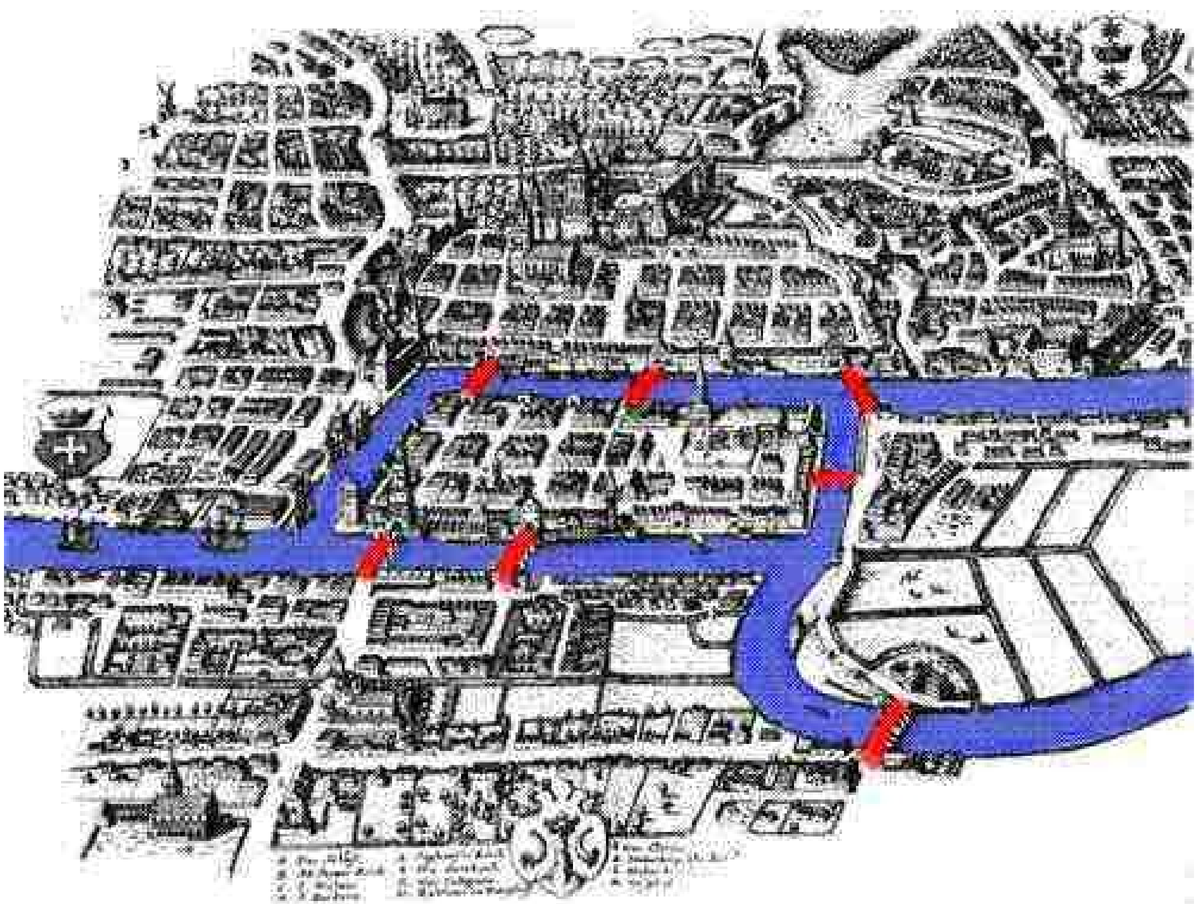
Grafos – Conceitos e Algoritmos

Introdução, Definições
Métodos de busca

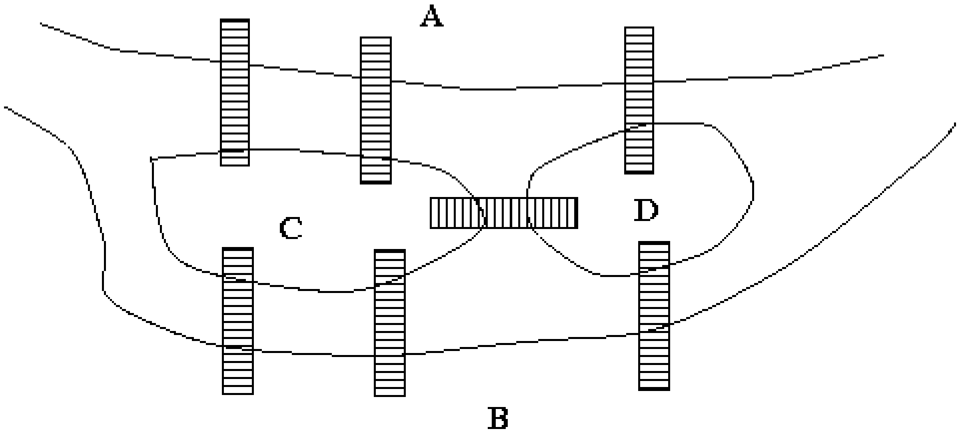
Introdução

- Pontes de Königsberg: Existe um caminho que passe por todas as 7 pontes, um única vez sobre cada ponte ?

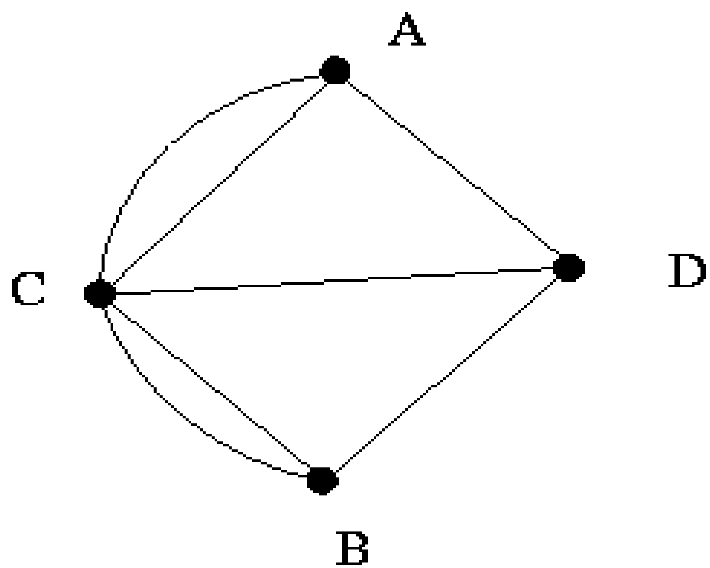


Introdução

- Pontes de Königsberg



Introdução



- Pontes de Königsberg
- Resposta: Não
- Como e porque? Leonhard Euler transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos.
- Então percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos.

Definições

- Grafo – especifica um formato ou meta-modelo genérico para se modelar aspectos de um problema, de uma estrutura ou de um fenômeno.
- Grafos são importantes e úteis!
  - A grande maioria dos meta-modelos utilizados em computação é um grafo.
  - Muitos conjuntos de elementos físicos ou virtuais, seja em computação ou em outras área, possuem um mapeamento direto em uma estrutura de grafo.
  - Os estados e transições do processo de resolução de muitos problemas pode ser modelado como um grafo.

