

# CHAPITRE 4

## Transformée de Fourier

Au chapitre précédent, on a vu qu'on pouvait représenter une fonction périodique par une somme de sinusoides. La transformée de Fourier permet de représenter des signaux qui ne sont pas périodiques.

La transformée de Fourier est très utile dans certains domaines comme les télécommunications et le traitement de signaux.

### 4.1 Dérivation de la transformée de Fourier

On peut obtenir la transformée de Fourier à partir de la série de Fourier. Soit la série de Fourier, sous forme exponentielle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (4.1)$$

où

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.2)$$

On cherche une série de Fourier pour un signal apériodique. Si on fait tendre la période  $T$  vers l'infini ( $T \rightarrow \infty$ ), alors on passe d'un signal périodique à un signal apériodique. On regarde alors ces effets sur la série de Fourier.

Si  $T$  augmente, la séparation entre les harmoniques devient de plus en plus petite. On passe donc d'un spectre qui est seulement défini à quelques points à un spectre qui

est continu (infinité d'harmoniques). La différence entre deux harmoniques de la série de Fourier est :

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 \quad (4.3)$$

La différence entre deux harmoniques est tout simplement la fréquence fondamentale. Mais,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.4)$$

Alors si  $T \rightarrow \infty$ , la séparation entre les fréquences est devient une petite séparation  $d\omega$ . On passe de quelque chose de discret (seulement des fréquences à certains points) à quelque chose de continu. Au fur et à mesure que la période augmente,

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (4.5)$$

Un exemple est montré à la figure 4.1. On prend un pulse carré, de durée 0.2s, et on augmente progressivement la période. La figure du haut représente le pulse, de durée 0.2s, avec une période initiale de 1s. Le spectre de ce pulse est montré à la deuxième figure. La troisième figure montre le spectre du même pulse, mais cette fois avec une période de 2s. Les coefficients de la série de Fourier sont bien plus rapprochés. La dernière figure montre le pulse avec une période de 4s. On voit bien que plus la période augmente, plus les coefficients de la série de Fourier se rapprochent.

Quel est l'impact de ces changements sur l'équation 4.2 ? Les coefficients de la série de Fourier deviendront de plus en plus faibles :  $C_n \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ , ce qui fait du sens, puisque le signal est en train de devenir apériodique. Cependant, le produit  $C_n T$  ne devient pas nul :

$$C_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.6)$$

Cette dernière équation représente la transformée de Fourier :

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.7)$$

La transformée inverse est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.8)$$

