El lobo del pabellón 1

Métodos Numéricos

Departamento de Computación, FCEyN,Universidad de Buenos Aires.

9 de Octubre de 2015

El problema

- Encontrar la forma de invertir en un conjunto de acciones con el menor riesgo posible.

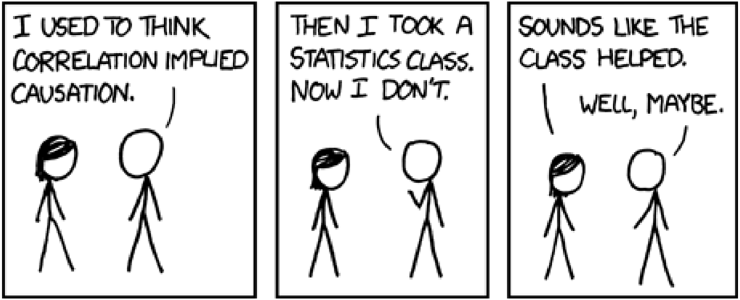
Algunos conceptos

- Assets: Algún tipo de recurso económico. En nuestro caso, acciones en la bolsa.
- Portfolio: Conjunto de Assets. En nuestro caso, un conjunto de inversiones en acciones.

Más conceptos

- Esperanza de un asset: Valor esperado de retorno de una acción.
- Varianza de un asset: Varianza del valor de retorno de una acción.
- Covarianza entre assets: Representa la correlación que hay entre los diferentes assets.

¿Como se consiguen estos valores?



Representaciones matriciales

Supongamos que tenemos 3 assets y sus valores de retorno siguen diferentes distribuciones de probabilidad.
Luego, si R_i es el retorno de la acción i y x_i es lo que se invirtió en el asset i, el retorno total es

$$R_p = x^t * R = x_1 * R_1 + x_2 * R_2 + x_3 * R_3 \tag{1}$$

Para representar el hecho de que en total queremos invertir una cierta cantidad de dinero, vamos a tener que cumplir la restricción

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{2}$$

Representaciones matriciales

La esperanza del portfolio es simple de calcular dada la linealidad de la esperanza:

$$\mu_p = x_1 * \mu_1 + x_2 * \mu_2 + x_3 * \mu_3 \tag{3}$$

Si tenemos que μ es el vector de esperanzas, entonces podemos reescribir como

$$\mu_p = x^t * \mu \tag{4}$$

Representaciones matriciales

La varianza, en cambio, termina siendo

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} \quad (5)$$

Si tenemos la matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Entonces podemos reescribir la varianza de un determinado portfolio

$$\sigma_p^2 = x^t\Sigma x \quad (7)$$

Optimización

- La optimización es la búsqueda de la mejor alternativa, respecto a un cierto objetivo, entre un conjunto de posibilidades
- Se utilizan variables en diferentes dominios para abstraer diferentes conceptos del problema real que intentamos resolver
- Se usan dichas variables para generar un modelo que represente al problema real

Un problema de optimización se puede escribir de forma general como:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Luego, se aplican técnicas muy diversas para conseguir la mejor solución (y a veces solo se busca una buena solución)

Programación Lineal

Un problema de optimización se dice que es un problema de Programación Lineal cuando todas las funciones involucradas son lineales

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^t x \\
\text{subject to} & a_i^t x \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m.
\end{array}
$$

Este problema está bien resuelto sin importar la instancia en particular

Programación Lineal Entera (Mixta)

- Los problemas de Programación Lineal Entera (Mixta) son los problemas de Programación Lineal donde las variables son todas (algunas) enteras.
- Permite modelar muchos más problemas (creemos) que la Programación Lineal.
- Ahora no solo modelamos cantidades, sino también decisiones
- Este problema, en general, no está bien resuelto

Formulando el problema

Definimos

$$x_i = cantidad\ invertida\ en\ la\ accion\ i \tag{8}$$

Entonces el problema lo escribimos como

$$\min_x \ x^t \Sigma x \tag{9}$$

$$s.t. \quad \mathbf{1}^t x = 1 \tag{10}$$

Resolución - Directa

¿Como se resuelve esta minimización?

- La función objetivo es convexa, porque Σ es simétrica definida positiva.
- La función de restricción es convexa, porque es un plano en $\mathbb{R}^3$.
- Entonces estamos ante la minimización de un problema convexo, hay métodos directos para resolver esto.

Resolución - Lagrange

¿Como se puede encontrar un extremo de una función restringida a igualdades?

Resolución - Lagrange

¿Como se puede encontrar un extremo de una función restringida a igualdades?
Planteamos la solución mediante Lagrange, nos queda la minimización de la siguiente función

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x^t \Sigma x + \lambda(\mathbf{1}^t x - 1) \tag{11}$$

Reescribiendo, nos queda

$$\begin{multline} x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 \\ + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23} \\ + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \end{multline} \tag{12}$$

Resolución - Lagrange

Ahora tenemos un problema sin restricciones, igualando el gradiente a cero queda

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1\sigma_1^2 + 2x_2\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{13} + \lambda = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2\sigma_2^2 + 2x_1\sigma_{12} + 2x_3\sigma_{23} + \lambda = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3\sigma_3^2 + 2x_1\sigma_{13} + 2x_2\sigma_{23} + \lambda = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \tag{16}$$

Resolución - Lagrange

Las ecuaciones del gradiente presentadas se pueden resumir en el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{12} & 2\sigma_{13} & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_2^2 & 2\sigma_{23} & 1 \\ 2\sigma_{13} & 2\sigma_{23} & 2\sigma_3^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reagrupando,

$$\begin{pmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una opción es resolver este sistema para obtener la solución

Resolución - Lagrange alternativa

Usando el método de Lagrange, podemos derivar la solución de una forma alternativa

Retomando las ecuaciones del gradiente y separando las variables de inversión del multiplicador, quedan:

$$2\Sigma x + \lambda \mathbf{1} = 0 \tag{17}$$

$$x^t \mathbf{1} - 1 = 0 \tag{18}$$

De la primera ecuación podemos despejar x

$$x = -\frac{1}{2}\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1} \tag{19}$$

Resolución - Lagrange alternativa

Multiplicando por un vector de unos y utilizando la segunda ecuación nos queda:

$$-\frac{1}{2}\lambda \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^t x = 1 \tag{20}$$

Despejamos λ

$$\lambda = -2 \frac{1}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \tag{21}$$

Luego, sustituyendo λ en la ecuación de x

$$x = -\frac{1}{2}(-2) \frac{1}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \tag{22}$$

Resolución - Lagrange alternativa

Definiendo

$$y = \Sigma^{-1}\mathbf{1} \tag{23}$$

Nos queda

$$x = \frac{y}{\mathbf{1}^t y} \tag{24}$$

Pasemos al enunciado