Mit den Daten für Kupfer berechnet man

 $s_{11} = 1{,}100 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{cm}^2/\mathrm{kg}, \quad s_{12} = -0{,}362 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{cm}^2/\mathrm{kg}, \quad s_{44} = +1{,}790 \cdot 10^{-6} \,\mathrm{cm}^2/\mathrm{kg}$ und erhält weiter auf dem zweiten Wege

> $E = 1146000 \text{ kg/cm}^3$ m = 3,256  $G = 438100 \text{ kg/cm}^2$

Wie ersichtlich, weichen die beiden auf verschiedener Grundlage berechneten Werte nur verhältnismäßig wenig voneinander ab.

Die berechneten Daten gestatten uns, im Besitze entsprechender Zahlenwerte für den Einkristall, das Verhalten des quasitsotropen Körpers vom Beginne des Deformationsvorganges an durch das elastische Gebiet bis zur unteren Fließgrenze numerisch zu verfolgen.

## ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

## Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung.

Von R. v. MISES und H. POLLACZEK-GEIRINGER in Berlin.

In einer Vorlesung über »Praktische Analysis«, die der erstgenannte Verfasser im Sommer-Semester 1927 hielt, kamen eine Reihe von Rechnungsverfahren zur Sprache, die teils neu, teils wenig bekannt sind. Es erschien zweckmäßig, einiges davon mit kurzer Begründung und Hinweisen auf die wichtigsten Anwendungen zusammenzustellen. Dieser Arbeit hat sich der zweitgenannte Verfasser — zunächst hinsichtlich der Methoden der Gleichungsauflösung — unterzogen; von ihm rühren auch wesentliche Ergänzungen und nähere Ausführungen sowie die Zahlenbeispiele her.

Im ersten Abschnitt des vorliegenden Berichtes wird ein Verfahren zur Lösung einer beliebigen Gleichung mit einer Unbekannten entwickelt, das sich von den bisher bekannten dadurch unterscheidet, daß es stets zum Ziele führt (immer konvergiert) und in der Regel weniger Rechenarbeit verlangt. Die Aufsuchung der Wurzeln von Gleichungssystemen wird in den beiden folgenden Abschnitten nur für den Sonderfall der linearen Gleichungen behandelt. Für das »Iterationsverfahren in Gesamtschritten«, welches die unmittelbare Uebertragung des Verfahrens für Eine Unbekannte darstellt, werden in Abschnitt 2 die zum Teil bekannten, meist nicht gehörig beachteten Konvergenzbedingungen zusammengestellt sowie Fehlerabschätzungen gegeben.

Besondere Bedeutung kommt dem in Abschnitt 3 behandelten, als »Iteration in Einzelschritten« bezeichneten, von Ph. Seidel stammenden Ansatz zu. Dieser ist — nach gewissen Umformungen — auf beliebige lineare Gleichungssysteme anwendbar; andererseits liefert er in seiner ursprünglichen Form ohne jede Vorarbeit ein allgemeines, stets konvergentes Verfahren für die Lösung einer umfassenden Klasse von linearen Gleichungen, nämlich aller derer, die aus einem Minimumproblem hervorgehen. Für die Behandlung n-fach statisch unbestimmter Systeme kann man daraus einen sehr anschaulichen Satz gewinnen, der das allgemeine Problem auf die wiederholte Auflösung einfach unbestimmter Systeme zurückführt') (Abschnitt 4).

Schließlich werden in den letzten Abschnitten?) Systeme homogener linearer Gleichungen mit Parameter betrachtet, eine Aufgabe, die bekanntlich bei der Untersuchung von Eigenschwingungen elastischer Systeme und bei der Aufsuchung von Stabilitätsgrenzen (kritischen Lasten) auftritt. Die sinngemäße Uebertragung des in der Technik bekannten Verfahrens von Vianello zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes bei Randwertproblemen gewöhnlicher Differentialgieichungen gestattet durch einfache Iteration, ohne vorherige Lösung einer Gleichung n-ten Grades, den kleinsten Eigenwert und die zugehörige Eigenlösung zu finden. Das man auf die gleiche Weise, durch wiederholte Anwendung des Verfahrens auch die höheren Eigenwerte und zugehörigen Eigenlösungen finden könne, ist eine oft wiederholte, unzutreffende Behauptung. Wir geben in Abschnitt 6 au, in welcher Weise man tatsächlich dieses für die Anwendungen oft wichtige Problem erledigen kann.

Soweit uns einschlägige frühere Veröffentlichungen bekannt wurden, sind sie an den betreffenden Stellen angeführt worden. Die Sätze und sonstigen Ergebnisse, die ohne Belege wiedergegeben werden, dürften im wesentlichen neu sein.

<sup>1)</sup> Vergl. den Vortragsauszug: H. Pollaczek-Geiringer, diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 446.

<sup>2)</sup> Diese Abschnitte erscheinen als Fortsetzung im nächsten Heft.

1. Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten. Eine Wurzel a der Gleichung f(x) = 0 suchen [wobei f(x) eine reelle stetige Funktion der reellen Variabeln x ist], heißt praktisch, ein Intervall von einer genügend kleinen Länge  $\delta$  bestimmen, innerhalb dessen f mindestens einmal verschwindet. Z. B. bedeutet die Angabe, a = 0,276 sei eine Wurzel von f(x) = 0, daß f(x) innerhalb des Intervalls 0,2755 bis 0,2765 mindestens einmal den Wert Null annimmt. Im besonderen kann die Aufgabe gestellt sein, ausgehend von einem gegebenen Punkte  $x = x_1$ , die nächste, rechts von  $x_1$  gelegene Wurzel von f(x) zu suchen.

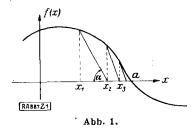
Um eine solche Wurzel zu bestimmen, muß man sich zunächst ein Bild machen von dem Anwachsen der Funktion, von ihrer »Steigung«, sei es, indem man eine rohe Skizze entwirft oder, indem man den Differenzenquotienten abschätzt. Genau genommen, ist unter Steigung der Differenzenquotient  $\frac{f(x_i)-f(x_i)}{x_2-x_1}$  zu verstehen. Man wählt nun eine Zahl c, die dem Betrage nach kleiner ist als der reziproke Wert der größten Steigung in dem für die Aufsuchung der Wurzel in Frage kommenden Bereich:

Bei einer differenzierbaren Funktion wird man meist von der Tatsache Gebrauch machen, daß für eine solche die obere und die untere Grenze der Steigung in einem bestimmten Intervall mit der oberen und unteren Grenze der Ableitung in diesem Intervall zusammenfallen. Mit einem gemäß (1) gewählten Werte von c bildet man, ausgehend von einem Punkte  $x_1$ , in dem  $f(x_1)$  positiv sein mag, die Zahlenfolge:

$$x_1 = x_1 + c f(x_1), \qquad x_3 = x_2 + c f(x_2), \ldots$$
 (2).

Wir behaupten, daß man auf diese Weise, wenn es überhaupt rechts oder links von  $x_1$  eine Wurzel gibt, stets zu dieser gelangt, und zwar bei positivem c zu der nächsten rechts von  $x_1$  gelegenen, bei negativem c zu der linken. Ist  $f(x_1) < 0$ , so vertauschen sich hier rechts und links.

Geometrisch bedeutet (2), daß man, ausgehend von dem Kurvenpunkte  $y_1 = f(x_1)$  eine Gerade unter dem Winkel  $\alpha$  zieht (Abb. 1), wobei  $c = \operatorname{ctg} \alpha$ , eine Gerade also, die wegen (1) steiler nach rechts abwärts geht als die stärkste Sehnenneigung der Kurve im betrachteten Intervall (zwischen  $x_1$  und der Wurzel). Aus der Figur — die für positives f gezeichnet ist — geht schon hervor, daß man auf diese Weise von links immer näher an die Wurzel herankommt, ohne über sie hinauszugelangen, und eben darin besteht die Behauptung.



Für den Mathematiker beruht der Konvergenzbeweis in folgenden Ueberlegungen: Gemäß der Erklärung von c ist dieses dem Betrage nach kleiner als der reziproke Wert der Steigung für irgend zwei Punkte; wenn also die Steigung zwischen dem n-ten Näherungswert  $x_n$  und einem Wurzelwert a gebildet wird, so ist

$$|c| < \left| \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \right| = \left| \frac{x_n - a}{f(x_n)} \right|,$$

und daher gilt wegen (2) für jedes  $n=1,2,\ldots$ 

Ist  $f(x_1) > 0$ , c positiv gewählt und bezeichnet a den nächsten rechts von  $x_1$  gelegenen Wurzelwert, so folgt aus (2), daß  $x_2 > x_1$ , und aus (3), weil a rechts von  $x_1$  liegt, daß  $x_2 - x_1 < a - x_1$ , d. h.  $x_2$  liegt zwischen  $x_1$  und a. Demnach muß, da a die nächste rechts von  $x_1$  gelegene Wurzel war, auch  $f(x_2) > 0$  sein und man schließt wieder aus (2) und (3), daß  $x_3$  zwischen  $x_2$  und a liegen muß, usw. Die  $x_1$ ,  $x_2$ ... bilden also eine beschränkte und monoton wachsende Folge, besitzen daher einen Grenzwert. Von einem gewissen, hinlänglich großen n an werden sich dann die  $x_2$ ,  $x_{2+1}$ ,... voneinander dem Betrage nach um höchstens  $\varepsilon$  unterscheiden, wobei  $\varepsilon$  eine beliebig klein vorgebbare Zahl ist:

$$|x_{v+1}-x_v|<\varepsilon$$
, also wegen (2)  $|cf(x_v)|<\varepsilon$ .

Da c von Null verschieden gewählt war, kann somit der Grenzwert unserer Folge von einer Wurzel von f(x) nicht verschieden sein; da die Folge anderseits nicht über a hin-

auswachsen kann und a die nächste rechts gelegene Wurzel ist, konvergiert die Folge  $x_1, x_2, x_3, \dots$  gegen diese Zahl.

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz 1. Bildet man mit einem Beiwert c, dessen Betrag nicht größer ist als der reziproke Wert der größten Steigung, die die Funktion f(x) in dem in Betracht kommenden Intervall aufweist, die Zahlenfolge

$$x_1, \quad x_2 = x_1 + c f(x_1), \quad x_3 = x_2 + c f(x_3), \ldots$$

so führt sie, je nachdem man  $cf(x_i)$  positiv oder negativ gewählt hat, zu dem nächsten rechts oder links von  $x_i$  gelegenen Wurzelwert. Die Zahlenfolge ist einsinnig wachsend oder abnehmend und führt nur dann ins Unendliche, wenn rechts bzw. links von  $x_i$  keine Wurzel vorhanden ist.

Man sieht, daß man sich bei  $cf(x_1) > 0$  mittels der sukzessive berechneten  $x_1, x_2, \ldots$  einer etwa vorhandenen Wurzel a jedesfalls von links nähert. Die Konvergenz wird übrigens um so schneller sein, je größer man c unter Beachtung von (1) gewählt hat, da ja  $x_{n+1}$  aus  $x_n$  durch Hinzuftigung des Zusatzes  $cf(x_n)$  hervorgeht. Man kann c auch von Schritt zu Schritt geeignet verändern, also größere c wählen, wenn man in einen Bereich mit geringerer Steigung kommt (vergl. das folgende Beispiel). Wenn man so einige Schritte ausgeführt hat, wird man, um die Wurzel auch von rechts einzugrenzen, für einen Wert  $x_1$ , der etwas größer ist als das zuletzt berechnete  $x_n$ , den Wert von  $f(x_i)$  berechnen. Falls dieser negativ ist, kann man, wenn man das Intervall für die Wurzel noch weiter verengern will, entweder von links aus noch einige Schritte berechnen, oder von  $x_1$  ausgehend nun ähnlich wie in (2) eine abnehmende Folge:

$$x_{3}' = x_{1}' + c f(x_{1}'), \qquad x_{3}' = x_{2}' + c f(x_{3}'), \ldots, (2')$$

bilden, die von rechts gegen a konvergiert.

Falls f(x) für  $x_1$  negativ, für  $x_1'$  positiv ist  $(x_1$  kleiner als x.'), so macht man, um von  $x_1$  zur nächsten rechts gelegenen Wurzel zu kommen, den analogen Ansatz mit einem Beiwert — c < 0:

$$x_2 = x_1 - c f(x_1), \quad x_3 = x_2 - c f(x_3), \ldots (4),$$

und um das Intervall auch von der andern Seite abzugrenzen:

$$x_{2}' = x_{1}' - c f(x_{1}'), \qquad x_{2}' = x_{2}' - c f(x_{2}'), \ldots, (4'),$$

wobei man von einem  $x_i'$  ausgeht, das ein wenig rechts von dem zuletzt berechneten  $x_i'$  liegt und für das  $f(x_i')$  positiv ist.

