Grafos – Caminhos Mínimos

Técnicas de Programação Avançada

Mateus Conrad B. da Costa

Ifes - Campus Serra

17 de dezembro de 2024

Caminho Mínimo e Otimização

- O problema do caminho mínimo está associado à **otimização**.
- Representa a menor solução possível ou melhor maneira de atingir um objetivo.
- Seleciona a solução mínima com relação a alguma variável.

Caminho Mínimo

- Em um grafo, o caminho mínimo é a menor relação entre dois vértices.
- Dado um vértice origem u e destino v, $C_{\text{min}}(u, v)$ representa o menor peso entre os caminhos.
- **Exemplo:** Problema dos Odres de Vinho.

Caminho Mínimo - Origem Única

- Em um grafo ponderado $G = (V, A)$, dado um vértice de origem $s \in V$:
- Deseja-se obter os caminhos mínimos $\delta(s, v)$ para todos os vértices $v \in V$.

Problemas Mapeáveis no Problema Origem Única

- **Destino único:** Encontrar caminhos mínimos para um destino t pode ser transformado no problema origem única ao inverter a direção das arestas.
- **Par de vértices:** Pode ser resolvido pelo algoritmo de origem única.
- **Todos os pares:** Aplicar o algoritmo origem única para cada $v \in V$.

Representando Caminhos Mínimos

- Utiliza-se um vetor chamado **predecessor**.
- Para cada vértice v, predecessor[v] indica o vértice anterior no caminho.
- Ao final do algoritmo, o vetor predecessor contém os caminhos mínimos.

Explicação do Relaxamento

- O processo de **relaxamento** testa se um caminho alternativo melhora a distância atual calculada.
- O vetor de distâncias $d[v]$ representa o menor custo conhecido até v. Se encontrarmos um caminho mais curto, atualizamos $d[v]$.
- **Importância:** O relaxamento é a base de algoritmos como Bellman-Ford e Dijkstra.

Relaxamento

Algorithm 1 Relaxamento de uma aresta (u, v)

Require: Aresta (u, v) com peso $w(u, v)$, vetor de distâncias d, vetor de predecessores pred.

1: **if** $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **then**
2: $\quad d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
3: $\quad \text{pred}[v] \leftarrow u$
4: **end if**

Explicação do Algoritmo Bellman-Ford

- O algoritmo Bellman-Ford encontra caminhos mínimos a partir de um vértice de origem s em grafos com pesos negativos.
- Ele relaxa todas as arestas $|V| - 1$ vezes, garantindo a convergência para os menores pesos possíveis.
- Ao final, ele verifica se existe ciclo negativo no grafo.
- **Complexidade:** $O(V \cdot E)$.

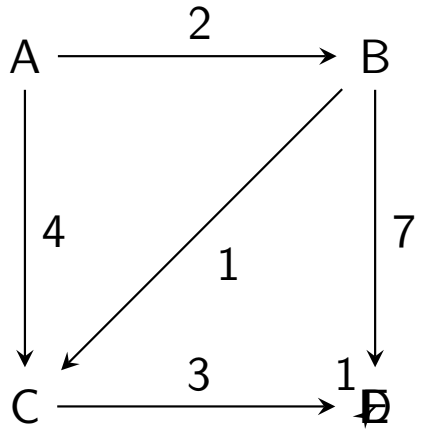
Algoritmo de Bellman-Ford

Algorithm 2 Bellman-Ford

Require: Grafo $G = (V, E)$, pesos w, vértice origem s

```
1:  inicializaOrigemUnica(G, pred, d)
2:  for i = 1 até |V| − 1 do
3:      for cada aresta (u, v) em E do
4:          relax(u, v, w)
5:      end for
6:  end for
7:  for cada aresta (u, v) em E do
8:      if d[v] > d[u] + w(u, v) then
9:          return FALSE
10:     end if
11: end for
12: return TRUE
```

Exemplo de Grafo e Vetor Predecessor



Vetor Predecessores:

- pred$[A]$ = null
- pred$[B] = A$
- pred$[C] = B$
- pred$[D] = C$
- pred$[E] = D$

Explicação da Ordenação Topológica

- A **ordenação topológica** organiza os vértices de um grafo acíclico direcionado (DAG) de forma linear.
- Se existe uma aresta (u, v), então u aparece antes de v na ordenação.
- É frequentemente usada como passo inicial para encontrar caminhos mínimos em DAGs.

