Simulación de un sistema de n osciladores acoplados.

M. Bandera [1]

[1] *Estudiante del programa de Física, Universidad del Atlántico, Barranquilla-Colombia*

Resumen

Mediante las herramientas computacionales de MatLab, se estudió y modeló un sistema de tres masas iguales acoplados por medio de cuatro resortes y estos delimitados por una frontera, y constantes elásticas diferentes de manera aleatorias en un rango de 0.6 hasta 1.1. De igual forma con un modelo de 101 masas iguales, en el cual se varió el rango de las constantes elásticas de 0.9 a 1.1, 0.8 a 1.2 y de 0.7 a 1.3; con 100 repeticiones para cada uno de estos rangos de valores. Obteniendo un promedio del grado de participación de las amplitudes y energías del sistema, además de la media ponderada (m1) y el desplazamiento cuadrático medio (m2) de las energías del sistema de 101 masas. En ambos sistemas se obtuvo el comportamiento de las masas al evolucionar la propagación, y que su energía es conservativa.

Palabras claves: Oscilador, osciladores acoplados, grado de participación.

Abstract

Using MatLab's computational tools, a system of three equal masses coupled by means of four springs and delimited by a boundary, and different elastic constants randomly in a range of 0.6 to 1.1 were studied and modelled. n the same way with a model of 101 equal masses, in which the range of the elastic constants was varied from 0.9 to 1.1, 0.8 to 1.2 and from 0.7 to 1.3; with 100 repetitions for each of these ranges of values. Obtaining an average of the degree of participation of the amplitudes and energies of the system, in addition to the weighted average (m1) and the mean square displacement (m2) of the energies of the 101-mass system. In both systems the behaviour of the masses was obtained as the propagation evolved, and their energy is conservative.

Keywords: Oscillator, coupled oscillators, degree of participation.

INTRODUCCIÓN

El oscilador armónico es uno de los sistemas más estudiados en la física, ya que al observar la naturaleza nos damos cuenta de que muchos procesos físicos son repetitivos, es decir presentan un comportamiento cíclico. En estos casos hablamos de movimiento periódico y lo caracterizamos mediante su período, que es el tiempo necesario para un ciclo completo del movimiento, la característica principal de un oscilador armónico es que éste tiende a regresar a punto estable, llamado punto de equilibrio, y un ciclo completo incluye atravesar dos veces la posición de equilibrio. Una masa sujeta al extremo de un péndulo o de un resorte, la carga eléctrica almacenada en un condensador, las cuerdas de un instrumento musical, y las moléculas de una red cristalina son ejemplos de sistemas físicos que a menudo realizan un movimiento oscilatorio.

Por tal motivo se desea analizar el comportamiento de un sistema de masas acopladas por medio de resortes cuyas constantes elásticas son diferentes y varían de manera aleatorias.

Oscilador Armónico

El movimiento armónico simple es un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila de un lado al otro de su posición de equilibrio, en una dirección determinada, y en intervalos iguales de tiempo. El recorrido que consiste en ir desde una posición extrema a la otra y volver a la primera, pasando dos veces por la posición central, se denomina ciclo. El número de ciclos por segundo, o hercios (Hz), se conoce como frecuencia de la oscilación empleada en el movimiento armónico simple. El periodo de una oscilación u onda es el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la oscilación.

Cómo un modelo de movimiento armónico simple, consideremos un bloque de masa m unido al extremo de un resorte con constante elasticidad k, con el bloque libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque queda en reposo, en la posición llamada posición de equilibrio del sistema, que se identifica como $x = 0$. Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio. Donde el resorte ejercerá una fuerza sobre la masa, inversamente proporcional a su desplazamiento $F = -kx$, llamada fuerza restauradora. Aplicando la segunda ley de Newton, el movimiento armónico simple se define entonces en una dimensión, mediante la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

La solución de la ecuación diferencial puede escribirse en la forma $x(t) = Acos(wt + \phi)$. La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se conserva la energía mecánica total del sistema.