Hierbei ist zunächst an einfache Wurzeln gedacht, die zugleich Zeichenwechsel der Funktion f(x) sind. Besteht die Vermutung, daß die Gleichung eine mehrfache Wurzel besitzt, so wird man wohl in der Regel die Ableitung von f(x) untersuchen. Das hier dargestellte Verfahren gestattet aber auch, aus dem Verhalten von f(x) allein gewisse Schlüsse zu ziehen. Soll die Annahme geprüft werden, ob z. B. zwischen zwei Zahlen  $x_1$  und  $x_1'$ , wobei etwa  $f(x_1)$  und  $f(x_1')$  positiv sei und  $x_1 < x_1'$ , eine Nullstelle ohne Zeichenwechsel liegt, so bilde man mit entsprechendem positiven c die Zahlenfolgen:  $x_2 = x_1 + c f(x_1)$ ,  $x_3 = x_2 + c f(x_2) \dots$ ,

$$x_3 = x_1 + c f(x_1),$$
  $x_3 = x_2 + c f(x_2)...,$   
 $x_3' = x_1' - c f(x_1'),$   $x_2' = x_2' - c f(x_2')...,$ 

(wobei wieder die c gegebenenfalls von Schritt zu Schritt abgeändert werden dürfen, aber stets (1) zu beachten ist). Solange sich diese Folgen nähern, ohne sich zu überschneiden, kann eine eventuelle Doppelwurzel nur zwischen ihnen liegen. Ueberschneiden sie sich, so ist gewiß keine Doppelwurzel vorhanden.

Unser Verlahren soll nun an einem Beispiel erläutert werden. Die Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x \cos x - \sin x}$$

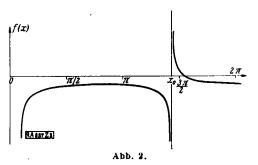
gibt für eine gewisse Klasse von Fällen die sogenannte Knickbedingung für einen eingespannten ebenen Rechtwinkelrahmen<sup>1</sup>). Dabei ist x eine Zahl, die von den Konstanten des Rahmens abbängt. Zu jedem x gibt es ein bestimmtes kleinstes x, das die Knicklast des Rahmens bestimmt. Wir wollen diesen x-Wert für x = 1 aufsuchen und betrachten also die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x^2} \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x \cos x - \sin x} - 1.$$

<sup>1)</sup> Vergl. B. v. Mises und J. Ratzersdorfer, diese Zeitschr., Bd. 6 (1926), S. 9.

Der Nenner des Bruches verschwindet, wenn x = tg x. Bezeichnet man mit  $x_0$  die kleinste (liuks nahe an  $3\pi/2$  gelegene) Wursel dieser transzendenten Gleichung, deren Wert 4,4934 ist<sup>1</sup>), so wird f(x) für  $x = x_0$  unendlich und nimmt für  $x > x_0$  nach rechts

ab. Für  $x=3\pi/2$  erhält man  $f\sim 0,21$ , für  $x=2\pi$  ist f=-1, da der Zähler des Bruches verschwindet. Also muß zwischen  $3\pi/2$  und  $2\pi$  mindestens eine Wurzel liegen; die erste rechts von  $3\pi/2$  gelegene ist die von uns gesuchte. Denn für positive x-Werte links von  $x_0$  verläuft f(x), wie eine kurze Ueberschlagsrechnung lehrt, ganz im Negativen, und zwar steigt f(x) ausgehend vom Werte  $-\infty$  bei x=0 alimählich an, erreicht zwischen  $\pi/2$  und  $\pi$  ein (negatives) Maximum und nimmt von da an wieder bis zu der erwähnten, bei  $x_0$  gelegenen Asymptote ab (Abb 2).



Als Ausgangspunkt wählen wir  $x_1 = 3\pi/2$ . Um den Beiwert c, der für unser Verfahren wesentlich ist, zu bestimmen, differenzieren wir f(x) und erhalten:

$$f'(x) = -\frac{8}{x^{3}} \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x \cos x - \sin x} - \frac{4}{x^{2}} + \frac{4}{x} \sin x \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^{2}}$$

Die Steigung nimmt von der Stelle der Asymptote her mit wachsendem x immer mehr ab. Wir rechnen daher zunächst  $f'(3\pi/2)$ ; dieser Wert ist sicher größer als die Steigung für größere x. Man erhält (mit dem Rechenstab)  $f'(3\pi/2) \sim -6,40$ . Der reziproke Wert davon ist -0,157, also sicher absolut größer als 0,15. Diese Zahl wählen wir zunächst als Beiwert c und rechnen

$$x_4 = \frac{8\pi}{2} + 0.21 \cdot 0.15 = 4.71 + 0.0315 = 4.7415$$
.

Da für 4,7415 der Wert von f(x) mühsam zu rechnen ist, so rechnen wir zunächst für 4,74, was die Konvergenz im schlimmsten Fall etwas verzögert. Es ergibt sich f(4,74) = 0,06 und daraus:

$$x_1 = 4,74 + 0,06 \cdot 0,15 = 4,749$$
.

Wir versuchen nun  $x_4 = 4,75$  und rechnen diesen Wert schon genauer, da wir uns bereits in der Nähe der Wurzel befinden. Es ergibt sich f(4,75) = 0,00422 und daraus

$$x_5 = 4,75 + 0,15 \cdot 0,00422 = 4,7506330$$
.

Nun wählen wir, um eine Annäherung von der anderen Seite zu erhalten,  $x_1' = 4,751$ , f(4,751) = -0,0005125. Um eine bessere Konvergenz zu erzielen, rechnen wir den Wert der Ableitung f'(x) an der Stelle 4,751. Er ergibt sich absolut kleiner als 4,6, so daß man jetzt c = 0,217 nehmen darf (statt wie früher 0,15) und somit

$$x_{2}' = 4,751 - 0,217 \cdot 0,0005125 = 4,75088879$$
.

Diese Zahl liegt oberhalb der Wurzel. Um noch eine bessere untere Schranke als das vorher errechnete  $x_i$  zu erhalten, berücksichtigen wir den Wert der Ableitung an der Stelle 4,75, der etwas größer ist als der für 4,751. Es zeigt sich, daß man hier schon c = 0,21 nehmen darf; wir korrigieren daher, ohne einen neuen Funktionswert zu rechnen, das  $x_i$  in ein  $x_i$ :

$$\overline{x_5} = 4,75 + 0,21 \cdot 0,00422 = 4,75088620$$

Es ist also die Wurzel zwischen 4,75088620 und 4,75088879 eingegrenzt, also innerhalb eines Intervalls von einer Länge  $\delta < 3 \cdot 10^{-6}$ .

Wenn man abkürzt, ergibt sich

$$x = 4,75089$$
.

Es sei zum Schluß darauf hingewiesen, daß alle bekannten Verfahren der Wurzelbestimmung, wie das Newtonsche Verfahren, die regula falsi, das gewöhnliche Iterationsverfahren, als Spezialfälle des beschriebenen allgemeinen Iterationsverfahrens aufgefaßt werden können. Allgemein gesprochen haben wir ja eine Zahlenfolge der Form  $x_{n+1} = x_n + c_n f(x_n)$ , (n = 1, 2, ...)

<sup>1)</sup> Vergl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig 1928. S. 8

aufgestellt. Bei den bisher bekannten Methoden wird über die Beiwerte cn in einer Weise verfügt, die die Konvergenz nicht sicherstellt, dafür aber in anderer Hinsicht vielleicht zweckmäßiger erscheint. Das Newtonsche Verfahren setzt nämlich

$$c_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$$

fest, die regula falsi

$$c_n = -\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

das geläufige Iterationsverfahren

$$n = 1$$
.

Geometrisch bedeutet das, das man im ersten Falle in Richtung der Tangente an den Punkt mit der Ordinate  $f(x_n)$ , im zweiten Falle in Richtung der Sehne durch die Kurvenpunkte mit den Abszissen  $x_n$ ,  $x_{n-1}$ , endlich im letzten Falle unter dem festen Winkel von 45° eine Gerade zieht, deren Schnitt mit der x-Achse jeweils den nächsten Wert  $x_{n+1}$  bestimmt usf. Es ist bekannt, daß man sich in jedem dieser Fälle unter Umständen von der Nullstelle entfernen kann. Freilich konvergiert das eine oder andere Verfabren auch manchmal besonders rasch, da die Wahl der  $c_n$  den Verhältnissen sehr eng angepast sein kann. Dem steht wieder der rechnerische Nachteil gegenüber, das bei den beiden erstgenannten Verfahren jeder einzelne Schritt eine Division erfordert.

Das neue, hier empfohlene Verfahren der Wurzelaufsuchung hat den Vorteil, geringere Rechenarbeit beim Einzelschritt und gewährt die Sicherheit, daß die Folge der Einzelschritte gegen den Wurzelwert konvergiert.

2. Lineare Gleichungssysteme. Die Auflösung linearer Gleichungen mit einer größeren Zahl von Unbekannten bildet einen sehr schwierigen Abschnitt der praktischen Algebra. Die Lösung mittels Determinanten ist unübersichtlich und hat noch den besonderen Nachteil, daß die Genauigkeit des Ergebnisses schon durch den ersten Schritt der Rechnung festgelegt wird. Da sich häufig kleine Differenzen großer Zahlen (entsprechend kleinen Werten der Determinanten) im Laufe der Rechnung ergeben, kann die in Aussicht genommene Genauigkeit beeinträchtigt werden und dies macht eine Wiederholung des ganzen Rechnungsganges notwendig, ohne daß das bisher Errechnete verwertet wird; ja es kann vorkommen, daß die umfangreichste Rechenmaschine nicht genug Stellen besitzt, um ein Resultat von etwa drei Stellen zu liefern. — Diesem Verfahren und dem ihm wesensgleichen Eliminationsverfahren gegenüber treten die Verfahren der »Näherungsfolgen« oder Iteration. Sie bieten vor allem den Vorteil, daß man nicht von vornherein eine Festsetzung über die Genauigkeit der Rechnung treffen muß, sondern in jedem Stadium über eine Annäherung verfügt, die man nötigenfalls immer weiter verbessern kann. Außerdem pflanzen sich Fehler nicht dauernd fort, sondern werden im allgemeinen im Laufe der Rechnung selbsttätig korrigiert; sie verzögern schlimmstenfalls die Konvergenz.

Wir wollen den allgemeinen Iterationsansatz von 1 sinngemäß auf lineare Gleichungen übertragen. Das zu lösende System, von dem wir voraussetzen, daß es lösbar ist (also eine von Null vorschiedene Determinante besitzt) laute

oder ganz kurz in Vektorform geschrieben:

$$\mathfrak{A} \mathfrak{x} - \mathfrak{r} = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (1').$$

Dabei bezeichnet r den Vektor mit den Komponenten  $x_1, \ldots x_n$ ; r den Vektor mit den Komponenten  $r_1, \ldots r_n$  und  $\mathfrak{A}$  r steht für den mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

transformierten. Vektor  $x_i$ , dessen ite Komponente  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$  ist (i = 1, 1)2, . . . n). Man gehe aus von irgendwelchen willkürlich oder gemäß einer Vermutung

über die ungefähre Lage der Lösung gewählten Werten  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots x_n^{(1)}$  und bestimme aus dieser neue Größen  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots x_n^{(2)}$  nach der Vorschrift:

$$\begin{array}{l}
x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + c_1 L_1 (x^{(1)}) \\
x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + c_2 L_2 (x^{(1)}) \\
\vdots \\
x_n^{(2)} = x_n^{(1)} + c_n L_n (x^{(1)})
\end{array} \right) .$$
(2).

Man fährt fort, indem man rechts statt der  $x^{(1)}$  die  $x^{(2)}$  verwendet, um aus ihnen ein System  $x^{(3)}$  zu bestimmen usf. Nach v-1 solchen "Gesamtschritten", — wobei die Berechnung von n neuen Größen  $x^{(x)}$  aus n bekannten Größen  $x^{(x-1)}$  als ein "Gesamtschritt" bezeichnet wird — hat man ein System  $x^{(v)}$  erhalten, aus diesem bestimmt man  $x^{(v+1)}$  usf. Es fragt sich, ob dieser Prozeß ein konvergenter ist und ob die Folge der Wertsysteme  $x^{(v)}$  sich der Lösung von (1) nähern; genauer gesagt, ob es unter gewissen Voraussetzungen über das vorgegebene Gleichungssystem möglich ist, eine Vorschrift für die Wahl der  $c_t$  ( $i=1,2,\ldots,n$ ) zu geben — analog wie dies in 1 im Fall einer Unbekannten gelungen war — derart, daß die Näherungsfolgen gegen die Lösung konvergleren 1).