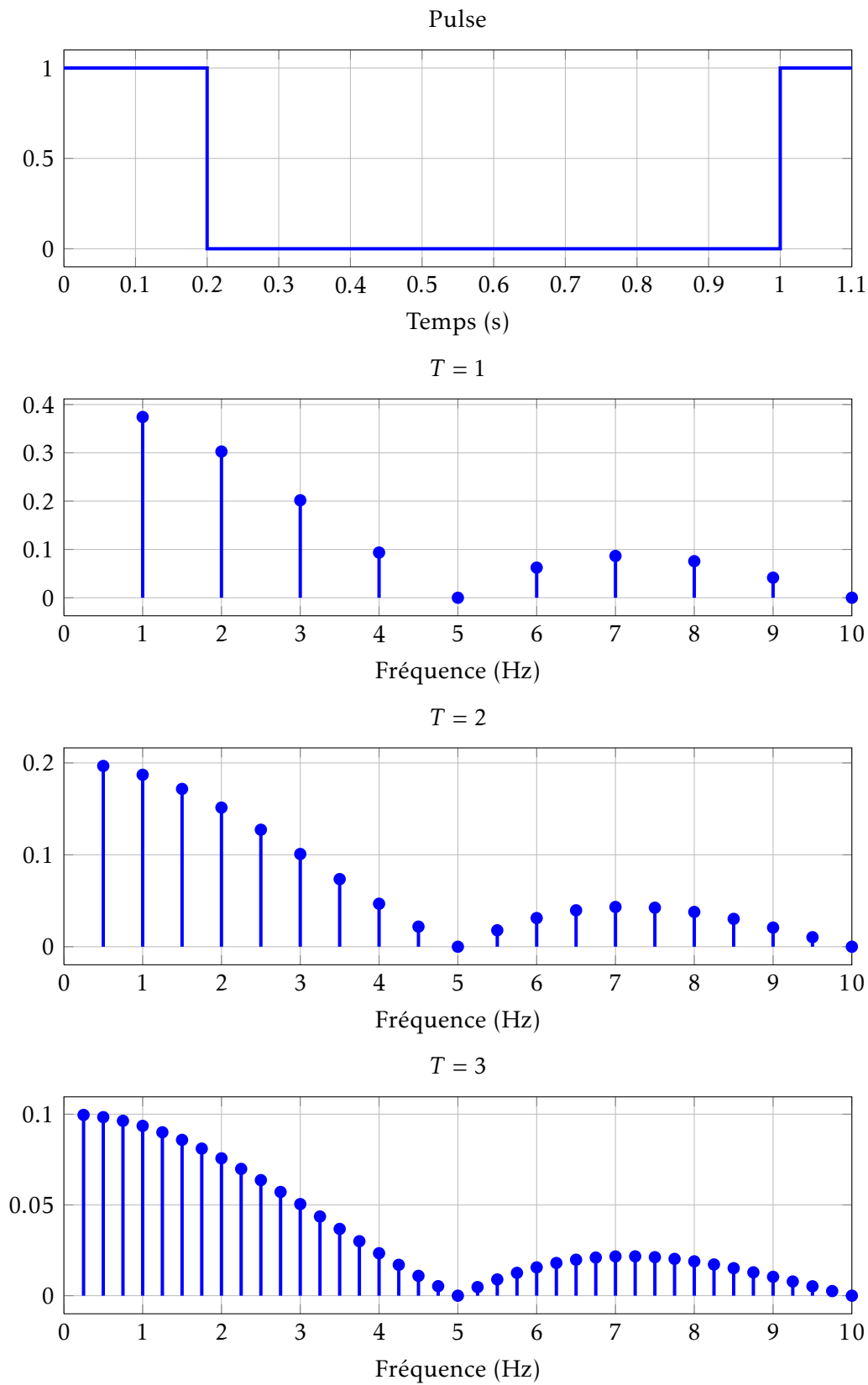
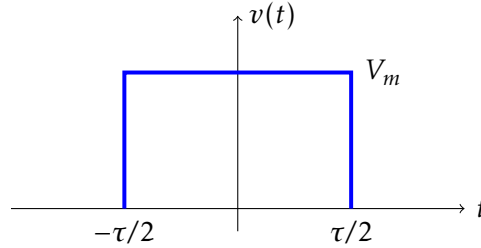


FIGURE 4.1 – Exemple de période qui tend vers l'infini

**EXEMPLE 1**

Faire la transformée de Fourier du pulse suivant :



En appliquant directement l'équation 4.7, on obtient :

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t} dt \\ &= V_m \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{V_m}{-j\omega} \left( -2j \sin \frac{\omega\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

On peut écrire ceci sous une autre forme,

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2} = V_m \tau \operatorname{sinc}(\omega\tau/2)$$

## 4.2 Convergence de la transformée de Fourier

Pour que la transformée de Fourier existe, il faut que la fonction  $f(t)$  converge. Les pulses et exponentiels qui sont très utilisés en génie électrique sont des intégrales qui convergent. Cependant, certains signaux intéressants, comme une constante ou les sinusoides, n'ont pas d'intégrale qui converge. On fait un peu de gymnastique mathématique pour obtenir la transformée de Fourier de ces signaux.

On prend l'exemple d'une constante  $A$ . On peut approximer cette fonction par la fonction suivante :

$$f(t) = A e^{-\epsilon|t|} \quad (4.9)$$

Si  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow A$ , comme montré à la figure 4.2.

