frac{R\theta^2 C}{2D \cos b}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right). \qquad (26)$$

Substituant de même l'expression de μ en ρ, dans les valeurs de m, n, p, des équations (12), on aura

$$\begin{aligned} m &= \rho \cos a \cos b + R \cos A \\ n &= \rho \sin a \cos b + R \sin A \\ p &= \rho \sin b, \end{aligned} \qquad (27)$$

et l'équation $m^2 + n^2 + p^2 = r^2$ deviendra

$$r^2 = R^2 + 2R\rho \cos b \cos(A - a) + \rho^2.$$

Cette équation seroit donnée immédiatement par le triangle CST; car en appelant c l'angle entre le soleil et la comète, les côtés compris sont R et ρ, et le côté opposé r, ce qui donne

$$r^2 = R^2 - 2R\rho \cos c + \rho^2.$$

Or l'angle c a pour mesure l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont les côtés sont b et $180^\circ - A + a$, on a donc $\cos c = -\cos b \cos(A - a)$.

XIV. Les coëfficiens C et D se déduisent immédiatement des données du problème par les formules (23) et (25); si ensuite on fait

$$\cos c = -\cos b \cos(A - a), \quad h = \frac{R\theta^2 C}{2D \cos b}, \qquad (28)$$

on aura les deux équations

$$\begin{aligned} \rho &= h\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \\ r^2 &= R^2 - \rho(2R \cos c) + \rho^2, \end{aligned} \qquad (29)$$

dans lesquelles il n'y a d'inconnues que les deux côtés r et ρ du triangle SCT.

Si on élimine ρ de ces deux équations, on aura une équation en r du huitième degré, mais qui sera divisible par $r - R$, et s'abaissera immédiatement au septième. C'est le résultat auquel sont parvenus tous ceux qui ont traité avec succès le problème des comètes ; et ce résultat est d'autant plus remarquable, que les équations (29) se déduisent assez facilement des données de l'observation, et qu'elles ont lieu sans supposer que l'orbite de la comète soit une parabole.

XV. Comme les quantités r et ρ sont essentiellement positives, il n'y aura d'admissibles, parmi les diverses solutions des équations (29), que celles qui donneront r et ρ positives. Or en construisant les deux courbes de genre hyperbolique qui représentent ces équations, et examinant les diverses intersections dont elles sont susceptibles, on parvient à cette conclusion générale sur le nombre de solutions utiles que ces équations comportent :

Si $3\mathrm{h}\cos\mathrm{c}$ *est positif et plus grand que* R^4, *les équations* (29) *admettront une solution et n'en admettront qu'une ; dans les autres cas, ces équations auront deux solutions ou n'en auront aucune.*

XVI. A l'inspection de l'équation $\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$, on voit que le signe h doit être le même que celui de $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$. Donc si h est positive, on aura $r < R$, c'est-à-dire que la comète sera moins éloignée du soleil que n'est la terre. Au contraire, si h est négatif, on aura $r > R$. Dans le cas où l'on auroit $D = o$, h seroit infini et on auroit $r = R$, c'est-à-dire que la comète et la terre seroient à égale distance du soleil. Ce cas est, d'après la remarque de Lambert, celui où les trois lieux apparens de la comète seroient situés dans le plan d'un même grand cercle; car pour que trois points dont les longitudes sont a°, a, a', et les latitudes b°, b, b', respectivement, soient situés dans le plan d'un même grand cercle, il faut qu'on ait l'équation

$$0 = tang\, b' \sin(a - a^\circ) + tang\, b^\circ \sin(a' - a) + tang\, b \sin(a^\circ - a').$$

Donc lorsqu'on aura $D = 0$, ou seulement D très-petit, on pourra en conclure, ou exactement, ou au moins par approximation,

$$r = R \text{ et } \rho = 2R \cos c.$$

XVII. C'est une circonstance peu favorable que celle où l'on tombe sur des valeurs de D très-petites; car alors une erreur très-possible d'une ou de deux minutes sur quelqu'une des quantités données par l'observation, pourroit changer dans une proportion notable la valeur de D, ou même lui donner un signe contraire à celui qu'elle doit avoir. Dans ce cas, il n'y a aucune conclusion certaine à tirer des équations (29), sinon qu'on a à-peu-près $r = R$ et $\rho = 2R \cos c$; on se dispensera donc alors de chercher les racines de ces équations, et on aura recours aux autres équations qui seront données ci-après.

XVIII. Dans les autres cas, la résolution des équations (29) s'effectuera assez facilement par les fausses positions; mais pour cela il est bon de connoître d'avance les limites de r et de ρ.

Lorsque h est positif on a $r < R$; mais la seconde des équations (29) donne $r^2 = R^2 \sin^2 c + (\rho - R \cos c)^2$; donc on a en même temps $r > R \sin c$. Ces deux limites auxquelles on peut joindre celles de ρ, savoir $\rho > 0$ et $\rho < 2R \cos c$, sont suffisantes pour diriger le calcul et rendre la résolution assez prompte.

Si h est négatif et $\cos c$ positif, soit $h = -i$; ayant déjà $r > R$, on doit avoir par conséquent $\rho > 2R \cos c$; mais de l'équation $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} - \frac{\rho}{i}$, on tire $\rho < \frac{i}{R^3}$; donc on aura

$r < \sqrt{\left(R^2 - \frac{2Ri\cos c}{R^3} + \frac{i^2}{R^6}\right)}$. Il faut observer que si on n'avoit pas $i > 2R^4 \cos c$, les deux limites de ρ seroient incompatibles, et il n'y auroit pas de solution.

Enfin si h est négatif, ainsi que $\cos c$; soit $h = -i$, et $\cos c = -l$, on aura toujours $\rho < \frac{i}{R^3}$, et l'autre limite sera simplement $\rho > 0$: celles de r seront en même temps $r > R$ et $r < \sqrt{\left(R^2 + \frac{2Ril}{R^3} + \frac{i^2}{R^6}\right)}$.

XIX. Il faut maintenant faire la substitution des valeurs de m', n', p', dans l'équation (16) : or en vertu des formules (12), (17) et (24), on a

$$\left.\begin{aligned}
m' &= M' + \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned} &\cos a^\circ \tang b \sin(A-a') - \cos a^\circ \tang b' \sin(A-a) \\ &+\cos a' \tang b \sin(A-a^\circ) - \cos a' \tang b^\circ \sin(A-a)\end{aligned}\right\} \\
n' &= N' + \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned} &\sin a^\circ \tang b \sin(A-a') - \sin a^\circ \tang b' \sin(A-a) \\ &+\sin a' \tang b \sin(A-a^\circ) - \sin a' \tang b^\circ \sin(A-a)\end{aligned}\right\} \\
p' &= \frac{R\omega\theta}{2D}\left\{\begin{aligned} &\tang b^\circ \tang b \sin(A-a') - \tang b^\circ \tang b' \sin(A-a) \\ &+\tang b' \tang b \sin(A-a^\circ) - \tang b' \tang b^\circ \sin(A-a)\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Appelons F, G, H les quantités qui multiplient $\frac{R\omega\theta}{2D}$ dans les valeurs de m', n', p' respectivement; nous aurons en substituant aussi les valeurs de M' et N' :

$$m' = -\sin A\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon \sin \Psi \cos A + \frac{R\omega\theta}{2D} F$$

$$n' = \cos A\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right) - \varepsilon \sin \Psi \sin A + \frac{R\omega\theta}{2D} G;$$

d'où résulte

$$m'^2 + n'^2 = \frac{2}{R} - 1 - \frac{R\omega\theta}{D}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}\right)(F \sin A - G \cos A)$$
$$- \frac{R\omega\theta}{D}.\varepsilon \sin \Psi\,(F \cos A + G \sin A)$$
$$+ \frac{R^2\omega^2\theta^2}{4D^2}(F^2 + G^2).$$

Donc si pour abréger encore les expressions on fait

$$\left.\begin{aligned}
P &= 2\,\textit{tang}\, b \sin(A - a^\circ)\sin(A - a') - \textit{tang}\, b' \sin(A - a^\circ)\sin(A - a) \\
&\qquad - \textit{tang}\, b^\circ \sin(A - a')\sin(A - a) \\
Q &= \textit{tang}\, b \sin(2A - a^\circ - a') - \textit{tang}\, b' \cos(A - a^\circ)\sin(A - a) \\
&\qquad - \textit{tang}\, b^\circ \cos(A - a')\sin(A - a) \\
H &= -2\,\textit{tang}\, b^\circ\, \textit{tang}\, b' \sin(A - a) + \textit{tang}\, b\, \textit{tang}\, b^\circ \sin(A - a') \\
&\qquad + \textit{tang}\, b\, \textit{tang}\, b' \sin(A - a^\circ).
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Les trois quantités m', n', p', pourront être mises sous cette forme :

$$m' = \sin A\left(\frac{R\omega\theta}{2D}P - \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{R}\right) + \cos A\left(\frac{R\omega\theta}{2D}Q - \varepsilon \sin\Psi\right)$$
$$n' = -\cos A\left(\frac{R\omega\theta}{2D}P - \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{R}\right) + \sin A\left(\frac{R\omega\theta}{2D}Q - \varepsilon \sin\Psi\right)$$
$$p' = \frac{R\omega\theta}{2D}H, \qquad (32)$$

et leur substitution dans l'équation (16) donnera

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{2}{R} - 1 - \frac{R\omega\theta}{D}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}P + \varepsilon \sin\Psi\, Q\right)$$
$$+ \frac{R^2\omega^2\theta^2}{4D^2}(P^2 + Q^2 + H^2). \qquad (33)$$

XX. Si l'on suppose que l'orbite est parabolique, on aura

$\frac{1}{a} = 0$, et l'équation précédente devra être combinée avec l'équation

$$\omega = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}; \qquad (34)$$

d'où l'on voit que la résultante en r ne sera que du sixième degré.

Cette équation aura toujours une racine réelle positive; car en faisant $\omega = x$, $\frac{1}{r} = y$, si on construit les deux paraboles qui ont pour équations

$$y = \frac{1}{R} - \frac{1}{2} - A'x + B'x^2$$

$$y^3 = x + \frac{1}{R^3},$$

La première sera une parabole ordinaire, ayant son axe dirigé dans le sens des ordonnées. Cette courbe est située toute entière du côté des y positives, et ne coupe point la ligne des abscisses, parce que le second membre de l'équation (33) formé de la somme de trois quarrés, ne sauroit devenir nul et a ses facteurs imaginaires. D'ailleurs lorsque $x = 0$, l'ordonnée $y = \frac{1}{R} - \frac{1}{2}$, ou à-peu-près $y = \frac{1}{2}$.

La seconde courbe est une parabole cubique dont une branche s'étend à l'infini dans l'angle des x et y positives, et l'autre dans l'angle des x et y négatives. Lorsque $x = 0$, l'ordonnée $y = \frac{1}{R}$, ou à-peu-près $y = 1$; ainsi dans cette courbe, les ordonnées sont plus grandes vers l'origine des abscisses que celles de la première parabole. Mais comme à une grande distance de l'origine c'est le contraire qui a lieu, il s'ensuit qu'il y aura nécessairement une intersection; et il ne peut y en avoir qu'une, parce que la parabole ordinaire oppose sa convexité à la ligne des abscisses, tandis que la parabole cubique lui oppose sa concavité (*voyez* fig. 4).

Le système des équations (33) et (34) est donc préférable à celui des équations (29), non-seulement parce que le degré de l'équation finale est moindre, mais encore parce que la solution de celles-là est toujours unique, et ne présente aucune ambiguité.

Il faut observer néanmoins que l'équation (33) est sujette au même inconvénient que la première des équations (29), dans le cas où D est très-petit, parce qu'alors les erreurs des observations ont une trop grande influence sur la valeur de D; et qu'ainsi la résolution des équations (33) et (34) pourroit conduire à des résultats défectueux.

XXI. Pour obvier à cet inconvénient, il faut éviter tout emploi du coëfficient D, et on en a heureusement la facilité, puisque le problême des comètes, dans la supposition d'une orbite parabolique, offre une équation de plus que d'inconnues.

Par l'équation (26), on a $\frac{R\omega\theta}{2D} = \frac{\rho \cos b}{\theta C}$ et cette valeur étant substituée dans l'équation (33), on aura, en suivant toujours l'hypothèse parabolique, c'est-à-dire en faisant $\frac{1}{a} = 0$,

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 - \frac{2\rho \cos b}{\theta C}\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\epsilon^2}{R} P + \epsilon \sin \Psi . Q\right) + \frac{\rho^2 \cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2); \qquad (35)$$

équation qui devra être combinée avec l'équation

$$r^2 = R^2 - \rho\,(2R \cos c) + \rho^2, \qquad (36)$$

afin d'en tirer les valeurs de r et ρ.

Si on éliminoit r ou ρ de ces deux équations, l'équation finale ne monteroit encore qu'au sixième degré. D'ailleurs les coëfficiens de ces équations se déduisent, avec une exactitude suffisante, des données de l'observation. Le coëfficient C qui sert de diviseur, est celui qu'on connoîtra avec le plus de précision; car en regardant θ comme une quantité du premier ordre, C est du premier ordre aussi, et les trois autres P, Q, H du second. Il paroît donc que la combinaison des équations (35) et (36) réunit tous les avantages qu'on peut desirer dans la solution du problême des comètes, et c'est à cette combinaison qu'il convient de s'arrêter définitivement.

XXII. On peut prouver encore que les équations (35) et (36) auront toujours une solution en nombres positifs.

En effet, si on décrit les deux courbes qui répondent à ces équations, en prenant ρ pour l'abscisse et r pour l'ordonnée; le lieu de l'équation (36) sera une hyperbole équilatère dont le centre est sur la ligne des abscisses à la distance R *cos c*, et dont le demi-axe, dirigé suivant les ordonnées $=$ R *sin c* (*voyez* fig. 5).

L'équation (34), qu'on pourroit réduire à la forme $y(x^2 + a^2) = a^2 b$, appartient à une courbe qui, comme la conchoïde supérieure, a pour asymptote la ligne des abscisses, et est située toute entière d'un même côté de cette ligne, sa plus grande ordonnée étant b. Lorsque $\rho = 0$, l'ordonnée de l'hyperbole équilatère $=$ R, celle de la seconde courbe $= \frac{2R}{2 - R} = 2R$ à peu-près; donc puisque la première s'éloigne à l'infini de l'axe, tandis que l'autre s'en rapproche de plus en plus à mesure que l'abscisse est plus grande, il s'ensuit que les deux courbes auront nécessairement une intersection dans le sens des abscisses positives et n'en auront qu'une. Ainsi la résolution des équations (35) et (36) aura encore l'avantage d'être toujours possible et de n'offrir aucune ambiguité.

Pour avoir les limites de r, il faut observer que les seconds membres des équations (35) et (36) ne peuvent se réduire à zéro, et qu'ils ont tous deux un *minimum*. Le *minimum* de r, dans l'équation (36), est R *sin* C. Soit Z le *minimum* du second membre de l'équation (35), et il est clair qu'on aura à la fois $r > R \sin c$ et $r < \frac{2}{Z}$. Au moyen de ces limites, il sera toujours assez facile de résoudre les équations dont il s'agit par les fausses positions.

XXIII. L'application de nos formules exige que le temps θ, donné en jours et fractions de jour, temps moyen, soit converti en arc du moyen mouvement du soleil, cet arc étant lui-même réduit en parties du rayon 1. Pour faire cette double réduction, il suffira de multiplier θ par $\frac{2\pi}{365.25638}$; c'est-à-dire qu'il faudra ajouter au logarithme de θ, compté en jours du temps moyen, le logarithme constant 8.2355821.

En faisant abstraction des erreurs des observations, les coëfficiens qui entrent dans l'équation (35) ne doivent être censés exacts qu'aux quantités près de l'ordre θ^4; d'où l'on voit qu'il faut choisir trois observations faites dans un intervalle de temps peu considérable, et qui n'excède pas quinze à vingt jours. Mais il ne faut pas non plus que les observations soient trop rapprochées, parce qu'alors le mouvement géocentrique de la comète seroit trop petit, et les erreurs des observations auroient une trop grande influence sur les résultats.

XXIV. Après avoir résolu les équations (35) et (36) qui feront connoître les quantités r et ρ, il reste à déterminer les élémens de l'orbite; mais comme ces élémens, tels qu'ils résultent d'une première approximation, ne peuvent pas être fort exacts, et qu'il y aura toujours lieu à les corriger par le moyen d'observations plus éloignées entr'elles, on pourra se borner le plus souvent à chercher une valeur approchée de la distance périhélie, et de l'instant du passage au périhélie; car avec la connoissance approchée de ces deux élémens, on est en état de procéder au calcul nécessaire pour obtenir une orbite corrigée.