Zunächst ergibt sich in Verallgemeinerung des früheren Gedankenganges eine erste hinreichende Konvergenzbedingung wie folgt. Bezeichnet man mit  $x_1, \ldots x_n$  ein Lösungssystem, für das also  $L_i(x) = 0$   $(i = 1, 2, \ldots, n)$ , und führt Größen  $z_i^{(v)}$  durch  $x_i^{(v)} - x_i = z_i^{(v)}$ 

als  $i^{\text{te}}$  >Fehlerkomponente« der  $v^{\text{ten}}$  Näherung ein, so erhält man aus (2), indem man diese Gleichungen für den oberen Index v und v+1 (statt 1 und 2) anschreibt und dann links  $x_i$ , rechts  $x_i+c_i L_i(x)$  subtrahiert, das in den z homogene Gleichungssystem

Sind hier die spaltenweise genommenen Summen der absoluten Beträge kleiner als ein echter Bruch  $\mu$ :

$$|1 + c_1 a_{11}| + |c_2 a_{21}| + \ldots + |c_n a_{n1}| \le \mu < 1 |c_1 a_{12}| + |1 + c_2 a_{22}| + \ldots + |c_n a_{n2}| \le \mu < 1 |c_1 a_{1n}| + |c_2 a_{2n}| + \ldots + |1 + c_n a_{nn}| \le \mu < 1$$

$$(4),$$

so folgt aus (3) durch Addition:

$$|z_{1}^{(\nu+1)}| + |z_{2}^{(\nu+1)}| + \ldots + |z_{n}^{(\nu+1)}| \leq \mu \left[ |z_{1}^{(\nu)}| + |z_{2}^{(\nu)}| + \ldots + |z_{n}^{(\nu)}| \right] \\ \leq \ldots \leq \mu^{\nu} \left[ |z_{1}^{(1)}| + |z_{2}^{(1)}| + \ldots + |z_{n}^{(1)}| \right]. \quad (5).$$

Damit ist gezeigt, daß bei jedem Gesamtschritt die Summe der Absolutwerte der Fehler-komponenten kleiner wird und nach  $\nu$  Schritten wie die  $\nu^{\text{te}}$  Potenz eines echten Bruches abnimmt, also bei unbegrenzt wachsendem  $\nu$  beliebig klein wird, sobald (4) erfüllt ist. Das gleiche gilt a fortiori für jede einzelne Fehlerkomponente<sup>2</sup>).

Das Aufsuchen solcher Beiwerte  $c_i$ , für die (4) erfüllt ist, läßt sich allerdings nur in Sonderfällen leicht bewerkstelligen, vor allem dann, wenn in jeder Zeile das Diagonalglied  $a_{ii}$  gegenüber den Nebengliedern  $a_{ii}$  ( $i \neq \varkappa$ ) genug stark überwiegt. In einem solchen Falle wird man

setzen, um die Diagonalglieder im Schema (3) oder (4) zum Verschwinden zu bringen. Die Iteration (2) mit der Annahme (6) erhält so die Form

$$x_i^{(\nu+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left[ a_{i1} x_i^{(\nu)} + a_{i2} x_2^{(\nu)} + \ldots + a_{in} x_n^{(\nu)} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>) Das Verfahren ist bekannt. (Vergl. etwa C. Runge »Praxis der Gleichungen«, Leipzig 1921, S. 70 ff). Doch wird als Konvergenzbedingung meist die ganz unbestimmte Forderung ausgesprochen, daß die Diagonalglieder in der Koeffizientenmatrix »überwiegend groß« sein sollen.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) Eine entsprechende Konvergenzbedingung für nicht lineare Gleichungssysteme gibt z. B. C. Runge, Praxis der Gleichungen. Leipzig 1921, S. 69/70.

so daß also die ite Gleichung zur Verbesserung der iten Unbekannten benutzt (nach der i<sup>ten</sup> Unbekannten aufgelöst) wird. Die Bedingung (4) nimmt die Form an:

$$\left|\frac{\Sigma'}{a_{i,k}}\right| \leq \mu < 1 \qquad (k = 1, \ldots n) \qquad (8),$$

wobei  $\Sigma'$  bedeuten soll, daß nur über  $i \neq k$  summiert wird, daß also nur die Spaltensummen aus den Nebengliedern in Betracht kommen. Im besonderen ist (8) natürlich stets erfüllt, wenn keiner der (n-1) Summanden in (8) die Zahl 1/(n-1) übertrifft, (wobei nicht immer das Gleichheitszeichen gelten derf), d. h. wenn in jeder Zeile das Diagonalglied mindestens (n-1)-mal so groß ist wie jedes der Nebenglieder. Da man jedes Gleichungssystem (1) mit nicht verschwindender Determinante so ordnen kann, daß die Diagonalglieder nicht verschwindende Koeffizienten haben, und man dann durch Dividieren jeder Gleichung durch den Koeffizienten des Diagonalgliedes ein System mit lauter Einsen in der Diagonale erhält, so lautet das bisherige Ergebnis:

Satz 2. Wenn es möglich ist, Beiwerte c1, c2, ... cn so zu bestimmen, daß die mit ihnen gebildeten n Spaltensummen (4) sämtlich einen echten Bruch  $\mu$  nicht übertreffen, so konvergiert die mit diesen  $c_i$  gebildete Iteration (2).

Insbesondere führt die Iteration mit  $c_1 = c_2 = \dots c_n = -1$  stets zum Ziel, wenn in dem »durchdividierten« System mit Diagonalkoeffizienten gleich Eins die n Summen aus den Beträgen der je (n-1) untereinander stehenden Nebenkoeffizienten sämtlich kleiner als Eins sind.

Ehe wir dazu übergehen, weitere Konvergenzbedingungen anzugeben, sei noch eine Bemerkung über die Fehlerschätzung gemacht. Für die praktische Rechnung ist ja wichtiger - aber in der Regel noch schwieriger - als die Frage der Konvergenz die Frage nach einer brauchbaren Fehlerabschätzung in jedem Stadium der Rechnung. Eine nicht exakte, aber in der praktischen Analysis übliche Methode der Fehlerschätzung kann auf das Problem der Auflösung linearer Gleichungen durch Iteration folgendermaßen angewendet werden. Für zwei aufeinanderfolgende Näherungen  $\mathfrak{x}^{(v)}$ ,  $\mathfrak{x}^{(v+1)}$  und eine Lösung r gilt gemäß dem Iterationsansatz (2), da  $L_i(x) = 0$ ,

$$x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)} = c_i [L_i(x^{(v)}) - L_i(x)] = c_i \bar{L_i}(x^{(v)} - x) . . . . (9)$$

wobel  $L_i$  aus  $L_i$  durch Weglassen des absoluten Gliedes hervorgeht.  $\widetilde{L}_i(x)$  ist also auch eine Bezeichnung für die  $i^{\text{te}}$  Komponente  $a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n$  des transformierten Vektors  $\mathfrak{A}_i$  . Ist dann  $x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)} = \delta_i^{(v)}$   $(i = 1, \ldots, n)$ . . . . . (10),

Denkt man sich diese Gl. (11) nach den unbekannten Fehlern z.(\*) aufgelöst, so ergibt sich, wenn A und Aix die Determinante aus den aix bzw. die adjungierten Unterdeterminanten bedeuten,

$$z_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{v})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{i}^{(\mathsf{v})}}{c_{i}} \frac{A_{i} \mathsf{x}}{A}, \qquad z_{\mathsf{x}}^{(\mathsf{v})} \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\delta_{i}^{(\mathsf{v})}}{c_{i}} \right| \cdot \left| \frac{A_{i} \mathsf{x}}{A} \right| \leq 8 \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{A_{i} \mathsf{x}}{A} \right| \quad . \quad . \quad (12),$$

wenn s absolut größer ist als das größte der  $\left| \frac{\delta_{t}^{(\gamma)}}{c_{t}} \right|$ . Ist man dann nach einigen weiteren Schritten dahin gelangt, daß die Verbesserungen, die der ete Schritt mit sich bringt, durchschnittlich nur mehr halb so groß sind, wie die eben betrachteten des  $v^{\text{ten}}$  Schrittes, d. h.  $x_i^{(\rho+1)} - x_i^{(\rho)} = \lambda_i^{(\rho)}, \quad \left| \delta_i^{(\rho)} \right| \sim \frac{1}{2} \cdot \left| \delta_i^{(\gamma)} \right|$ 

so folgt daraus

$$|z_{\mathbf{x}}^{(0)}| < \frac{1}{2} \, \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{A_{i} \, \mathbf{x}}{A} \right| \qquad (12')$$

Wären (12) und (12') nicht Ungleichungen, sondern Gleichungen ohne Absolutzeichen links, so könnte man (12') von (12) subtrahieren und erhielte

$$z_{x}^{(v)} - z_{x}^{(\rho)} = x_{x}^{(v)} - x_{x}^{(\rho)} = \frac{1}{2} e \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{A_{i} x}{A} \right| = \left| z_{x}^{(\rho)} \right|.$$

Die übliche, nicht beweisbare, durch das Vorstehende höchstens plausibel gemachte Behauptung geht nun dahin, daß der wirkliche Fehler  $z_{\rm x}^{(e)}$  der  $e^{\rm ten}$  Näherung von derselben Größenordnung ist, wie die Differenz der  $e^{\rm ten}$  und  $e^{\rm ten}$  Näherung, wenn die Verbesserungen, die der  $e^{\rm te}$  Schritt mit sich bringt, durchschnittlich halb so groß sind, wie die des  $e^{\rm ten}$  Schrittes.

Eine exakte Fehlerschätzung ist möglich, wenn man das Zutreffen der Bedingung (4) bzw. (8) voraussetzt. Es sei wieder die Iteration so weit getrieben, daß die Verbesserung der  $i^{\text{ten}}$  Koordinate beim  $v^{\text{ten}}$  Schnitt

$$|x_i^{(v)} - x_i^{(v+1)}| = |z_i^{(v)} - z_i^{(v+1)}| \le \delta_i ... ... ... (14).$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i^{(v)} - z_i^{(v+1)}| \leq \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

und erst recht

$$\sum_{i=1}^{n} \{ |z_i^{(v)}| - |z_i^{(v+1)}| \} \equiv \sum_{i=1}^{n} |z_i^{(v)}| - \sum_{i=1}^{n} |z_i^{(v+1)}| \le \sum_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i^{(v)}| = b, \qquad \sum_{i=1}^{n} |z_i^{(v+1)}| = a, \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \delta,$$

so ist:

$$b-a \le \delta$$
 oder  $\frac{b}{a} \le 1 + \frac{\delta}{a}$ .

Andererseits besagt (5), daß  $a \leq \mu b$ , also ist

$$\frac{1}{\mu} \leq \frac{b}{a} \leq 1 + \frac{\delta}{a}.$$

Läßt man das Mittelglied der Ungleichheit weg, so erhält man

$$1+\frac{\delta}{a}\geq \frac{1}{\mu}, \qquad a\leq \frac{\mu}{1-\mu}\delta$$

und wenn man dann das zweite und das dritte Glied berücksichtigt:

$$b = \sum_{i=1}^{n} |z_i(y)| \leq a + \delta \leq \frac{1}{1-\mu} \delta.$$

Wir erhalten somit das Ergebnis, das wir wieder der Einfachheit halber für ein System mit Einsen als Diagonalkoeffizienten aussprechen.

Satz 3. Ist die Spaltensumme der absolut genommenen Nebenkoeffizienten in einem Gleichungssystem mit den Diagonalkoeffizienten Eins kleiner als ein echter Bruch  $\mu$  und ist man in Verfolgung der üblichen Iteration (7) (bei der die  $i^{\text{te}}$  Gleichung zur Verbesserung der  $i^{\text{ten}}$  Unbekannten benutzt wird) so weit gekommen, daß der Unterschied der  $r^{\text{ten}}$  Näherung zur folgenden in der  $i^{\text{ten}}$  Koordinate dem Betrage nach  $\delta_i$  nicht übertrifft, so ist die Summe der Beträge der Komponenten der wirklichen Fehler der  $r^{\text{ten}}$  Näherung höchstens gleich

$$\frac{1}{1-\mu}\cdot \sum_{i=1}^n \delta_i.$$

Man sieht, daß die Schranke um so besser wird, je kleiner  $\mu$  ist. Unser Satz kann auch dahin ausgesprochen werden, daß in dem betrachteten Falle die Beträge der einzelnen Verbesserungen wesentlich abnehmen wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\mu$ .