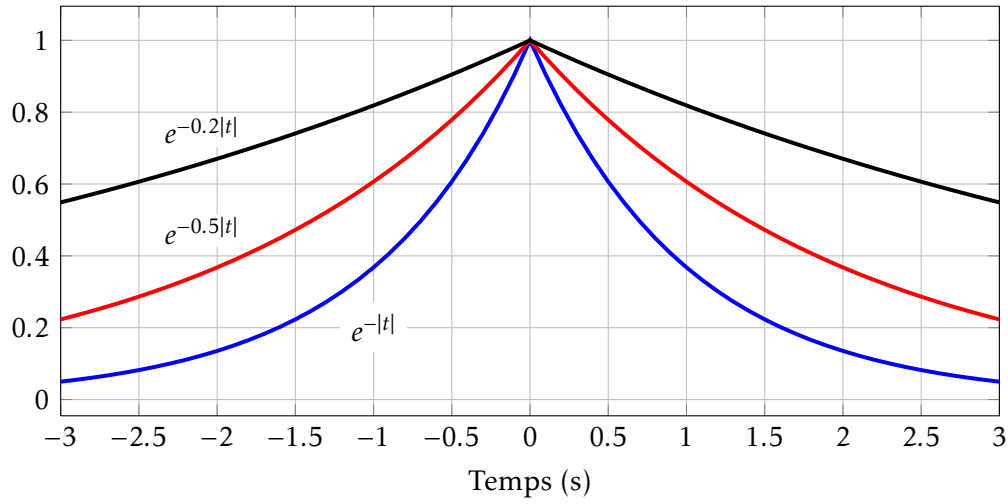


FIGURE 4.2 – Approximation d'une constante par un exponentiel

La transformée de Fourier de  $f(t)$  est donc :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 A e^{\epsilon t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} A e^{-\epsilon t} e^{-j\omega t} dt \quad (4.10)$$

En faisant l'intégration, on obtient :

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} \quad (4.11)$$

Lorsqu'on fait tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , la transformée de Fourier devient un pulse  $\delta$ . La surface sous  $F(\omega)$  représente la force du pulse et est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi A \quad (4.12)$$

La transformée de Fourier d'une constante  $A$  est donc :

$$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A \delta(\omega) \quad (4.13)$$

### Transformée de Fourier d'un signum

D'autres fonction sont aussi intéressantes à calculer. On commence en premier par la fonction signum. On utilise l'expression du signum avec des échelons pour faire le calcul :

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad (4.14)$$

Pour calculer la transformée de Fourier de cette fonction, il faut utiliser une approximation. On peut approximer la fonction  $\text{sgn}$  par l'expression suivante :

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)], \quad \epsilon > 0 \quad (4.15)$$

À partir de l'équation 4.7, on calcule

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-(\epsilon+j\omega)t}}{-(\epsilon+j\omega)} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{(\epsilon-j\omega)t}}{\epsilon-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{\epsilon+j\omega} - \frac{1}{\epsilon-j\omega} = \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

On prend maintenant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} = \frac{2}{j\omega} \quad (4.16)$$

### Transformée de Fourier d'un échelon

On peut faire la transformée de Fourier d'un échelon si on s'aperçoit qu'un échelon peut être décrit par :

$$u(t) = 0.5 + 0.5 \text{sgn}(t) \quad (4.17)$$

Alors,

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\{0.5\} + \mathcal{F}\{0.5 \text{sgn}(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (4.18)$$

Quelques transformées de Fourier importantes sont données dans le tableau 4.1.

## 4.3 Transformées opérationnelles

La transformée de Fourier possède ce qu'on appelle des transformées opérationnelles : ce sont des propriétés qui permettent de simplifier le calcul des transformées.

TABEAU 4.1 – Transformées de Fourier communes

Fonction	$f(t)$	$F(\omega)$
impulsion	$\delta(t)$	1
constante	$A$	$2\pi A\delta(\omega)$
signum	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
échelon	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}, a > 0$
exponentiel complexe	$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
cosinus	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
sinus	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

### 4.3.1 Multiplication par une constante

De la définition de la transformée de Fourier, si

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \quad (4.19)$$

alors

$$\mathcal{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega) \quad (4.20)$$

La multiplication de  $f(t)$  par une constante correspond à la multiplication de  $F(\omega)$  par la même constante.

### 4.3.2 Addition (Soustraction)

L'addition (soustraction) dans le domaine du temps correspond à une addition (soustraction) dans le domaine de fréquence. Donc, si

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_1(t)\} &= F_1(\omega) \\ \mathcal{F}\{f_2(t)\} &= F_2(\omega) \\ \mathcal{F}\{f_3(t)\} &= F_3(\omega) \end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(\omega) + F_2(\omega) - F_3(\omega) \quad (4.21)$$

### 4.3.3 Dérivé

La transformée de Fourier de la dérivée de  $f(t)$  est :

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega) \quad (4.22)$$

De façon générale,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega) \quad (4.23)$$

Ces deux équations sont valides si  $f(t) = 0$  à  $\pm\infty$ .

### 4.3.4 Intégration

L'intégration dans le domaine du temps correspond à diviser par  $j\omega$  dans le domaine de Laplace.

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x)dx\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad (4.24)$$

Cette relation est seulement valide si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0 \quad (4.25)$$

### 4.3.5 Échelonnage

Le temps et la fréquence sont des domaines réciproques : si le temps est étiré, la fréquence est compressée (et vice-versa).