Definições

- Meta-modelos ou ferramentas de modelagem que são grafos:
  - Exemplo:
    - Máquina de estados finitos
    - Diagrama entidade-relacionamento
    - Diagrama de classe UML
    - Diagrama atividades da UML
    - Processo de negócio em BPMN
    - Diagrama de componentes
    - Rede de Petri

Definições

- Conjuntos de elementos que podem ser mapeados como grafos:
  - Mapa de cidades
  - Rede local de computadores
  - Conjunto de objetos que compõe um programa
  - Círculo social
  - Cruzamentos entre ruas de uma cidade
  - Rotina diária de uma pessoa
  - Programa orientado a objetos
  - Programa em linguagem imperativa.
  - WWW
  - Internet
  - Corporação

Introdução

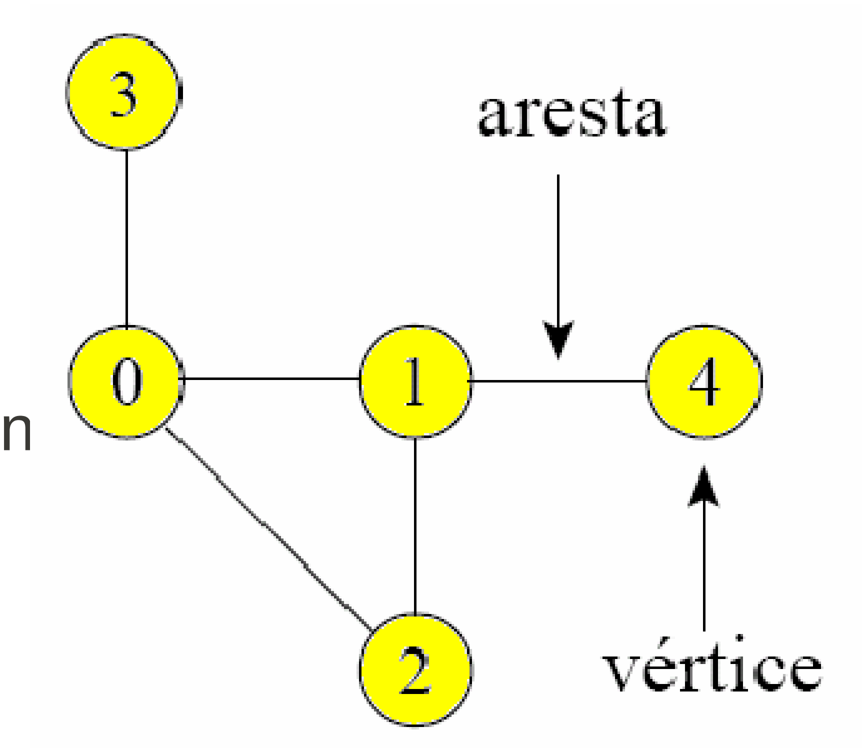
- Estados e transições de um processo de resolução de problema
  - Problema dos cântaros (8, 5, 3)
  - Problema da travessia (lobo, feno, cordeiro)

Definições

- Um grafo é formado por conjuntos de dois objetos especiais:
  – Vértices
  – Arestas

  Dois conjuntos finitos:
- Vértices V (G)
- Arestas E(G)
- Em geral, um grafo G é represen

  G = (V, E)



Definições

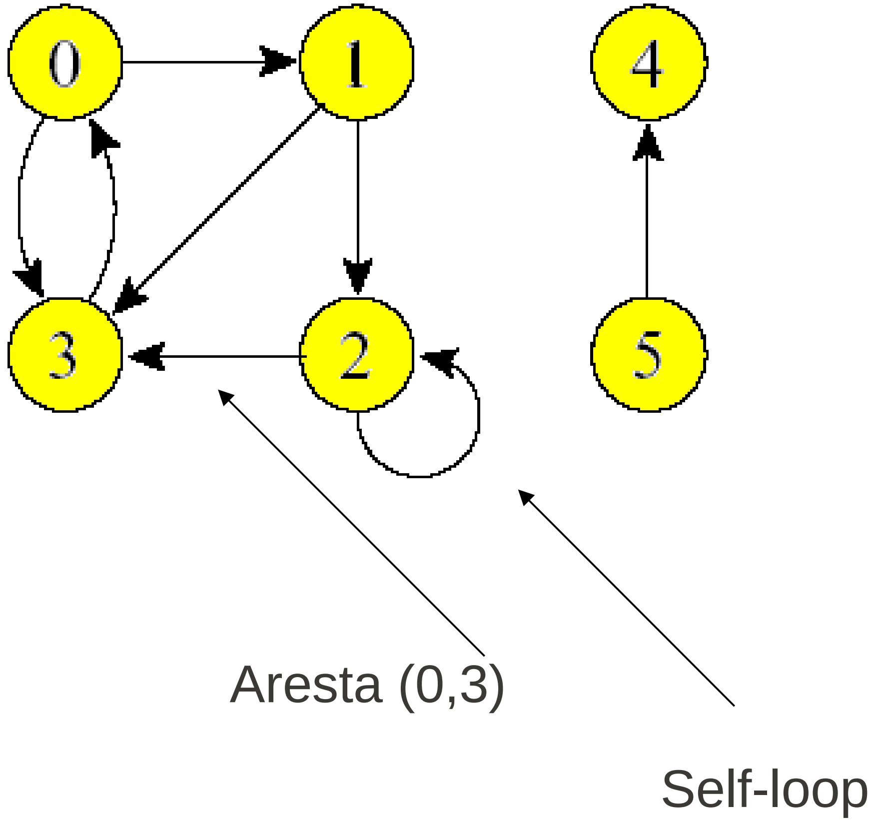
- Cada aresta está associada a um conjunto de um ou dois vértices, chamados nós terminais.
- Extremidade de uma aresta: vértice da aresta.
- Função aresta–extremidade: associa aresta a vértices.
- Laço (Loop): aresta somente com um nó terminal.
- Arestas paralelas: arestas associadas ao mesmo conjunto de vértices.
- Uma aresta é dita conectar seus nós terminais.
- Dois vértices que são conectados por uma aresta são chamados de adjacentes.
- Um vértice que é nó terminal de um laço é dito ser adjacente a si próprio.
- Uma aresta é dita ser incidente a cada um de seus nós terminais.
- Duas arestas incidentes ao mesmo vértice são chamadas de adjacentes.
- Um vértice que não possui nenhuma aresta incidente é chamado de isolado.
- Um grafo com nenhum vértice é chamado de vazio.

Definições

- Exemplo: Jogo dos palitos para 2 pessoas começa com um conjunto de N palitos(N inteiro maior que 0). Cada jogador, na sua vez, pode pegar 1,2 ou 3 palitos; quem retira o último perde.
  - Modelar este problema como um grafo
  - Mostrar que se N for igual 15, 7 ou 10, o primeiro jogador pode ter uma estratégia em que sempre sempre vence.