Or si on appelle Π la distance périhélie, et qu'on calcule k par la formule

$$k = mm' + nn' + pp' ;$$

comme cette quantité est égale à $\frac{r\,dr}{dt}$, si elle est négative; on saura que la comète s'approche de son périhélie ; et si elle est positive, on saura qu'elle s'en éloigne. De plus, au moyen de k, on aura la distance périhélie

$$\Pi = r - \tfrac{1}{2} k^2. \tag{37}$$

Cette distance étant connue, on déterminera l'anomalie vraie ψ de la comète au moment de la seconde observation, par la formule

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} \psi = \frac{\Pi}{r}. \tag{38}$$

Enfin l'anomalie étant connue, on cherchera dans la table des comètes le temps T qui répond à cette anomalie : faisant ensuite

$$t = \Pi^{\frac{3}{2}}.\mathrm{T}, \tag{39}$$

on aura le temps t employé par la comète à parcourir l'anomalie ψ. Ce temps étant ajouté à l'époque de l'observation moyenne, si la comète avance vers son périhélie, ou en étant retranché, si elle s'en éloigne, donnera l'instant du passage au périhélie.

Tout se réduit donc à déterminer la quantité k, dont la grandeur et le signe sont également nécessaires à considérer. Or en substituant les valeurs données par les équations (32), on trouve

$$\begin{aligned} k = \rho \cos b \sin (\mathrm{A}-a)\left(\frac{\rho \cos b}{\theta \mathrm{C}}\mathrm{P} - \frac{(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\mathrm{R}}\right) + \rho \sin b . \frac{\rho \cos b}{\theta \mathrm{C}} \mathrm{H} \\ + (\mathrm{R} - \rho \cos c)\left(\frac{\rho \cos b}{\theta \mathrm{C}}\mathrm{Q} - \varepsilon \sin \Upsilon\right). \end{aligned} \tag{40}$$

XXV. Mais si on veut déterminer à la fois tous les élémens de l'orbite, il sera inutile de chercher partiellement la valeur de k, et il faudra calculer les valeurs des six quantités m, n, p, m', n', p', par les équations (27) et (32).

Ces valeurs étant connues, on en déduira immédiatement celles des trois quantités $mn'-m'n$, $mp'-m'p$, $np'-n'p$. La première étant égale à $\frac{n^2}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, fera connoître par son signe si le mouvement de la comète est direct ou s'il est rétrograde. Dans le premier cas, $mn'-m'n$ doit être positif, et dans le second il sera négatif.

Appelons maintenant I l'inclinaison de l'orbite, et S la longitude de celui des deux nœuds que la comète devance dans l'ordre des signes. On aura, par les propriétés du mouvement parabolique, les trois équations :

$$\begin{aligned} mn'-m'n &= \pm \cos \mathrm{I}\, \sqrt{2}\,\Pi \\ mp'-m'p &= \pm \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{S}\, \sqrt{2}\,\Pi \\ np'-n'p &= \pm \sin \mathrm{I} \sin \mathrm{S}\, \sqrt{2}\,\Pi. \end{aligned} \qquad (41)$$

Dans ces formules qui doivent toujours donner $\mathrm{I} < 90°$ et $\sqrt{2}\,\Pi$ positif, il faut prendre les signes ambigus du second membre tous positivement, lorsque $mn'-m'n$ est positif, et tous négativement, lorsque $mn'-m'n$ est négatif.

La longitude S en particulier sera déterminée par la formule

$$\tang \mathrm{S} = \frac{np'-n'p}{mp'-m'p}. \qquad (42)$$

Mais cette formule, qui convient également aux angles S et $180°+\mathrm{S}$, donne la position de la ligne des nœuds, et n'indique pas l'un des nœuds plutôt que l'autre. On achèvera de déterminer S en calculant l'inclinaison I par la formule

$$\tang \mathrm{I} = \frac{mp'-m'p}{(mn'-m'n)\cos \mathrm{S}}; \qquad (43)$$

et prenant des deux valeurs de S celle qui rend $\tang \mathrm{I}$ positive.

Si *cos* S étoit très-petit, il seroit plus exact de déterminer *tang* I par la formule

$$tang\, \mathrm{I} = \frac{np' - n'p}{(mn' - m'n)\, sin\, \mathrm{S}}, \qquad (43)$$

et on lèveroit toujours de la même manière l'indétermination de S.

Le nœud ainsi déterminé par la valeur de S, *sera le nœud ascendant, si le mouvement est direct et la latitude boréale, ou si le mouvement est rétrograde et la latitude australe. Dans les deux autres cas, ce sera le nœud descendant, et il faudra ajouter* 180° *à* S *pour avoir le lieu du nœud ascendant.*

Les angles S et I étant déterminés, on aura la distance périhélie Π par la formule

$$\Pi = \frac{(mn' - mn')^2}{2\, cos^2\, \mathrm{I}}; \qquad (44)$$

on pourroit aussi la trouver indépendamment de ces angles par la formule

$$2\Pi = (mn' - m'n)^2 + (mp' - m'p)^2 + (np' - n'p)^2, \qquad (45)$$

qui résulte évidemment des équations (41); et il est aisé de voir que cette dernière valeur s'accorde avec la formule (37). Car en général le produit $(m^2 + n^2 + p^2)\,(m'^2 + n'^2 + p'^2)$ se décompose en ces quatre quarrés :

$$(mm' + nn' + pp')^2 + (mn' - m'n)^2 + (mp' - m'p)^2 + (np' - n'p)^2.$$

Donc la somme des trois derniers quarrés $= (m^2 + n^2 + p^2)$ $(m'^2 + n'^2 + p'^2) - (mm' + nn' + pp')^2 = r^2 . \frac{2}{r} - k^2 = 2r - k^2 = 2\Pi.$

XXVI. Avec la distance périhélie Π et le rayon vecteur r, on calculera l'anomalie vraie ψ de la comète au moment de la seconde observation, et de-là l'instant du passage au périhélie, ainsi qu'on l'a expliqué dans l'art. XXIV.

Enfin pour avoir le lieu du périhélie, on calculera la longitude héliocentrique φ de la comète par la formule

$$tang\,\varphi = \frac{n}{m}, \qquad (46)$$

ayant soin de choisir entre les deux angles φ et $\varphi + 180^\circ$ qui conviennent également à cette tangente, celui qui rend $sin\,\varphi$ de même signe que n, ou $cos\,\varphi$ de même signe que m.

φ étant ainsi connu, on trouvera toujours que $\varphi - S$ est positif et plus petit que 180°, conformément à la supposition faite que S est la longitude de celui des deux nœuds qui est moins avancé que la comète dans l'ordre des signes. Cela posé, soit σ la distance de la comète au nœud dont la longitude est S, on calculera σ par la formule

$$tang\,\sigma = \frac{tang\,(\varphi - S)}{cos\,I}, \qquad (47)$$

et le lieu du périhélie sur l'orbite sera

$S + \sigma + \psi$ si la comète marche vers son périhélie,
ou $S + \sigma - \psi$ si elle y a déjà passé.

XXVII. Pour éviter la peine de chercher ailleurs la démonstration des formules (41), nous croyons devoir l'ajouter ici.

Des équations différentielles (1) on déduit immédiatement les intégrales suivantes, qui expriment que les aires décrites dans les diverses projections de l'orbite sont proportionnelles au temps

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= C'dt \\ xdz - zdx &= C''dt \\ ydz - zdy &= C'''dt; \end{aligned} \qquad (48)$$

on en tire d'abord l'équation

$$C'z - C''y + C'''x = 0,$$

qui prouve que la trajectoire est située dans un même plan. En faisant $z = 0$, cette équation doit donner pour la ligne des nœuds $\frac{y}{x} = tang\, S$, ainsi on aura $C'' = C'\, tang\, S$. Du rayon 1 décrivons dans le plan des x et y l'arc indéfini s dont l'origine soit sur l'axe des x; les coordonnées du plan qui répondent à l'extrémité de cet arc seront:

$$x = \cos s\,, \quad y = \sin s\,, \quad z = \frac{C''}{C'} \sin s - \frac{C'''}{C'} \cos s.$$

On aura donc aussi

$$dz = ds \left(\frac{C''}{C'} \cos s + \frac{C'''}{C'} \sin s \right);$$

et dans le cas où $s = S$, $\frac{dz}{ds}$ devient la tangente de l'inclinaison ou $tang\, I$: on a donc

$$tang\, I = \frac{C''}{C'} \cos S + \frac{C'''}{C'} \sin S = \frac{C''}{C' \cos S};$$

donc $C'' = C' \cos S\, tang\, I$ et $C''' = C' \sin S\, tang\, I$.

Cela posé, les équations (48) rapportées à l'époque où l'on a $x = m$, $y = n$, &c. deviennent

$$\begin{aligned} mn' - m'n &= C' \\ mp' - m'p &= C' \cos S\, tang\, I \\ np' - n'p &= C' \sin S\, tang\, I, \end{aligned}$$

et il ne reste à déterminer que C'. Or dans l'équation (16) qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

le premier membre $= \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{dt^2}$; multipliant de part et d'autre par r^2, et mettant à la place de $\frac{rdr}{dt}$ sa valeur k, on en déduit

$$\frac{r^4 d\varphi^2}{dt^2} = 2r - \frac{r^2}{a} - k^2.$$

Mais l'aire $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ est la projection sur le plan de l'écliptique, de l'aire $\frac{1}{2}r^2d\varphi$ décrite dans le plan de l'orbite; donc puisque l'inclinaison mutuelle de ces deux plans est I, on a

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = \frac{x\,dy - y\,dx}{dt\cos \mathrm{I}} = \frac{\mathrm{C}'}{\cos \mathrm{I}}.$$

Donc

$$\mathrm{C}'^2 = \cos^2 \mathrm{I}\left(2r - \frac{r^2}{\mathrm{a}} - k^2\right).$$

Faisant à la fois $r = \Pi$ et $k = 0$, le second membre se réduit à $\cos^2 \mathrm{I}\left(2\Pi - \frac{\Pi^2}{\mathrm{a}}\right)$. Donc on a en général,

$$\mathrm{C}' = \pm \cos \mathrm{I} \sqrt{\left(2\Pi - \frac{\Pi^2}{\mathrm{a}}\right)},$$

et en particulier, lorsque l'orbite est parabolique,

$$\mathrm{C}' = \pm \cos \mathrm{I} \sqrt{2\Pi};$$

ce qui donne les formules (41).

XXVIII. La solution que nous venons de développer pour le cas où les observations sont faites à des intervalles de temps égaux, paroît avoir toute l'exactitude et la simplicité qu'on peut desirer dans une question dont la difficulté est généralement reconnue. Si par des circonstances peu favorables cette solution ne conduit pas à des résultats suffisamment exacts, il faudra s'en prendre à l'imperfection des observations et non aux négligences que nous nous sommes permises dans la réduction des formules. En vain voudroit-on pousser plus loin l'exactitude de ces formules (ce qui ne pourroit se faire que par des calculs trop compliqués pour être de quelqu'utilité dans la pratique); les erreurs des observations domineroient toujours et empêcheroient les résultats de passer un certain degré d'approximation. D'ailleurs, on sait assez que trois observations prises à peu de distance les unes des autres, ne peuvent pas déterminer assez exactement l'orbite d'une comète, et qu'il faut toujours recourir à des observations plus éloignées pour rectifier les élémens déterminés par une première approximation. Il est donc inutile de pousser le scrupule trop loin sur cette première approximation, et l'objet doit être suffisamment rempli par la méthode que nous avons exposée.

Lorsque les trois observations données ne seront pas également distantes entr'elles, il faudra, comme nous l'avons déjà dit, calculer par l'interpolation un nouveau lieu qui soit avec deux des autres dans la condition requise de l'égalité des distances. Dans ce calcul d'interpolation, il ne faudra faire entrer que les trois observations données, ou en général les trois observations connues les plus proches du moment pour lequel on veut déterminer le nouveau lieu. Tels sont les préceptes au moyen desquels on obtiendra toujours une solution suffisamment approchée dans la pratique.

XXIX. Mais à considérer le problême sous un point de vue purement analytique, nous n'aurions rempli qu'imparfaitement notre objet, si nous ne faisions voir par quels moyens on peut obtenir une solution générale indépendante de la supposition de $\theta' = \theta$.

Dans cette vue, nous allons reprendre les équations (11), et nous observerons d'abord que les mêmes raisons par lesquelles nous avons supprimé les termes affectés de θ^2 dans les formules de l'art. X, doivent également faire omettre, dans les valeurs de μ' et ν', les termes affectés du facteur $\theta^2 - \theta\theta' + \theta'^2$. Il ne reste alors, dans les équations (11) que deux sortes de termes, les uns affectés du facteur $\omega - \zeta(\theta' - \theta)$, les autres affectés du facteur $\omega(\theta' - \theta)$: or si on fait

$$\omega - \zeta(\theta' - \theta) = \xi \qquad (49)$$

le second facteur $\omega(\theta' - \theta)$ pourra être représenté par $\xi(\theta' - \theta)$; car la différence de ces deux quantités, qui est $\zeta(\theta' - \theta)^2$, se trouve de l'ordre des quantités qu'on a droit de négliger. Il suit de-là qu'on peut mettre les équations (11) sous cette forme :

$$\mu = \frac{\xi\theta\theta'}{2\Delta}\left[B + \tfrac{1}{3}(\theta' - \theta)E\right]$$

$$\mu' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta B^{\circ} - \theta' B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta E^{\circ} - \theta' E') + \tfrac{1}{2}\xi(\theta' - \theta)M$$

$$\nu' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta f^{\circ} B^{\circ} - \theta' f' B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta f^{\circ} E^{\circ} - \theta' f' E') + \tfrac{1}{2}\xi(\theta' - \theta)N$$

$$p' = \frac{\xi}{2\Delta}(\theta g^{\circ} B^{\circ} - \theta' g' B') + \frac{\xi}{2\Delta}(\theta g^{\circ} E^{\circ} - \theta' g' E').$$

Soit $\theta' = x' + y'$ et $\theta = x' - y'$, ces équations deviendront :

$$\mu = \frac{\xi\theta\theta'}{2\Delta}(B + \tfrac{2}{3}y'E)$$

$$\mu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[B^{\circ} - B' + \tfrac{2}{3}y'(E^{\circ} - E')\right] + \xi y' M$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}\left[B^{\circ} + B' + \tfrac{2}{3}y'(E^{\circ} + E')\right]$$

$$\nu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[f^{\circ} B^{\circ} - f' B' + \tfrac{2}{3}y'(f^{\circ} E^{\circ} - f' E')\right] + \xi y' N$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}\left[f^{\circ} B^{\circ} + f' B' + \tfrac{2}{3}y'(f^{\circ} E^{\circ} + f' E')\right]$$

$$p' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[g^{\circ} B^{\circ} - g' B' + \tfrac{2}{3}y'(g^{\circ} E^{\circ} - g' E')\right]$$
$$- \frac{\xi y'}{2\Delta}\left[g^{\circ} B^{\circ} + g' B' + \tfrac{2}{3}y'(g^{\circ} E^{\circ} + g' E')\right].$$

Les trois dernières expressions se simplifient encore au moyen des valeurs de $B^{\circ} + B'$, $f^{\circ} B^{\circ} + f' B'$, &c. données par les équations (10) ; il en résulte

$$\mu = \frac{\xi\theta\theta'}{2\Delta}\left(B + \tfrac{2}{3}y'E\right)$$

$$\mu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[B^{\circ} - B' + \tfrac{2}{3}y'(E^{\circ} - E')\right]$$
$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}\left(B + \tfrac{2}{3}y'E\right) + \tfrac{1}{2}\xi y'M$$

$$\nu' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[f^{\circ}B^{\circ} - f'B' + \tfrac{2}{3}y'(f^{\circ}E^{\circ} - f'E')\right]$$
$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}f\left(B + \tfrac{2}{3}y'E\right) + \tfrac{1}{2}\xi y'N$$

$$p' = \frac{\xi x'}{2\Delta}\left[g^{\circ}B^{\circ} - g'B' + \tfrac{2}{3}y'(g^{\circ}E^{\circ} - g'E')\right]$$
$$+ \frac{\xi y'}{2\Delta}g\left(B + \tfrac{2}{3}y'E\right).$$

XXX. Maintenant la substitution des valeurs de f, g, f', &c. en a, b, a', &c., donne, suivant les dénominations employées dans les art. XIII et XIX,

$$\frac{B}{\Delta} = R\, cos\, a . \frac{C}{D}$$
$$\frac{B^{\circ} - B'}{\Delta} = R . \frac{F}{D}$$
$$\frac{f^{\circ}B^{\circ} - f'B'}{\Delta} = R . \frac{G}{D}$$
$$\frac{g^{\circ}B^{\circ} - g'B'}{\Delta} = R . \frac{H}{D}.$$

A l'égard des autres quantités composées en E, comme celles-ci le sont en B, il faut observer que E n'est autre chose que B dans lequel on met M' et N' à la place de M et N. Or en négligeant l'excentricité ϵ (ce qui peut se faire sans inconvénient, parce que tous les termes affectés de E sont multipliés par la quantité très-petite y'), on a $M' = -sin\,A$ et $N' = cos\,A$, ou encore, par la même raison, $M' = - R \sin A$; $N' = R \cos A$.