Ahora analicemos un sistema similar al anterior (masa-resorte), para el cual el movimiento realizado por este deja de ser armónico, sin embargo, éste seguirá siendo un sistema oscilatorio debido a la fuerza restauradora ejercida por el resorte; y se omitirá la fuerza externa dependiente del tiempo. A partir de la segunda ley de Newton obtenemos la siguiente expresión:

$$F_k = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1}$$

Donde $F_k(x)$ es la fuerza de restauración ejercida por el resorte. La ecuación anterior es la ecuación diferencial que describe el movimiento de la masa. Existen muchos modelos para los cuales esta relación deja de ser lineal, en esta oportunidad analizaremos dos de estos modelos.

Energía en el ovimiento armónico simple

La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se conserva la energía mecánica total del sistema. También supondremos que la masa del resorte es despreciable. La energía cinética del cuerpo es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial del resorte es $U = \frac{1}{2}kx^2$. No hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = constante \tag{2}$$

La energía mecánica total E también está relacionada directamente con la amplitud A del movimiento. Cuando el cuerpo llega al punto $x = A$, su desplazamiento es máximo con respecto al equilibrio, se detiene momentáneamente antes de volver hacia la posición de equilibrio. Es decir, cuando $x = A$ (o bien, $-A$), $v_x = 0$. Aquí, la energía es sólo potencial, y $E = \frac{1}{2}kA^2$ Puesto que E es constante, esta cantidad es igual a $\frac{1}{2}kA^2$ en cualquier otro punto. Combinando esta expresión con la ecuación (2), obtenemos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = cte$$

Osciladores acoplados

Un sistema de osciladores acoplados es aquel que consta de muchos osciladores individuales interconectados entre sí. Así como cada sistema oscilatorio tiene asociada una frecuencia característica de oscilación; un sistema con múltiples osciladores acoplados tiene asociado un conjunto de modos de oscilación con frecuencias características definidas.

El sistema más simple y básico es el modelado por dos masas y dos resortes: el primer resorte con un extremo fijo y el otro a la primera masa, y otro resorte que une el otro extremo de la primera masa con la segunda masa.

Modelo de 3 osciladores

Como primer modelo de estudio se tiene un sistema de tres masas iguales acopladas entre si a través de unos resortes con constantes elásticas diferentes que varían de manera aleatoria en un rango de k_i hasta k_f, como se muestra en la figura (1). Donde este sistema es conservativo.

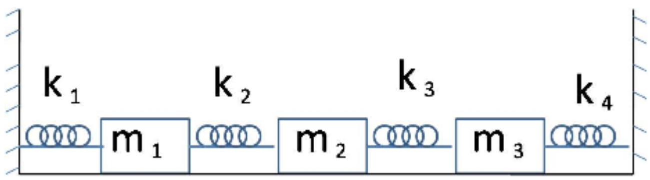


Figura 1: Gráfica de sistema de tres osciladores con masas iguales y constantes elasticas distintas.

Partiendo de la segunda ley de newton, tenemos que:

$$\sum \vec{F}_1 = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \quad (3)$$

$$\sum \vec{F}_2 = m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3 \quad (4)$$

$$\sum \vec{F}_3 = m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} = k_3x_2 - (k_3 + k_4)x_3 \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \widehat{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} -\frac{(k_1+k_2)}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{(k_2+k_3)}{m} & \frac{k_3}{m} \\ 0 & \frac{k_3}{m} & -\frac{(k_3+k_4)}{m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Donde las ecuaciones diferenciales (3), (4) y (5) de segundo orden, son las ecuaciones que describen el movimiento para cada una de las masas. Por simplificación del problema se realiza un cambio de variable $p = x$, $q = dx/dt$, que nos permite pasar de una ecuación diferencial de segundo orden a primer orden.

$$\tfrac{dq}{dt} + f(x)p = 0 \qquad \tfrac{dp}{dt} = q$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \widehat{M}_2 \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m} & \frac{k_2}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m} & -\frac{(k_2+k_3)}{m} & \frac{k_3}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{m} & -\frac{(k_3+k_4)}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

La energía cinética del sistema esta descrita por la sumatoria de cada unas de las energías cinéticas de las masas y su energía potencial por:

$$K = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \quad (8)$$

$$U = \frac{1}{2}[k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3(x_3 - x_2)^2 + k_4x_3^2] \quad (9)$$

Donde la energía total del sistema es la suma de estas $E_T = K + U$.

