# Métodos Numéricos
# Taller 2: Modelo Media-Varianza

16 de octubre de 2015



| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---|---|---|
| Martin Baigorria | 575/14 | martinbaigorria@gmail.com |



**Reservado para la cátedra**

| Instancia | Docente | Nota |
|---|---|---|
| Primera entrega | | |
| Segunda entrega | | |

# Índice

# 1. Condiciones para garantizar que un sistema se puede resolver mediante Jacobi o Gauss-Seidel

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $A$ se puede escribir como $A = D - L - U$, donde $D$ es diagonal, $L$ es triangular inferior y $U$ es triangular superior. Sea $T$ la matriz de iteracion de cada metodo. Los siguientes teoremas garantizan que un sistema se pueda resolver mediante alguno de estos metodos:

**Theorem 1.1** *Jacobi y Gauss-Seidel convergen* $\Leftrightarrow$ *el radio espectral* $\rho(T) < 1$. *A su vez, como sabemos que* $\rho(T) \leq \|T\|$, *si* $\|T\| < 1 \implies \rho(T) < 1 \implies$ *Jacobi y Gauss-Seidel convergen.*

**Theorem 1.2** *Si A es e.d.d por columnas* $\implies$ *Jacobi y Gauss-Seidel convergen.*

# 2. Ejercicio 4

Probar que el metodo de Jacobi converge para sistemas de ecuaciones lineales de $2 \times 2$ cuya matriz es simetrica definida positiva.

Como $A$ es s.d.p la podemos expresar como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matriz de iteracion de Jacobi es $T = D^{-1}(L + U)$.

$$A = D - L - U = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Como $D$ es diagonal:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Por lo tanto la matriz de iteracion de Jacobi es:

$$T = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} \\ -a_{12}/a_{22} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Su respectivo polinomio caracteristico igualado a 0 es:

$$p(\lambda) = det(T - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & -a_{12}/a_{11} \\ -a_{12}/a_{22} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a_{12}^2/(a_{11}a_{22}) = 0 \tag{5}$$

Por lo tanto $\lambda^2 = a_{12}^2/(a_{11}a_{22})$

Por otro lado, dado que $A$ es s.d.p, sabemos que $A$ es inversible. Esto implica que $det(A) > 0$.

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \tag{6}$$

Despejando:

$$a_{12}/(a_{11}a_{22}) < 1 \tag{7}$$

Utilizando la ecuacion del polinomio caracteristico entonces podemos ver:

$$\lambda^2 = a_{12}^2/(a_{11}a_{22}) < 1 \tag{8}$$

Por lo tanto $\lambda^2 < 1$. Esto significa que $|\lambda| < 1 \implies \rho(T) < 1 \implies$ Jacobi converge.

Notar que en el procedimiento nosotros utilizamos que $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$. Esto se puede verificar facilmente usando que A es s.d.p y evaluando la definicion de s.d.p en los canonicos.

# 3. Ejercicio 5

## 3.1. a)

Si $\|R\| < 1$ para alguna norma subordinada $\implies x^{(k)}$ converge a una solucion del sistema $Ax = b$. $x^{k+1} = Rx^k + c$ donde $R = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$.

Haciendo 'unrolling' de la recursion:

$$x^{k+1} = R^k x^0 + (R^{k-1} + ... + R + I)c \tag{9}$$

Como por hipotesis $\|R\| < 1$, esto implica que R converge. Esto hace que el primer termino se vaya a 0 en el limite. A su vez, podemos utilizar el siguiente teorema:

**Theorem 3.1** *Sea $A$ de dimension $n \times n$. Si $\exists \|.\|$ inducida tal que $\|A\| < 1 \implies I - A$ es inversible y $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$*

Por lo tanto:

$\lim_{n\to\infty} x^{k+1} = (I - R)^{-1}c$

Como en el limite $x^{k+1} = x^k = x$, reemplazando en la funcion de iteracion $x = Rx + c$. Despejando $x = (I - R)^{-1}c$. Por lo tanto podemos ver que converge a la solucion del sistema.

## 3.2. b)

Como A es singular, $\exists x \neq 0$ tal que $Ax = 0 \implies (M - N)x = 0 \implies Mx = Nx$. Recordar que $M$ es no singular por enunciado.

Entonces:

$$M^{-1}Mx = M^{-1}Nx \tag{10}$$

$$M^{-1}Nx = 0 \tag{11}$$

Como $M^{-1}N = R$, 1 es autovalor de R. Por lo tanto por definicion $\rho(R) \geq 1$.