Observons de plus, que chacune des quantités C, F, G, H, considérée comme fonction de A, est de la forme $\alpha' \cos A + \mathcal{C}' \sin A$, α' et $\mathcal{C}'$ ne contenant point A; donc puisque pour passer des fonctions B aux fonctions E, il suffit de changer $\cos A$ en $-\sin A$ et $\sin A$ en $+\cos A$, il s'ensuit que si la fonction $\frac{B}{\Delta}$ ou $R \cos a . \frac{C}{D}$, par exemple, est représentée par $\alpha' \cos A + \mathcal{C}' \sin A$, la fonction $\frac{2}{3} y' . \frac{E}{\Delta}$ le sera par $\frac{2}{3} y' (-\alpha' \sin A + \mathcal{C}' \cos A)$, et la somme des deux $\frac{1}{\Delta} (B + \frac{2}{3} y' E)$, le sera par

$$\alpha' (\cos A - \tfrac{2}{3} y' \sin A) + \mathcal{C}' (\sin A + \tfrac{2}{3} y' \cos A),$$

ou ce qui revient au même, en négligeant les secondes puissances de y' par

$$\alpha' \cos (A + \tfrac{2}{3} y') + \mathcal{C}' \sin (A + \tfrac{2}{3} y').$$

d'où il suit que cette fonction ne sera autre chose que la quantité $\frac{B}{\Delta}$ ou $R \cos a . \frac{C}{D}$, dans laquelle au lieu de A on mettroit $A + \frac{2}{3} y'$; la partie $\frac{2}{3} y'$ ou $\frac{2}{3} (\theta' - \theta)$ devant être exprimée en degrés, minutes et secondes du moyen mouvement du soleil.

XXXI. Un résultat semblable aura lieu pour les fonctions analogues de B et de E qui entrent dans nos équations. Soient donc

$$C1, F1, G1, H1;$$

ce que deviennent les quantités C, F, G, H, lorsqu'on y met $A + \frac{2}{3} y'$ à la place de A, et nous aurons enfin, après avoir mis $\rho \cos a \cos b$ à la place de μ:

$$\frac{\rho \cos b}{\xi} = \frac{R \theta \theta'}{2D} C1$$

$$\frac{\mu'}{\xi} = \frac{R x'}{2D} F1 + \frac{R y'}{2D} C1 \cos a + \frac{R y'}{2} \cos A$$

$$\frac{\nu'}{\xi} = \frac{Rx'}{2D} G1 + \frac{Ry'}{2D} C1 \sin a + \frac{Ry'}{2} \sin A$$

$$\frac{p'}{\xi} = \frac{Rx'}{2D} H1 + \frac{Ry'}{2D} C1 \tang b.$$

Les choses étant réduites à cet état de simplicité, on calculera les trois coëfficiens F2, G2, H2, d'après les valeurs

$$\begin{aligned} F2 &= \frac{\cos b}{\theta\theta' C1}(x' F1 + y' C1 \cos a + y' D \cos A) \\ G2 &= \frac{\cos b}{\theta\theta' C1}(x' G1 + y' C1 \sin a + y' D \sin A) \qquad (50) \\ H2 &= \frac{\cos b}{\theta\theta' C1}(x' H1 + y' C1 \tang b), \end{aligned}$$

dans lesquelles il faut se rappeler qu'on a $x' = \frac{1}{2}(\theta' + \theta)$, $y' = \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$; et alors on aura simplement, par l'élimination de l'inconnue ξ,

$$\mu' = F2\rho, \quad \nu' = G2\rho, \quad p' = H2\rho. \qquad (51)$$

Il en résulte donc

$$\begin{aligned} m' &= M' + F2\rho \\ n' &= N' + G2\rho \qquad (52) \\ p' &= \quad\;\; H2\rho; \end{aligned}$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation $m'^2 + n'^2 + p'^2 = \frac{2}{r}$, elle devient

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 + 2\rho(M'F2 + N'G2) + \rho^2(F^2 2 + G^2 2 + H^2 2), \qquad (53)$$

laquelle devra être combinée avec l'équation ordinaire

$$r^2 = R^2 - \rho(2R \cos c) + \rho^2,$$

afin d'en tirer les valeurs de R et ρ.

Il est visible que ces équations sont de même forme que celles qu'on a obtenues dans le cas de $\theta' = \theta$; de sorte que la solution générale, au moins dans l'hypothèse d'une orbite parabolique, n'offre guère plus de complication que celle qui a lieu dans ce cas particulier. D'ailleurs les équations précédentes une fois résolues, tout le reste s'achève comme on l'a expliqué ci-dessus.

Application à la seconde comète de 1781.

XXXII. Proposons-nous de déterminer l'orbite de la seconde comète de 1781, d'après les trois observations suivantes, réduites pour chaque jour à $8^h\ 29'\ 44''$, temps moyen à Paris.

Temps de l'obs.	*Longitude.*				*Latitude bor.*				*Lieu du ☉*			*Log.* R
Novembre.		D	M	S		D	M	S	D	M	S	
14	a°	307	14	45	b°	55	17	9	232	54	2	9.994864
19	a	306	51	26	b	39	14	48	237	57	4	9.994426
24	a'	306	42	20	b'	31	4	52	243	0	41	9.994028

Ces lieux sont tirés des *Mém. de l'Acad. des Scienc.* année 1780, pag. 67; et afin de rendre égaux les intervalles de temps entre les observations, on a interpolé les trois lieux des 19, 22 et 25 novembre, ce qui a donné le lieu du 24 tel que nous l'insérons ici. Ces sortes d'opérations se pratiquent fréquemment à l'égard des comètes, et elles sont utiles pour simplifier le calcul des élémens.

Si a°, a, a' sont trois longitudes observées aux temps $t-m$, t, $t+n$, respectivement, la longitude φ pour un temps quelconque $t+z$, intermédiaire entre ceux-là, se calcule par la formule

$$\varphi = \frac{(m+z)(n-z)}{mn}a - \frac{z(n-z)}{m(m+n)}a^\circ + \frac{z(m+z)}{n(m+n)}a'. \qquad (54)$$

Il en est de même des latitudes.

XXXIII. A l'inspection du tableau précédent, on voit que le mouvement de la comète en longitude est très-petit; circonstance peu favorable pour l'application de notre méthode, et sur-tout pour la détermination du coëfficient D. Cependant on peut observer que lorsque le mouvement en longitude est aussi lent que dans cet exemple, les observations ne sont pas sujettes à de si grandes erreurs, parce qu'alors la comète est comparée pendant plusieurs jours à la même étoile, ce qui donne des différences assez exactes.

Pour procéder à l'application de notre méthode, on commencera par calculer les coëfficiens C et D au moyen des formules (23) et (25), comme il suit :

	$a^\circ - a = 23' \, 19''$		$a - a' = 9' \, 6''$		$a^\circ - a' = 32' \, 25''$
sin.......	7.8313893	*sin*.......	7.4227670	*sin*.......	7.9744880
tang b′..	9.7801653	*tang b°*..	0.1593929	*tang b*..	9.9121887
	7.6115546		7.5821599		7.8866767
Nomb.	— 0.0040884		— 0.0038209		+ 0.0077033
	— 0.0038209				— 0.0079093
	— 0.0079093			D =	— 0.0002060

$$\begin{array}{rl} \text{Lieu du } \odot & 237^\circ \; 57' \; 4'' \\ & 180 \\ \hline A = & 57^\circ \; 57' \; 4'' \end{array}$$

	$A - a^\circ = 110^\circ \, 42' \, 19''$		$A - a' = 111^\circ \, 14' \, 44''$
sin.........	9.9710027	*sin*.........	9.9694327
tang b′....	9.7801653	*tang b°*....	0.1593929
	9.7511680		0.1288256
Nomb...	+ 0.563856		— 1.345320
			+ 0.563856
		C =	— 0.781464

On remarquera que si on eût augmenté a' d'une minute, le coëfficient C auroit subi très-peu de changement; mais le coëfficient D se seroit réduit à -0.0000237, valeur neuf fois moindre que l'autre. Une légère augmentation de plus dans la longitude a', auroit fait passer D du négatif au positif; d'où l'on voit combien il est à craindre que la valeur de D ne soit pas donnée avec assez de précision par les observations. Dans des cas semblables, il conviendra d'éviter tout emploi de ce coëfficient. Continuons cependant d'appliquer nos formules, comme si les observations données étoient exemptes d'erreur.

Puisque C et D sont de même signe, il s'ensuit qu'on a $r < R$. c'est-à-dire qu'au 19 novembre, époque de la seconde observation, la comète étoit moins éloignée que la terre du soleil. Ensuite pour déterminer r ainsi que ρ, distance de la comète à la terre, on résoudra les équations (29); mais d'abord il faut calculer les coëfficiens h et $2R\cos c$, d'après les formules (28), où l'on fera $\theta = 5^{j.}$, ayant soin d'ajouter au logarithme de θ le log. constant 8.2355821.

$A - a = 111° 5' 38''$		C..........	9.892909
cos..........	9.556179	$\frac{1}{2}\theta^2$..........	1.096910 6.471164
cos b..........	9.888982	R..........	9.994426
cos c..........	9.445161	1 : D..........	3.686133
2R..........	0.295456	1 : cos b..	0.111018
(2R cos c)...	9.740617	h..........	1.252560

XXXIV. Cela posé, en substituant la valeur de R dans les termes tout constans, les équations (29) deviennent

$$\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - 1.039253\right)$$
$$r^2 = 0.974658 - \rho(2R\cos c) + \rho^2.$$

Or sachant déjà que r est compris entre R et R*sin* c, on trouvera aisément par quelques fausses positions :

$$log.\ r = 9.990462$$
$$log.\ \rho = 9.712736.$$

Les vraies valeurs de ces quantités calculées d'après les élémens connus de l'orbite (vol. cité pag. 71), sont

$$log.\ r = 9.990071$$
$$log.\ \rho = 9.709226.$$

D'où l'on voit que par ce premier calcul la distance r est déterminée, à moins d'un 1000ème, et la distance ρ à moins d'un 120ème ; résultat beaucoup plus exact qu'on ne devoit s'y attendre, à cause de l'incertitude attachée à la valeur de D, et aussi parce que l'erreur des approximations étant de l'ordre θ^2, la solution ne semble devoir être exacte qu'à environ un 140ème, lorsque θ est de 5°, qui sont le 12ème des 58 jours pris pour unité (art. XXIII).

Mais si on examine de plus près l'influence de cette seconde cause, on trouvera qu'elle n'est pas à beaucoup près aussi considérable. En effet, la seconde des équations qu'on vient de résoudre, est une équation rigoureuse, qui ne peut être affectée que d'une très-legère erreur dans la valeur de *cos* C. Quant à la première équation où h est la seule quantité qui peut participer à la fois de l'erreur des observations et de celle de la méthode, il est aisé de voir, par les valeurs connues de r et de ρ, qu'on a à très-peu-près $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{15}.\frac{dh}{h}$, et $\frac{dr}{r} = \frac{1}{120}.\frac{dh}{h}$; de sorte qu'une erreur de $\frac{1}{8}$, par exemple, sur h, n'en donne qu'une de $\frac{1}{120}$ sur ρ, et une de $\frac{1}{1000}$ seulement sur r. Cela explique suffisamment l'exactitude que nous avons obtenue dans la solution précédente, sans avoir cependant une valeur de D fort approchée.

XXXV. Venons maintenant aux équations indépendantes de D et qui doivent donner des résultats plus certains. Il faut d'abord calculer les coëfficiens P, Q, H, d'après les formules (31). Voici le détail de ce calcul :

sin (A—a°)...	9.9710027	*sin* (A—a)...	9.9698779	*sin* (A—a')...	9.9694327
sin (A—a')...	9.9694327	*sin* (A—a°)...	9.9710027	*sin* (A—a)...	9.9698779
2 *tang* b.......	0.2132187	*tang* b'.......	9.7801653	*tang* b°.........	0.1593929
	0.1536541		9.7210459		0.0987035
Nomb.....	+ 1.4244724		— 0.5260729		— 1.2551728
	— 1.7812457		— 1.2551728		
P =	— 0.3567733		— 1.7812457		

A — a° =	110° 42' 19"	*sin*(A—a)..	9.9698779	*sin*(A—a)..	9.9698779
A — a' =	111 14 44	*cos*(A—a')..	9.5591471	*cos*(A—a°)..	9.5484643
2A—a°—a' =	221 57 3	*tang* b°......	0.1593929	*tang* b'.......	9.7801653
sin..........	9.8250966		9.6884179		9.2985075
tang b.....	9.9121887		+ 0,4879979		+ 0.1988417
	9.7372853		+ 0.1988417		
	— 0.5461165		+ 0.6868396		
			— 0.5461165		
		Q =	+ 0.1407231		

sin(A—a')...	9.9694327	*sin*(A—a°)...	9.9710027	*sin*(A—a)...	9.9698779
tang b......	9.9121887	*tang* b......	9.9121887	*tang* b°...	0,1593929
tang b°.....	0.1593929	*tang* b'.....	9.7801655	2 *tang* b'...	0.0811953
	0.0410143		9.6633567		0.2104661
	+ 1.0990420		+ 0.4606348		— 1.6235517
			+ 1.0990420		+ 1.5596768
			+ 1.5596768	H =	— 0.0638749

Il faut ensuite substituer ces valeurs de P, Q, H, dans l'équation (35).

$$\frac{2}{r} = \frac{2}{R} - 1 - \frac{2\rho \cos b}{\theta C}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R} P + \varepsilon \sin \Psi Q\right)$$
$$+ \frac{\rho^2 \cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2).$$

Voici le calcul des coëfficiens dans lesquels la valeur de $\varepsilon \sin \Psi$ a été déduite de *log.* R par la méthode de l'art. XII.

C.......	9.892909	P.......	9.552392	Q......	9.148366
θ........	8.934552	$\frac{\cos b}{\theta C}$......	1.061521		1.061521
1 : $\cos b$...	0,111018				
	8.938479		0.613913		0.209887
		$\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}$...	0.005513	$\varepsilon \sin \Psi$....	8.043643
$\frac{\cos b}{\theta C}$.......	1.061521				8.253530
			0.619426		
H......	8.805330	*Nomb.* —	4.163192		+ 0.017928
	9.866851				— 4.163192
					— 4.145264

$$\frac{\cos^2 b}{\theta^2 C^2}(P^2 + Q^2 + H^2) = 20.06817.$$

On aura donc l'équation

$$\frac{1}{r} = 0.512917 - \rho(4.14526) + \rho^2(10.03409)$$
log.... 0.617552 1.001478,

qu'il faut combiner avec l'équation déjà trouvée,

$$r^2 = 0.974658 - \rho\,(2 R \cos c) + \rho^2$$
log.... 9.740617,

et on trouvera pour solution,

$$\log.\ r = 9.990050$$
$$\log.\ \rho = 9.709582\,;$$

valeurs qui ont toute l'exactitude qu'on peut desirer, puisqu'il n'y a que très-peu de différence entre ces valeurs et celles qu'on a données ci-dessus d'après les vrais élémens de l'orbite.