Ordenação Topológica com DFS

Algorithm 3 ObtemOrdenaçãoTopológica(Grafo G)

Require: Grafo $G = (V, E)$ acíclico direcionado

```
1: Inicializa pilha S
2: Marca todos os vértices como não visitados
3: for cada vértice v ∈ V do
4:     if v não visitado then
5:         DFS-Visit(v)
6:     end if
7: end for
```

Ordenação Topológica com DFS

Algorithm 4 DFS-Visit(v)

1: **Saída:** Lista S com vértices ordenados
2: **Procedimento** DFS-Visit(v):
3: Marca v como visitado
4: **for** cada $u \in \text{Adj}(v)$ **do**
5: **if** u não visitado **then**
6: DFS-Visit(u)
7: **end if**
8: **end for**
9: Empilha v em S

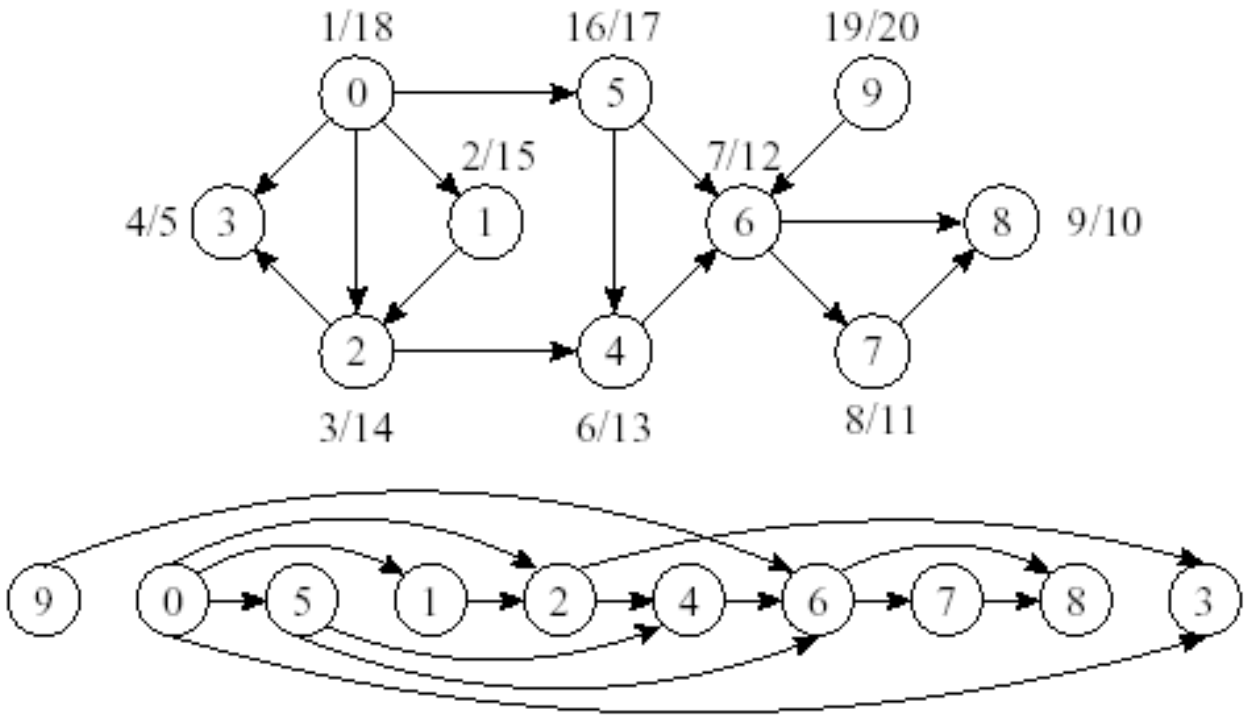
Caminho Mínimo em GAOs

Algorithm 5 Caminho Mínimo em GAOs

Require: Grafo $G = (V, E)$ acíclico, pesos w, vértice origem s

1: LOT $\leftarrow$ ObtemOrdenaçãoTopologica(G)
2: inicializaOrigemUnica(G, pred, d)
3: **for** cada vértice $u \in$ LOT **do**
4: **for** cada vértice $v \in$ Adj(u) **do**
5: relax(u, v, w)
6: **end for**
7: **end for**

Exemplo de Ordenação Topológica