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0 \quad (4.26)$$

### 4.3.6 Translation dans le domaine du temps

La translation dans le domaine du temps représente un déphasage : l'amplitude du signal ne change pas, mais sa phase change.

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega) \quad (4.27)$$



### 4.3.7 Translation dans le domaine de fréquence

La translation dans le domaine de fréquence correspond à une multiplication par un exponentiel dans le domaine du temps.

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0) \quad (4.28)$$

### 4.3.8 Modulation

La modulation en amplitude est le processus de faire varier l'amplitude d'une sinusoïde. Si le signal modulant est noté  $f(t)$ , le signal modulé devient  $f(t)\cos(\omega_0 t)$ . Le spectre de ce signal est la moitié de l'amplitude de  $f(t)$  centré à  $\pm\omega_0$ .

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = 0.5F(\omega - \omega_0) + 0.5F(\omega + \omega_0) \quad (4.29)$$

Cette dernière propriété est très importante en télécommunications.

### 4.3.9 Convolution

La convolution dans le domaine de temps représente une multiplication dans le domaine de fréquence (et vice-versa).

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda\right\} = X(\omega)H(\omega) \quad (4.30)$$

### 4.3.10 Dualité

Si  $F(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$ , alors la transformée de Fourier de  $F(t)$  est  $2\pi f(-\omega)$  :

$$F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega) \text{ si } f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$$

#### EXEMPLE 2

Lors de la création de signaux de communication, il est très commun de multiplier deux sinusoïdes, tels que

$$g_1(t) = 2\cos(200t) \quad g_2(t) = 5\cos(3000t)$$

pour obtenir un signal *modulé*

$$g_3(t) = g_1(t)g_2(t) = 10 \cos(200t) \cos(3000t)$$

Calculer le spectre du signal modulé  $g_3(t)$ .

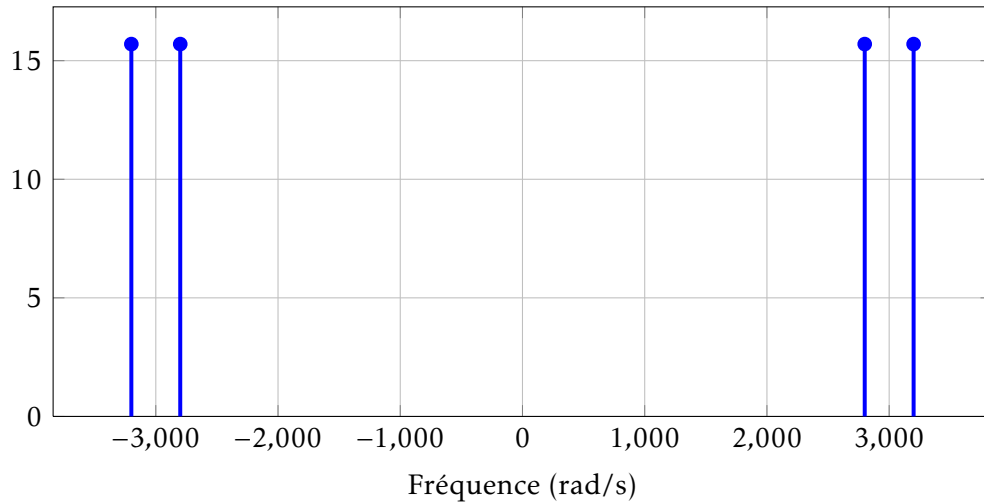
On peut utiliser la propriété de modulation (équation 4.29), pour obtenir la transformée de Fourier. Dans l'équation 4.29, on choisit  $f(t) = 10 \cos(200t)$  qui est modulé par  $\cos(3000t)$ . Il faut maintenant trouver la transformée de Fourier de  $f(t)$ . À l'aide du tableau 4.1, on obtient :

$$\mathcal{F}\{10 \cos(200t)\} = 10\pi(\delta(\omega + 200) + \delta(\omega - 200))$$

Il faut ensuite appliquer la propriété de modulation. On obtient :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 10(0.5)\pi(\delta(\omega + 200 - 3000) + \delta(\omega + 200 + 3000) \\ &\quad + \delta(\omega - 200 + 3000) + \delta(\omega - 200 - 3000)) \\ &= 5\pi(\delta(\omega - 3200) + \delta(\omega - 2800) + \delta(\omega + 2800) + \delta(\omega + 3200)) \end{aligned}$$

Le spectre ainsi obtenu est donné à la figure suivante.