Als ein Beispiel für diese Fehlerabschätzung betrachten wir das folgende Gleichungssystem 1)

$$3 x + 0.15 y - 0.09 z = 6$$
  
 $0.08 x + 4 y - 0.16 z = 12$   
 $0.05 x - 0.3 y + 5 z = 20$ 

<sup>1)</sup> Runge-König, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924, S. 184.

## Es seien die nachfolgenden Näherungen gerechnet:

		æ	ν	æ
. Naherung	 	2	3	4
. Näherun <b>g</b>	 	1,97	3,12	4,16
Näherung	 	1,9688	3,127	4,1675
. Näherung		1,96868	3,12732	4,16793
. Näherung	 	1,96867	3,12734	4,16795

Hier kann man  $\mu = 0,11$  setzen; denn die drei absoluten Spaltensummen der Nebenglieder des »durchdividierten« Systems sind: 0.02 + 0.01 = 0.03 bzw. 0.05 + 0.06 = 0.11 bzw. 0,03+0,04=0,07; dann ist  $\frac{1}{1-\mu}=1,13$ . Für die  $\delta_i^{(4)}$ , das ist für den Unterschied der vierten und fünften Näherung, findet man in den drei Variablen 0,00001; 0,00002; 0,00002. Die Summe dieser Verbesserungen ist 0,00005 und unser Satz ergibt, daß die Summe der wirklichen Fehler der vierten Näherung die Zahl 0,00005 1,13 = 0,00006 nicht übertreffen kann. Für die dritte Näherung ergibt die analoge Ueberlegung 0,00098 als obere Schranke, während tatsächlich die dritte Dezimalstelle in jeder Koordinate bei der dritten Näherung schon richtig ist.

Audererseits kann die von uns gegebene Schranke unter Umständen erreicht werden, wie folgendes Beispiel zeigt, in dem  $\mu$  nicht kleiner als 0,5 gesetzt werden kann. Geht man mit  $c_1 = c_2 = -1$  in die Gleichungen

$$x + 0.5 y = 2$$
,  $0.5 x + y = 2.5$ ,

so ergeben die Iterationsformeln (7) . 
$$x^{(v+1)} = 2 - \frac{y^{(v)}}{2}, \qquad y^{(v+1)} = 2, 5 - \frac{x^{(v)}}{2}, \qquad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Setzt man hier  $x^{(1)} = 0$ ,  $y^{(1)} = 2.5$ , so kommt  $x^{(3)} = 0.75$ ,  $y^{(2)} = 2.5$ . Hier ist  $\delta_1 = 0.75$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\delta_1 + \delta_2 = 0.75$ .

$$\frac{\mu}{1-\mu}(\delta_1+\delta_2)=0.75$$
 und  $\frac{\delta_1+\delta_2}{1-\mu}=1.50$ .

Tatsächlich beträgt, da x=1, y=2 die exakte Lösung ist, die absolute Fehlersumme der ersten Näherung 1+0.5=1.5; die der zweiten 0.25+0.5=0.75. Die angegebene Schranke ist also genau erreicht, und dies bleibt auch so bei den folgenden Schritten:

$$x^{(3)} = 0.75$$
,  $x^{(4)} = 0.9375$ ,  $x^{(5)} = 0.9375$ ,  $x^{(6)} = 0.984375$ ,  $x^{(7)} = 0.984375$ ,  $y^{(3)} = 2.125$ ,  $y^{(4)} = 2.125$ ,  $y^{(5)} = 2.03125$ ,  $y^{(6)} = 2.03125$ ,  $y^{(7)} = 2.0078125$ . usf.

Wir wenden uns jetzt der Diskussion weiterer Konvergenzfälle zu. Wenn die Nebenglieder (in dem durchdividierten System mit Einsen in der Diagonale) zwar im allgemeinen von der Größenordnung 1/n sind, während aber doch einzelne Spalten eine Summe aufweisen, die Eins übertrifft, so kann die Iteration (7) immer noch zum Ziel führen, wenn für die Koeffizienten die Ungleichung

besteht, die wir als Schmidtsche Bedingung bezeichnen, weil sie einer von E. Schmidt für Integralgleichungen gegebenen Konvergenzbedingung analog ist').

In Vektorform gestaltet sich der Beweis folgendermaßen: Unser Gleichungssystem  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r} \quad \text{mit} \quad a_{ii} = 1 \quad (i = 1, \ldots n).$ laute wie oben:

Dann wird die Iteration mit  $c_i = -1$ :

$$\mathfrak{x}^{(v+1)} = \mathfrak{x}^{(v)} - (\mathfrak{A} \mathfrak{x}^{(v)} - \mathfrak{r})$$

oder, wenn wieder die »Fehler«  $\mathfrak{z}^{(v)} = \mathfrak{x}^{(v)} - \mathfrak{x}$  eingeführt werden:

$$a_{i}^{(v+1)} = a_{i}^{(v)} - a_{i} a_{i}^{(v)} = (a_{i}^{v} - a_{i}^{v}) a_{i}^{(v)} = a_{i}^{v} a_{i}^{(v)} . . . . . . (17),$$

wobei & die Einheitsmatrix und

<sup>1)</sup> Vergl. dazu Riemann-Weber, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. 7. Aufl., Bd. 1, Braunschweig 1925, S. 482.

Es kommt also sukzessive:

$$\hat{\delta}^{(2)} = \Re \delta^{(1)}, \qquad \hat{\delta}^{(8)} = \Re \delta^{(2)} = \Re \delta^{(1)}, \dots$$

wobei die Elemente von R2, R3, ... nach der Multiplikationsregel für Matrizen:

$$k_{ix}^{(2)} = \sum_{\rho} k_{i\rho} k_{\rho x}, \qquad k_{ix}^{(3)} = \sum_{\rho} k_{i\rho}^{(2)} k_{\rho x}, \ldots$$

Zu zeigen ist, daß  $|k_{i,i}^{(v)}|$  mit wachsendem v gegen Null geht. gebildet werden.

Auf die Gleichung

$$k_{ix}^{(\nu)} = \sum_{\rho} k_{i\rho}^{(\nu-1)} k_{\rho x} = \sum_{\rho} k_{i\rho} k_{\rho x}^{(\nu-1)}$$
 . . . . . . . (19)

wendet man die Schwarzsche Ungleichung an: 
$$[k_{ix}^{(v)}]^{s} < \sum_{\rho} [k_{i\rho}^{(v-1)}]^{s} \cdot \sum_{\rho} k_{\rho x}^{2} \dots \dots \dots \dots \dots (20) .$$

Analog ist:

$$\begin{split} \boldsymbol{k}_{ix}^{(v+2)} &= \sum\limits_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{k}_{i\,\boldsymbol{\rho}}^{(v+1)} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,x} = \sum\limits_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,x} \, \sum\limits_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{k}_{i\,\lambda}^{(v)} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{\rho}} = \sum\limits_{\boldsymbol{\rho},\,\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,x} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,\lambda} \, \boldsymbol{k}_{i\,\lambda}^{(v)} \\ &= \sum\limits_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{k}_{i\,\boldsymbol{\rho}} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,x}^{(v+1)} = \sum\limits_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{k}_{i\,\boldsymbol{\rho}} \, \sum\limits_{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\lambda}\,x} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,\lambda}^{(v)} = \sum\limits_{\boldsymbol{\rho},\,\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{k}_{i\,\boldsymbol{\rho}} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\lambda}\,x} \, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{\rho}\,\lambda}^{(v)}. \end{split}$$

Und hier ergibt die nochmalige Anwendung derselben Ungleichung:

$$[k_{i_{x}}^{(v+2)}]^{2} < \sum_{\rho,\lambda} [k_{i\rho} k_{\lambda_{x}}]^{2} \cdot \sum_{\rho,\lambda} [k_{\rho\lambda}^{(v)}]^{2} < C_{1} C^{v} . . . . . . . . (22)$$

Man sieht, daß die Iteration die Größen  $k_{ix}^{(v+2)}$ , also den Vektor des Fehlers gegen Null führt, falls die hier eingeführte Größe C kleiner als Eins ist, d. h. falls

$$\sum_{i,x} k_{i,x}^2 < 1.$$

Das ergibt für die Koeffizienten  $a_{ix}$  eines beliebigen linearen Gleichungssystems die obige Bedingung (16). - Diese Bedingung überschneidet sich mit der in Satz 3 ausgesprochenen. Es ist z. B. für die Koeffizientenmatrix

$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & {}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{3} \\ {}^{1}/_{2} & 1 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{3} & 1 \end{array}\right\}$$

die Konvergenz der Iteration zufolge der Schmidtschen Bedingung gesichert, während Satz 3 nicht anwendbar ist. Für die Koeffizientenmatrix  $\begin{cases} 1 & 3/4 \\ 3/4 & 1 \end{cases}$  gilt hingegen das Umgekehrte. Der jetzt gewonnene Satz lautet:

Satz 4. Die Iteration in Gesamtschritten mit  $c_i = -1/a_{ii}$  nach Gl. (7) (bzw. mit  $c_i = -1$  im »durchdividierten« System) konvergiert auch, wenn für die Koeffizienten  $a_{i\, exttt{x}}$  des gegebenen Gleichungssystems (1) die Bedingung

$$\sum_{i,\,k} \frac{a_{i\,k}^2}{a_{i\,i}^2} < 1$$

erfüllt ist, wobei die Summe nur über die Kombinationen  $i \mp k$  zu erstrecken ist.

Erwähnt sei schließlich der theoretisch interessante Fall, daß alle Beiwerte  $c_i$  von Anfang an einander gleich angenommen, also der Ansatz

$$\begin{aligned}
x_1^{(v+1)} &= (1 + c \, a_{1\,1}) \, x_1^{(v)} + \ldots + c \, a_{1\,n} \, x_n^{(v)} - c \, r_1 \\
\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\
x_n^{(v+1)} &= c \, a_{n\,1} \, x_1^{(v)} + \ldots \cdot (1 + c \, a_{n\,n}) \, x_n^{(v)} - c \, r_n
\end{aligned} \right\}. \quad (29)$$

gemacht wird; in Vektorform, wenn wieder die »Fehler« 3(v) eingeführt werden,

$$\mathfrak{x}^{(v+1)} = \mathfrak{x}^{(v)} + c \, (\mathfrak{A} \, \mathfrak{x}^{(v)} - \mathfrak{r}) = (\mathfrak{E} + c \, \mathfrak{A}) \, \mathfrak{x}^{(v)} - c \, \mathfrak{r}; \quad \mathfrak{E} + c \, \mathfrak{A} = \mathfrak{K}; \quad \mathfrak{z}^{(v+1)} = \mathfrak{K} \, \mathfrak{z}^{(v)} \quad (29').$$

Die Transformation, die aus dem Vektor g(v) den neuen Vektor g(v+1) — aus dem Fehler  $i^{(v)}$  den neuen Fehler  $i^{(v+1)}$  — ableitet, wird dann und nur dann den Fehler-Vektor in den Nullpunkt führen, wenn die Eigenwerte der Matrix  $\Re = \mathbb{E} + c \, \mathfrak{A}$ , das sind die Wurzeln  $\lambda'$  der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1+c a_{11}-\lambda' & c a_{12} & \dots & c a_{1n} \\ c a_{21} & 1+c a_{22}-\lambda' & \dots & c a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c a_{n1} & c a_{n2} & \dots & 1+c a_{nn}-\lambda' \end{vmatrix} = 0 \qquad (30)$$

sämtlich Beträge kleiner als Eins haben. Schreibt man, was wegen  $c \neq 0$  immer möglich ist,

$$1 + c a_{ii} - \lambda' = c \left[ a_{ii} - \left( \frac{\lambda'}{c} - \frac{1}{c} \right) \right] = c (a_{ii} - \lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda' = \lambda c + 1 ,$$

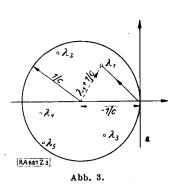
so sight man, daß  $|\lambda'| < 1$  dasselbe bedeutet wie  $|\lambda c + 1| < 1$  oder

$$\left|\lambda + \frac{1}{c}\right| < \frac{1}{c}$$
 . . . . . . . . . . . (31).