XXXVI. Il faut maintenant déterminer ces élémens tels qu'ils résultent de nos trois observations : or par les calculs précédens on a

$\frac{\cos b}{\theta C}$ P.........	0.613913	$\frac{\cos b}{\theta C}$ Q.........	0.209887	$\frac{\cos b}{\theta C}$ H...	9.866851
ρ.........	9.709582	ρ.........	9.709582	ρ....	9.709582
	0.323495		9.919469	p'...	9.576433
$\frac{\rho \cos b}{\theta C}$ P =	2.106177	$\frac{\rho \cos b}{\theta C}$ Q =	− 0.830748		
$\frac{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2}{R}$.......	1.012775	$\varepsilon \sin \psi$..........	0.011057		
P' =	+ 1.093402	Q' =	− 0.841805		

Des deux nombres P' et Q' ainsi trouvés, il sera facile de déduire m' et n' par les formules (32), qui donnent

$$m' = \quad P' \sin A + Q' \cos A$$
$$n' = -P' \cos A + Q' \sin A.$$

Enfin les trois autres quantités m, n, p se calculeront par les formules (27), et on aura pour résultat les logarithmes suivans :

m......	9.881887	m'.......	9.681301
n.......	9.715418	$(-n')$......	0.111839
p.......	9.510753	p'........	9.576433

où l'on a indiqué que n' est la seule de ces six quantités qui soit négative. On conclura de-là

$$mn' - m'n = -1.234955 \ldots\ldots \ 0.091651$$
$$mp' - m'p = \quad 0.131674 \ldots\ldots \ 9.119499$$
$$np' - n'p = \quad 0.615183 \ldots\ldots \ 9.789004$$

XXXVII. Puisque $mn' - m'n$ est négatif, le mouvement de la comète est rétrograde, et les équations (41) deviendront :

$$m'n - mn' = \cos I \sqrt{2\Pi}.$$
$$-(mp' - m'p) = \sin I \cos S \sqrt{2\Pi}$$
$$-(np' - n'p) = \sin I \sin S \sqrt{2\Pi}$$

Des deux dernières on tire

$$
\begin{array}{rl}
mp' - m'p \ldots\ldots & 9.119499 \\
np' - n'p \ldots\ldots & \underline{9.789004} \\
tang\, S \ldots\ldots & 0.669505.
\end{array}
$$

Ainsi l'angle S est de $77^\circ\ 55'\ 7''$, ou de $257^\circ\ 55'\ 7''$; or il faut, par les équations précédentes, que *sin* S et *cos* S soient négatifs, puisque *sin* I ne peut l'être ni $\sqrt{2\pi}$; donc on a

$$S = 257^\circ\ 55'\ 7''.$$

Connoissant S, on trouvera immédiatement I par la formule

$$\sin S \tan I = -\frac{(np' - n'p)}{m'n - mn'},$$

qui donne

$$I = 26^\circ\ 59'\ 43''\ 5.$$

Enfin on aura aussi la distance périhélie par la formule $\sqrt{2\pi} = \frac{m'n - mn'}{\cos I}$; d'où l'on tire $\log. \pi = 9.982474$, ou cette distance elle-même

$$\pi = 0.960449.$$

L'anomalie déduite de la formule $\cos^2 \frac{1}{2} \psi = \frac{\pi}{r}$, sera

$$\psi = 15^\circ\ 6'\ 46''.$$

Avec cette anomalie, on trouve dans la table des comètes le temps correspondant $T = 10^j.9697$; ensuite la formule $t = \pi^{\frac{3}{2}} T$, donne $t = 10^j.3254$. C'est l'intervalle de temps entre l'observation du 19 novembre et le passage de la comète au périhélie. Pour savoir si la seconde époque précède la première ou en est précédée, il faut calculer la quantité k, ou seulement en déterminer le signe d'après la formule

$$k = mm' + nn' + pp'.$$

Or à l'inspection des nombres qui entrent dans cette valeur, on reconnoît bientôt que k est négatif, et qu'ainsi à l'époque du

19 novembre, $8^h\ 29'\ 41''$ temps moyen, la comète n'avoit pas encore atteint son périhélie. Donc en ajoutant à cette date l'intervalle trouvé $10^j\ 3254$ ou $10^j\ 7^h\ 48'\ 35''$, on aura l'instant du passage au périhélie : 29 novembre $16^h\ 18'\ 19''$, ou novembre 29,6794.

XXXVIII. Il reste à trouver le lieu du périhélie, et d'abord il faut trouver la longitude héliocentrique φ de la comète, par la formule $\tang\varphi = \frac{n}{m}$ qui donne $\varphi = 34^\circ\ 16'\ 42''$, ou $\varphi = 214^\circ\ 16'\ 42''$; la première est celle qu'il faut choisir, parce que *sin* φ et *cos* φ doivent avoir les mêmes signes que n et m *respectivement*, lesquels sont positifs. Enfin la formule $\tang\sigma = \frac{\tang(\varphi - S)}{\cos I}$, donne

φ..... $34^\circ\ 16'\ 42''$	$\tang(\varphi - S)$....	9.979379
S.... $257\ \ 55\ \ 7$	*cos* I.. ...	9.949899
$\varphi - S = 136\ \ 21\ \ 35$	$\tang\sigma$......	0.029480
		$\sigma = 133^\circ\ 3'\ 25''$

et par la quantité $\sigma - \psi + S$, on trouve ce que les astronomes appellent le lieu du périhélie,

$$15^\circ\ 51'\ 46''.$$

Rassemblant ces divers résultats, on aura les élémens de l'orbite de la seconde comète de 1781, tels qu'ils résultent des trois observations données ; nous les mettons ici en comparaison avec les élémens corrigés qu'on trouve dans les Mémoires de 1781, page 71.

ÉLÉMENS APPROCHÉS.		ÉLÉMENS CORRIGÉS.
Distance périhélie...........	0.960449	0.960995
Lieu du nœud ascendant.....	$77^\circ\ 55'\ 7''$	$77^\circ\ 22'\ 55''$
Inclinaison.............	26 59 44	27 12 4
Lieu du périhélie............	15 51 46	16 3 7
Passage au périhélie : novembre	$29^j\ 16^h\ 18'\ 19''$	$29^j\ 12^h\ 42'\ 46''$
Sens du mouvement................	*Rétrograde.*	

XXXIX. La différence de ces deux systêmes d'élémens est assez petite pour qu'on ait lieu de s'étonner qu'un premier essai de calcul, fondé sur trois observations faites dans l'intervalle de dix jours seulement, ait pu conduire à une connoissance si approchée de la véritable orbite. Mais pour comparer encore mieux les deux systêmes, nous avons calculé dans chacun d'eux les lieux géocentriques de la comète aux époques des trois observations. Voici le résultat de ce calcul :

ÉLÉMENS APPROCHÉS.														
Époques.	*Long. calculée.*			*Long. observée.*			*Differ.*	*Latit. calcul.*			*Latit. observ.*			*Differ.*
Novbre.	D	M	S	D	M	S	S	D	M	S	D	M	S	S
14	307	15	46	307	14	45	+ 61	55	20	55	55	17	9	+226
19	306	51	27	306	51	26	+ 1	39	14	49	39	14	48	+ 1
24	306	41	59	306	42	20	− 21	31	3	50	31	4	52	− 62
ÉLÉMENS CORRIGÉS.														
14	307	17	59	307	14	45	+194	55	15	14	55	17	9	−115
19	306	53	6	306	51	26	+100	39	13	53	39	14	48	− 55
24	306	43	28	306	42	20	+ 28	31	6	24	31	4	52	+ 92

Il résulte de cette comparaison, que nos élémens approchés représentent mieux les longitudes que les élémens corrigés, et qu'ils n'ont du désavantage sur ceux-ci que dans la seule latitude du 14 novembre. Ce résultat inattendu prouve que notre méthode a toute l'exactitude nécessaire pour une première approximation ; mais on devra toujours corriger, par des calculs faits sur des observations éloignées, les élémens donnés par des observations peu distantes entre elles ; car on ne réussit pas toujours à représenter par une même orbite parabolique toutes les observations d'une comète; et en cas de différence sensible dans les résultats, on doit préférer l'orbite qui satisfait le mieux aux observations éloignées. Enfin si la différence étoit plus considérable, il faudroit avoir recours à une orbite elliptique ou hyperbolique.

Autre application à la comète de 1769.

XL. Pour apprécier encore mieux l'exactitude de notre méthode, nous allons l'appliquer, non à des observations toujours susceptibles d'erreurs d'où peuvent résulter des compensations; mais à des lieux de la comète de 1769, calculés d'après les élémens connus. Les différences qu'on trouvera entre les élémens déduits de ces observations fictives et les vrais élémens, seront des erreurs dues tout entières à la méthode, et serviront à fixer le degré d'approximation auquel elle peut atteindre.

Epoques.	*Longitude.*				*Latitude austr.*				*Lieu du* ☉			*Log.* R.
Septembre.		D	M	S		D	M	S	D	M	S	
8 à 14^h.	a°	101	18	8	b°	22	14	35	166	35	31	0.0026648
10 *id.*	a	112	51	31	b	23	28	15	168	32	22	0.0024242
12 *id.*	a'	124	26	47	b'	23	48	36	170	29	20	0.0021838

Voici d'abord le calcul des coëfficiens D et C :

$a - a^\circ = 11^\circ\,33'\,23''$		$a' - a = 11^\circ\,35'\,16''$		$a' - a^\circ = 23^\circ\,8'\,39''$	
sin.......	9.3017509	*sin*.......	9.3029128	*sin*.......	9.5944435
tang b'..	9.6446956	*tang* b°..	9.6116907	*tang* b..	9.6376970
	8.9464465		8.9146035		9.2321405
Nomb.	+ 0.0883988		+ 0.0821492		− 0.1706635
	+ 0.0821492				+ 0.1705480
	+ 0.1705480			D =	− 0.0001155

A	= 348° 32′ 22″			
A — $a°$	= 247° 14′ 14″	A — a'	= 224° 5′ 35″	
sin..........	9.9647849	*sin*..........	9.8425005	
tang b'....	9.6446956	*tang b°*....	9.6116907	—0.4068933
				+0.2845714
	9.6094805		9.4541912	C = —0.1223219
Nomb...—	0.4068933		+ 0.2845714	

Puisque C et D sont de même signe, il s'ensuit qu'on a $r < R$, comme dans l'exemple déjà apporté; ensuite faisant $\theta = 2^j$, on aura

A — a = 235° 40′ 51″		$\frac{1}{2}\theta^2$.........	0.3010300 / 6.4711642
cos..........	9.7511269	C..........	9.0875041
cos b.......	9.9624938	R..........	0.0024242
cos c........	9.7136207	1 : D......	3.9374180
2R.........	0.3034542	1 : *cos b*..	0.0375062
(2R*cos c*)...	0.0170749	*h*..........	9.8370467

XLI. Au moyen de ces valeurs, on aura à résoudre les équations

$$\rho = h\left(\frac{1}{r^3} - 0.983394\right)$$

$$r^2 = 1.011226 - \rho(2R\cos c) + \rho^2;$$

et comme on sait que r est compris entre R et R*sin c*, on trouvera aisément la solution

$$\log. r = 9.946165$$

$$\log. \rho = 9.506414.$$

Les vraies valeurs de ces logarithmes, calculés par les élémens exacts, sont 9.945573 et 9.513676; d'où l'on voit que l'erreur est +592 sur le premier logarithme, et —7262 sur le second, ce qui répond à une erreur d'un 740$^{\text{ème}}$ sur le premier nombre, et d'un 60ème sur le second. Si ces premières déterminations ne sont pas plus exactes, c'est que $3h \cos c$ est plus grand que R^4, mais en diffère peu ; de sorte que, suivant l'art. XV, les équations à résoudre sont très-près de la limite, passé laquelle elles seroient susceptibles de deux solutions. Alors les deux courbes qui se coupent sont très-près de se toucher, et leur intersection se détermine moins exactement. Pour faire cadrer entièrement la solution de nos deux équations avec les vraies valeurs de r et de ρ, il suffiroit de prendre 1150 au lieu de 1155 pour la valeur de D, changement qui répond à un dixième de seconde sur a° ou sur a'.

XLII. Il faut passer maintenant au calcul des coëfficiens P, Q, H, d'après les formules (31) :

sin (A—a°)...	9.9647849	*sin* (A—a°)..	9.9647849	*sin* (A—a')...	9.8425005
sin (A—a')...	9.8425005	*sin* (A—a)...	9.9169325	*sin* (A—a)...	9.9169325
2 *tang b*.......	9.9387270	*tang b'*........	9.6446956	*tang b°*.........	9.6116907
	9.7460124		9.5264130		9.3711237
Nomb.....	+ 0.5572017		— 0.3360571		— 0.2350302
	— 0.5710873		— 0.2350302		
P =	— 0.0138856		— 0.5710873		

$$A - a^\circ = 247^\circ\ 14'\ 14''$$
$$A - a' = 224\ \ 5\ \ 35$$
$$2A - a^\circ - a' = 111\ \ 19\ \ 49$$

sin(A—a)..	9.9169325	*sin*(A—a)..	9.9169325	*sin*..........	9.9691824
cos(A—a')..	9.8562518	*cos*(A—a°)..	9.5876174	*tang b*.....	9.6376970
tang b°......	9.6116907	*tang b'*.......	9.6446956		9.6068794
	9.3848750		9.1492455		+ 0.4044635
Nomb...	— 0.2425912		— 0.1410086		— 0.3835998
			— 0,2425912	Q =	+ 0.0208637
			— 0.3835998		

sin(A—*a*)… 9.9169325	*sin*(A—*a'*)… 9.8425005	*sin*(A—*a°*)… 9.9647849
tang *b°*….. 9.6116907	*tang* *b*…… 9.6376970	*tang* *b*…… 9.6376970
2 *tang* *b'*….. 9.9457256	*tang* *b°*…. 9.6116907	*tang* *b'*…… 9.6446956
9.4743488	9.0918882	9.2471775
Nomb….. + 0.2980910	— 0.1235629	— 0.1766760
— 0.3002389	— 0.1766760	
H = — 0.0021479	— 0.3002389	

Si l'on veut voir quel est le résultat qu'on tireroit des équations (33) et (34), il faut multiplier les valeurs de P, Q, H, par $\frac{R\theta}{D}$ dont le logarithme est 2.4764543; d'ailleurs par l'article XII on a *log.* ($\epsilon \sin \Psi$) = 8.1969643, ce qui donne :

P……. 8.1425647	Q…… 8.3193914	H…… 7.3320141
2.4764543	2.4764543	2.4764543
0.6190190	0.7958457	9.8084684
$\frac{1-\frac{1}{2}\epsilon^2}{R}$… 9.9975146	$\epsilon \sin \Psi$… 8.1969643	
0.6165336	8.9928100	
Nomb… — 4.135553	+ 0.098358	
	— 4.135553	
	— 4.037195 = *coëf. de* ω.	

On trouve de même, pour le coëfficient de ω^2,

$$\frac{R^2\theta^2}{4D^2}(P^2+Q^2+H^2) = 14.192485.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (33) et (34), et faisant toujours $\frac{1}{a} = 0$, on aura à résoudre les équations

$$\frac{1}{r} = 0.494434 - \omega(2.018598) + \omega^2(7.096243)$$
$$log.... \quad 0.305050 \qquad 0.851028$$
$$\frac{1}{r^3} = 0.983394 + \omega.$$

Or connoissant déjà les limites de r, on trouvera facilement la solution

$$log.\ r = 9.945435$$
$$log.\ \omega = 9.676148\ ;$$

et de la valeur de ω, on déduira celle de $\rho = \omega . \frac{R\theta}{D} . \frac{C\theta}{2\cos b}$,

qui donne $log.\ \rho = 9.513195.$

Les vraies valeurs de $log.\ r$ et $log.\ \rho$ étant 9.945573 et 9.513676, on voit que l'erreur est — 138 sur le premier logarithme, et — 481 sur le second, ce qui ne fait qu'un 3000ème d'erreur sur r, et un 900ème sur ρ.

XLIII. Venant ensuite à l'équation (35), on pourra déduire ses coëfficiens de ceux de l'équation précédente, au moyen de la valeur $\omega = \rho . \frac{2D\cos b}{R\theta^2 C}$, dont on a déjà calculé le coëfficient pour passer de la valeur de ω à celle de ρ. On aura donc de cette manière les équations suivantes en r et ρ :

$$\frac{1}{r} = 0.494434 - \rho(C') + \rho^2(C'')$$
$$log.... \quad 0.468003 \quad 1.176934$$
$$r^2 = 1.011226 - \rho(2R\cos c) + \rho^2$$
$$log.... \quad 0.017075,$$

dont la résolution donne

$$log.\ r = 9.945619$$
$$log.\ \rho = 9.513102.$$

On voit que l'erreur est encore diminuée sur le premier logarithme, mais qu'elle est augmentée à-peu-près d'autant sur le second.

Comme le résultat de ces dernières équations est celui qui mérite le plus de confiance, lorsqu'on n'a encore aucune connoissance des élémens de l'orbite, nous continuerons, d'après ce résultat, le calcul nécessaire pour obtenir une première approximation vers ces élémens.

XLIV. Il suffit le plus souvent de connoître la distance périhélie, parce qu'avec cette distance et le rayon vecteur r, on détermine facilement l'anomalie vraie au temps de la seconde observation, et l'instant du passage de la comète par le périhélie. Or ces premiers élémens étant connus d'une manière approchée, on a les moyens de les rectifier et de déterminer les autres élémens de l'orbite, en comparant les observations les plus exactes faites à de grands intervalles de temps.

Si donc on veut se borner à la recherche de la distance périhélie, il faut faire usage des formules (37) et (40); savoir, $\Pi = r - \frac{1}{2} k^2$, et

$$k = \rho \cos b \sin (A - a) . P' + (R - \rho \cos c) Q' + \rho \sin b . H'; \quad (56)$$

formule où l'on a fait pour abréger,

$$P' = \frac{\rho \cos b}{\theta C} P - \frac{(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2)}{R}, \quad H' = \frac{\rho \cos b}{\theta C} H$$

$$Q' = \frac{\rho \cos b}{\theta C} Q - \varepsilon \sin \Psi. \quad (57)$$

Or dans cet exemple on trouve

$\rho \cos b \sin (A - a)$....	9.3925283	
P'.............	7.8983630	
	7.2908913....	+ 0.0019538
$R - \rho \cos c$.........	9.9227514	
Q'............	0.1754585	
	0.0982099....	— 1.2537470
$\rho \sin b$.H'..........	8.2967865....	+ 0.0198055
		— 1.231988 = k.