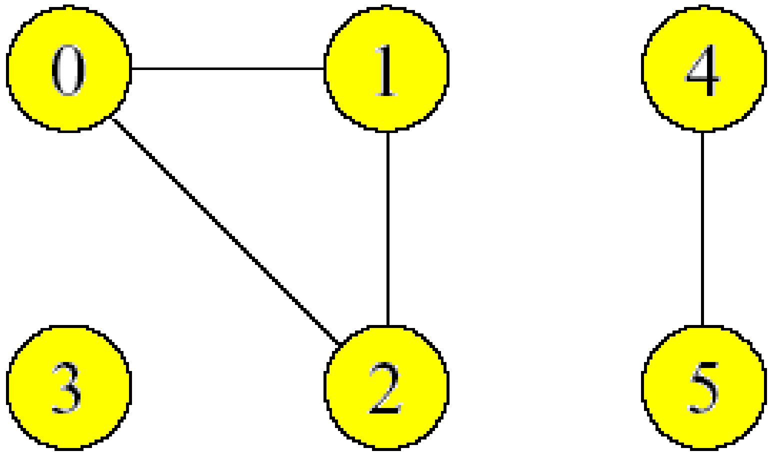
Definições

- Grafo Direcionado:
  - Digrado ou direcionado
  - As Arestas possuem sentido
  - Uma aresta parte de um vértice e chega em outro
  - Podem existir self-loops



Definições

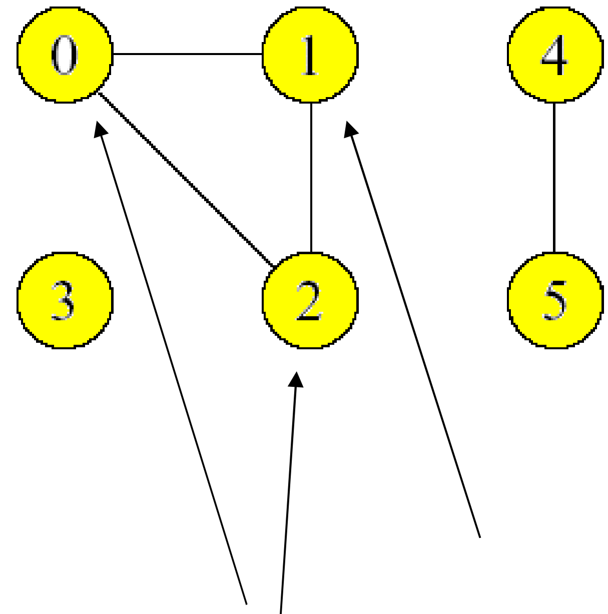
- Grafos Não Direcionados
  - As arestas (u,v) e (v,u) são consideradas uma única aresta
  - Self-loops não existem



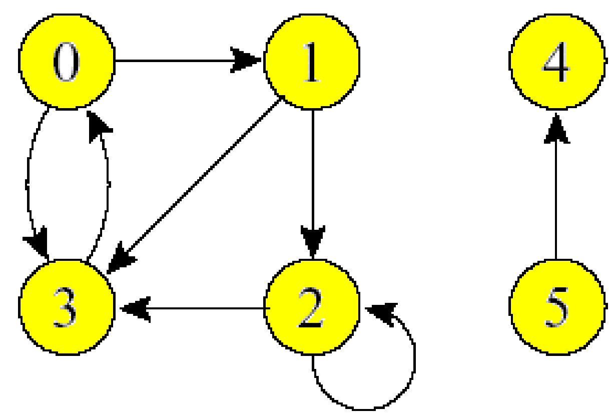
Exemplo de grafo não direcionado

Definições

- Grau de um vértice
  - Em grafos não direcionados é o número de arestas que incide nele
  - Um laço é contado duas vezes.
  - Vértices de grau zero são ditos isolados ou não conectados
  - Em grafos direcionados pode se calcular o grau de entrada (in-degree) e o grau de saída (out-degree) de um vértice. O grau é a soma do in-degree com o out-degree



Vértices de grau 2



Vértice 2 –
in-dregree= 2
out-degree=2

Definições

- Grau total de um grafo: Soma dos graus de todas vertices.
- Teorema: Grau total do grafo G = grau(G) = 2 vezes o número de arestas de G.
  - Logo, O grau total de um grafo é um número par.

- Teorema: Em qualquer grafo G, existe um número par de vértices de grau ímpar.

Definições

- É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 2, e 3?

  Não. O grau total deste grafo é 7, que é um número ímpar.

- Definição: Um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas. Num grafo simples, uma aresta com vértices (nós terminais) u e v é representada por uv.

Definições

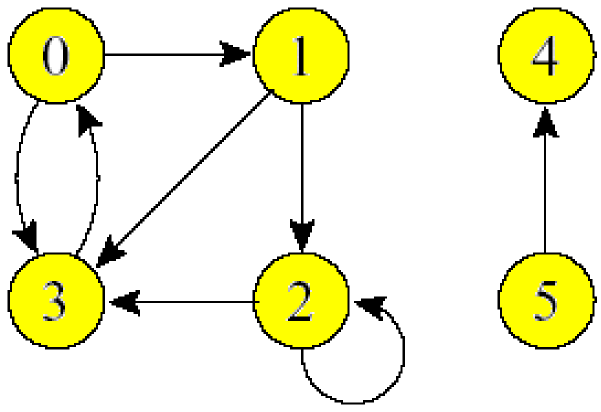
- É possível ter um grafo simples com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?

  Não.

- Prova (por contradição):
  - Suponha que exista um grafo simples G com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3. Chame a e b os vértices de grau 1, e c e d os vértices de grau 3.
  - Como grau(c) = 3 e G não possui laços ou arestas paralelas, devem existir arestas que conectam c aos vértices a, b e d.
  - Pelo mesmo raciocínio devem existir arestas que conectam d aos vértices a, b e c.
  - Mas o grau(a) ≥ 2 e grau(b) ≥ 2, o que contradiz a suposição que estes vértices têm grau 1..
  - Daí. . a suposição inicial é falsa e, conseqüentemente, não existe um grafo simples com quatro vértices com graus 1, 1, 3, e 3.

Definições

- Ciclo
  - Um caminho (v0, v1,..,vk) forma um ciclo se v0=vk e k>=1
  - Ciclo simples: (v1,..vk) são vértices distintos

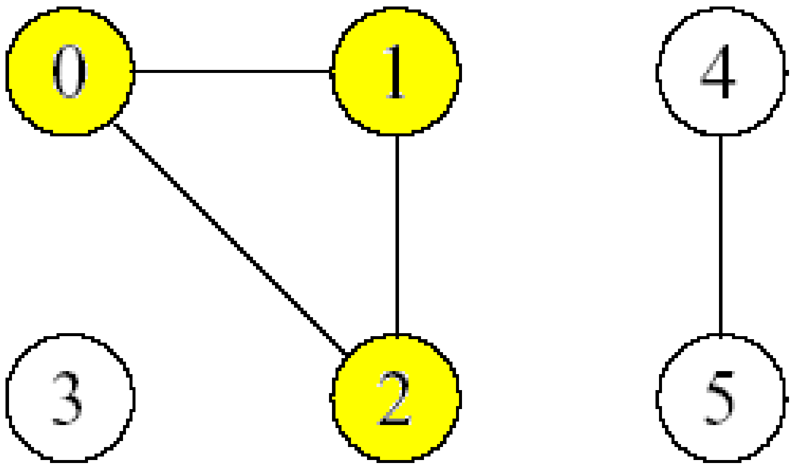


Exemplos de Ciclos Simples:

{0,3,0}, {0,1,3,0},{2,2}

Definições

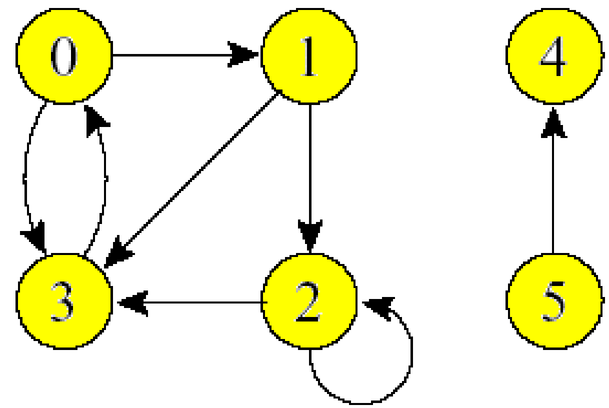
- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho (v0,v1,...,vk) forma um ciclo se v0 = vk e o caminho possui pelo menos 3 arestas
  - O ciclo é simples se os seus vértices são distintos



O caminho {0,1,2} é um ciclo

Definições

- Caminho entre dois vértices x e y:
  - Seqüência de vértices (v0,v1..vk) tal que
    - vi pertence a A para i=0..k e
    - x=v0 e y=vk
  - O comprimento do caminho é dados por k que indica o número de arestas do caminho

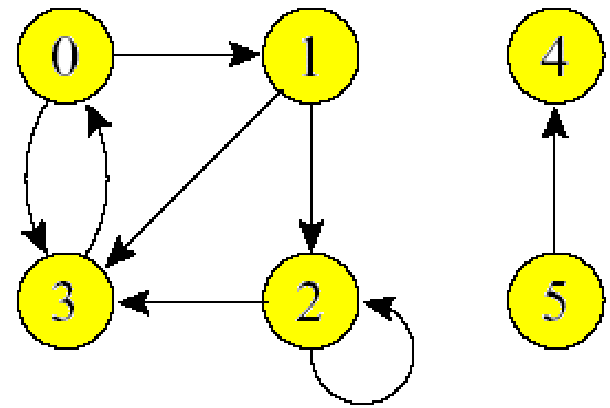


Caminho entre 0 e 3:
{0,1,2,3}, vk=3, k=3
Comprimento =k=3

A aresta 3 é alcançável a partir
Da aresta 0 via aresta 2

Definições

- Caminho entre dois vértices x e y:
  - Seqüência de vértices (v0,v1..vk) tal que
    - vi pertence a A para i=0..k e
    - x=v0 e y=vk
  - O comprimento do caminho é dados por k que indica o número de arestas do caminho

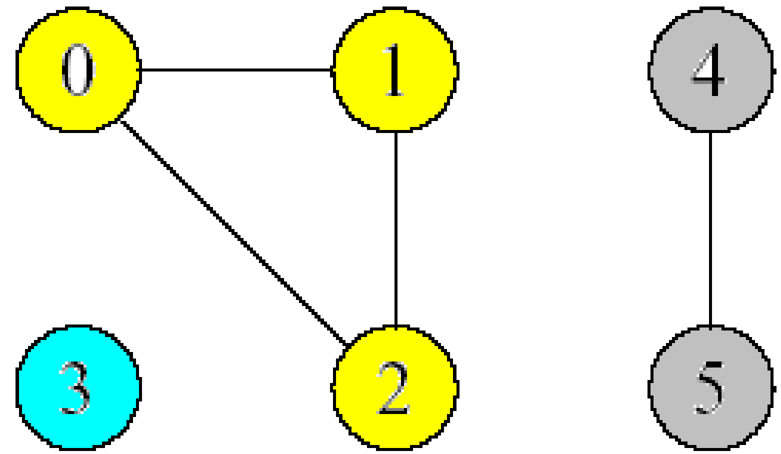


Caminho entre 0 e 3:
{0,1,2,3}, vk=3, k=3
Comprimento =k=3

A aresta 3 é alcançável a partir
Da aresta 0 via aresta 2

Definições

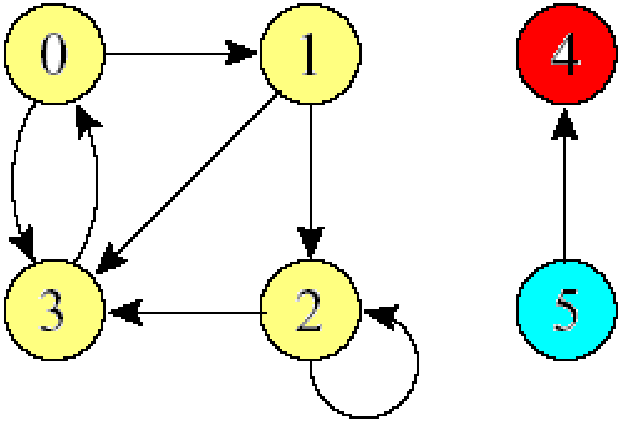
- Componentes Conectados
  - Um grafo não direcionado é conectado se existe um caminho entre todos os possíveis pares de vértices
  - Componentes conectados são porções conectadas de um grafo
  - Logo, um grafo não direcionado é conectado se ele possui apenas um componente conectado



Componentes:
{3} , {0,1,2}, {4,5}

Definições

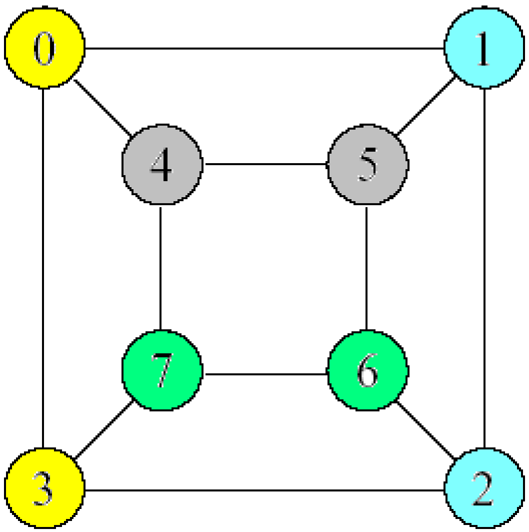
- Componentes Fortemente conectados
  - Um grafo direcionado G é fortemente conectado se cada dois vértices quaisquer de G são alcançáveis a partir um do outro
  - Um componente fortemente conectado de um grafo direcionado é um conjunto de vértices mutuamente alcançáveis

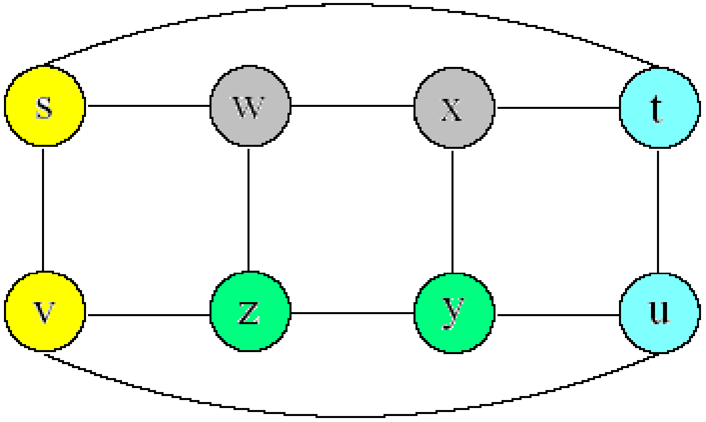


Componentes fortemente conectados:
{0,1,2,3} {4}, {5}

Definições

- Grafos Isomorfos:
  - G= (V,A) e G'=(V',A') são isomorfos que existe uma função bijetora f : V → V' tal que (u,v) E A se e somente se (f(u),f(v)) E A'