Modelo de n osciladores

Como modelo mas general de estudio, se tiene un sistema de n masas iguales y $n + 1$ resortes acoplados, cuya constante elástica varia de manera aleatoria en un intervalo desde k_i hasta k_f, como se aprecia en la figura (2).

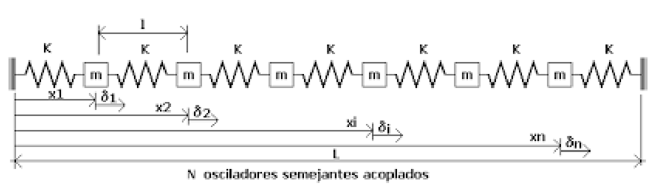


Figura 2: Gráfica de sistema de n osciladores con masas iguales y constantes elasticas distintas.

Análogamente al modelo anterior obtenemos las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el movimiento de cada una de las masas.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_n \end{bmatrix} = \widehat{M_2}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ . \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ . \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$\widehat{M_2} = \begin{bmatrix} C_1 & I \\ \widehat{M} & C_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Donde C_1 y C_2 son matrices de ceros de tamaño nxn, e I es la matriz identidad de igual tamaño. Así tambien $\widehat{M}$, es una matriz de tamaño nxn, y su diagonal principal esta descrita por: $-\frac{k_{n+1}+k_n}{m_n}$, diagonal superior $\frac{k_{n+1}}{m_{n+1}}$,y diagonal inferior $\frac{k_{n+1}}{m_n}$. La energía cinética y potencial del sistema están descrita por

$$K_n = \frac{1}{2}m\sum_{n=1}^{N} v_n^2 \tag{11}$$

$$U_n = \frac{1}{2}k[x_1^2 + \sum_{n=2}^{N-1}(x_n - x_{n-1})^2 + x_n^2] \tag{12}$$

$$E_T = K_n + U_n$$

-Interpretación física y resultados

Con el fin de estudiar el movimiento de un sistema de masas acopladas por medio de resortes, se simulo el **"modelo de 3 osciladores"** utilizando el lenguaje de programación MatLab. En primera instancia se observa que este problema se puede estudiar utilizando los sistemas dinámicos. Como integrador se utilizó el runge kutta de orden cuatro (ode45), al cual tiene como entradas la matriz ($\widehat{M_2}$), un arreglo de tiempo y las condiciones iniciales del sistema; generándonos un arreglo de posiciones y velocidades para cada una de las masas a través del tiempo, como se aprecia en la figura(3).

De la figura(3.a) se puede observar el comportamiento de las posiciones de cada una de las masas a través del tiempo, de igual forma se puede apreciar de la figura (3.b) el desarrollo de las velocidades durante este tiempo. Para generar este comportamiento se impregna un pequeño deslazamiento a la masa centra del sistema (m_2), obteniendo una propagación de este en el sistema, como se puede apreciar en la figura(4).