Das heißt aber: die Eigenwerte  $\lambda$  der ursprünglichen Matrix  $\mathfrak{A}$ , also die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \dots (32)$$

müssen mit dem Beiwert c in der durch (31) gegebenen Beziehung stehen. Liegen alle Wurzeln von (32) auf der linken oder alle auf der rechten Seite der imaginären Achse und wählt man c dem Zeichen nach positiv in jenem, negativ in diesem Falle und |1/c|



gleich dem Radius eines Kreises, der alle Eigenwerte in seinem Innern enthält und die imaginäre Achse im Nullpunkt berührt, so ist (31) stets erfüllt (vergl. Abb. 3; diese ist für den Fall gezeichnet, daß alle  $\lambda$  negativen Realteil haben und c daher positiv gewählt ist). Da 1/c mit  $\varrho$  wachsen muß, so sieht man, daß die Konvergenz des Verfahrens langsamer wird, je größer jener kleinste Kreis ist. Wir haben den:

Satz 5. Das Iterationsverfahren (29) mit untereinander gleichen Beiwerten c konvergiert immer, falls alle Eigenwerte der Matrix des Systems auf ein- und derselben Seite der imaginären Achse liegen, sofern man c so wählt, daß — 1/c die (reelle) Mittelpunktsabszisse eines Kreises ist, der die imaginäre Achse im Null-

punkt berührt und alle Eigenwerte einschließt.

Ist z. B. die Matrix der  $\alpha_{ix}$  positiv — oder negativ — definit, so ist die genannte Bedingung immer erfüllt, d. h. ein passendes c ist auffindbar. Ob es freilich praktisch möglich ist, dies c auch numerisch festzustellen, ist eine Frage, die sich nicht allgemein bejahen läßt. In der Regel wird es sich in den Fällen, in denen weder Satz 2 noch Satz 4 anwendbar ist, empfehlen, die im folgenden Abschnitt zur Besprechung kommenden Verfahren zu benutzen.

3. Iteration in Einzelschritten. In einer wichtigen Klasse von Fällen läßt sich ein etwas anderes Iterationsversahren durchführen, das wir im Gegensatz zu der bisher betrachteten Iteration in »Gesamtschritten« als »Iteration in Einzelschritten« bezeichnen wollen. Zu einer einheitlichen Auffassung beider Arten von Iterationen gelangen wir, indem wir das Versahren (2) von 2 zunächst noch verallgemeinern. Wir wollen annehmen, daß die Iterationskoeffizienten  $c_i$  (wie dies in 1 für den Fall Einer Veränderlichen auch vorgesehen war) auch von dem Index  $\nu$  des Schrittes abhängen:

Setzt man hier  $c_i^{(1)}=c_i^{(2)}=\ldots=c_i^{(v)}$ , so hat man das frühere Verfahren der Iteration in »Gesamtschritten«. Wir machen nun einen anderen speziellen Ansatz: Beim ersten Schritt v=1 sollen alle  $c_i^{(1)}$  mit Ausnahme von  $c_1^{(1)}$  gleich Null sein, so daß nur

 $x_1^{(1)}$  geändert wird, beim zweiten Schritt seien alle  $c_i^{(2)}$   $(i \pm 2)$  gleich Null, beim dritten alle  $c_i^{(8)}$   $(i \pm 3)$  usf. Beim (n+1)-ten Schritt werde dann wieder für  $c_1^{(n+1)}$  der Wert von  $c_1^{(1)}$  genommen, und alle  $c_i^{(n+1)}$   $(i \pm 1)$  gleich Null usw. Es wird also der Wert von  $x_i$  nur beim i-ten, (n+i)-ten, (2n+i)-ten . . . Schritt verbessert. Zur Vereinfachung der Bezeichnung setzen wir:

und schreiben kurz  $x_i^{(v)}$  für die n mal auftretende Größe, die nach der ursprünglichen Bezeichnung die oberen Indices (v-1)n+i, (v-1)n+i+1, (v-1)n+i+2....vn+i-1 tragen müßte. Die Iteration wird dann vollständig durch das folgende Formelsystem beschrieben, das ohne Bezugnahme auf (1) für sich verständlich ist:

In gleicher Weise werden aus den  $x_i^{(2)}$  neue  $x_i^{(3)}$  abgeleitet, indem man die  $x_i^{(2)}$  rechts einsetzt, usf. Der Unterschied gegen die im vorigen Abschnitt angewendete Iteration ist der, daß bei Berechnung der  $(\nu+1)$ -ten Näherungen  $x_i^{(\nu+1)}$   $(i=1,\ldots n)$  jetzt nicht in allen n Gleichungen rechts die Werte  $x_i^{(\nu)}$  verwendet werden, sondern in der x-ten Gleichung rechts schon die unmittelbar vorher durch die vorangehenden (x-1)-Gleichungen bestimmten »neuesten« Werte, also  $x_1^{(\nu+1)}$ ,  $x_2^{(\nu+1)}$ , ...  $x_{\chi-1}^{(\nu+1)}$  zur Berechnung von  $x_{\chi}^{(\nu+1)}$  dienen.

Wir wollen zeigen, daß in einer praktisch sehr wichtigen Klasse von Fällen dieses Iterationsverfahren konvergiert, wenn man für die  $c_i = -\frac{1}{a_{ij}}$  setzt, wobei  $a_{ix}$ , wie immer, die Gleichungskoeffizienten sind 1). Bei dieser Festsetzung lautet der Iterationsansatz, da das erste rechts in (2) stehende Glied sich gegen ein späteres aufhebt:

Die Berechnung der Näherungswerte muß in der hier angegebenen Reihenfolge geschehen, d. h. die  $(\nu+1)$ -te Näherung der  $\varkappa$ -ten Unbekannten kann erst bestimmt werden, wenn die  $(\nu+1)$ -te Näherung für die  $1, 2, \ldots (\varkappa-1)$ -te Unbekannte schon berechnet wurde.

Diesen Ansatz kann man dahin deuten, daß die *i*-te Gleichung des gegebenen Systems nach der *i*-ten Unbekannten  $x_i$  aufgelöst wird, wobei man beim v-ten Schritt rechts für die ersten (i-1) Unbekannten die (v+1)-ten Werte  $x_1^{(v+1)}, x_2^{(v+1)}, \dots x_{i-1}^{(v+1)}$  und für die weiteren die v-ten Werte  $x_{i+1}^{(v)}, x_{i+2}^{(v)}, \dots x_n^{(v)}$  setzt. Die so erklärte Iteration konvergiert, wie wir zeigen wollen, immer dann, wenn die Gleichungskoeffizienten  $a_{ix}$  symmetrisch sind,  $a_{ix} = a_{xi}$  und wenn die quadratische Form  $2Q = \sum_{i,x} a_{ix} x_i x_x$  nur positiver Werte fähig ist, falls die Variablen beliebige, von Null verschiedene Werte, annehmen. Eine solche Form nennt man eine positiv de finite. Das Koeffizientenschema einer solchen Form hat, wie bekannt, eine positive Determinante (womit also die

Dieses Verfahren der »Iteration in Einzelschritten« hat Ph. L. Seidel Münch. Ak. Abb. 1874.
 Abb. S. 81 bis 108 angegeben.

eindeutige Lösbarkeit von (1) sichergestellt ist). Ferner sind sicher die in den Diagonalen stehenden Koeffizienten  $a_{ii}$  positiv. (Denn wäre etwa  $a_{11} < 0$ , so würde das Glied  $a_{11} x_1^2$ , das bei genügender Vergrößerung von  $x_1$  alle anderen überwiegt, den Wert von Q negativ machen; bei  $a_{11} = 0$  würde aber Q = 0 für  $x_2 = x_3 = \dots x_n = 0$  und beliebigen Wert von  $x_1$ .) Es soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 6. Sind die Koeffizienten  $a_{ix}$  des vorgelegten linearen Gleichungssystems symmetrisch, und ist die mit ihnen gebildete quadratische Form positiv definit, so führt die Iteration in Einzelschritten, bei der  $c_i = -\frac{1}{a_{ii}}$  gesetzt ist, bei der also jeweils nur die i-te Gleichung gemäß (3) zur Verbesserung der i-ten Unbekannten benutzt wird, stets zum Ziel.

Zum Beweise ) betrachten wir die Funktion zweiten Grades in  $x_1, \ldots x_n$ 

$$F(x_1, \ldots x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix} x_i x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = Q - \sum_{i=1}^{n} r_i x_i . . . . . (4).$$

Das Entscheidende ist, daß, wie man unmittelbar einsieht, die gegebenen linearen Gleichungen identisch sind mit

d. h. also, daß für ein System von x-Werten, das unsere Gleichungen befriedigt, F einen stationären Wert (Maximum, Minimum oder Sattelwert) annimmt. Es läßt sich weiter zeigen, daß dieser Wert ein Minimum sein muß. Denn erteilt man den Beträgen der  $x_i$  (oder auch nur einem von ihnen) hinreichend große Werte, so überwiegt der quadratische Bestandteil Q von F über den linearen und jener ist, da nach Voraussetzung die quadratische Form positiv definit ist, für alle von Null verschiedenen  $x_i$  positiv und mit wachsenden  $x_i$  proportional den Quadraten der  $x_i$  wachsend. Daher wächst die Funktion F außerhalb eines bestimmten Bereiches B mit zunehmenden Beträgen der  $x_i$  immer mehr an; eine Stelle stationären Wertes kann also nur im Innern von B liegen. Als stetige, in B beschränkte Funktion muß F einen Kleinstwert besitzen, der gewiß nicht am Rand liegt, und da unsere linearen Gleichungen nur ein Lösungssystem haben, so muß die Lösung unseres Systems die Stelle dieses Minimums liefern.

Es ist somit gezeigt, daß die Funktion F unter der Voraussetzung, daß ihr quadratischer Bestandteil Q keine negativen Werte annehmen kann, gewiß ein Minimum, und nur eines, besitzt. Wie der Gedankengang des Beweises zeigt, ist die Existenz eines Minimums erst recht sichergestellt, wenn F selbst für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen (außer  $x_i = 0$ ) stets positiv ist. Diese Bemerkung wird im folgenden Abschnitt herangezogen werden. (Im übrigen läßt sich leicht einsehen, daß, falls F die genannte Eigenschaft positiv definit zu sein, besitzt, auch Q sie haben muß.)

Die Lösung der Gleichungen (5) ist jedenfalls gleichbedeutend mit der Aufsuchung der Minimumstelle von F. Die Konvergenz unserer Iteration (3) ist insofern eine monotone, als sich zeigen läßt, daß jeder gemäß (3) vorgenommene Schritt den Wert von F verkleinert.

Es seien für die Unbekannten  $x_1, \ldots x_{i-1}$  die  $(\nu+1)$ -ten, für  $x_{i+1}, \ldots x_n$  die  $\nu$ -ten Näherungen bekannt, und es erfolge jetzt der Schritt, der  $x_i^{(\nu)}$  durch  $x_i^{(\nu+1)}$  ersetzt. Der neue Wert, den F annimmt, unterscheidet sich dann von dem alten nur in den Gliedern, die  $x_i$  enthalten. Der Zuwachs ist zufolge (4):

Nun ist nach (3) für den Ausdruck in der geschweiften Klammer gerade  $-a_{ii} x_i^{(v+1)}$  zu setzen; also wird

$$JF = (x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}) \cdot \left[ \frac{1}{2} a_{ii} (x_i^{(v+1)} + x_i^{(v)}) - a_{ii} x_i^{(v+1)} \right] = -\frac{1}{2} a_{ii} [x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}]^2 < 0 \quad (6),$$

da  $a_{ii}$ , wie früher bewiesen wurde, positiv ist. Bei jedem Schritt der Iteration (3) wird also der durch (4) gegebene Ausdruck F verkleinert. Da F ein endliches Minimum

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>) Einen mit dem folgenden übereinstimmenden Beweis hat Hr. E. Trefftz vor einiger Zeit der Redaktion eingesandt; seine Veröffentlichung unterblieb nur mit Rücksicht auf den in Vorbereitung befindlichen Bericht.

besitzt, kann die Verkleinerung nicht unbeschränkt weiter laufen, d. b. es muß  $\Delta F$  gegen 0 gehen. Nach (6) folgt daraus, daß der Betrag  $|x_i^{(v+1)} - x_i^{(v)}|$  für jedes i gegen 0 gehen muß, daß also das Verfahren konvergiert.

