Métodos Numéricos
Taller 1: Image Denoising

7 de septiembre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Martin Baigorria	575/14	martinbaigorria@gmail.com
Federico Beuter	827/13	federicobeuter@gmail.com
Mauro Cherubini	835/13	cheru.mf@gmail.com
Rodrigo Kapobel	695/12	rok_35@live.com.ar

Reservado para la cátedra

Instancia	Docente	Nota
Primera entrega		
Segunda entrega		

Índice

1. Condiciones para garantizar que una matriz tiene factorización LU

1.0.1. Factorización LU

Dada una matriz A cuadrada de dimension $n \times n$, la factorización LU busca expresar la matriz A como producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U. Es decir, buscamos L y U tal que $A = LU$.

1.0.2. Matriz Simétrica Definida Positiva

Definición Una matriz A de dimension $n \times n$ se dice simétrica definida positiva (sdp) si es simétrica y a su vez definida positiva.

Definición Una matriz se dice simétrica cuando $A = A^t$.

Definición Una matriz se dice definida positiva cuando $\forall x \in \mathbb{R}^{n,1}$, $x^t Ax > 0$.

1.0.3. Condiciones para garantizar que una matriz tiene factorización LU

Las siguientes condiciones garantizan que una matriz A tenga factorización LU.

Proposición 1.1 *Una matriz estrictamente diagonal dominante es no singular. A su vez, se puede probar que se puede realizar la eliminación gausiana sin pivoteo. Por construcción, por lo tanto también se puede realizar la factorización LU.*

Proposición 1.2 *A tiene sus submatrices principales no singulares* $\iff$ *tiene factorización LU.*

Proposición 1.3 *Si a es semi definida positiva* $\implies$ *A tiene factorización LU.*

1.0.4. Otras proposiciones útiles

Proposición 1.4 *Una matriz simétrica es definida positiva* $\iff$ *todas sus submatrices principales tienen determinante positivo.*

2. ¿Es cierto que si una matriz es inversible entonces tiene factorizacion LU?. Y si tengo una matriz que tiene factorizacion LU, ¿entonces es no singular? Demostrar o dar un contraejemplo.

2.1. ¿Es cierto que si una matriz es inversible entonces tiene factorizacion LU?

No es cierto que si una matriz es inversible entonces tiene factorizacion LU. Consideremos una matriz inversible donde es necesaria la eliminacion gausiana con pivoteo.

$$PAx = Pb \tag{1}$$

Luego, dado que A es inversible y una permutacion de sus filas es simplemente un reordenamiento de funciones que no afecta las propiedades de la base, podemos llevar a cabo la siguiente factorizacion, donde L es triangular inferior y U es triangular superior.

$$PA = LU \tag{2}$$

Las matrices de permutacion a su vez tienen la siguiente propiedad: $P^{-1} = P^t$. Por lo tanto, podemos escribir la matriz A como:

$$A = P^t LU \tag{3}$$

Esto significa que la matriz inversible A solo puede escribirse como $LU \iff$ la matriz de permutacion es la identidad. Es decir, si no son necesarias permutaciones para llevar a cabo la eliminacion gausiana.

No estoy seguro que este bien. Creo que hay que plantearlo por el lado de que asumo que A tiene LU tambien, y despues hago algo como A = PtLU y A = L_2 U_2**, igualo, y llego al absurdo.**

2.2. Una matriz que tiene factorizacion LU es no singular?

Una matriz que tiene factorizacion LU no necesariamente es no singular. Consideremos el siguiente contraejemplo:
$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$
La matriz nula no es inversible dado que $det(0) = 0$.

3. Verdadero o Falso

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, estudiemos las siguientes proposiciones:

3.1. AA^t es una matriz simétrica

Una matriz es simétrica si $A = A^t$. Es decir, si para todo $j, i \in [1..n]$, $a_{i,j} = aj, i$.
Sea $C = AA^t$ y $b_{i,j}$ los elementos de A^t. Al hacer el producto, en la posición $c_{i,j}$ nos queda:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j} \tag{4}$$

Por la definición de transpuesta $b_{i,j} = a_{j,i}$, entonces:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times a_{j,k} \tag{5}$$

Para que el producto sea simétrico entonces $c_{i,j} = c_{j,i}$, lo que efectivamente sucede si intercambiamos los indices en la ecuación 5.

3.2. Si A es no singular, entonces A^tA es SDP

Completar!

4. Implementacion

4.1. CheckCondLU.m

Si todos los menores principales de una matriz son no singulares, entonces la matriz tiene factorizacion LU.

Si todos los menores principales de una matriz tienen determinante positivo si y solo si la matriz tiene factorizacion de Cholesky.

4.2. CheckFromLU.m

Para verificar si la factorizacion de Cholesky es efectivamente valida, podemos computar nuevamente la matriz haciendo LL' y luego comparando elemento a elemento con la matriz A. Sin embargo, debemos recordar que estamos trabajando bajo aritmética finita, por lo que debemos tener algun tipo de tolerancia al error.

4.3. CholFromBlocks.m

Utilizando bloques, encontramos las siguientes expresiones para computar, a partir de la factorizacion de Cholesky de A_n y la matriz A_{n+1}, la factorizacion de Cholesky de la matriz A_{n+1}.

$$A_n = L_n L_n' \tag{6}$$

$$f_{n+1} = l_{n+1} L_n' \implies l_{n+1} = f_{n+1} L_n^{'-1} \tag{7}$$

Aqui la inversa de l_n' existe dado que todos los menores principales son no singulares. $det(A) = det(LL') = det(L) \times det(L') > 0$.

$$a_{n+1,n+1} = l_{n+1} l_{n+1}' + l_{n+1,n+1}^2 \tag{8}$$

$$l_{n+1,n+1} = \sqrt{a_{n+1,n+1} - l_{n+1} l_{n+1}'} \tag{9}$$