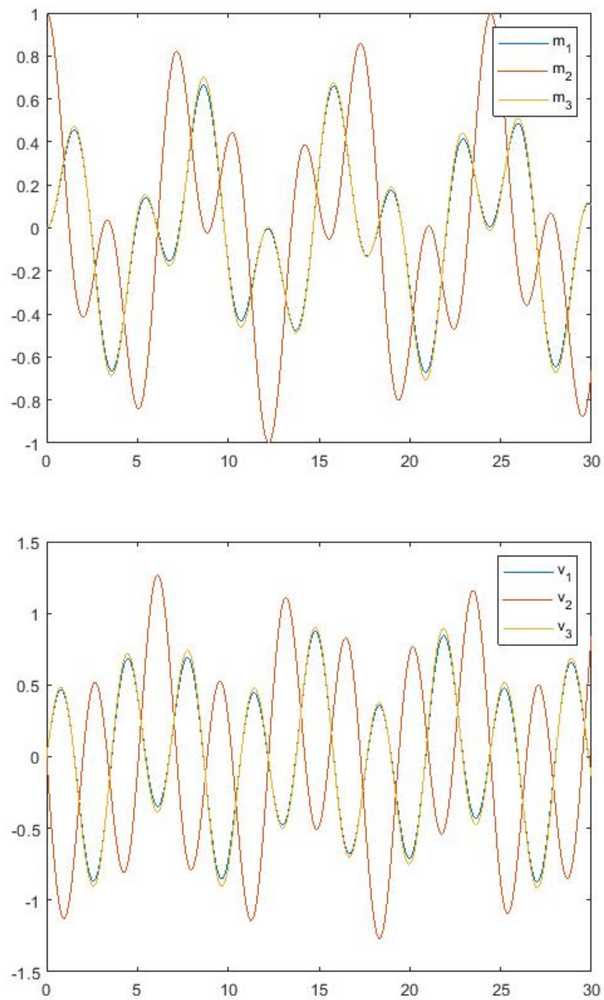


Figura 3: Gráfica de la trayectoria y velocidades para 3 osciladores con parámetros=[m: 1,(k_i, k_f): (0.6, 1.1)]

En el momento en que el sistema masa-resorte tenga mayor elongación, este no tendrá velocidad ya que se encuentra en su máximo de energía potencial, de manera recíproca se tiene cuando la energía potencial sea nula, este tendrá la máxima energía cinética; de esta forma vemos que la energía total del sistema es conservativa (figura (5)).

De manera análoga se simulo el **"modelo de n osciladores"**, tomando n un valor de 101 osciladores, y las constantes elásticas (k) tomando un valor aleatorio entre $k_i = 0{,}9$ hasta $k_f = 1{,}1$, obteniendo las posicione y velocidades a través del tiempo de este sistema (figura 6).

Y obteniendo una propagación y energía como se muestra en la figura(7).

Posteriormente se generó un bucle que nos permitiera realizar 100 repeticiones a las energías del sistema donde las constantes elásticas serán aleatorias en cada una de estas repeticiones. Gracias a esto se puede obtener el promedio del grado de participación de las amplitudes y energías del sistema, figura(8).

$$R_A = \frac{(\sum A^2)^2}{\sum A^4} \qquad R_E = \frac{(\sum E_T^2)^2}{\sum E_T^4}$$

Además de la media ponderada (m1) y el desplazamiento cuadrático medio de las energías (m2) figura (10)

$$m1 = \frac{\sum i E_i^2}{\sum E_i^2} \qquad m2 = \frac{\sum i^2 E_i^2}{\sum E_i^2}$$

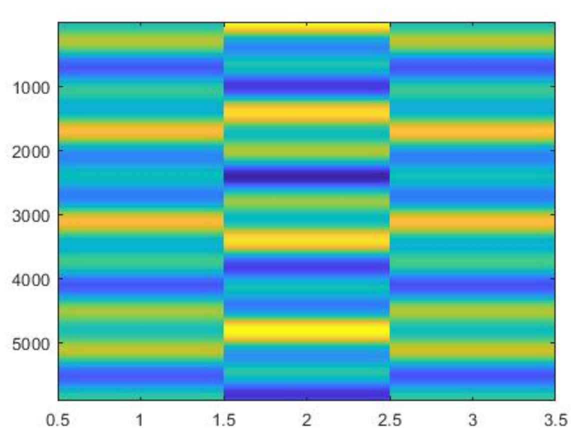


Figura 4: Gráfica de la propagación de amplitudes=[m: 1,(k_i, k_f): (0.6, 1.1)]