Als Beispiel betrachten wir ein System von sechs inhomogenen Gleichungen, (welche aus einem Minimumproblem — mit dem Näherungsgrade n=6 — hervorgegangen sind 1), deren Matrix daher gewiß positiv definiert ist:

```
188 u +
  651.8 x - 239.3 y + 94.6 z -
                                         148 v +
                                                    58 w = 431,5
                                                    186 w = 188,5,
                               226 u —
-119,6x + 8867y -
                      961 z -
                                         515 v +
                                                    592 w = 82,7,
   94,6x - 1922y + 24390z +
                               474 u - 4820 v +
                                                  2015 w = 120,0,
 -93.9 x - 226 y +
                      237 z + 48100 u - 2370 v -
   74.2 x - 515 y - 2410 z - 2370 u + 78600 v -
                                                  6420 w = 52,5,
                      592 z - 4030 u - 12840 v + 158500 w = 33.5.
            372y +
```

Aus diesem System entsteht ein symmetrisches, wenn x/2, z/2, w/2 an Stelle von x, z, w als Unbekannte betrachtet werden.

Bei der Auflösung nach unserm Iterationsverfahren setzen wir zunächst für die ersten Näherungswerte  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$ ,  $z^{(1)}$  der ersten drei Unbekannten Werle, die wir durch Ansetzen des gleichen Minimumproblems mit dem Näherungsgrad n=3 erhalten haben. Diesem entspricht ein System von drei Gleichungen mit den Unbekannten x, y, z, dessen Koeffizientenmatrix in der linken obern Ecke der sechsreihigen Matrix steht und dessen rechte Seiten mit den ersten drei Zahlen der obigen rechten Seite des sechsgliedrigen Systems übereinstimmen. Für dieses dreigliedrige System ergibt sich zunächst die folgende Tabelle:

	æ	<u> </u>	z
r = 1	481,5	188,5	82,7
	651,8	8867	24890
2	0,6698	0,0807	0,0086
3	0,6717	0,0807	0,0088
4	0,6728	0,0307	0,0088

Die letztgefundenen Werte setzt man als erste Näherungen der ersten drei Unbekannten in das sechsgliedrige System und erhält in Verfolgung der Iteration:

	x	у	z	и	v	w
1	0,6728	0,0807	0,0083	0,0025	0,0007	0,0000
2	0,6784	0,0808	0,0088	0,0040	0,0005	0,0000
3	0,6789	0,0808	0,0032	0,0040	0,0005	0,0000
4	0,6739	0,0308	0,0032	0,0040	0,0005	0,0000
				• • • • • •		

Die geometrische Bedeutung des angegebenen Verfahrens ist folgende: Im (n+1)dimensionalen Raum, in dem F als Funktion von  $x_1$  bis  $x_n$  ein »Paraboloid« bildet, geht
man beim ersten Schritt, der  $x_1$  vermöge der ersten Gleichung verbessert, auf dem Paraboloid, innerhalb der zweidimensionalen Hyperebene, die durch die (n-1) Gleichungen  $x_2 = \text{konst.}, \dots x_n = \text{konst.}$  bestimmt wird, bis zu dem am tiefsten gelegenen Punkt.
Denn die erste Gleichung besagt ja, daß F bei Festhaltung von  $x_2$  bis  $x_n$  zu einem
Minimum gemacht wird. Das  $x_1$  des gefundenen Punktes gibt den verbesserten Wert der
ersten Unbekannten. Sodann geht man, indem man nur  $x_2$  verändert, in einer zweidimensionalen Ebene, die den eben gefundenen Punkt enthält, in gleicher Weise weiter, usf.

Es liegt nahe, gelegentlich auch so vorzugehen, daß man statt zweidimensionaler mehrdimensionale Hyperebenen wählt, die durch Konstantsetzen von weniger als (n-1) Koordinaten festgelegt werden. Dabei wird man jedenfalls auch immer zu tiefer liegenden Punkten des Paraboloids gelangen, wenn man die freien Koordinaten so wählt, daß sie den ihnen zugeordneten Gleichungen genügen. Das Verfahren gestaltet sich dann folgendermaßen: Man wählt z. B. für die dritte bis  $n^{te}$  Unbekannte Werte  $x_*^{(1)}$ .  $x_*^{(1)}$ . . . .  $x_n^{(1)}$  und bestimmt, indem man die erste und zweite Gleichung simultan nach der ersten

<sup>1)</sup> Der Ansatz ist einer Arbeit von W. Ritz, Crelles Journal 185 (1909), S. 1 bis 61 entnommen.

und zweiten Koordinate auflöst, die Werte  $x_1^{(2)}$ ,  $x_2^{(2)}$ , dann nimmt man z. B. zu  $x_1^{(2)}$ ,  $x_2^{(2)}$  die früheren Werte der sechsten bis n ten Unbekannten  $x_6^{(1)}$ , ...  $x_n^{(1)}$  hinzu und bestimmt, indem man diese (n-3) Größen in die 3., 4. und 5. Gleichung einträgt, aus diesen drei Gleichungen Werte  $x_2^{(2)}$ ,  $x_4^{(2)}$ ,  $x_5^{(2)}$  der dritten bis fünften Variablen, usf. Dieses Verfahren, das sich schon einigermaßen von dem ursprünglichen Gedanken der Iteration entfernt, nennen wir »Iteration in Gruppen« und formulieren:

Satz 7. Ein lineares Gleichungssystem mit positiv definitem Koeffizientenschema kann durch »Iteration in Gruppen« gelöst werden, indem man zur Verbesserung der Unbekannten  $x_{\alpha}$ ,  $x_{\beta}$ ,  $x_{\gamma}$ ... die Gleichungen mit den Nummern  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,... als simultanes Gleichungssystem verwendet und mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... in zyklischer Folge sämtliche Gleichungsnummern durchläuft.

Dieses Verfahren wird praktisch nur dann anzuwenden sein, wenn irgendwelche Gruppen von zwei, drei, vier Gleichungen durch die arithmetische Konstitution des Systems oder durch sachliche Zusammengehörigkeit als besonders geeignet für simultane Lösung erscheinen.

Die Bedeutung der Sätze 6 und 7 liegt darin, daß ein großer Teil der praktisch vorkommenden Gleichungssysteme, namentlich die der Statik, die hier vorausgesetzte Eigenschaft besitzt. Es läßt sich aber außerdem noch zeigen, daß man jedes überhaupt lösbare lineare Gleichungssystem so umformen kann, daß seine Koeffizienten den Bedingungen der Sätze genügen!). Man erhält nämlich ein dem gegebenen System äquivalentes, indem man eine aus der Ausgleichsrechnung bekannte einfache Umformung durchführt, die sich aber ohne jedes fremde Element durch folgende Vorschrift erklären läßt: Man multipliziere die erste der gegebenen n Gleichungen mit  $a_{11}$ , die zweite mit  $a_{21}, \ldots$  die letzte mit  $a_{n1}$  und addiere die so multiplizierten n Gleichungen. Das Resultat ist eine erste neue — natürlich von den gegebenen Gleichungen abhängige — Gleichung. Eine zweite neue Gleichung erhält man, indem man die x-te der ursprünglichen Gleichungen mit  $a_{n2}$ , ( $x = 1, \ldots n$ ) multipliziert, und dann diese n Gleichungen addiert, usf. So erhält man n neue Gleichungen, die voneinander linear unabhängig sind, wenn die ursprünglichen Gleichungen dies waren. Als Koeffizienten dieser neuen Gleichungen treten dabei die von Gauß in seiner Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate eingeführten Summen auf, die auch als Gaußsche Klammerausdrücke bezeichnet werden:

$$[1 \ 1] = \sum_{x=1}^{n} a_{x1}^{2}, \quad [1 \ 2] = [2 \ 1] = \sum_{x=1}^{n} a_{x1} a_{x2}, \ldots$$

allgemein:

$$[ij] = \sum_{x=1}^{n} a_{xi} a_{xj} \text{ und } [i;r] = \sum_{x=1}^{n} a_{xi} r_{x} \qquad (i,j=1,2,\ldots n) \quad . \quad . \quad (7).$$

Mit Hilfe der Rechenmaschine lassen sich die Ausdrücke, die nur aus Summen von Produkten bestehen, unschwer bilden. Allerdings sind  $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$  solcher Klammern zu rechnen. Die neuen, den gegebenen äquivalenten Gleichungen lauten:

Aus (7) sieht man, daß die Koeffizienten von (8) symmetrisch sind. Daß sie auch positiv definit sind, erkennt man durch folgende Ueberlegung: Die quadratische Funktion, die als Summe von Quadraten nie negativ werden kann,

$$Q = \left(\sum_{x=1}^{n} a_{1x} x_{x}\right)^{2} + \left(\sum_{x=1}^{n} a_{3x} x_{x}\right)^{2} + \ldots + \left(\sum_{x \neq 1}^{n} a_{nx} x_{x}\right)^{2} \ldots \qquad (9)$$

ist nichts anderes als die zu (8) gehörige quadratische Form. Denn es ist z. B. der Koeffizient von  $x_1^2$  in (9) gleich  $a_{11}^2 + a_{21}^2 + \ldots + a_{n1}^2$  — je ein Glied kommt aus je einer der n Klammern in (9) —, und das ist [11]; der Koeffizient von  $x_1x_2$  wird ebenso gleich 2 [12] usf. Somit gilt der allgemeine Satz:

<sup>1)</sup> Auch dieser Gedanke findet sich bereits in der zitierten Abhandlung von Ph. L. Seidel.

Satz 8. Sobald für ein Gleichungssystem die Bedingungen der Sätze 6 und 7 nicht erfüllt sind, kann man es stets durch ein äquivalentes System ersetzen, für das diese Bedingungen zutreffen, indem man aus den Koeffizienten des ursprünglichen Systems die Gaußschen Klammerausdrücke (7) bildet, und mit ihnen das System (8) ansetzt.

4. Anwendung in der Statik. Ein besonders geeignetes Anwendungsgebiet für das Verfahren der Iteration in Einzelschritten bildet die Berechnung statisch unbestimmter Systeme!). Man kann die bei der Berechnung eines Systems mit n statisch Ueberzähligen auftretenden n linearen Gleichungen stets durch Iteration in Einzelschritten lösen, und zwar ohne besondere Transformation des Gleichungsausatzes; es lassen sich unmittelbar die sog. Maxwellschen Gleichungen verwenden. Darüber hinaus leistet unser Verfahren bei geeigneter Wahl der n Ueberzähligen noch folgendes: Es läßt sich die ganze Lösung auf die sukzessive Berechnung von Aufgaben mit nur je einer

beliebige Gleichung, die zur Berechnung der jeweils einzigen Ueberzähligen dient, benutzen darf.

Wir erklären — unter kurzer Wiederholung von dem Statiker geläufigen Ueberlegungen — den Gedankengang zunächst an einem statisch unbestimmten ebenen Fachwerk von gewöhnlicher Lagerung (Abb. 4). Das Fachwerk habe k Knoten und s=2k-3+n Stäbe. Die drei Auflager-Unbekannten denken wir uns in üblicher Weise durch drei Stäbe ersetzt und fassen sodann in bekannter Art passend gewählte Stäbe (einschließlich der Auflagerstäbe) zu einem statisch bestimmten Hanntsystem zusammen. Die führigen

statisch Unbestimmten zurückführen, wobei man jedesmal eine

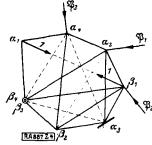


Abb. 4

statisch bestimmten Hauptsystem zusammen. Die übrigen Stäbe bezeichnet man als »Ueberzählige«. Für das statisch bestimmte System löst man das Spannungsproblem unter Annahme folgender Belastungen:

- 1. Wir belasten das Hauptsystem bloß mit den gegebenen Kräften  $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_k$ ; diese erzeugen in den beibehaltenen Stäben die Spannungen:  $S_1^{(0)}, S_2^{(0)}, \ldots S_{2k}^{(0)}$ .
- 2. Wir belasten das Hauptsystem zunächst durch zwei Kräfte von der Größe 1 (Abb. 4), angreifend in den Enden des ersten überzähligen Stabes, wirkend von dem einen Knoten auf den anderen zu. Nennen wir diese beiden Enden  $\alpha$  und  $\beta$  und ist  $e_{\alpha\beta}$  der Einheitsvektor, der von  $\alpha$  nach  $\beta$  weist, so wirken auf das Hauptsystem ausschließlich die beiden Kräfte  $\mathfrak{D}_{\alpha} = e_{\alpha} \beta$ ,  $\mathfrak{D}_{\beta} = e_{\beta} \alpha$ . Sodann, gans analog, belasten wir das Hauptsystem durch zwei Kräfte von der Größe Eins in den Enden des zweiten, dritten, . . .  $n^{\text{ten}}$  überzähligen Stabes. Die bei diesen n Belastungen sich ergebenden Spannungen in den Stäben des Hauptsystems mögen  $S_1^{(i)}$ ,  $S_2^{(i)}$ , . . .  $S_{2k}^{(i)}$   $(i=1\ldots n)$  heißen.