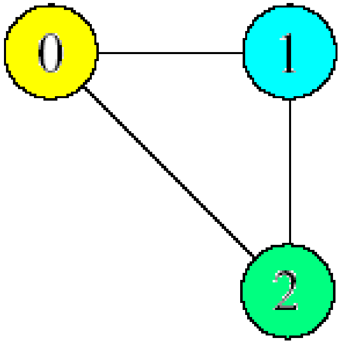


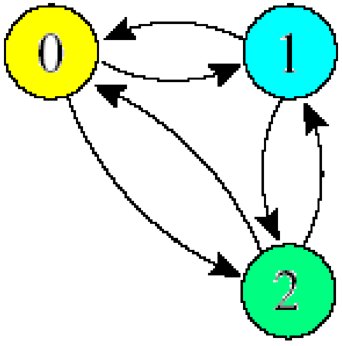
Definições

- SubGrafo:
  - Um grafo G'=(V',A') é um subgrafo de G=(V,A) se V' está contido em V e A' está contido em A

Definições

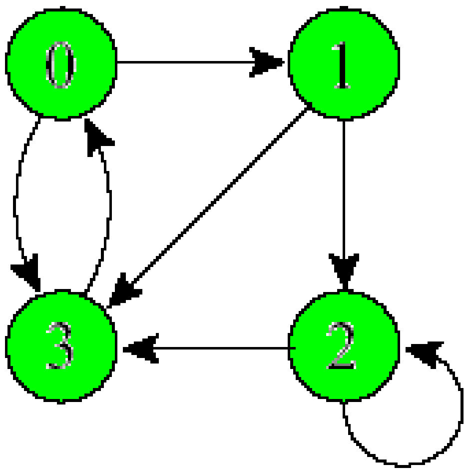
- Versão direcionada de um grafo não direcionado:
  - Cada aresta não direcionada é substituída por duas arestas direcionadas

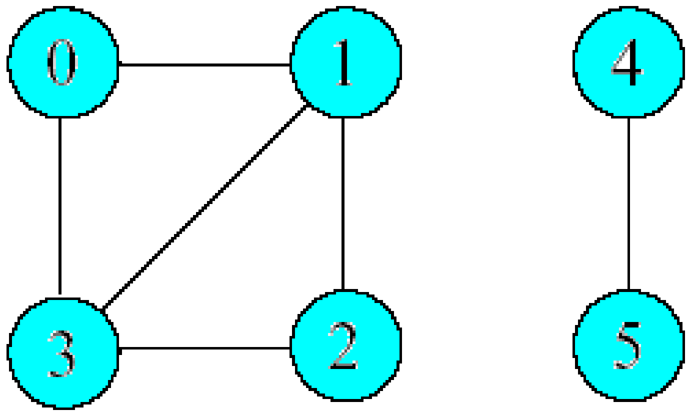




Definições

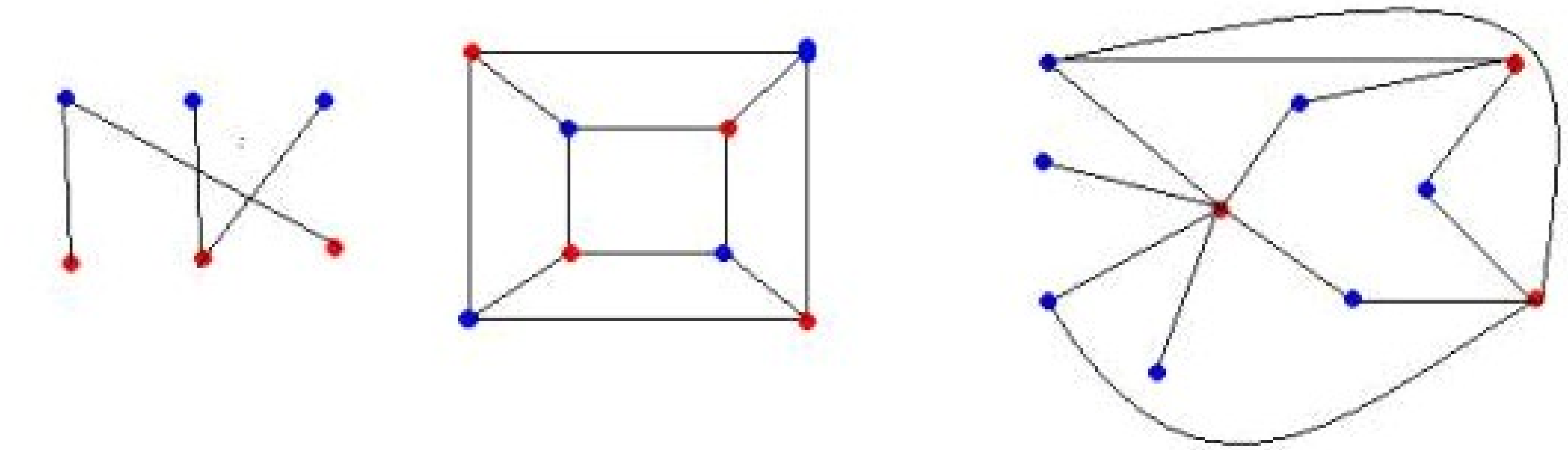
- Versão não direcionada de um grafo direcionado
  - A versão não direcionada é formada eliminando a direção das arestas e os self-loops