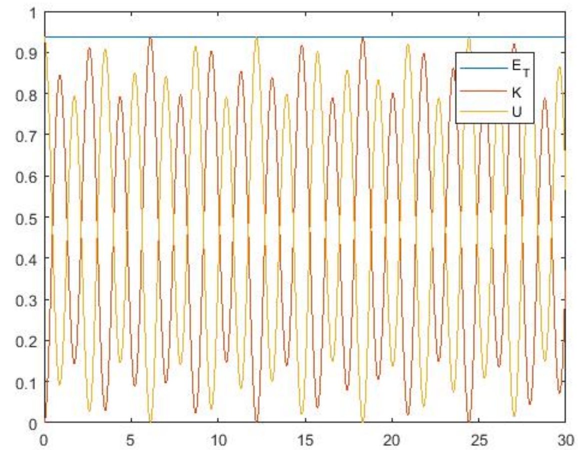


Figura 5: Gráfica de la energia cinetica, potencial y total del sistema de 3 masas=[con parámetros=[m: 1,(k_i, k_f): (0.6, 1.1)]

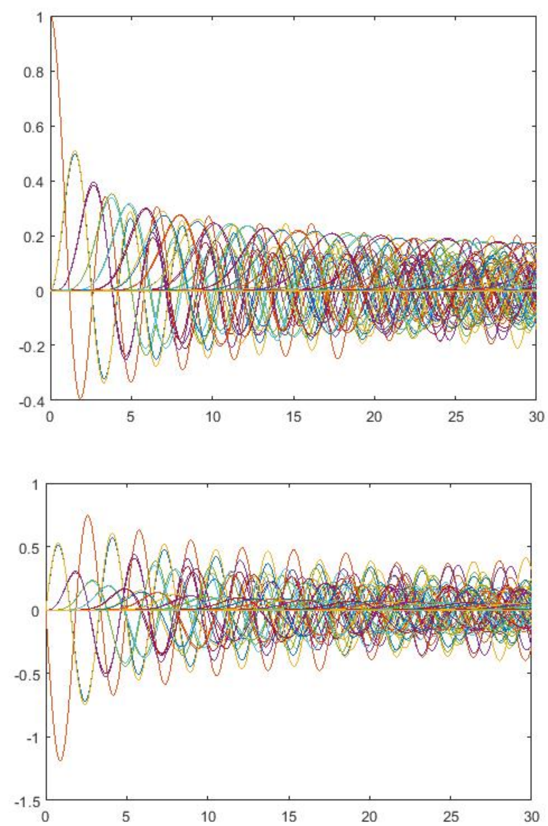
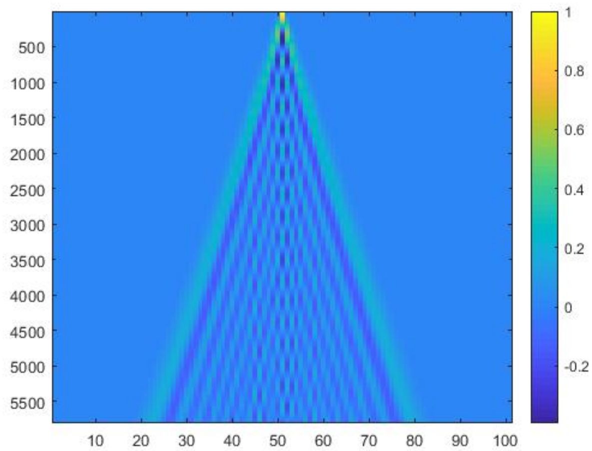


Figura 6: Gráfica de la trayectoria y velocidades para 101 osciladores con parámetros=[m: 1,(k_i, k_f): (0.6, 1.1)]



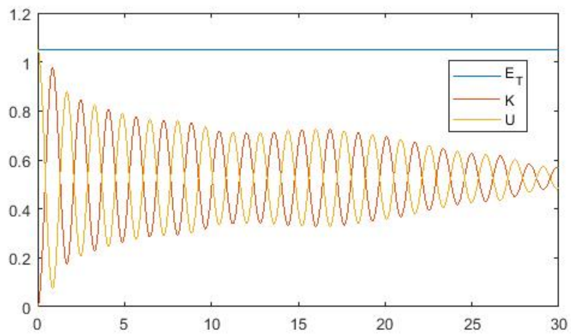
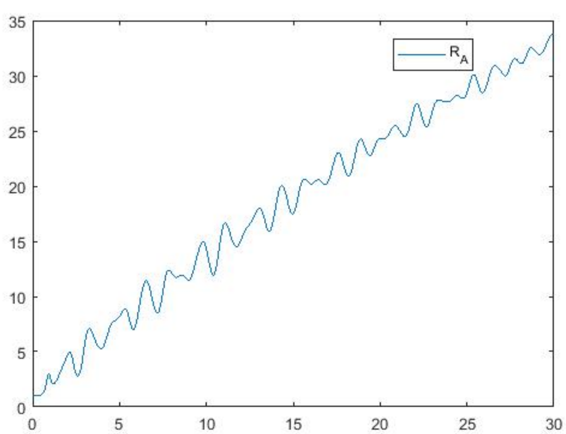


