Introducción

El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot fue descubierto a principios del siglo 20 por el matemático Benoit Mandelbrot, quien estudió y popularizó los fractales.

El conjunto de Mandelbrot es una de las más reconocidas formas fractales, que junto con la geometría fractal, entró en la cultura popular a mediados de los años 80. La primera imagen digital generada por ordenador del conjunto de Mandelbrot fue a finales de la década del 70. Luego pasaron casi 30 años y varias revoluciones en el hardware gráfico, para que en 2009 se obtuviese el equivalente en 3 dimensiones, el llamado Mandelbulb.

Ray Tracing

El ray tracing es una técnica de renderizado de imágenes basada en construir rayos desde el punto de vista hacia la escena haciéndolos pasar por un rectángulo (near plane )que representa la pantalla.

Se construye un rayo por cada pixel en la pantalla, que es trazado hacia la escena con el objetivo de determinar el objeto más próximo al punto de vista. Para ello se computan las intersecciones entre el rayo y cada uno de los objetos en la escena. La intersección más próxima al punto de vista determina el objeto visible y a partir de dicho punto y las propiedades geométricas del objeto (normal, textura, etc.) se computa el color final. Si el rayo no interseca ningún objeto se dibuja de un color de fondo o bien el pixel queda vacío.

Ray Marching Distance Fields.

La intersección entre el rayo y los objetos de la escena se puede computar de distintas maneras, por ejemplo resolviendo numéricamente las ecuaciones de intersección entre rayo y objeto. Esto en la práctica se puede hacer sólo con algunos tipos de objetos como esferas y triángulos, donde existe una ecuación numéricamente estable y fácil de computar.

Por el contrario, el algoritmo de Ray Marching, consiste en avanzar en forma discreta por el rayo y en cada paso evaluar si se colisionó o no con algún objeto de la escena. En este caso no es necesario disponer de una representación algebraica del objeto, solo hace falta contar con una forma de determinar si un punto está o no dentro del mismo. Por este motivo esta técnica es ampliamente utilizada cuando no se dispone de ecuaciones para definir los objetos, como el caso de imágenes médicas y otras tomadas a partir de muestras discretas.

Los llamados mapas de distancia (distance fields, o distance estimator, de aquí en más llamados DE) permiten mejorar drásticamente la performance de esta técnica al permitir avanzar por el rayo con pasos variables, es decir moviéndose una gran distancia cuando no hay ningún objeto cerca y así reducir los tiempos de procesamiento.

El DE para un cierto objeto Q es una función que devuelve el radio de la mayor esfera con centro en el punto y que no contiene ningún punto del objeto Q.

Representa la máxima distancia que me puedo mover desde el punto hacia cualquier dirección sin colisionar con el objeto. Cuando es posible definir un DE para un objeto resulta muy práctico dibujarlo con la técnica de ray marching, pues en cada paso se evalúa el DE para determinar cuánto moverse en la dirección del rayo. De esta forma se reducen considerablemente la cantidad de pasos por cada rayo.

Mandelbrot Generalizado

El conjunto de Mandelbrot original se basa en las propiedades de convergencia de sucesiones de números complejos. En particular para cada punto c en el plano complejo se evalúa si la sucesión dada por $z\_{n+1} = z\_n^2 + 1$ converge o no.

El problema para generalizar este concepto al espacio de 3 dimensiones es que este no tiene una estructura obvia de cuerpo como si la tiene el plano complejo.

Para construir el conjunto de Mandelbrot usamos básicamente dos propiedades de los números complejos: la suma y el elevar al cuadrado.

La operación de suma se puede generalizar a cualquier dimensión tomando la suma componente a componente.

En cambio no queda claro como generalizar la operación de elevar al cuadrado y la exponenciación en general para otro espacio que no sea el de los números complejos.

Daniel White y Paul Nylander fueron los primeros en utilizar coordenadas esféricas para obtener el llamado conjunto de Mandelbulb, la versión en 3 dimensiones del conjunto de Mandelbrot.

La idea de White y Nylander se basa en la observación de que elevar un número complejo al cuadrado es equivalente a elevar su módulo al cuadrado y duplicar su ángulo. Luego esa misma idea se puede extender a 3 dimensiones usando coordenadas polares.

Entonces para elevar al cuadrado un vector de 3 dimensiones se transforma primero a coordenadas polares, se eleva al cuadrado el módulo y se duplican los ángulos.

La misma idea se puede generalizar a otras potencias de 2 produciendo diferentes resultados.

Primitivas Básicas.

Dado un objeto arbitrario en general no es posible obtener una fórmula cerrada para su función de distancia (DE). Sin embargo, existen fórmulas simples para varios objetos geométricos básicos y sus DE pueden combinarse para construir otras más complejas.