## 4.4 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval permet de faire le lien entre l'énergie d'un signal en fonction du temps et l'énergie en fonction de la fréquence. Puisque la fréquence et le temps sont

deux domaines qui permettent de décrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines. Le théorème de Parseval est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.31)$$

**EXEMPLE 3**

Le courant dans une résistance de  $40\Omega$  est  $i(t) = 20e^{-2t}u(t)$ A. Quel est le pourcentage de l'énergie totale dissipée dans la résistance provient de la bande  $0 < \omega < 2\sqrt{3}$  rad/s ?

L'énergie totale dissipée est :

$$W = R \int_0^{\infty} i^2(t) dt = 40 \int_0^{\infty} 400e^{-4t} dt = 4000 \text{ J}$$

On peut le calculer par la série de Fourier.

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}$$

L'amplitude de la série de Fourier est :

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

et l'énergie totale est :

$$W = \frac{40}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega = \frac{16000}{\pi} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \Big|_0^{\infty} = 4000 \text{ J}$$

L'énergie dans la bande  $0 < \omega < 2\sqrt{3}$  rad/s est :

$$W_x = \frac{40}{\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega = \frac{16000}{\pi} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \Big|_0^{2\sqrt{3}} = 2666.67 \text{ J}$$

Le pourcentage de l'énergie totale dans cette bande est :

$$\frac{2666.67}{4000} = 66.67\%$$

## 4.5 Densité spectrale

La densité spectrale d'énergie est une mesure de la distribution d'énergie d'un signal en fonction de la fréquence. On la calcule selon :

$$E_f = \frac{1}{\pi} |F(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} F(\omega) F(\omega)^* \quad (4.32)$$

La densité spectrale de puissance est une mesure de la distribution de puissance d'un signal en fonction de la fréquence. Elle s'applique aux signaux périodiques. On la calcule selon :

$$P_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 \quad (4.33)$$

où  $F_T$  est la transformée de Fourier d'une période du signal.

La puissance d'un signal peut être calculée à partir de la transformée de Fourier :

$$P = \frac{1}{4\pi^2} |F(0)|^2 + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} |F(n\omega_0)|^2 \quad (4.34)$$

## 4.6 Transformée de Fourier d'un signal périodique

Au chapitre précédent, on a vu qu'une fonction périodique pouvait être représentée par sa série de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (4.35)$$

où

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (4.36)$$

À partir de ceci, on peut calculer la transformée de Fourier d'un signal périodique. En appliquant la transformée de Fourier à l'équation 4.35, on obtient :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{jn\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt \quad (4.37)$$

À l'aide de la propriété de linéarité et la transformée d'un exponentiel complexe (tableau 4.1), on obtient :

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.38)$$

ce qui veut dire que le spectre d'un signal périodique est une série d'impulsions qui se trouvent à des multiples de la fréquence fondamentale du signal. L'amplitude de chaque impulsion est le coefficient de la série de Fourier multiplié par  $2\pi$ .

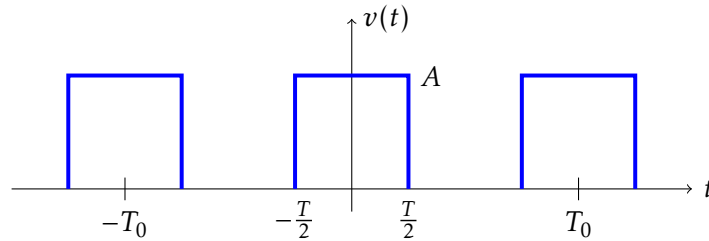
On peut réarranger l'expression de la transformée de Fourier d'un signal périodique sous une autre forme :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 G(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

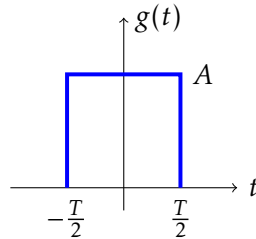
où  $G(\omega)$  est la transformée de Fourier d'une période du signal.

**EXEMPLE 4**

Faire la transformée de Fourier du signal périodique suivant.



Le signal  $g(t)$  est une période de  $v(t)$  :



La transformée de Fourier de  $g(t)$  est :

$$G(\omega) = AT \operatorname{sinc}(T\omega/2)$$

La transformée de Fourier de  $v(t)$  est :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} AT \omega_0 \operatorname{sinc}(n\omega_0 T/2) \delta(\omega - n\omega_0)$$

Le spectre (si  $A = 1$ ,  $T = 0.5\text{s}$ ,  $T_0 = 8\text{s}$ ) :