Besitzt bei der richtigen Auflösung des vollständigen n-fach unbestimmten Systems der  $i^{\text{te}}$  überzählige - Stab die Zugspannung  $X_i\,(i=1,\ldots n)$ , so gilt zufolge des Superpositionsgesetzes für die richtigen Spannungen  $S_x$  in den 2 k Stäben des Hauptsystems:

$$S_x = S_x^{(0)} + S_x^{(1)} X_1 + \ldots + S_x^{(n)} X_n$$
  $(x = 1, 2, \ldots 2 k)$ 

und in den n überzähligen Stäben, denen wir die Nummern  $2k+1, 2k+2, \ldots 2k+n$  geben wollen,

$$S_{2k+1} = X_1, \ldots S_{2k+n} = X_n$$

Wir wollen diese 2k+n Gleichungen susammenfassen, indem wir formal Spannungsgrößen  $S_{2k+j}^{(0)},\,S_{2k+j}^{(1)},\,\ldots\,S_{2k+j}^{(n)}\,(j=1\ldots n)$  auch für die n überzähligen Stäbe einführen, und zwar durch die Festsetzung

$$S_{2k+j}^{(0)} = 0; \quad S_{2k+j}^{(j)} = 1; \quad S_{2k+j}^{(i)} = 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, \dots, n) \quad . \quad . \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Es wurde gelegentlich versucht, die Gleichungssysteme der Statik durch Iteration zu lösen. So von A. Hertwig »Die Lösung linearer Gleichungen durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme«. Festschrift für H. Müller-Breslau, Leipzig 1912, S. 37-61. Das hier angegebene Verfahren ist eine Iteration in Gesamtschritten, wie sie in Abschnitt 2 behandelt wurde, und konvergiert für die Gleichungen der Statik im allgemeinen nicht. Auch das von C. Biezeno (vergl. S. 76) angewendete Iterationsverfahren ist eine spezielle Iteration in Gesamtschritten und konvergiert nur unter besonderen Voraussetzungen.

Dann gilt für die richtigen Spannungen in sämtlichen 2k+n Stäben:

$$S_x = S_x^{(0)} + S_x^{(1)} X_1 + \ldots + S_x^{(n)} X_n \qquad (x = 1, 2, \ldots, 2k + n) \quad . \quad (2).$$

In diesen 2k+n Gleichungen sind die n Größen  $X_i$  natürlich unbekannt. Zu ihrer Bestimmung dienen die Maxwellschen Gleichungen, die man aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gewinnt:

Wir denken den Knoten 1 bis k irgendwelche virtuelle, d.h. mit den Auflagerbedingungen verträgliche Verrückungen  $b_1, \ldots b_k$  erteilt. Dabei erfahren die Stäbe des vollständigen Systems die Längenänderungen  $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots \Delta l_{2k+n}$ . Für irgend ein Gleichgewichtssystem von Kräften  $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_k$  und zugehörigen Spannungen  $S_1, \ldots S_{2k+n}$  gilt dann:

Um daraus die Maxwellschen Gleichungen zu erhalten, betrachtet man zunächst im vollständigen Fachwerk als Gleichgewichtssystem von Spannungen ein Selbstspannungssystem, bestehend aus den oben eingeführten, für alle  $n=1,\ldots 2k+n$  erklärten  $S_{n}(1)$ , also  $S_{n}(1)$ , ...  $S_{n}(1)$  in den Stäben des Hauptsystems,  $S_{n+1}^{(1)}=1$  im ersten überzähligen Stab und  $S_{n+1}^{(1)}=1$ .

Daß diese Spannungen für das vollständige Fachwerk ein Gleichgewichtssystem bilden, ergibt sich daraus, daß die Gleichungen, die für das statisch unbestimmte Hauptsystem die  $S_x^{(1)}$  für  $x=1,2,\ldots 2\,k$  geliefert haben, auch gelesen werden können als die Gleichgewichtsbedingungen sämtlicher  $S_x^{(1)}$  im vollständigen Fachwerk bei Abwesenheit äußerer Kräfte. Es sind also rechts in (3) die  $S_x^{(1)}$  — und analog auch  $S_x^{(2)}$ ,... $S_x^{(n)}$  — für die  $S_x$ , links für die  $\mathfrak{P}_x$  jedesmal Null einzusetzen, so daß

Für die virtuellen Verrückungen wählen wir in jedem dieser n Fälle die wirklichen Verrückungen, die das vollständige Fachwerk unter dem Einfluß der gegebenen Belastung erfährt. Die zugehörigen wirklichen Längenänderungen  $\Delta l_x$  sind gemäß dem elastizitätstheoretischen Ansatz gleich:

wobei E den Elastizitätsmodul, l die Länge, F den Querschnitt bezeichnet und der Index  $\times$  sich auf alle drei Größen bezieht. Setzt man  $S_x$  aus (1) ein, so liefert (3')

$$\begin{array}{lll}
& 2^{k+n} & \Sigma S_{x}^{(1)} \left( S_{x}^{(0)} + S_{x}^{(1)} X_{1} + \ldots + S_{x}^{(n)} X_{n} \right) \left( \frac{l}{E F} \right)_{x} = 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& 2^{k+n} & \Sigma S_{x}^{(n)} \left( S_{x}^{(0)} + S_{x}^{(1)} X_{1} + \ldots + S_{x}^{(n)} X_{n} \right) \left( \frac{l}{E F} \right)_{x} = 0
\end{array} \right)$$
(5)

Das sind n Gleichungen mit den Unbekannten  $X_1 
ldots X_n$ , die man die Maxwellschen Gleichungen des Fachwerks nennt und von denen wir jetzt zeigen wollen, daß sie die Bedingungen von Satz 6 erfüllen. Bildet man nämlich unter Berücksichtigung von (4) die Formanderungsarbeit des Fachwerkes:

so zeigt der letzte Ausdruck, daß A eine Summe positiver Zahlen ist, also nie negativ sein kann. Denkt man sich in (6) die  $X_i$  aus (2) eingesetzt, so wird A eine quadratische Funktion der  $X_i$  (welche genau der in 3 Gl. (4) eingeführten entspricht) und die Ableitungen  $\frac{\partial A}{\partial X_i}$  geben gerade die linken Seiten von (5), denn es ist nach (2)

$$\frac{\partial A}{\partial X_{1}} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{2k+n} 2 S_{x} \left(\frac{l}{EF}\right)_{x} \frac{\partial S_{x}}{\partial X_{1}} = \sum_{1}^{2k+n} S_{x} \left(\frac{l}{EF}\right)_{x} S_{x}^{(1)}$$

$$= \sum_{1}^{2k+n} S_{x}^{(1)} \left(S_{x}^{(0)} + X_{1} S_{x}^{(1)} + \dots + X_{n} S_{x}^{(n)}\right) \left(\frac{l}{EF}\right)_{x}$$

Da sogar die quadratische Funktion A für beliebige Werte, der Veränderlichen  $X_i$ nur positiver Werte fähig ist, so ist nach der Bemerkung S. 70 die Existenz eines und nur eines Minimums von A, auf die es bei Anwendung unseres Iterationsverfahrens ankommt, gewiß sichergestellt und die Iteration in Einzelschritten somit statthaft.

Was hier von ebenen Fachwerken gezeigt wurde, gilt gleicherweise für jedes statisch unbestimmte System. Immer läßt sich die Formänderungsarbeit als Funktion zweiten Grades in n »Ueberzähligen« ausdrücken und die Ableitungen dieser Funktion A, die als elastische Arbeit nur positive Werte annehmen kann, geben, gleich Null gesetzt, die Maxwellschen Gleichungen des Systems. Das Ergebnis der Untersuchung fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Satz 9. Bildet man für ein beliebiges statisch unbestimmtes System nach Wahl von n überzähligen statischen Größen  $X_1 \ldots X_n$  die Maxwellschen Gleichungen, die durch Differentiation der als Funktion der  $X_i$  aufgefaßten Formänderungsarbeit nach den  $X_i$  entstehen, so konvergiert die Iteration in Einzelschritten, bei der man jedesmal die ite Gleichung zur Verbesserung der iten Unbekannten benutzt.

Man kann einen, in bestimmter Richtung noch weitergehenden, besonders anschaulichen Satz gewinnen, wenn man den Begriff der »Ueberzähligen« etwas einschränkt. Man wähle als die n Ueberzähligen n »überzählige Verbindungen«, nämlich Stäbe, die zwei Punkte des Gebildes miteinander verbinden (eine Entfernung festlegen), Auflagerstäbe, die eine Verbindung zwischen einem Punkte des Systems und dem festen Boden herstellen, oder schließlich Eckverbindungen, die eine Ecke versteifen (einen Winkel fixieren). Ersetzt man die zwelte bis nte dieser überzähligen Verbindungen, jede einzeln durch entsprechende Kraftgrößen (nämlich einen Stab durch zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, eine Eckversteifung durch zwei entgegengesetzt gleiche Momente, usf.), und fügt diese Kraftgrößen  $X_2'$ ,  $X_3' \dots X_n'$  als eingeprägte Kräfte zu den gegebenen Kräften  $\mathfrak{P}_x$  hinzu, so hat man ein einfach statisch unbestimmtes System. Man berechnet für die Spannung in dem einen überzähligen Gliede einen Wert  $X_1$ ". Nun bildet man wieder ein einfach statisch unbestimmtes System, indem man die erste, dritte, vierte bis  $n^{\text{te}}$  der überzähligen Verbindungen fortläßt und durch die Kraftgrößen  $X_1$ ",  $X_2$ , ...  $X_n$  in der oben erklärten Weise ersetzt, und bestimmt für die einzige noch übrig gebliebene statische Unbestimmte den Wert  $X_2$ ". Mit  $X_1$ ",  $X_2$ ",  $X_4$ ',  $X_5$ ', ...  $X_n$ ' als gegebenen Kräften löst man wiederum ein einfach unbestimmtes System, erhält für die einzige Ueberzählige den Wert  $X_3$ " und fährt in dieser Weise fort, bis man die letzte der überzähligen Verbindungen als einzige beibehalten und hierfür die Spannungsgröße  $X_n$  ermittelt hat. Die Serie  $X_1$ ,  $X_2$ , ...  $X_n$  läßt man nun an Stelle der zu Anfang willkürlich angenommenen  $X_1$ ,  $X_2$ , ...  $X_n$  treten und rechnet in dieser Weise in infinitum fort. Dabei ergeben sich, wie wir sogleich werden, im limes die richtigen Werte sämtlicher Spannungen.

Wenn wir, um die Gedanken zu fixieren, uns wieder ein ebenes Fachwerk vorstellen, so lautet die (jetzt einzige) Maxwellsche Gleichung für das System mit einer Unbestimmten  $X_1$ "

$$\sum_{1}^{2k+1} T_{\mathbf{x}}^{(1)} \left( T_{\mathbf{x}}^{(0)} + T_{\mathbf{x}}^{(1)} X_{1}^{"} \right) \left( \frac{l}{E F} \right)_{\mathbf{x}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Dabei bezeichnen  $T_{\kappa}^{(0)}(\kappa=1, 2, \ldots 2k)$  die Spannungen in den Stäben des Hauptsystems unter dem Einfluß aller jetzt wirkenden eingeprägten Kräfte und  $T_{2\,k+1}^{(0)}=0$ . Die  $T_{x}^{(1)}$ sind die oben ausführlich erklärten Selbstspannungen in den (2k+1) Stäben. Vergleichen wir mit den Größen, die in der ersten Maxwellschen Gleichung des Systems (5) auftreten, so sehen wir, daß

$$S_{x}^{(1)} = T_{x}^{(1)} \qquad (x = 1, 2, ... 2 k + 1).$$

gilt. Denn die  $S_x^{(1)}$  sind für die genannten Indizes genau wie die  $T_x^{(1)}$  definiert: Für  $x = 2 k + 2, \ldots, 2 k + n$  verschwinden sowohl  $S_x^{(1)}$  wie  $T_x^{(1)}$ ; hingegen ist  $T_x^{(0)}$  das Spannungsergebnis in den  $2\,k$  Stäben des Hauptsystems zufolge der äußeren Kräfte  $\mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_k, X_2', \ldots X_n'$ , also nach dem Superpositionsgesetz:

$$T_{\mathbf{x}}^{(0)} = S_{\mathbf{x}}^{(0)} + X_{\mathbf{y}}' S_{\mathbf{x}}^{(2)} + \dots + X_{\mathbf{n}}' S_{\mathbf{x}}^{(n)}$$
  $(\mathbf{x} = 1, 2, \dots 2k)$  und  $T_{2k+1}^{(0)} = 0$ .