Puisque k est négatif, il s'ensuit qu'au 10 septembre, époque de l'observation moyenne, la comète n'avoit pas encore atteint son périhélie ; on en déduit

$$\Pi = r - \tfrac{1}{2}k^2 = 0.123408.$$

XLV. Pour avoir à la fois tous les élémens de l'orbite, tels qu'ils peuvent résulter de nos trois observations, il faut calculer les valeurs des six coëfficiens m, n, p, m', n', p', d'après les formules

$$\begin{array}{ll|ll} m & = R \cos A + \rho \cos b \cos a & m' & = \quad P' \sin A + Q' \cos A \\ n & = R \sin A + \rho \cos b \sin a & n' & = -P' \cos A + Q' \sin A \\ p & = \rho \sin b & p' & = \quad H' \end{array}$$

et on trouvera leurs logarithmes comme il suit, en observant que m' est la seule de ces quantités qui soit négative :

m.......	9.9392289	$(-m')$....	0.1662465
n.......	8.8788956	n'.......	9.4848145
p.......	9.1132928	p'.......	9.1834937

De-là on déduit les logarithmes des trois quantités suivantes, dont les deux premières sont positives et la troisième négative

$$\begin{array}{rl} (mn' - m'n) \ldots\ldots\ldots & 9.5756968 \\ (mp' - m'p) \ldots\ldots\ldots & 9.5092008 \\ -(np' - n'p) \ldots\ldots\ldots & 8.4485937 \end{array}$$

XLVI. De ce que $(mn' - m'n)$ est positive, on conclut d'abord que le mouvement de la comète est direct ; il faut donc prendre le signe supérieur dans les équations (41), et on aura

$$\begin{aligned} mn' - m'n &= \cos I \sqrt{2\Pi}. \\ mp' - m'p &= \sin I \cos S \sqrt{2\Pi} \\ np' - n'p &= \sin I \sin S \sqrt{2\Pi} \end{aligned}$$

A l'inspection des deux dernières, on voit que $\sin$ S doit être négatif et *cos* S positif; de sorte que l'angle S calculé par la formule

$$tang\, S = \frac{np' - n'p}{mp' - m'p} \qquad \begin{array}{r} 8.4485937 \\ 9.5092008 \\ \hline tang\, S \ldots\ldots\ 8.9393929 \end{array}$$

doit être compris entre 270° et 360°; et comme la tangente, qui est négative, appartient également aux deux angles 175° 1′ 45″.2 et 355° 1′ 45″.2, on doit s'arrêter au dernier,

$$S = 355^\circ\ 1'\ 45''.2.$$

C'est le lieu du nœud descendant, suivant la règle de l'art. XXV, puisque le mouvement est direct et la latitude australe.

L'inclinaison I se calculera par la formule

$$tang\, I = \frac{mp' - m'p}{(mn' - m'n)\cos S},$$

qui donne I = 40° 44′ 14″7.

Enfin la distance périhélie étant calculée par l'équation

$$\Pi = \frac{(mn' - m'n)^2}{2\cos^2 I},$$

on aura *log.* $\Pi = 9.0913596$, ou $\Pi = 0.1234126$, valeur qui s'accorde suffisamment avec celle que nous avons déduite de la valeur de *k*.

La distance Π étant connue, on aura l'anomalie ψ par la formule $\cos^2 \frac{1}{2}\psi = \frac{\Pi}{r}$, d'où l'on tire $\psi = 136^\circ\ 4'\ 30''.4$.

Cette anomalie répond, dans la table des comètes, au temps $T = 621^j.749$, et ce nombre étant multiplié par $\Pi^{\frac{3}{2}}$, on aura $t = 26^j.9560$, qui ajouté au temps de l'observation moyenne *sept.* 10.5833, donnera *sept.* 37.5393 ou *octobre* 7.5393 pour l'instant du passage de la comète par le périhélie.

La longitude héliocentrique φ est donnée par la formule

$tang\,\varphi = \frac{n}{m}$, où l'on doit observer de rendre le signe de $sin\,\varphi$ conforme à celui de n, ou celui de $cos\,\varphi$ à celui de m. On aura ainsi $\varphi = 4° \, 58' \, 26''$ et $\varphi - S = 9° \, 56' \, 40''.8$. Ensuite la distance σ de la comète au nœud dont la longitude est S, se calcule par la formule

$$tang\,\sigma = \frac{tang\,(\varphi - S)}{cos\,I},$$

qui donne $\sigma = 13° \, 1' \, 52''.8$. Enfin la somme $S + \sigma + \psi$, puisque la comète marche vers son périhélie (art. XXVI), donnera pour le lieu du périhélie, $144° \, 8' \, 8''.4$.

Voici le résultat de tous ces calculs comparé aux vrais élémens de l'orbite :

ÉLÉMENS APPROCHÉS.				ÉLÉMENS VRAIS.		
Log. dist. périhélie............	9.091360			9.090847		
Passage au périhélie..... *Octobre*	7.5393			*Octobre*... 7.5310		
Lieu du nœud ascendant.......	175°	1'	45″	175°	3'	40″
Inclinaison...............	40	44	15	40	47	56
Lieu du périhélie.............	144	8	8	144	11	32
Sens du mouvement...................	Direct.					

OBSERVATION GÉNÉRALE.

XLVII. Les deux exemples que nous avons choisis pour l'application de notre méthode, sont aussi différens qu'il est possible. Dans le premier, le mouvement en longitude est très-lent, et le mouvement en latitude très-prompt. Dans le second, au contraire, le mouvement en longitude est très-prompt, et le mouvement en latitude très-lent. Dans l'un, l'intervalle des observations est de 10 jours; dans l'autre, il n'est que de 4; et cependant le succès de la méthode a été à-peu-près le même dans l'un et dans l'autre. On a obtenu les élémens de l'orbite très-peu différens de ceux que donne la combinaison d'un plus grand nombre d'observations ou d'observations faites à de plus grands intervalles de temps.

Il y a lieu de croire que le succès sera le même dans les diverses applications qu'on voudra faire de cette méthode, sauf peut-être quelques exceptions qui pourront dépendre ou de l'inexactitude des observations ou de quelques circonstances particulières peu favorables, telles qu'une très-petite inclinaison de l'orbite, qui ne permettroit pas d'employer avec sûreté les latitudes observées. Le cas le plus défavorable de tous seroit celui où la vraie orbite différeroit très-sensiblement d'une parabole, et où en même temps la distance de la comète au soleil, lors de la seconde observation, différeroit très-peu de celle de la terre au soleil; car alors l'emploi des équations (29) pourra être défectueux à cause de l'incertitude sur la valeur de D, et on ne pourroit pas non plus faire usage de l'équation (35), puisque $\frac{1}{a}$ ne seroit pas assez petit pour être négligé.

Au reste, nous avons réduit les formules autant qu'il a été possible pour la commodité des calculateurs : nous avons donné des règles sûres pour distinguer, dans le résultat des formules, le nœud ascendant du nœud descendant, les époques avant le périhélie des époques après le périhélie, et enfin pour prendre chaque chose avec le signe qui lui convient, sans avoir recours aux figures qui sont cependant utiles pour diriger le calcul.

Mais on ne sauroit trop recommander aux calculateurs d'apporter le plus grand soin à bien déterminer les signes des différens termes qui entrent dans les formules, et principalement dans les valeurs des coëfficiens C, D, P, Q, H, d'après les règles connues des sinus, cosinus et tangentes considérés dans les divers quarts de la circonférence. L'attention, à cet égard, est d'autant plus nécessaire, que rien n'y peut suppléer, et que la moindre négligence peut faire augmenter considérablement un travail déjà long et fastidieux, ou donner à croire mal-à-propos que la méthode qu'on a suivie est défectueuse.

SECONDE PARTIE.

Méthode pour corriger les élémens de l'orbite connus par une première approximation.

XLVIII. Nous prendrons pour exemple la comète de 1769 qui a été observée pendant un long espace de temps, avant et après son passage par le périhélie, et nous choisirons les trois observations suivantes tirées de la Cométographie de Pingré, tome II, page 368.

Temps moyen à Paris.	*Longitude de la Comète.*			*Sa Latitude.*			*Lieu du ☉*			*Log. R.*
	D	M	S	D	M	S.	D	M	S	
Août. 14.52352	39	58	16	3	17	30 A	142	21	26	0.0052440
Sept.. 15.69398	140	39	17	22	43	34 A	173	31	30	0.0018100
Déc... 2.21413	276	41	20	23	33	25 B	250	54	12	9 9934960

Supposons que par les premiers essais on a trouvé le logarithme de la distance périhélie $= 9.0900000$, et l'instant du passage au périhélie le 7 octobre à 12 heures environ; nous prendrons pour ces deux élémens corrigés,

$$\log. \Pi = 9.0900000 + \varpi (10000)$$

Passage au périhélie...... octobre $7.50 + \tau (0.25)$

La correction $\varpi (10000)$ est exprimée en unités décimales du septième ordre; et la correction $\tau (0.25)$ représente une fraction de jour qui iroit à $\frac{1}{4}$ de jour ou 6^h, si on avoit $\tau = 1$. Ces nombres sont ainsi choisis, parce qu'on suppose que la véritable époque du passage au périhélie, doit être entre 7.25 et 7.75; et que le vrai *log.* de la distance périhélie est pareillement compris entre 9,089 et 9,091, ou du moins qu'il s'écarte peu de ces limites.

XLIX. Cela posé à l'aide de ces deux élémens, on doit calculer les anomalies et les rayons vecteurs qui ont lieu à l'instant de chaque observation. Voici le détail de ce calcul appliqué à la seconde observation : on y verra les précautions à prendre pour tenir compte des corrections indéterminées.

Passage au périhélie... oct^{bre} 7.50, ou sept^{bre} 37.50 $+\tau(0.25)$
Temps de l'observation................ sept^{bre} 15.69398

Différence................................ $t = 21^{j}.80602 + \tau(0^{j}.25)$

Le logarithme de 21.80602 est 1.3385764; pour avoir la partie additionnelle due à la correction $\tau(0.25)$, on pourroit prendre la différence logarithmique de 21806 à 21807, laquelle est 199, et multiplier cette différence par 250, ce qui donneroit 49750; d'où résulte le logarithme entier de $t = 1.3385764 + \tau(49750)$. Mais pour plus d'exactitude, il faut prendre la différence qui répond à une unité plus élevée, moitié en dessus, moitié en dessous du nombre constant; par exemple, celle qui a lieu de 21756 à 21856. Cette différence est 19916 : on la trouve facilement, par la disposition des tables, en remontant et descendant de cinq degrés dans la même colonne au-dessus et au-dessous de 21806. En vertu de cette différence, l'excès logarithmique qui répond à $\tau(0.10)$ sera $\tau(19916)$; donc l'excès qui répond à $\tau(0.25)$ sera $\tau(49790)$, peu différent de celui qu'on avoit trouvé immédiatement. On aura ainsi,

$$log.\ t = 1.3385764 + \tau(49790).$$

D'ailleurs on a

$$\tfrac{3}{2}\ log.\ \mathrm{H} = 8.6350000 + \varpi(15000).$$

Retranchant le second du premier, il restera

$$2.7035764 + \tau(49790) - \varpi(15000).$$

C'est le *log*. du temps T employé à parcourir une égale anomalie ψ dans la parabole dont la distance périhélie est 1.

Le logarithme 2.7035764 répond au nombre 505.332. Pour avoir la partie additionnelle, j'observe que l'unité de différence entre les nombres 504.83 et 505.83, produit entre leurs logarithmes la différence 8592; donc à proportion les différences logarithmiques 49790 et 15000, donneront entre les nombres les différences 5.795 et 1.746. De sorte qu'on aura

$$T = 505^{j}.332 + \tau(5^{j}\,795) - \varpi(1^{j}\,746).$$

Dans la table du mouvement des comètes, on trouve pour 504 *jours*, *l'anomalie* 132° 19′ 59″, et pour 2 jours de plus, *une différence de* 4′27″ ou 4′ 450. Donc l'anomalie qui répond à la valeur de T est

$$\psi = 132^{\circ}\,22'\,56''8 + \tau(12'\,894) - \varpi(3'\,885),$$

où l'on voit que les corrections sont exprimées en minutes et millièmes de minute, ce qui est plus commode pour le calcul que des expressions réduites toutes en secondes, attendu qu'il faut rapporter les différences à une unité au moins égale à la minute.

Il faut chercher maintenant le logarithme-cosinus de l'angle

$$\tfrac{1}{2}\psi = 66^{\circ}\ 11'\ 28''4 + \tau(6'\,447) - \varpi(1'\,942).$$

Ce logarithme, pour la partie connue, est 9.6060431 : pour avoir l'autre partie, je trouve dans la table qu'une minute de plus dans l'angle fait diminuer le *log.-cosinus* de 2865, et qu'une minute de moins le fait augmenter de 2862. Le milieu de ces différences est 2863 ½ pour 1′; donc pour 6′447 la différence sera 18461, et pour 1′ 942, elle sera 5561. On aura donc

$$\begin{array}{ll}
\textit{log.}\cos\tfrac{1}{2}\psi = & 9.6060431 - \tau(18461) + \varpi(5561) \\
\text{son double....} & 9.2120862 - \tau(36922) + \varpi(11122) \\
\textit{log.}\ \Pi\text{..........} & 9.0900000 \qquad\qquad\qquad + \varpi(10000) \\
\hline
\text{Diff. ou } \textit{log. } r = & 9.8779138 + \tau(36922) - \varpi(1122)
\end{array}$$

c'est le logarithme du rayon vecteur calculé d'après la formule (38).

L. Pour aller plus loin, il est bon de diriger le calcul par une figure qui représente à-peu-près la position relative de la terre T, du soleil S, de la comète C, et de sa projection K sur le plan de l'écliptique (fig. 2).

Longitude du ☉......	173°	31′	30″
Long. de la comète....	140	39	17
Elongation KTS.....	32	52	13

Il faut en conclure l'angle CTS entre la comète et le soleil (angle qui a été appelé c dans la première partie) ; on le trouve par la formule $\cos$ CTS $= \cos$ KTS $\cos$ CTK, où CTK $= b = 22°\ 43'\ 34''$,

cos KTS....	9.9242284
cos b.......	9.9649015
cos CTS....	9.8891299 CTS $= 39°\ 13'\ 21''9$.