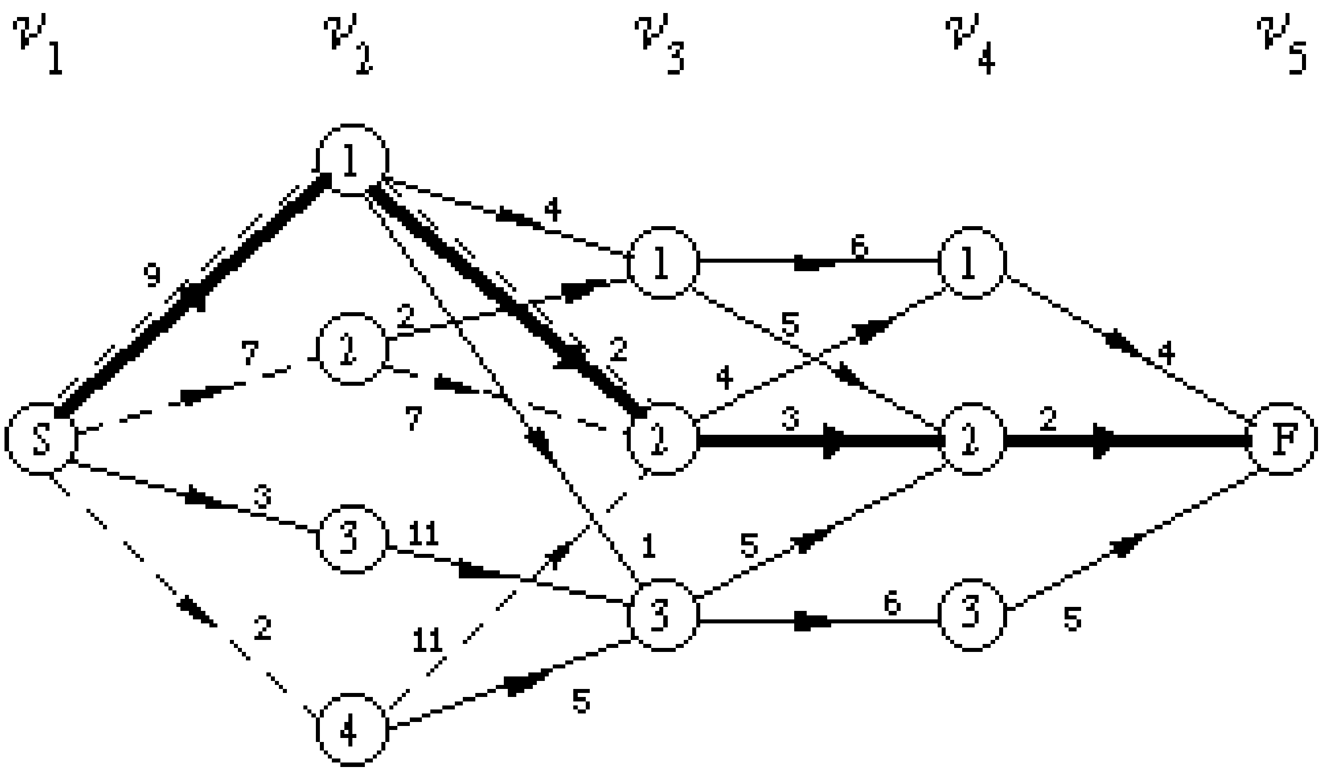
Definições

- Classificações de grafos:
  - Grafo ponderado: Possui pesos associados às arestas
  - Grafo bipartido: É um grafo G=(V,A) que pode ser particionado em dois grafos G1=(V1,A) e G2=(V2,A), onde todas as arestas ligam os dois conjuntos de vértices V1 e V2.



Grafos bipartidos

Definições



Grafo Ponderado

Definições

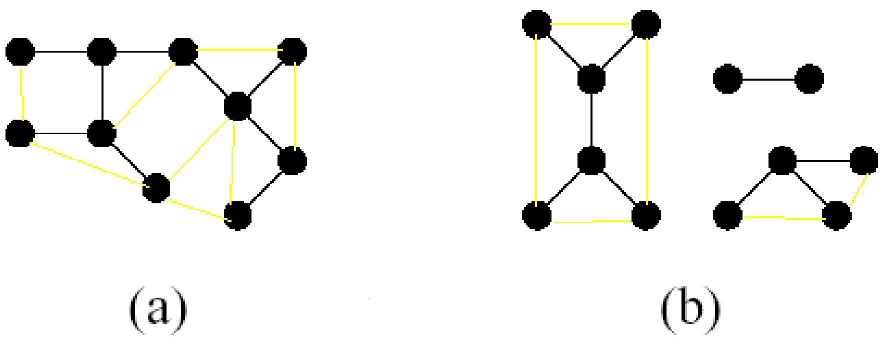
- Grafo completo:
  - Todas os seus pares de vértices são adjacentes
  - Um grafo completo não direcionado possui

    $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas
  - O número de grafos diferentes que podem ser obtidos a partir de V vértices é dados por

    $2^{|V|(|V| - 1)/2}$

Definições

- Árvore : Grafo não direcionado aciclico e conectado;
- Floresta: Grafo não direcionado acíclico conectado ou não;
- Árvore Geradora: Uma árvore geradora de um grafo G é um Subgrafo de G que contem todos os vértices de G e forma uma árvore;
- Floresta Geradora: Subgrafo de G que contem todos os vértices de G e forma uma floresta.



Caminhando em grafos: Busca em Profundidade

- Busca em Profundidade (Depth-first search): Caminha no grafo visitando todos os seus vértices

- Estratégia: Procura ir sempre o mais profundo no grafo

Busca em Profundidade

- As arestas são exploradas a partir do vértice ***v*** mais recentemente descoberto que ainda tem arestas não descobertas saindo dele;

- Quando todas as arestas de v tiverem sido exploras a busca anda para trás para explorar arestas que saem do vértice a partir do qual v foi descoberto

Busca em Profundidade

- Todos os vértices são inicializados com branco
- Quando um vértice é visitado pela primeira vez ele torna-se cinza
- Quando sua lista de adjacentes foi totalmente explorada ele torna-se preto

Busca em Profundidade

- Tempo de descoberta: d[v]
  - É o momento em que o vértice v foi visitado pela primeira vez
- Tempo de término do exame da lista de adjacentes: t[v]
  - É o momento em que a visita a toda lista de vértices adjacentes a v foi concluída
- d[v] e t[v] são inteiros entre 1 e 2V, one V é o número de vértices do vetor