Auf der linken Seite von (7) steht somit:

$$\sum_{1}^{2k+1} S_{x}^{(1)} \left( S_{x}^{(0)} + X_{2}' S_{x}^{(2)} + \ldots + X_{n}' S_{x}^{(n)} + X_{1}'' S_{x}^{(1)} \right) \left( \frac{l}{E F} \right)_{x}$$

und das ist die linke Seite der ersten der Gleichungen (5), in der Gestalt, die sie erhält, wenn sie gemäß unserem in Satz 6 erklärten Iterationsverlahren zur Verbesserung der ersten Unbekannten  $X_1$  benutzt wird. Ganz Analoges gilt für die zweite Maxwellsche Gleichung und den zweiten Schritt des Verfahrens usf.

Das Gesagte kann in folgenden Satz zusammengefaßt werden:

Satz 10. Die Berechnung eines statisch unbestimmten Systems mit n überzähligen Verbindungen (Stäben, Eckversteifungen, Unterstützungen), läßt sich wie folgt auf die wiederholte Berechnung von einfach unbestimmten Systemen zurückführen: Man ersetze zunächst die zweite bis  $n^{\text{te}}$  der überzähligen Verbindungen durch entsprechende willkürlich gewählte Kraftgrößen (Kräfte, Momente, Auflager)  $X_2', \ldots X_n'$  und berechne die statisch unbestimmte Größe  $X_1''$ , die der einzigen beibehaltenen überzähligen Verbindung entspricht. Hierauf ersetze man die erste Verbindung durch die Kraftgröße  $X_1''$ , die dritte bis  $n^{\text{te}}$  durch  $X_2', \ldots X_n'$  und rechne die zweite jetzt allein beibehaltene Ueberzählige  $X_2''$ . In dieser Weise fährt man fort, bis man zur Berechnung eines  $X_n''$  aus bereits vorher berechneten  $X_1'', \ldots X_{n-1}'$  kommt, und beginnt sodann von Neuem, indem man  $X_2'', \ldots X_n''$  an Stelle der früher gewählten  $X_2', \ldots X_n'$  annimmt, daraus  $X_1'''$  bestimmt ust. Dieses Verfahren konvergiert immer.

Für die praktische Durchführung des Verfahrens ist von besonderer Wichtigkeit, daß man zur Lösung der sukzessive auftretenden einfach statisch unbestimmten Systeme nicht gerade die Maxwellsche Gleichung des betreffenden Systems heranziehen muß, sondern auch jede andere — unter Umständen einfachere — benutzen kann, da ja im Falle einer Unbestimmten jede derartige Gleichung der Maxwellschen gleichwertig sein muß.

Als Beispiel zu unserem Verfahren, bei dem auch diese letzte Bemerkung zur Anwendung gelangt, erwähnen wir kurz die von Herrn C. Biezeno¹) behandelte Aufgabe, einen elastisch gestützten, statisch unbestimmten Balken zu berechnen. Hr. Biezeno gibt zur Lösung dieser Aufgabe ein Iterationsverfahren an, das nur unter ganz bestimmten, praktisch kaum nachprüfbaren Bedingungen konvergiert, nämlich dann, wenn die Wurzeln einer charakteristischen Gleichung alle dem Betrage nach entweder kleiner oder größer als Eins sind; eine Bedingung der Art, wie wir sie bei Besprechung der »Iteration in Gesamtschritten« in Abschnitt 2, Satz 5 kennengelernt haben.

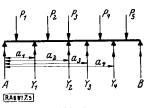


Abb. 5.

Dieses Problem läßt sich aber nach unserem Satz 9 ganz allgemein erledigen, indem man nacheinander einfach unbestimmte Systeme löst, und zwar ohne jedesmal die Maxwellsche Gleichung des Systems aufstellen zu müssen. Ist (Abb. 5) ein gerader Balken auf n+2 nachgiebigen Stützen gelagert, so wollen wir n Auflagerkräfte  $Y_{\nu}$  an den Abszissen  $x=a_{\nu}$  ( $\nu=1,\ldots n$ ) — beispielsweise die inneren — als Ueberzählige betrachten. Die Größe der Senkung (positiv nach unten gerichtet), die zufolge der Nachgiebigkeit der  $\nu^{\rm ten}$  Stütze durch eine in dieser Stütze aufwärts wirkende Auf-

lagerkraft von der Größe  $Y_{\nu}$  hervorgebracht wird, sei  $c_{\nu}$   $Y_{\nu}$ , wobei  $c_{\nu}$  als die Elastizitätskonstante (Nachgiebigkeit) der Unterstützung gegeben sein muß. Faßt man den Balken als einen statisch bestimmten, mit den Auflagern bei  $a_0 = 0$  und  $a_{n+1} = l$  auf, indem man zu den gegebenen Kräften  $\mathfrak{P}_{\nu}$  noch die aufwärts wirkenden  $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$  als Belastungen hinzunimmt, so läßt sich die Durchbiegung an der Stelle  $x = a_{\nu}$  als lineare homogene Funktion der k Lasten  $\mathfrak{P}_{\nu}$  und der n Auflagerkräfte  $Y_{\nu}$  darstellen. Sondern wir hierbei den Bestandteil, der von  $Y_{\nu}$  selbst herribrt, ab, so hat dieser den Wert  $-k_{\nu}Y_{\nu}$ , wenn  $k_{\nu}$  die Größe der Durchbiegung bezeichnet, die der an beiden Enden gestützte Balken unter dem Einfluß der an der Stelle  $x = a_{\nu}$  wirkenden Last von der Größe Eins an dieser Stelle erhält. Dieses  $k_{\nu}$  ist eine gegebene Funktion von  $a_{\nu}$ , beispielsweise, wenn die äußeren Auflager bei x = 0 und x = l fest sind y):

$$k_{\nu} = \frac{1}{E J} \frac{l^2}{3} \frac{a_{\nu}^2}{l^2} \frac{(l-a_{\nu})^2}{l^2}.$$

<sup>1)</sup> C. Biezeno, Diese Zeitschr. Bd. 4, 1924, S. 98-102.

<sup>2) &</sup>gt;Hutte«, Bd. I, 25. Aufl., S. 609.

Es gilt also, wenn der restliche Teil der Durchbiegung mit  $y_i$  bezeichnet wird:

$$c_{\mathsf{v}} \, \mathbf{Y}_{\mathsf{v}} = - \, \mathbf{k}_{\mathsf{v}} \, \mathbf{Y}_{\mathsf{v}} + y_{\mathsf{v}}$$

oder, wenn man 
$$\varrho_v = \frac{1}{c_v + k_v}$$
 setzt:

Dabei ist  $y_v$  die an der Stelle  $x = a_v$  auftretende Ordinate des Biegungspolygons, das für den statisch bestimmten Balken mit den sämtlichen  $\mathfrak{P}_x$ , sowie  $Y_1, Y_2, \ldots Y_{v-1}, Y_{v+1}, \ldots Y_n$  als Belastungen konstruiert wurde. Wäre  $Y_v$  die einzige statisch Ueberzählige, so wäre mit (8) das Problem gelöst. Man kann nun im Sinne von Satz 10 wie folgt vorgehen.

Wir wählen zunächst für die zweite bis n-te der überzähligen Auflagerkräfte willkürliche Größen  $Y_2'$ ,  $Y_3'$ , ...  $Y_n'$  und entwerfen mit diesen Kräften und den  $\mathfrak{P}_x$  für den statisch bestimmten Balken mit den Auflagern in x=0 und x=l das Biegungspolygon. Seine Ordinate bei  $x=a_1$  sei  $y_1'$ . Daraus rechnen wir nach (8)  $Y_1''=\varrho_1\ y_1'$  und konstruieren eine neue Biegungslinie des statisch bestimmten Balkens für die Kräfte  $\mathfrak{P}_1,\ldots\mathfrak{P}_x,Y_1'',Y_3',\ldots Y_n'$ . Aus der Ordinate  $y_2'$  dieser Biegungslinie an der Stelle  $x=a_2$  bestimmen wir  $Y_2''=\varrho_2\ y_2'$ , konstruieren dann die Durchbiegung für das Kräftesystem  $\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2,\ldots\mathfrak{P}_x,Y_1'',Y_2'',Y_3',\ldots Y_n'$  und fahren so fort. Nach Durchlaufung der n Stützen muß man natürlich von vorne anfangen und solange weitergehen, bis die Werte der  $Y_2$  sich nicht mehr merklich ändern. Bei größerem n wird man das wiederholte Aufzeichnen der Biegungspolygone durch einmalige Konstruktion der n Einflußlinien ersetzen. Jedenfalls erhalten wir auf diesem Wege sicher eine Lösung, die vielleicht gelegentlich in der Ausführung etwas umständlich sein mag, die aber einerseits gedanklich sehr einfach, andererseits an keinerlei einschränkende Konvergenzbedingung gebunden ist.

Schließlich bemerken wir, daß man gemäß Satz 7 über die Iteration in Gruppen, statt ein n-fach statisch unbestimmtes System auf die wiederholte Lösung von lauter einfach statisch unbestimmten Systemen zurückzuführen, auch die wiederholte Berechnung von zwei- oder dreifach . . . unbestimmten Systemen als Teilschritt verwenden kann. Auch in diesem Falle darf man beliebige Elastizitätsgleichungen verwenden und muß nicht gerade die Maxwellschen Gleichungen aufstellen, da es sich nur darum handelt, jeweils ein zweifach, dreifach, . . . . unbestimmtes System richtig zu lösen und alle Gleichungssysteme, welche das leisten, untereinander äquivalent sind.

(Fortsetzung folgt.)

15214001, 1929, 1, Dowloaded from https://oinclibrary.wile.co.m/doi/ 10.1022zmm.1929099105 by Duke University Libraries, Wiley Online Library on [06/07/2025]. See the Terms and Conditions (https://oinclibrary.wiley.com/terms-and-conditions) on Wiley Online Library for rules of use; OA article are governed by the applicable Centive Commons License

## KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber die allgemeine Form des Korrelationsmaßes. Bei der Ausdehnung des Korrelationsbegriffes auf ein System von mehr als zwei Variablen oder bei Zugrundelegung einer nicht linearen Funktionalbeziehung erhebt sich die Frage, wie man zu einer zweckmäßigen Verallgemeinerung des linearen Korrelationsmaßes zwischen zwei Variablen gelangen kann. Da sich der Fall nicht linearer auf den einer linearen Korrelation zwischen mehreren Variablen zurückführen läßt, wollen wir uns zunächst mit dem letzteren befassen.

Die bisherigen Untersuchungen gingen von den Regressionsgleichungen aus und gelangten zu einer Korrelation, die Pearson als »partielle« bezeichnet hat. Ihr Maß ist definiert als Produkt zweier Regressionskoeffizienten und in dieser Hinsicht allerdings eine Verallgemeinerung des für zwei Variable geltenden »totalen«. Diese partiellen Korrelationskoeffizienten sind gebrochene Funktionen der totalen, sie charakterisieren die Korrelation zwischen zwei Variablen mit Berücksichtigung der übrigen, geben jedoch keinen Außschluß über die Gesamtkorrelation des Systems. Doch ist es gerade die

letztere, welche darüber entscheidet, mit welcher Berechtigung man von einer lineaern Relation zwischen den Veränderlichen des Systems sprechen kann. Die partiellen Korrelationskoeffizienten können also nicht als geeignete Verallgemeinerung derjenigen angeschen werden, welche im speziellen Falle zwier Variabler auftreten. Um zu einer solchen Verallgemeinerung zu gelangen, müssen wir daher einen anderen Weg einschlagen.

Gegeben seien für die n Variablen  $x_1, x_2 \dots x_n$  empirische Wertreihen

$$x_i(1), x_i(2) \dots x_i(2)$$
  $(i = 1, 2 \dots n),$  wobei die zum gleichen oberen Index gehörigen x-Werte einander zugeordnet sind. Trifft man die Bestimmung, daß allgemein

$$\sum_{\zeta=1}^{z} x_i^{(\zeta)} = 0$$

ist, so kommt die lineare Abhängigkeit der n Größen  $x_i$  in der Form  $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$  zum Ausdruck und die  $\alpha_i$  berechnen sich aus einem durch die Delerminante