Dans le triangle CTS, connoissant les deux côtés ST $=$ R, CS $= r$, et l'un des angles opposés CTS, on calculera d'abord l'angle TCS par la formule $\sin \mathrm{TCS} = \frac{\mathrm{R}}{r} \sin \mathrm{CTS}$, qui donne

R......	0.0018100
sin CTS....	9.8009486
$1 : r$........	$0.1220862 - \tau(36922) + \varpi(1122)$
sin TCS....	$9.9248448 - \tau(36922) + \varpi(1122)$

De là résultent deux valeurs de TCS (parce que l'angle CTS n'est pas obtus), et il faudra se décider entre l'une ou l'autre, d'après la connoissance approchée de l'orbite. Dans ce cas, on doit prendre la plus grande, savoir

$$\mathrm{TCS} = 122°\ 44'\ 38''8 + \tau(45'\ 470) - \varpi(1'\ 382);$$

et comme on a déjà $CTS = 39^{\circ}\ 13'\ 21''\ 9$, le troisième angle du même triangle

$$CST = 18^{\circ}\ 1'\ 59''3 - \tau(45'470) + \varpi(1'382).$$

Cela posé, la latitude héliocentrique $CSK = \lambda$, se calculera par la formule $\sin\lambda = \dfrac{\sin b \sin CST}{\sin CTS}$.

$$\begin{array}{rl}
\sin b \ldots\ldots & 9.5869544 \\
\sin CST \ldots & 9.4907547 - \tau(176446) + \varpi(5363) \\
1 : \sin CTS \ldots & 0.1990514 \\
\hline
\sin \lambda \ldots\ldots & 9.2767605 - \tau(176446) + \varpi(5363)
\end{array}$$

De-là résulte $\lambda = 10^{\circ}\ 54'\ 7''\ 2$ — &c.; mais les corrections de l'angle sont inutiles à calculer, et il suffit d'avoir celles du log. cosinus. On peut trouver celles-ci, en observant d'après les tables, qu'une différence de 65600 sur le log. sinus, répond à une de 2434 sur le log. cosinus : on peut aussi multiplier les corrections de *log. sin* λ par $tang^2\lambda$, afin d'en déduire celles de $\log\cos\lambda$ avec un signe contraire. Ce dernier moyen, qui est le plus simple, donnera

$$\log\cos\lambda = 9.9920903 + \tau(6546) - \varpi(198).$$

Maintenant l'angle de commutation KST se calculera par la formule $\cos KST = \dfrac{\cos CST}{\cos\lambda}$.

$$\begin{array}{rl}
\cos CST \ldots & 9.9781236 + \tau(18711) - \varpi(569) \\
1 : \cos\lambda \ldots & 0.0079097 - \tau(6546) + \varpi(198) \\
\hline
\cos KST \ldots & 9.9860333 + \tau(12165) - \varpi(371)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Commutat. KST} = & 14^{\circ}\ 27'\ 11''\ 3 - \tau(37'362) + \varpi(1'139) \\
\text{Longit. de la terre} \ldots & 353\quad 31\quad 30 \\
\hline
\text{Longit. hélioc. } \varphi = & 7^{\circ}\ 58'\ 41''\ 3 - \tau(37'362) + \varpi(1'139)
\end{array}$$

LI. Par ces calculs, on a déterminé l'anomalie ψ, la latitude héliocentrique λ, et la longitude héliocentrique φ de la comète pour le moment de l'observation du 15 septembre. On fera de semblables calculs pour les époques données du 14 août et du 2 décembre, et on aura les résultats suivans, dans lesquels on a distingué par l'accent ° ceux du 14 août, et par l'accent ′ ceux du 2 décembre :

14 août.
$$\left\{\begin{aligned} \psi^\circ &= 146^\circ\, 13'\, 52'' + \tau\,(3'453) - \varpi\,(2'575) \\ \varphi^\circ &= 357\;\; 15\;\; 54.4 + \tau\,(10'482) - \varpi\,(0'523) \\ \textit{log. sin}\ \lambda^\circ &= 8.5267204 + \tau\,(18954) - \varpi\,(945) \end{aligned}\right.$$

15 septembre avant le périhélie.
$$\left\{\begin{aligned} \psi &= 132^\circ\, 22'\, 56''.8 + \tau\,(12'894) - \varpi\,(3'885) \\ \varphi &= 7\;\; 58\;\; 41.3 - \tau\,(37'362) + \varpi\,(1'139) \\ \textit{log. sin}\ \lambda &= 9.2767605 - \tau\,(176446) + \varpi\,(5363) \end{aligned}\right.$$

2 décembre après le périhélie.
$$\left\{\begin{aligned} \psi' &= 146^\circ\, 37'\, 18'' - \tau\,(3'300) - \varpi\,(2'540) \\ \varphi' &= 297\;\; 30\;\; 20.3 + \tau\,(4'780) + \varpi\,(0'241) \\ \textit{log. sin}\ \lambda' &= 9.7698879 + \tau\,(3730) + \varpi\,(188) \end{aligned}\right.$$

LII. Concevons maintenant une sphère concentrique au soleil, dont la surface soit rencontrée par le plan de l'écliptique et par celui de l'orbite de la comète. Pour mieux saisir la situation respective des différens points, on pourra supposer que la circonférence de l'écliptique est développée sur un plan (fig. 3), et forme la ligne droite ☊ ☋ ☊ dans laquelle ♈ représente le premier point d'*aries*, ♈♋ l'ordre des signes, ☊ le nœud ascendant, et ☋ le nœud descendant de la comète. A chaque point de l'écliptique, comme K, on peut élever une perpendiculaire KC qui représente la latitude de la comète, en même temps que ♈K est sa longitude; et la suite des points C formera la ligne sinueuse ☊C ☋ C′ ☊ qui représente l'intersection du plan de l'orbite avec la surface sphérique concentrique au soleil. Dans cette sorte de projection, les longitudes et les latitudes sont représentées par des grandeurs proportionnelles; mais les arcs du mouvement héliocentrique sont altérés dans leurs proportions ; ils sont en général augmentés, puisque l'arc de courbe ☋C☊ ne représente qu'une longueur égale à ☋☊. Quoi qu'il en soit, cette figure est très propre à diriger le calcul qui reste à faire pour la détermination de l'orbite.

La distance ♈☋, supplément de la longitude du nœud ascendant ☊, est d'environ 5°. Au 14 août, la comète étoit à un point C° très-voisin du nœud descendant, puisque la distance ♈K°, complément à 360° de la longitude φ°, n'est que d'environ 3°. Au 15 septembre, la comète marchant vers le périhélie π, s'est trouvée en C avec la longitude ♈K d'environ 8°. Arrivée au périhélie π le 7 octobre, elle s'est trouvée distante d'environ 31° du nœud ascendant ☊. Continuant sa route, elle a passé le nœud, sa latitude est devenue boreale, et enfin le 2 décembre, elle est parvenue au point C′ où l'on a ♈K′ = 62° 30′ environ, valeur de $360^\circ - \varphi'$. Si l'orbite de la comète est exactement parabolique, il ne lui reste à parcourir du 2 décembre 1769 jusqu'à l'infini, que l'arc $C'\varpi$, ϖ☋ étant égal à π☊. Si cette orbite est elliptique, elle continuera son mouvement jusqu'à sa prochaine apparition dans la partie ☋C°C, mais elle ne décrira qu'un angle très-petit dans un temps considérable.

LIII. Après avoir pris cette idée du mouvement héliocentrique de la comète, venons à la détermination tant des coëfficiens τ et ϖ que des divers élémens de l'orbite.

Suivant la méthode ordinaire, on considère le triangle sphérique formé par les deux points C°, C, et par le pôle de l'écliptique. Dans ce triangle, on connoît les côtés de l'angle au pôle, qui sont les complémens des latitudes K°C°, KC; avec l'angle compris mesuré par l'arc $K^\circ K = 360^\circ - \varphi^\circ + \varphi$: on peut donc déterminer le troisième côté C°C qui doit être égal à la différence des anomalies $\psi^\circ - \psi$, et de-là résulte l'équation de condition

$$\cos(\psi^\circ - \psi) = \cos(\varphi - \varphi^\circ)\cos\lambda\cos\lambda^\circ + \sin\lambda\sin\lambda^\circ. \qquad (55)$$

On en obtiendra une semblable de la comparaison des deux lieux C et C′ qui donne

$$cos(\psi'+\psi) = cos(\varphi-\varphi')\, cos\,\lambda\, cos\,\lambda' - sin\,\lambda\, sin\,\lambda' ; \quad (56)$$

et par le moyen de ces deux équations, on pourra déterminer τ et ϖ.

Cette méthode paroît conduire assez directement au but ; mais elle a l'inconvénient de supposer que les trois points C°, C, C′ sont exactement dans un même plan, et elle n'offre pas les moyens de corriger ou au moins de diminuer l'erreur qui auroit lieu si cette condition n'étoit pas remplie.

On n'exprimeroit point la condition essentielle de l'unité du plan, en formant par la comparaison des points C et C′ une troisième équation semblable aux équations (55) et (56). En effet, cette troisième équation seroit nécessairement une suite des deux autres; car il faudroit que les deux plans C′C°, C°C fissent en C° un angle bien différent de 180°, pour que l'arc CC′ mené directement de C en C′, fût sensiblement plus petit que la somme des arcs C°C′, C°C. Voici donc le moyen qu'on pourroit employer.

LIV. On reconnoît que trois points C°, C, C′, sont dans le plan d'un même grand cercle, si les longitudes de ces points φ°, φ, φ', et leurs latitudes λ°, λ, λ' satisfont à l'équation

$$sin(\varphi-\varphi^{\circ})\, tang\,\lambda' + sin(\varphi'-\varphi)\, tang\,\lambda^{\circ} + sin(\varphi^{\circ}-\varphi')\, tang\,\lambda = 0, \quad (57)$$

ou ce qui revient au même, si entre les anomalies ψ°, ψ, ψ', et les latitudes λ°, λ, λ', on a l'équation

$$sin(\psi-\psi^{\circ})\, sin\,\lambda' + sin(\psi'-\psi)\, sin\,\lambda^{\circ} + sin(\psi^{\circ}-\psi')\, sin\,\lambda = 0. \quad (58)$$

Si donc on substitue les valeurs données dans l'article LI, en observant de prendre λ' et ψ' négativement, on aura une troisième équation, laquelle devra être combinée avec les équations (55) et (56), afin d'en tirer des valeurs de τ et de ϖ, qui y satisfassent *aussi bien qu'il est possible*. Je dis *aussi bien qu'il est possible*, parce qu'ayant trois équations pour déterminer deux inconnues, on ne doit pas prétendre satisfaire exactement à ces trois équations, mais seulement chercher à rendre leurs premiers membres très-petits.

LV. Connoissant τ et ϖ, toutes les quantités contenues dans le tableau de l'art. LI deviendront entièrement déterminées; on calculera ensuite l'inclinaison I par la formule

$$\cos \mathrm{I} = \frac{\sin\,(\varphi - \varphi^\circ)}{\sin\,(\psi^\circ - \psi)} \cos\lambda \cos\lambda^\circ, \tag{59}$$

où l'on aura soin de prendre $\psi^\circ - \psi$ (qui représente la distance CC°) de même signe que $\varphi - \varphi^\circ$, parce que l'inclinaison est toujours supposée moindre que 90°. Lorsque I sera déterminé, on aura la longitude du nœud S par la formule

$$\sin(\varphi - \mathrm{S}) = \mathrm{tang}\,\lambda \cos \mathrm{I}. \tag{60}$$

Cette équation, dans laquelle λ doit toujours être regardé comme positif, donnera pour l'angle $\varphi - \mathrm{S}$ deux valeurs comprises entre 0° et 180°; on en tirera donc deux valeurs de S. L'équation $\sin(\varphi^\circ - \mathrm{S}) = \mathrm{tang}\,\lambda^\circ \cos \mathrm{I}$, qui a lieu semblablement, donnera de même deux valeurs pour S. On aura enfin la troisième équation $\sin(\mathrm{S} - \varphi') = \mathrm{tang}\,\lambda' \cos \mathrm{I}$ (où l'on a changé le signe du premier membre, afin de prendre positivement la latitude λ', qui est de signe contraire aux deux autres λ, λ°), d'où résulteront encore deux valeurs de S. Or, dans chaque système, il est nécessaire que la même valeur de S se retrouve, ou exactement ou au moins, à une petite différence près; cette différence venant de ce qu'on n'a pas pu satisfaire exactement aux trois équations qui déterminent τ et ϖ. On prendra donc un milieu entre ces trois valeurs de S peu différentes entre elles, et on aura la longitude d'un nœud auquel on appliquera la règle de l'art. XXV, pour savoir si c'est le nœud descendant ou le nœud ascendant.

Par les valeurs connues de l'anomalie ψ et de la distance périhélie Π, on trouvera aisément l'instant du passage au périhélie ; le signe positif ou négatif de $\varphi - \varphi^{\circ}$, indiquera si le mouvement est direct ou rétrograde ; enfin le lieu du périhélie se déterminera par les formules de l'art. XXVI. Ainsi la connoissance de tous les élémens de l'orbite se déduit aisément de la résolution des trois équations (55), (56) et (57) ou (58), qui donnent les coëfficiens τ et ϖ.

Nous ne faisons qu'indiquer cette méthode sans l'appliquer à notre exemple, parce que, quoique sa marche soit assez naturelle, cependant elle a l'inconvénient de ne pas réduire les erreurs à une même échelle. Deux erreurs égales dans deux des trois équations que l'on considère pourroient répondre à des erreurs très-inégales sur les longitudes ou sur les latitudes ; et c'est ce qu'il faut éviter. Nous allons donc exposer une autre méthode qui paroît devoir mieux remplir notre but.

LVI. Supposons que par les formules précédentes ou par une première connoissance approchée des élémens de l'orbite, on ait trouvé $I = 40^{\circ}\ 50'$, $S = 355^{\circ}\ 3'$ (c'est le lieu du nœud descendant), et $\mho C$ ou $\sigma = 16^{\circ}\ 48'$.

Appelons pour abréger x la quantité $\varphi - S$, ou le côté $\mho K$ du triangle sphérique rectangle $\mho KC$, on aura dans ce triangle les deux équations

$$\sin \lambda = \sin I \sin \sigma \qquad (61)$$

$$\tang x = \cos I \tang \sigma. \qquad (62)$$

Nous prendrons pour valeurs corrigées de I et de σ les deux expressions

$$I = 40^{\circ}\ 50' + z\,(5'000)$$
$$\sigma = 16^{\circ}\ 48' + u\,(5'000)\,;$$

et par leur substitution dans l'équation (61), on aura

$$\begin{array}{ll} \sin I \ldots\ldots & 9.8154854 + z\,(7300) \\ \sin \sigma \ldots\ldots & 9.4609456 + u\,(20920) \\ \hline \sin \lambda \ldots\ldots & 9.2764310 + z\,(7300) + u\,(20920). \end{array}$$

Comparant ce log. sinus à celui de l'art. LI, on a la différence

$$-3295 + z\,(7300) + u\,(20920) + \tau\,(176446) - \varpi\,(5363),$$

d'où résulte sur la latitude λ l'erreur

$$E' = -0'500 + z\,(1'113) + u\,(3'189) + \tau\,(26'900) - \varpi\,(0'818).$$

Calculant de même les deux formules $sin\,\lambda^\circ = sin\,\mathrm{I}\;sin\,\sigma^\circ$, $sin\,\lambda' = sin\,\mathrm{I}\;sin\,\sigma'$, d'après les valeurs $\sigma^\circ = \sigma - \psi^\circ + \psi$, $\sigma' = 360^\circ - \psi' - \psi - \sigma$, on trouvera deux valeurs de *log. sin* λ°, et *log. sin* λ', lesquelles comparées aux valeurs semblables déjà trouvées (art. LI), donneront sur les angles λ°, λ' les erreurs

$$E'' = \quad 0'125 + z\,(0'194) + u\,(3'264) + \tau\,(5'657) - \varpi\,(0'830)$$
$$E''' = -0'123 + z\,(4'208) - u\,(1'761) - \tau\,(5'529) + \varpi\,(2'154).$$

Maintenant le calcul de l'équation $tang\,\varkappa = cos\,\mathrm{I}\;tang\,\sigma$, donnera

$$\begin{array}{ll} cos\,\mathrm{I} \ldots\ldots & 9.8788748 - z\,(5460) \\ tang\,\sigma \ldots\ldots & \underline{9.4798887 + u\,(22830)} \\ tang\,\varkappa \ldots\ldots & 9.3587635 - z\,(5460) + u\,(22830) \end{array}$$

$$\varkappa = 21^\circ\,52'\;\;3''4 - z\,(0'938) + u\,(3'923)$$

$$\text{d'ailleurs } \varphi = \underline{7^\circ\,58'\,41.3 - \tau\,(37'362) + \varpi\,(1'139)}$$

donc −Ṣ ou ♈☊ $= 4^\circ\,53'\,22''1 - z(0'938) + u(3'923) + \tau(37'362) - \varpi(1'139)$

Les deux équations $tang\,\varkappa^\circ = cos\,\mathrm{I}\;tang\,\sigma^\circ$ et $tang\,\varkappa' = cos\,\mathrm{I}\;tang\,\sigma'$ donneront semblablement

♈☊ $= 4^\circ\,58'\;\;7''5 - z\,(0'168) + u\,(3'787) - \tau\,(3'331) - \varpi\,(0'469)$

♈☊ $= 5^\circ\;\;4'\,28''5 + z\,(1'961) + u\,(5'789) + \tau\,(6'328) - \varpi\,(7'680)$.

La seconde valeur de ♈☊ étant retranchée successivement de la première et de la troisième, on aura deux nouvelles différences ou erreurs,

$$E^{\mathrm{iv}} = -4'757 - z\,(0'770) + u\,(0'136) + \tau\,(40'693) - \varpi\,(0'670)$$
$$E^{\mathrm{v}} = \quad 6'350 + z\,(2'129) + u\,(2'002) + \tau\,(9'659) - \varpi\,(7'211).$$

LVII. Toutes les conditions du problême étant ainsi exprimées, si on vouloit anéantir à la fois les cinq erreurs E', E'',

E''', E^{iv}, E^{v}, on auroit une équation de plus que d'inconnues, ainsi que le comporte la nature de la question. Mais comme ce ne seroit que par un hasard singulier que les valeurs des inconnues z, u, τ, ϖ, tirées de quatre de ces équations, satisferoient à la cinquième, et que même dans ce cas, la méthode que nous devons suivre conduiroit au vrai résultat, nous tâcherons seulement de diminuer les erreurs de manière à avoir la parabole qui satisfait le plus exactement qu'il est possible aux trois observations données.