Figura 7: Gráfica de la energia cinetica, potencial y total del sistema de 101 masas=[con parámetros=[m: 1,(k_i, k_f): (0.6, 1.1)]



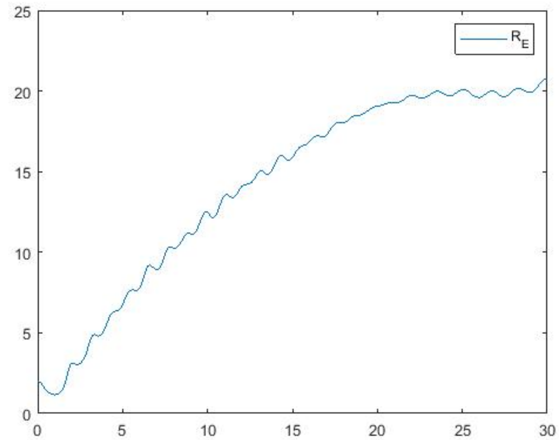
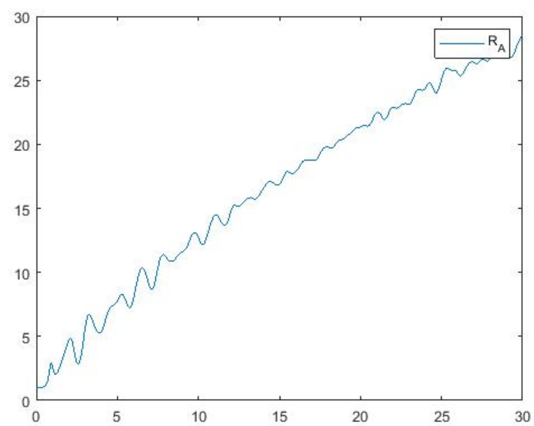


Figura 8: Gráfica del grado de participación de las amplitudes y energias=[m: 1,(k_i, k_f): (0.9, 1.1)]



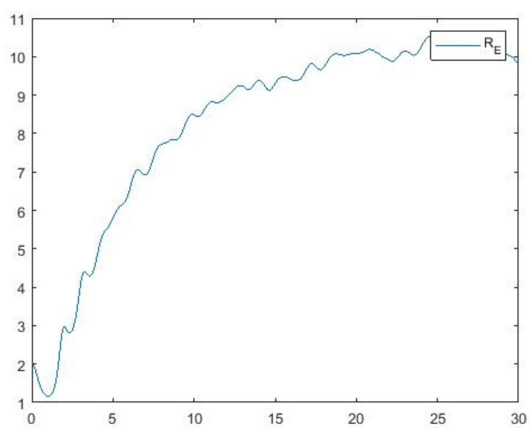


Figura 9: Gráfica del grado de participación de las amplitudes y energias=[m: 1,(k_i, k_f): (0.8, 1.2)]