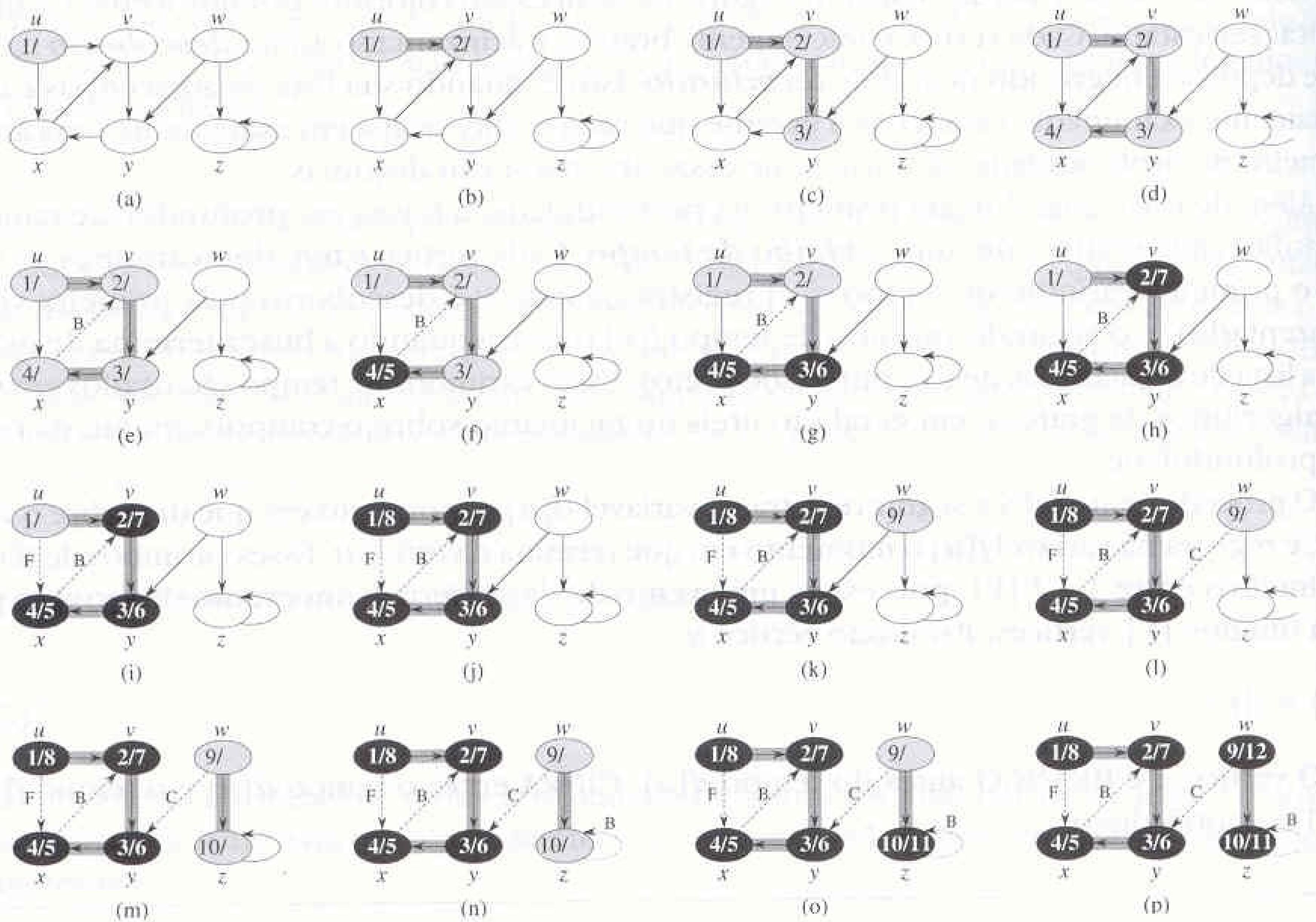
Busca em Profundidade: Algoritmo

```
Algoritmo DFS(G: grafo)
   para cada  vértice u de G faça
      cor[u]← branco
      pred[u]=←-1
   fim para
   para cada vertice u de G faça
      se (cor[u] = branco) entao
         visita(u)
      fim se
   fim para
```

Busca em Profundidade - Algoritmo

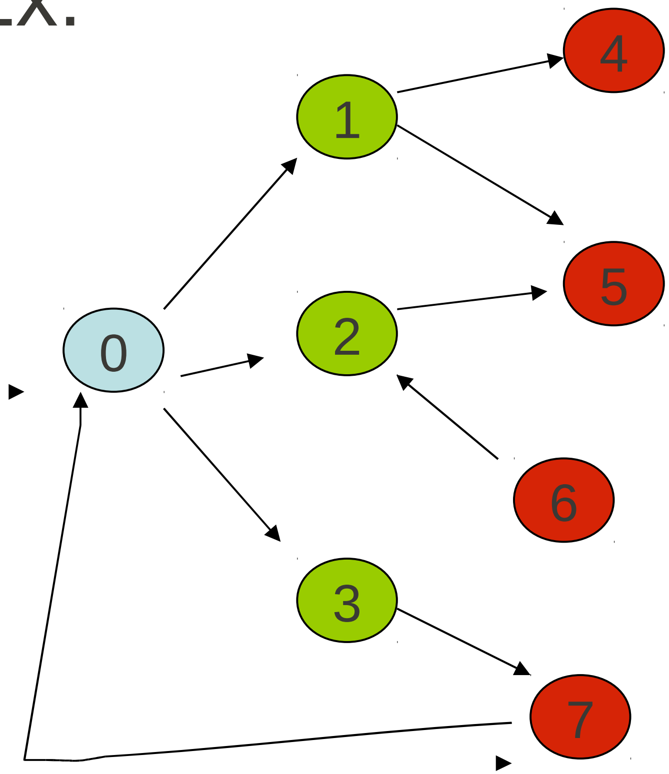
```
Visita(u: vertice)
   cor[u] ← cinza
   tempo ← tempo +1
   d[u]← tempo
   para cada v adjacente a u faça
      se cor[v] = branco entao
           pred[v]←u
           visita(v)
      fim se
    fim para
    cor[u]←preto
    tempo←tempo+1
    t[u]← tempo
 fim Visita
```

A Figura 22.4 ilustra o andamento de DFS sobre o grafo mostrado na Figura 22.2.



Busca em Largura

- Expande-se o conjunto de vértices descobertos uniformemente pelas adjacências do nó recém descoberto:
- Ex:



Descobre o vértice 0
Descobre os adjacentes de 0
Descobre os adjacentes de 1
Descobre os adjacentes de 2
Descobre os adjacentes de 3
Descobre os adjacentes de 5
Descobre os adjacentes de 6
Descobre os adjacentes de 7

Busca em Largura

- Na busca em largura o algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice de origem antes de descobrir os que estão a uma distância k+1
- O grafo pode ser direcionado ou não direcionado

Busca em Largura

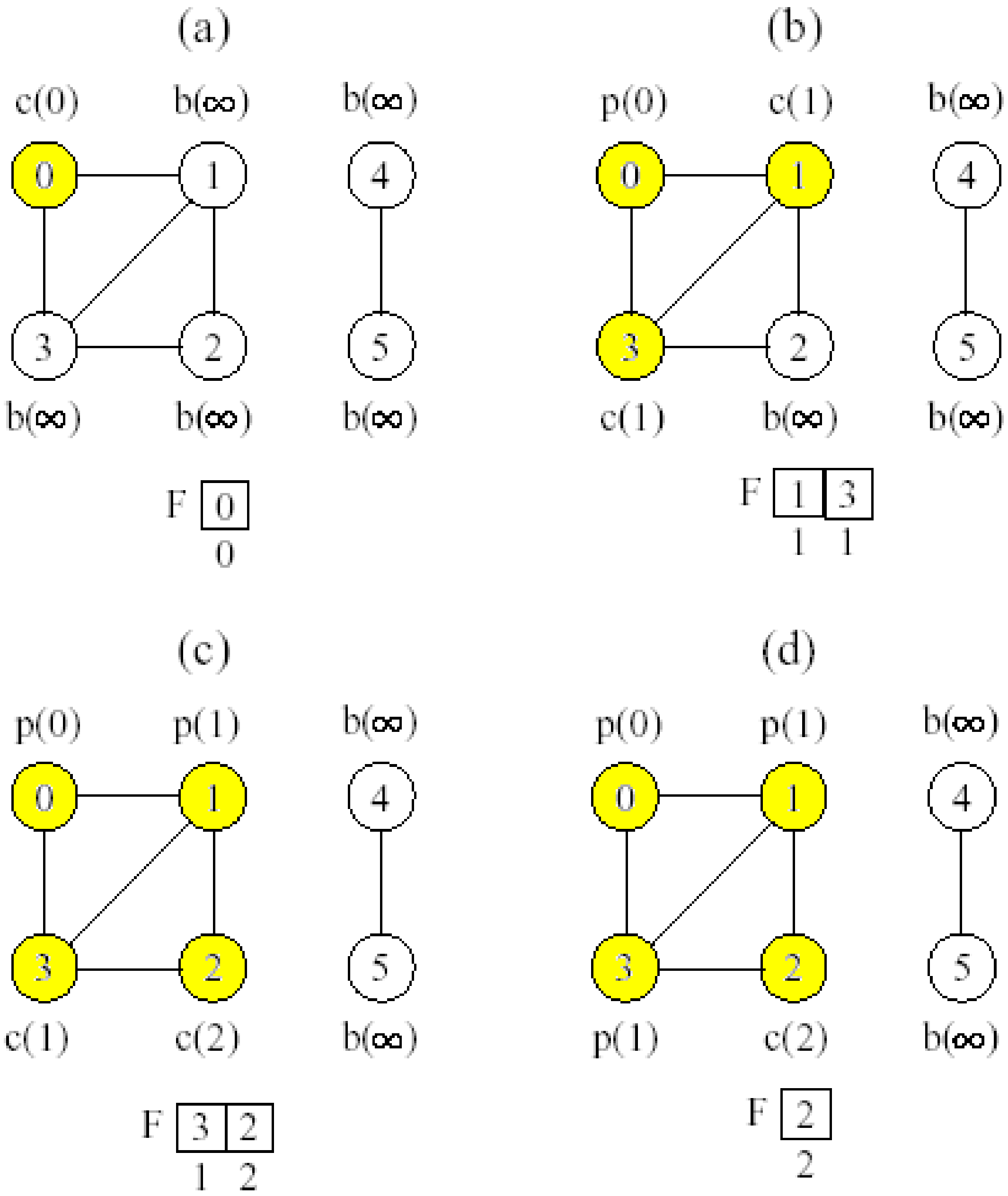
- Algoritmo
  - Cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
  - Todos os vértices são inicializados com branco.
  - Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se cinza.
  - Vértices cujos adjacentes são todos descobertos tornam-se pretos.
  - Se (u,v) E A e o vértice u é preto, então v tem quer ser cinza ou preto.
  - Vértices cinzas podem ter adjacentes brancos.