Nous commencerons donc par déterminer τ et ϖ par la condition que les erreurs E''' et E^{iv} soient nulles ; ce qui donnera

$$\tau = 0.1344 + z(0.0243) + u(0.0013)$$
$$\varpi = 1.0605 + z(0.3278) + u(0.2793).$$

Substituant ces valeurs dans les trois quantités E', E'', E''', on aura

$$E' = 2'.248 + z(1'.499) + u(2'.996)$$
$$E'' = 0'.006 + z(0'.059) + u(3'.040)$$
$$E''' = 1'.418 + z(4'.780) - u(1'.167).$$

On voit déjà qu'en faisant z et u égaux à zéro, toutes les erreurs se réduiront à deux; l'une E' d'environ $2'\frac{1}{4}$, l'autre E''' de $1'42$; erreurs très-tolérables dans la théorie des comètes. Mais il est possible de les atténuer encore en cherchant le *minimum* de la somme des quarrés des quantités E', E'', E'''.

LVIII. Pour cela, il faut multiplier tous les termes de E' par 1.499 coëfficient de z, tous ceux de E'' par 0.059, tous ceux de E''' par 4.780, et ajouter les trois produits. Opérant ensuite de la même manière par rapport aux coëfficiens de u, on formera les deux équations,

$$0 = 10.148 + z(25.099) - u(0.908)$$
$$0 = 5.098 - z(0.908) + u(19.580);$$

d'où l'on tire

$$z = -0.4144$$
$$u = -0.2796.$$

Au moyen de ces valeurs, les trois erreurs E′, E″, E‴, deviennent

$$E' = 0'789\ ,\quad E'' = -0'868\ ,\quad E''' = -0'236\ ;$$

de sorte que la plus grande ne va pas à une minute.

Substituant ces valeurs de z et u dans celles de τ et de ϖ, on aura

$$\tau = 0.1240$$
$$\varpi = 0.8466;$$

d'où résulte le log. de la distance périhélie $= 0.0908466$, et l'époque du passage au périhélie : octobre 7,5310.

Des valeurs trouvées pour z et u, on déduit l'inclinaison $I = 40°\ 47'\ 55''7$, et la distance σ ou ☋C $= 16°\ 46'\ 36''1$. Ajoutant à ☋C l'anomalie $\psi = 132°\ 22'\ 56''8 + \tau\,(12'894) - \varpi\,(3'885) = 132°\ 21'\ 15''4$, et retranchant la somme de 180°, on aura la distance du périhélie au nœud Π☊ $= 30°\ 52'\ 8''5$. Enfin par l'une des expressions de ♈☋ on trouve ♈☋ $= 4°\ 56'\ 19''6$; ce qui donne la longitude du nœud ascendant $175°\ 3'\ 40''4$.

Si de cette longitude on retranche la distance Π☊ du périhélie au nœud, il restera ce que les astronomes appellent le lieu du périhélie $= 144°\ 11'\ 31''\ 9$.

LIX. On peut donc établir ainsi les élémens de l'orbite de la comète de 1769, en tant qu'ils résultent des trois observations données :

Log. dist. périhélie.................	9.0908466
Lieu du nœud ascendant...........	175° 3′ 40″
Inclinaison de l'orbite..............	40 47 56
Lieu du périhélie...................	144 11 32
Passage au périhélie........ *octobre*	7.5310
Sens du mouvement................	*direct.*

Si d'après ces élémens, on calcule la longitude et la latitude géocentriques de la comète à l'instant de chaque observation, on trouvera les résultats suivans :

Temps moyen à Paris.	Longitude calculée.	Longitude observée.	Diff.	Latitude calculée.	Latitude observée.	Diff.
Août. 14.52352	39° 58′ 22″	39° 58′ 16″	+ 6″	3° 15′ 44″	3° 17′ 13″	— 89″
Sept. 15.69398	140 39 14	140 39 17	— 3″	22 44 51	22 43 34	+ 77
Déc. 2.21413	276 41 22	276 41 20	+ 2″	23 33 16	23 33 25	— 9

où l'on voit que les erreurs sont insensibles sur la longitude, et ne vont qu'à 1′ ½ sur la latitude.

Les élémens trouvés par Pingré, d'après les mêmes observations (Cométographie, tome II, page 381), représentent bien les observations extrêmes du 14 août et du 2 décembre; mais sur l'observation du 15 septembre, ils donnent une erreur de + 2′ 12″ sur la longitude, et une de + 2′ 37″ sur la latitude.

LX. Au reste, si d'après les élémens que nous avons trouvés, ou d'après ceux de Pingré, on calculoit les lieux de la comète pour d'autres époques où elle a été observée, on trouveroit des erreurs de 12 ou 15 minutes et même plus, tant sur la longitude que sur la latitude. C'est par cette raison que Pingré lui-même trouve différentes orbites en calculant différentes observations; tantôt il trouve l'inclinaison de 40° 48′ 29″, tantôt il la trouve de 40° 42′ 16″, et ainsi des autres élémens.

Il n'y a rien à conclure de-là contre l'exactitude des calculs d'après lesquels nous venons de déterminer l'orbite de la comète de 1769; ces calculs donnent, entre toutes les paraboles possibles, l'une de celles qui satisfont le mieux aux trois observations données. Mais il est possible, et il paroît même très-probable, d'après ces différences, que la vraie orbite de la comète de 1769 n'est point une parabole. Il faudroit discuter de nouveau les observations de cette comète, choisir les plus exactes après les avoir corrigées de l'aberration et de la parallaxe, et alors on pourroit essayer de déterminer l'ellipse ou l'hyperbole qui est la vraie trajectoire. Le calcul ne seroit pas beaucoup plus compliqué que les précédens; il y entreroit l'élément de plus $\frac{1}{a}$, et trois observations suffiroient toujours pour résoudre le problême; mais il seroit bon d'en faire entrer au moins quatre en comparaison.

Observations sur la méthode précédente.

LXI. Pour avoir une idée nette de la méthode que nous proposons, et dont nous avons détaillé les calculs dans un exemple, il faut observer qu'elle est composée de quatre parties distinctes.

Première partie. Après avoir représenté le logarithme de la distance périhélie, et l'instant du passage au périhélie par deux expressions contenant chacune une correction indéterminée, on calcule, d'après ces valeurs, l'anomalie ψ et le rayon vecteur r pour le moment de chaque observation.

Seconde partie. Connoissant tout à-la-fois le rayon vecteur, la longitude et la latitude de la comète données par l'observation, la longitude du soleil et sa distance à la terre données par les tables, on calcule la longitude et la latitude héliocentriques de la comète; et pour cet effet, il est bon de construire une figure qui représente à-peu-près les positions respectives des différens points, et qui aidera le plus souvent à fixer l'indétermination que présente dans certains cas le triangle CTS dans lequel on connoît deux côtés, et l'angle opposé à l'un d'eux.

Le résultat de ces deux premières opérations, dont on peut former un petit tableau, donnera, pour l'instant de chaque observation, l'anomalie ψ, la longitude héliocentrique φ, et le *log. sinus* de la latitude héliocentrique λ. Il faut ensuite procéder à la détermination du plan de l'orbite et de la position du périhélie.

Troisième partie. Ayant représenté l'écliptique par une ligne droite, et l'orbite de la comète, vue du soleil, par une ligne sinueuse ; on marquera sur celle-ci les différens lieux de la comète, d'après les longitudes et latitudes héliocentriques déjà calculées. On y marquera également le lieu du périhélie qu'on doit déjà connoître d'une manière approchée par l'une des anomalies. On donnera ensuite des valeurs en partie connues, en partie indéterminées, à l'inclinaison I, et à la distance σ de la comète à l'un des nœuds lors de l'observation moyenne. Au moyen de ces valeurs, on calculera la latitude λ, et la quantité x (qui n'est autre chose que la distance σ réduite à l'écliptique) par les formules $\sin\lambda = \sin \mathrm{I} \sin\sigma$, $\tang x = \cos \mathrm{I} \tang\sigma$. La comparaison du *log. sin* λ, avec celui qu'on a déjà trouvé dans la seconde partie, donne une première erreur E′ sur l'angle λ ; on en trouve une pareille sur les deux autres latitudes, ce qui fait trois erreurs E′, E″, E‴.

Quatrième partie. Des trois valeurs de x correspondantes aux trois observations, on déduit trois expressions de la longitude du nœud, qui égalées entre elles fournissent deux équations entre les quatre coëfficiens inconnus. Tirant de ces équations les valeurs de deux des coëfficiens, et les substituant dans l'expression des trois quantités E′, E″, E‴, il ne restera plus qu'à faire en sorte que la somme des quarrés de ces trois quantités soit un *minimum*. De-là résultent deux équations qui achèvent de déterminer tous les coëfficiens, et par suite tous les élémens de l'orbite.

LXII. On pourra procéder de même, si on veut combiner ensemble plus de trois observations ; mais alors il conviendra d'établir deux systêmes d'erreurs. Le premier comprendra toutes les erreurs E′, E″, E‴, &c. relatives aux latitudes ; le second comprendra toutes les erreurs de la position du nœud ; si par les diverses valeurs de x calculées aux époques des différentes observations, on trouve, pour la longitude du nœud, les diverses valeurs S′, S″, S‴, &c.; et qu'on appelle $S' + e'$ la vraie longitude S du nœud, on aura les erreurs successives $e' = e'$, $e'' = e' + S' - S''$, $e''' = e' + S' - S'''$, &c., en nombre égal à celui des observations, et e' sera une indéterminée nouvelle à joindre aux quatre déjà employées. Dans le système des erreurs e', e'', e''', &c., on déterminera e' avec deux des autres inconnues, de manière que la somme des quarrés de ces erreurs soit un *minimum*; on aura ainsi l'expression des trois inconnues en fonction des deux autres, et la substitution de ces valeurs étant faite dans les quantités E′, E″, E‴, &c. du premier système, il n'y restera plus que deux inconnues. On déterminera enfin ces deux inconnues, par la condition que la somme des quarrés des erreurs E′, E″, E‴, &c. soit un *minimum*, et on en déduira les élémens de l'orbite.

Il seroit plus direct de donner des valeurs en partie connues, en partie indéterminées, aux cinq élémens de l'orbite, et ensuite de calculer pour le moment de chaque observation, la longitude et la latitude géocentriques de la comète. On compareroit les longitudes et les latitudes calculées avec les longitudes et les latitudes observées, ce qui donneroit pour chaque observation deux différences ou erreurs, et on égaleroit ensuite à un *minimum* la somme des quarrés de toutes ces erreurs. Mais le calcul conduit de cette manière seroit plus long que celui que nous avons indiqué, et il n'en résulteroit qu'un avantage assez petit pour la diminution des erreurs, à cause du peu de variation que subissent les quantités lorsqu'elles sont voisines du *minimum*.

Observations sur le calcul des corrections indéterminées.

LXIII. Les tables de logarithmes contiennent tout ce qui est nécessaire pour le calcul des corrections indéterminées, ainsi qu'on l'a vu dans les exemples précédens. Cependant il est bon de remarquer qu'on peut calculer dans tous les cas les coëfficiens des corrections, sans recourir aux différences des tables qui sont toujours affectées de quelqu'erreur. Voici quelques préceptes à ce sujet.

Si l'on demande le logarithme du nombre $a+bx$, dans lequel bx est une correction toujours supposée très-petite par rapport à a, le logarithme cherché sera $log.\, a + x\left(\frac{bm}{a}\right)$, m étant le module 0.43429, &c. Mais comme les logarithmes ont ordinairement sept décimales, pour que la correction soit exprimée en unités décimales du septième ordre, il faudra, au lieu de m, mettre $M = 4342945$, dont le log. est 6.6377843, et on aura $log.\,(a+bx) = a + x\left(\frac{bM}{a}\right)$.

Réciproquement, ayant $log.\, y = log.\, a + x\,(b)$, on en tire le nombre $y = a + x\left(\frac{ab}{M}\right)$.

Si bx représente un nombre de minutes servant de correction à l'arc a; et qu'on appelle n le nombre constant $\frac{10^7.m}{r'}$, (r' étant le nombre de minutes comprises dans le rayon), dont le logarithme est 3.1015104, on aura

$$log\ sin\ (a+bx) = log\ sin\ a + x\,(nb\ cot.\ a)$$
$$log\ cos\ (a+bx) = log\ cos\ a - x\,(nb\ tang\ a)$$
$$log\ tang\,(a+bx) = log\ tang\ a + x\left(\frac{nb}{sin\ a\ cos\ a}\right)$$
$$log\ cot.\ (a+bx) = log\ cot.\ a - x\left(\frac{nb}{sin\ a\ cos\ a}\right)$$

formules où les quantités qui multiplient x sont réduites en unités décimales du septième ordre, de même que les logarithmes. Réciproquement si on a

$log\ sin\ y = log\ sin\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a + x\left(\frac{c}{n}\ tang\ a\right)$

$log\ cos\ y = log\ cos\ a + x\,(c)$, il en résulte $y = a - x\left(\frac{c}{n}\ cot.\ a\right)$

$$\log \tang y = \log \tang a + x\,(c)\ , \quad \text{il en résulte } y = a + x\left(\frac{c}{n}\sin a \cos a\right)$$

$$\log \cot.\, y = \log \cot.\, a + x\,(c)\ , \quad \text{il en résulte } y = a - x\left(\frac{c}{n}\sin a \cos a\right)$$

la correction ajoutée à la valeur de a étant exprimée en minutes.

Il est souvent utile de trouver le *log. cosinus*, lorsqu'on a le *log. sinus*, ou *vice versá*, sans être obligé de chercher l'arc. Or par les formules précédentes si l'on a

$$\log \sin y = \log \sin a + x\,(c), \quad \text{il en résulte } \log \cos y = \log \cos a - x\,(c \tang^2 a)$$
$$\log \cos y = \log \cos a + x\,(c), \quad \text{il en résulte } \log \sin y = \log \sin a - x\,(c \cot.^2 a)$$

Avec ces formules et autres semblables, qu'on peut employer suivant les circonstances, on s'habituera aisément au calcul des corrections indéterminées qui peut être fort utile dans toutes sortes d'approximations.

APPENDICE.

Sur la Méthode des moindres quarrés.

Dans la plupart des questions où il s'agit de tirer des mesures données par l'observation, les résultats les plus exacts qu'elles peuvent offrir, on est presque toujours conduit à un système d'équations de la forme

$$E = a + bx + cy + fz + \&c.$$

dans lesquelles a, b, c, f, &c. sont des coëfficiens connus, qui varient d'une équation à l'autre, et x, y, z, &c. sont des inconnues qu'il faut déterminer par la condition que la valeur de E se réduise, pour chaque équation, à une quantité ou nulle ou très-petite.

Si l'on a autant d'équations que d'inconnues x, y, z, &c., il n'y a aucune difficulté pour la détermination de ces inconnues, et on peut rendre les erreurs E absolument nulles. Mais le plus souvent, le nombre des équations est supérieur à celui des inconnues, et il est impossible d'anéantir toutes les erreurs.

Dans cette circonstance, qui est celle de la plupart des problêmes physiques et astronomiques, où l'on cherche à déterminer quelques élémens importans, il entre nécessairement de l'arbitraire dans la distribution des erreurs, et on ne doit pas s'attendre que toutes les hypothèses conduiront exactement aux mêmes résultats; mais il faut sur-tout faire en sorte que les erreurs extrêmes, sans avoir égard à leurs signes, soient renfermées dans les limites les plus étroites qu'il est possible.

De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre *minimum* la somme des quarrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prévaloir, est très-propre à faire connoître l'état du système le plus proche de la vérité.

La somme des quarrés des erreurs $E^2 + E'^2 + E''^2 +$ &c. étant

$$\begin{aligned} &(a + bx + cy + fz + \text{\&c.})^2 \\ +&(a' + b'x + c'y + f'z + \text{\&c.})^2 \\ +&(a'' + b''x + c''y + f''z + \text{\&c.})^2 \\ +&\text{\&c.}; \end{aligned}$$

si l'on cherche son *minimum*, en faisant varier x seule, on aura l'équation

$$o = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \text{\&c.},$$

dans laquelle par $\int ab$ on entend la somme des produits semblables $ab + a'b' + a''b'' +$ &c.; par $\int b^2$ la somme des quarrés des coëfficiens de x, savoir $b^2 + b'^2 + b''^2 +$ &c., ainsi de suite.

Le *minimum*, par rapport à y, donnera semblablement

$$o = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int fc + \text{\&c.},$$

et le *minimum* par rapport à z,

$$o = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \text{\&c.},$$

où l'on voit que les mêmes coëfficiens $\int bc$, $\int bf$, &c. sont communs à deux équations, ce qui contribue à faciliter le calcul.

En général, *pour former l'équation du* minimum *par rapport à l'une des inconnues, il faut multiplier tous les termes de chaque équation proposée par le coëfficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faire une somme de tous ces produits.*

On obtiendra de cette manière autant d'équations du *minimum*, qu'il y a d'inconnues, et il faudra résoudre ces équations par les méthodes ordinaires. Mais on aura soin d'abréger tous les calculs, tant des multiplications que de la résolution, en n'admettant dans chaque opération que le nombre de chiffres entiers ou décimaux que peut exiger le degré d'approximation dont la question est susceptible.