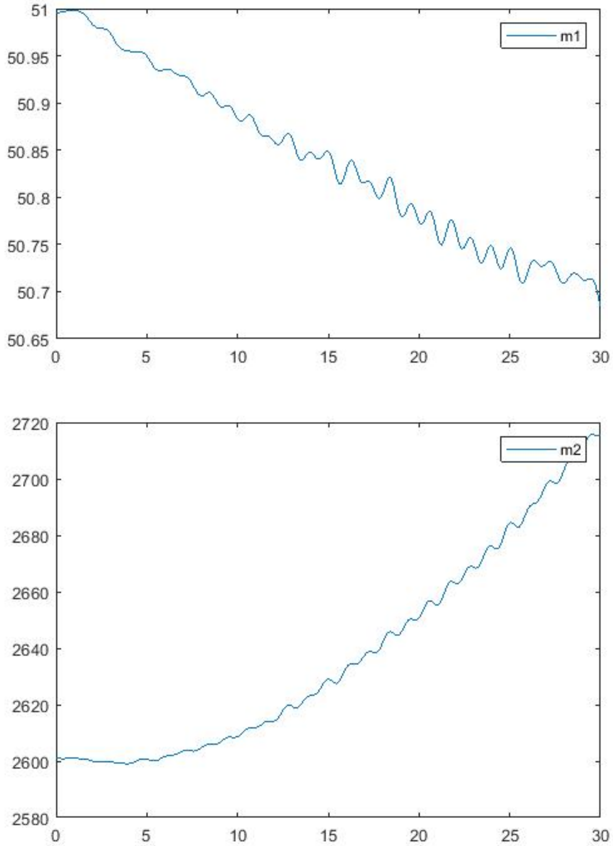


Figura 10: Gráfica de m1 y m2=[m: 1,(k_i, k_f): (0.9, 1.1)]

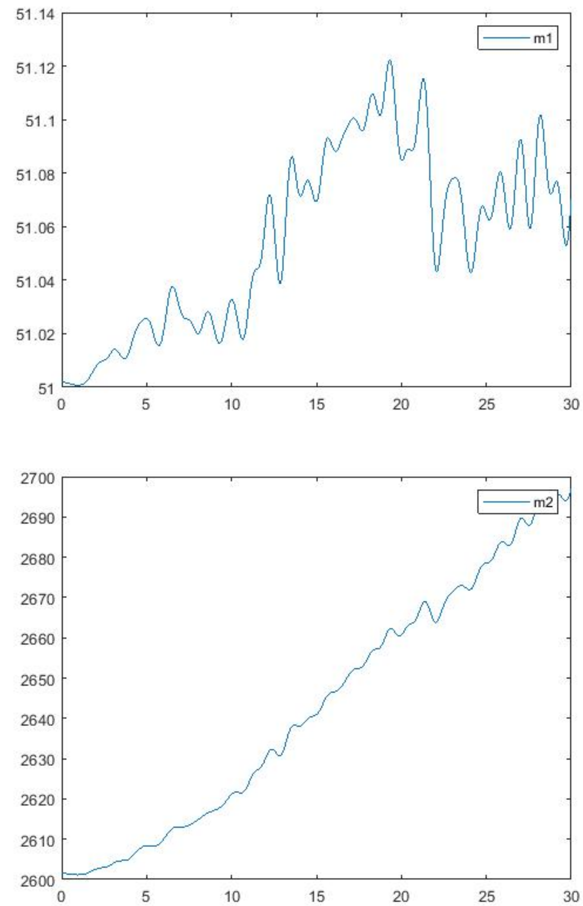


Figura 11: Gráfica de m1 y m2=[m: 1,(k_i, k_f): (0.8, 1.2)]

CONCLUSIÓN

Mediante las herramientas computacionales de MatLab se realizó la simulación de un sistema de 3 y 101 osciladores acolados, a los cuales se estudió el comportamiento de estos al perturbar la masa central de cada sistema. Se encontró el promedio del grado de participación de las amplitudes y energías del sistema de 101 masas al repetir 100 el cálculo, de igual forma se obtuvo la media ponderada (m1) y el desplazamiento cuadrático medio (m2). Obteniendo que ambos sistemas se conserva su energía total.

Referencias

[1]. Sears, F. W., Ford, A. L., and Freedman, R. A. (2009). Física universitaria: con física moderna (Vol. 1). Pearson educación. Págs.419-430

[2]. Serway, R. A., Jewett, J. W., Hernández, A. E. G., and López, E. F. (2009). Física para ciencias e ingeniería (Vol. 1). Cengage Learning. Págs.419-426

[3]. Hewitt, P. G. (1998). Fısica conceptual. Pags.365-362