Explicação do Algoritmo Dijkstra

- O algoritmo de Dijkstra encontra os caminhos mínimos em grafos com pesos não negativos.
- Ele utiliza uma fila de prioridade para escolher o vértice com menor distância conhecida e relaxa suas arestas.
- **Complexidade:** $O((V + E) \log V)$ com heap binário.

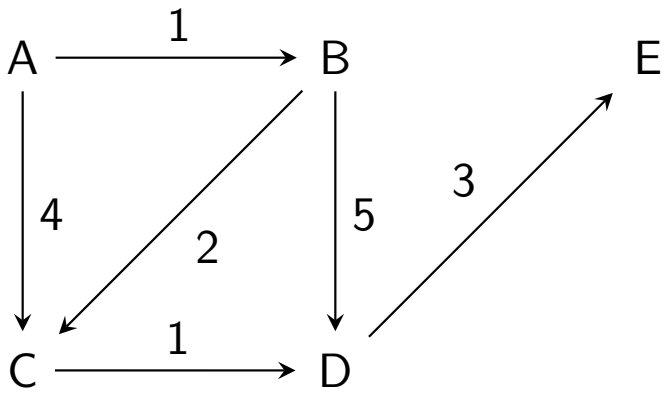
Algoritmo de Dijkstra

Algorithm 6 Dijkstra

Require: Grafo $G = (V, E)$, pesos não negativos w, origem s

1: inicializaOrigemUnica(G, $pred$, d)
2: Fila de prioridade $Q \leftarrow V$
3: **while** Q não está vazia **do**
4: $u \leftarrow$ retiraMínimo(Q)
5: **for** cada $v \in$ Adj(u) **do**
6: relax(u, v, w)
7: **end for**
8: **end while**

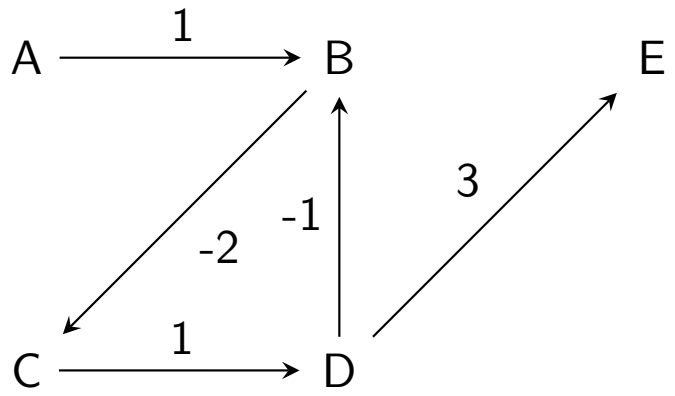
Exemplo de Dijkstra (sem ciclos negativos)



Vetor Predecessores (Final):

- pred$[A]$ = null
- pred$[B] = A$
- pred$[C] = B$
- pred$[D] = C$
- pred$[E] = D$

Exemplo de Dijkstra (com ciclos negativos)



Vetor Predecessores (Final):

- pred$[A]$ = null
- pred$[B] = D$ (loop detectado)
- pred$[C] = B$
- pred$[D] = C$
- pred$[E] = D$