Si par un hasard singulier, il étoit possible de satisfaire à toutes les équations en rendant toutes les erreurs nulles, on obtiendroit également ce résultat par les équations du *minimum;* car si après avoir trouvé les valeurs de x, y, z, &c. qui rendent nulles E, E', &c., on fait varier x, y, z, &c. de δx, δy, δz, &c., il est évident que E^2 qui étoit zéro deviendra par cette variation $(a\delta x + b\delta y + c\delta z, \&c.)^2$. Il en sera de même de E'^2, E''^2, &c. D'où l'on voit que la somme des quarrés des erreurs aura pour variation une quantité du second ordre par rapport à δx, δy, &c.; ce qui s'accorde avec la nature du *minimum.*

Si après avoir déterminé toutes les inconnues x, y, z, &c., on substitue leurs valeurs dans les équations proposées, on connoîtra les diverses erreurs E, E', E'', &c. auxquelles ce système donne lieu, et qui ne peuvent être réduites sans augmenter la somme de leurs quarrés. Si parmi ces erreurs il s'en trouve que l'on juge trop grandes pour être admises, alors on rejettera les équations qui ont produit ces erreurs, comme venant d'expériences trop défectueuses, et on déterminera les inconnues par le moyen des équations restantes, qui alors donneront des erreurs beaucoup moindres. Et il est à observer qu'on ne sera pas obligé alors de recommencer tous les calculs; car comme les équations du *minimum* se forment par l'addition des produits faits dans chacune des équations proposées, il suffira d'écarter de l'addition les produits donnés par les équations qui auront conduit à des erreurs trop considérables.

La règle par laquelle on prend le milieu entre les résultats de différentes observations, n'est qu'une conséquence très-simple de notre méthode générale, que nous appellerons *Méthode des moindres quarrés.*

En effet, si l'expérience a donné diverses valeurs a', a'', a''', &c.

pour une certaine quantité x, la somme des quarrés des erreurs sera $(a'-x)^2+(a''-x)^2+(a'''-x)^2+$ &c., et en égalant cette somme à un *minimum*, on a

$$0=(a'-x)+(a''-x)+(a'''-x)+\text{\&c.};$$

d'où résulte $x=\dfrac{a'+a''+a'''+\text{\&c.}}{n}$, n étant le nombre des observations.

Pareillement, si pour déterminer la position d'un point dans l'espace, on a trouvé, par une première expérience, les coordonnées a', b', c'; par une seconde, les coordonnées a'', b'', c'', &c. ainsi de suite; soient x, y, z, les véritables coordonnées de ce point : alors l'erreur de la première expérience sera la distance du point (a', b', c') au point (x, y, z); le quarré de cette distance est

$$(a'-x)^2+(b'-y)^2+(c'-z)^2;$$

et la somme des quarrés semblables étant égalée à un *minimum*, on en tire trois équations qui donnent $x=\dfrac{\int a}{n}$, $y=\dfrac{\int b}{n}$, $z=\dfrac{\int c}{n}$, n étant le nombre des points donnés par l'expérience. Ces formules sont les mêmes par lesquelles on trouveroit le centre de gravité commun de plusieurs masses égales, situées dans les points donnés ; d'où l'on voit que le centre de gravité d'un corps quelconque jouit de cette propriété générale.

Si on divise la masse d'un corps en molécules égales et assez petites pour être considérées comme des points, la somme des quarrés des distances des molécules au centre de gravité sera un minimum.

On voit donc que la méthode des moindres quarrés fait connoître, en quelque sorte, le centre autour duquel viennent se ranger tous les résultats fournis par l'expérience, de manière à s'en écarter le moins qu'il est possible. L'application que nous allons faire de cette méthode à la mesure de la méridienne, achèvera de mettre dans tout son jour sa simplicité et sa fécondité.

Application à la mesure des degrés du méridien.

Supposant que le méridien est une ellipse dont les axes sont dans le rapport de 1 à $1+\alpha$, si on désigne par D la longueur du $45^{\text{ème}}$ degré, et par S celle de l'arc compris entre les deux latitudes L et L', on aura par les formules connues, et en exprimant $L'-L$ en degrés :

$$S = D(L'-L) - \tfrac{3}{2}\alpha D.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L);$$

d'où résulte

$$L'-L = \frac{S}{D} + \tfrac{3}{2}\alpha.\frac{180}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L).$$

Comme le $45^{\text{ème}}$ degré est d'environ 28500 modules, égaux chacun à deux toises, on peut faire $\frac{1}{D} = \frac{1+\varepsilon}{28500}$, ε étant une fraction très-petite, et on aura

$$L'-L = \frac{S}{28500} + \varepsilon.\frac{S}{28500} + \alpha.\frac{270}{\pi} \sin(L'-L)\cos(L'+L), \quad (a)$$

équation qui pour chaque arc dont on connoît la longueur avec la latitude de ses extrémités, donnera une relation entre α et ε.

Voici maintenant les longueurs des différens arcs de la méridienne de France et les latitudes des parallèles qui les séparent, telles qu'elles résultent de l'opération exécutée par les célèbres astronomes Delambre et Méchain.

Lieu de l'observation.	*Sa latitude.*	*Arcs compris exprimés en modules.*	L' — L	L' + L
Dunkerque	51° 2' 10",50			
		DP 62472.59	2° 11' 20",75	99° 53' 0"
Panthéon à Paris	48 50 49.75			
		PE 76145.74	2 40 7.25	95 1 32
Evaux............	46 10 42.50			
		EC 84424.55	2 57 48.10	89 23 37
Carcassonne.....	43 12 54.40			
		CM 52749.48	1 51 9.60	84 34 39
Montjouy........	41 21 44 80			

Nous avons donc quatre arcs dont les mesures étant substituées successivement dans l'équation (a), fourniront quatre équations entre α et β. Mais comme ces quatre équations ne peuvent pas être satisfaites toutes à-la-fois, nous supposerons qu'elles ont lieu, en attribuant une certaine erreur à la latitude de chaque lieu, et nous appellerons E', E'', &c. les corrections additives aux latitudes de Dunkerque, du Panthéon, &c. Ces erreurs n'entrent que dans le premier membre de chaque équation : elles sont trop petites pour affecter le terme multiplié par α dans le second membre. Voici donc les équations qui résultent des quatre arcs mesurés dans l'opération de la méridienne,

$$\begin{aligned}
E' - E'' &= 0.002923 + \beta(2.192) - \alpha(0.563) \\
E'' - E''' &= 0.003100 + \beta(2.672) - \alpha(0.351) \\
E''' - E^{\text{iv}} &= -0.001096 + \beta(2.962) + \alpha(0.047) \\
E^{\text{iv}} - E^{\text{v}} &= -0.001808 + \beta(1.851) + \alpha(0.263)
\end{aligned}$$

Comme il importe de considérer les erreurs séparément, on regardera comme une nouvelle inconnue l'erreur E''', par exemple, et on aura les cinq équations :

$$\begin{aligned}
E' &= E''' + 0.006023 + \beta(4.864) - \alpha(0.914) \\
E'' &= E''' + 0.003100 + \beta(2.672) - \alpha(0.351) \\
E''' &= E''' \\
E^{\text{iv}} &= E''' + 0.001096 - \beta(2.962) - \alpha(0.047) \\
E^{\text{v}} &= E''' + 0.002904 - \beta(4.813) - \alpha(0.310)
\end{aligned} \qquad (b)$$

Il faut maintenant faire en sorte que la somme des quarrés de ces cinq erreurs soit un *minimum*, et d'abord cette condition exprimée par rapport à l'inconnue E''' dont tous les coëfficiens sont 1, donne par l'addition de toutes ces équations :

$$o = 5E''' + 0.013123 - \beta(0.239) - \alpha(1.622)$$
$$\text{donc } E''' = -0.002625 + \beta(0.048) + \alpha(0.324).$$

Substituant cette valeur dans les cinq équations (b), on aura

$$
\begin{aligned}
E' &= 0.003398 + \beta(4.912) - \alpha(0.590) \\
E'' &= 0.000475 + \beta(2.720) - \alpha(0.027) \\
E''' &= -0.002625 + \beta(0.048) + \alpha(0.324) \\
E^{\text{IV}} &= -0.001529 - \beta(2.914) + \alpha(0.277) \\
E^{\text{V}} &= 0.000279 - \beta(4.765) + \alpha(0.014)
\end{aligned} \qquad (c)
$$

Pour exprimer ensuite la condition du *minimum* par rapport à β, il faut multiplier la première équation par 4,912 coëfficient de β; la seconde, par 2.720; la troisième, par 0.048; la quatrième, par -2.914; la cinquième, par -4.765, et égaler à zéro la somme de tous les produits. On opérera semblablement par rapport à α, et on aura les deux équations :

$$
\begin{aligned}
0 &= 0.020983 + \beta(62.726) - \alpha(3.830) \\
0 &= -0.003287 - \beta(3.830) + \alpha(0.531)
\end{aligned} \qquad (d)
$$

d'où l'on tire $\alpha = 0.00675$, et $\beta = 0.0000778$, donc

$$\text{l'aplatissement } \alpha = \frac{1}{148}$$

$$\text{et le } 45^{\text{ème}} \text{ degré } D = \frac{28500}{1+\beta} = 28497.78.$$

L'aplatissement déterminé par la longueur du pendule et par quelques phénomènes astronomiques, n'est que de $\frac{1}{320}$, et le 45$^{\text{ème}}$ degré tel qu'on l'a déduit de la comparaison des mesures faites en France avec les mesures faites au Pérou, est de 28504.10. C'est sur ce dernier résultat qu'est fondée la détermination définitive du mètre : il devroit être diminué d'environ un 4500$^{\text{ème}}$, si on s'en tenoit aux seules mesures exécutées en France; mais l'aplatissement $\frac{1}{148}$ trop peu d'accord avec celui que l'on connoît par d'autres phénomènes, ne permet pas d'adopter ce dernier parti.

Les valeurs trouvées pour α et β, déterminent l'ellipse qui satisfait aussi exactement qu'il est possible aux mesures de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelonne. Cette ellipse est beaucoup plus aplatie que celle qui convient à la figure générale du globe; elle suppose dans les latitudes observées des erreurs que l'on déterminera en substituant les valeurs trouvées pour α et β, dans les expressions de E′, E″, &c. : on trouvera, en réduisant ces erreurs en secondes,

$E' = -0''73,\ E'' = 1''83,\ E''' = -1''55,\ E^{\text{IV}} = 0''42,\ E^{\text{V}} = 0''03.$

La plus grande de toutes ne monte pas à 2″, et la moyenne, sans égard aux signes, n'est que de 0″91.

Si au lieu de chercher les deux quantités α et β qui conviennent au *minimum* absolu, on commence par faire la quantité α égale à l'aplatissement connu $\frac{1}{320}$, les équations (a) deviendront

$$\begin{aligned} E' &= 0.001554 + \beta(4.912) \\ E'' &= 0.000391 + \beta(2.720) \\ E''' &= -0.001612 + \beta(0.048) \\ E^{\text{IV}} &= -0.000663 - \beta(2.914) \\ E^{\text{V}} &= 0.000323 - \beta(4.765) \end{aligned}$$

et on aura pour l'équation du *minimum*, $0 = 0.009010 + \beta(62.726)$, d'où résulte $\beta = -0.0001436$; donc

$$\text{le } 45^{\text{ème}} \text{ degré} = 28500(1-\beta) = 28504.09;$$

ce qui s'accorde suffisamment avec la détermination adoptée; mais alors les erreurs E′, E″, &c. exprimées en secondes, deviennent

$E' = 3''06,\ E'' = 0''00,\ E''' = -5''83,\ E^{\text{IV}} = -0''88,\ E^{\text{V}} = 3''62.$

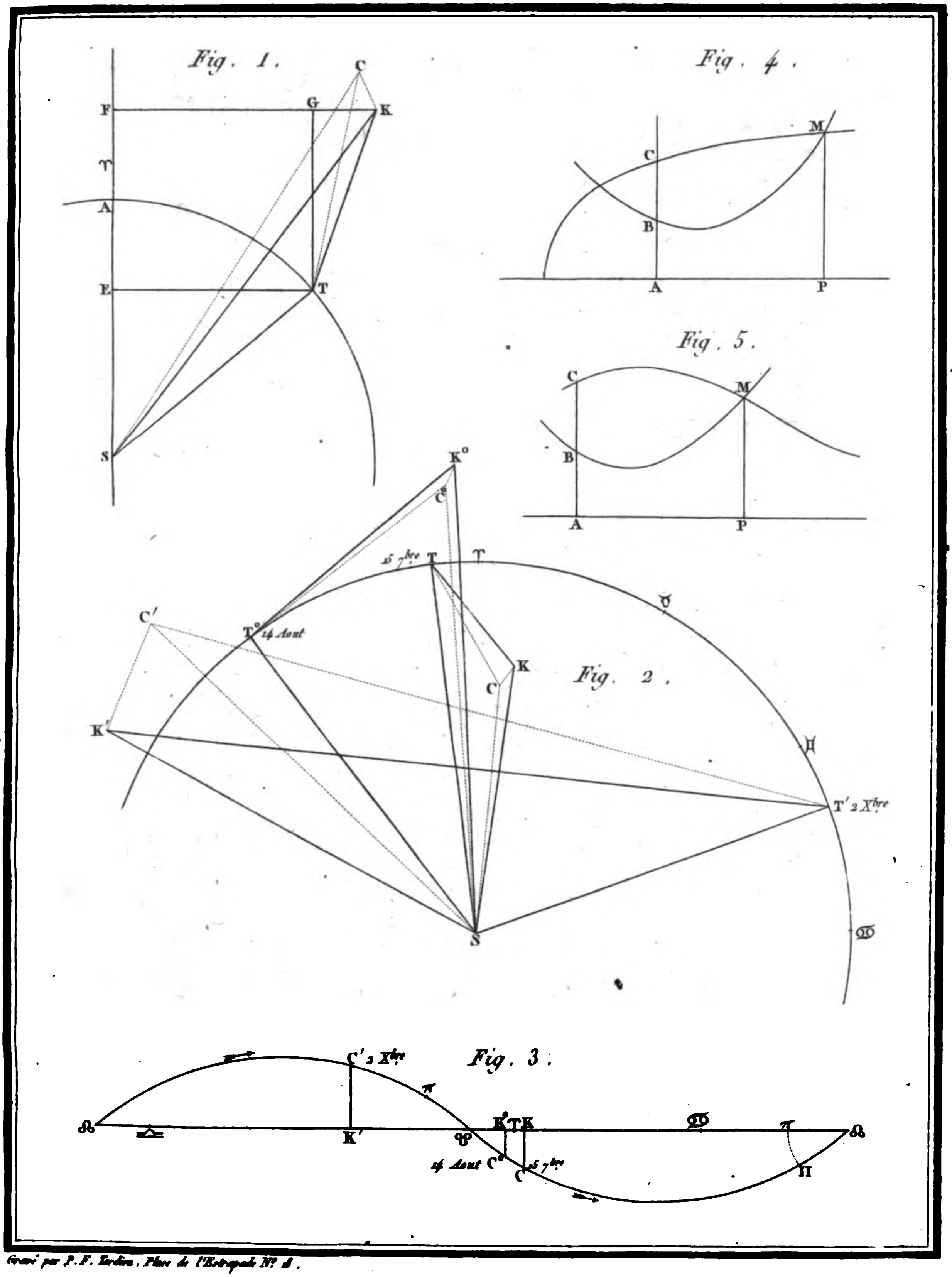
Ces erreurs sont plus fortes qu'elles n'étoient dans le cas du *minimum* absolu; la plus grande tombe sur la latitude d'Evaux, et la moindre, qui est même entièrement nulle, sur celle du Panthéon.

Au reste, les anomalies dans les latitudes, qui sans aucun doute ne doivent point être attribuées aux observations, tiennent vraisemblablement à des attractions locales qui agissent irrégulièrement sur le fil à plomb. Il suffit, pour cela, d'un défaut d'homogénéité dans les couches qui avoisinent le point où l'on observe la latitude ; et la même cause qui rapproche le zénith apparent du midi ou du nord, peut aussi le détourner de quelques secondes vers l'est ou vers l'ouest ; ce qui explique les inégalités qu'on a aussi observées dans les azimuths.

Il résulte de l'existence bien constatée de ces anomalies, que la longueur des arcs du méridien est moins propre que celle du pendule, à la détermination d'une mesure universelle ; et il n'est pas étonnant que des observateurs, d'ailleurs très-exacts, ne se soient pas accordés dans les mesures qu'ils ont prises des degrés du méridien, puisqu'à raison des attractions locales, les latitudes de deux lieux également éloignés de l'équateur, pourroient différer entre elles de plusieurs secondes.

Paris, le 15 ventôse an 13.
6 mars 1805.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.



Gravé par P. F. Tardieu, Place de l'Estrapade N° 18.