Busca em Largura

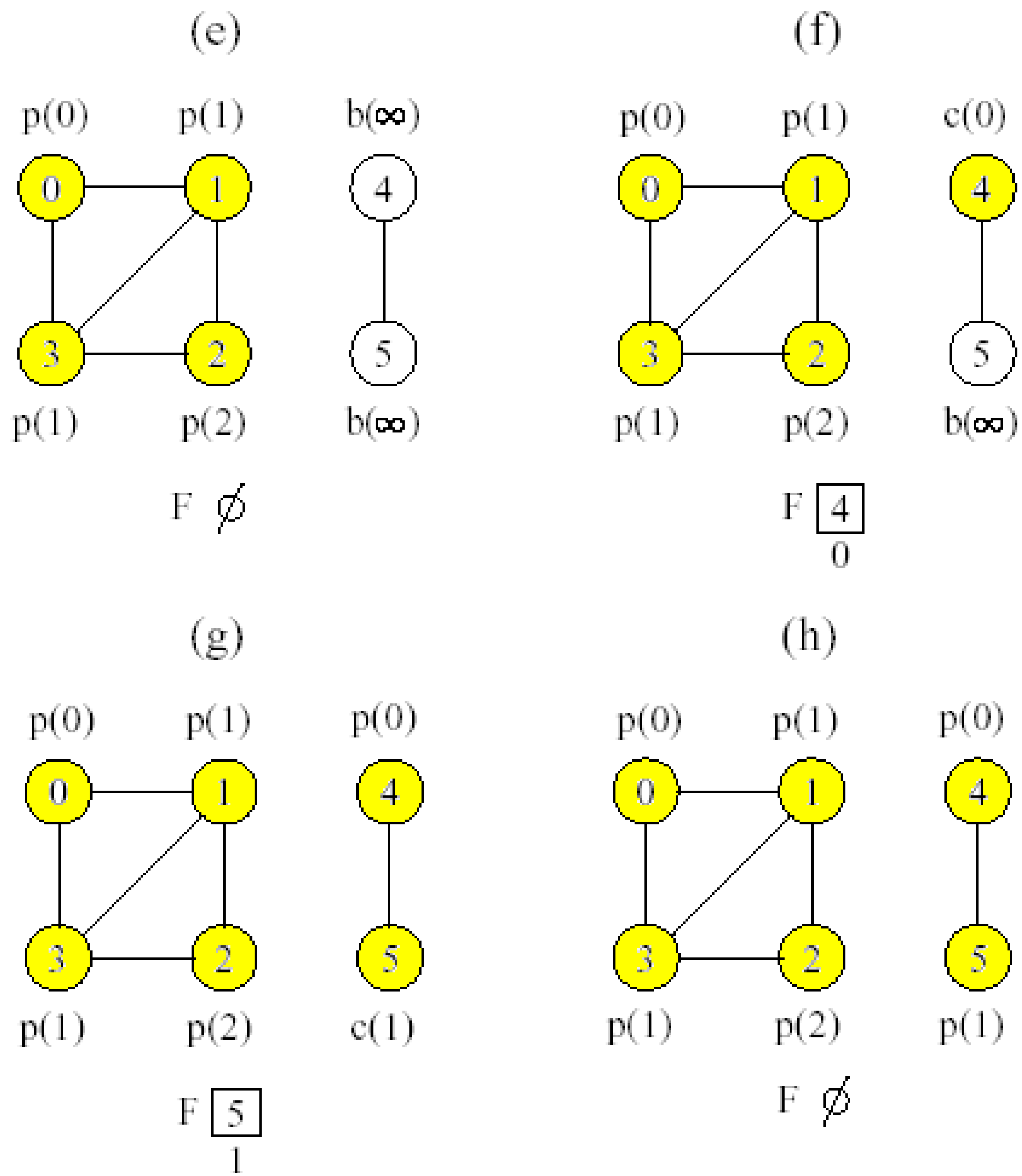
```
VisitaBFS(G)
   para cada vértice u de G  faça
     cor[u] ← BRANCO
     d[u] ← infinito
     antecessor[u]←nil
   fim para
   para cada vertice u de G faça
      se cor[u]←BRANCO então
         BFS(G,u)
  fim para
```

```
BFS(G,s)
cor[s]← cinza
 d[s]←0
 EsvaziaFila(Q)
Insere(Q,s)
Enquanto (FilaVazia(Q) == FALSO)  faça
   u← remove(Q,s)
   para cada v adjacente a u faça
      se (cor[v ]=BRANCO) então
          cor[v] = CINZA
          d[v]=d[u]+1
         antecessor[v]=u
         insere(Q,v)
    fim se
 fim  para
cor[u] ← PRETO
Fim BFS
```

Busca em Largura



Busca em Largura



Caminhos mais curtos

- O BFS encontra o caminho mais curto entre dois vértice u e v.
- O caminho entre dois vertices quaisquer fica armazenado no vetor antecessor

Caminhos mais curtos

- Ex: para imprimir o caminho mais curto entre um vértice v e o vértice de origem da busca:

```
ImprimeCaminho(Origem, v)
    se (Origem = v) entao
         imprima(origem)
   fim se
  Senao
    se (antecessor[v]!= nil)
      imprima(“Não existe caminho de v até a origem)
    fim se
    senao
       ImprimaCaminho(Origem,Antecessor[v])
      Imprima(v)
   fim senao
```