Métodos Numéricos 93.07 Curso 2021 - Promen 1

Esta lista de enunciados tiene dos partes. En la primera parte (sección 1) se presentan tres problemas de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con solución conocida. Se propone realizar algunos experimentos numéricos tendientes a verificar alguna característica de los métodos numéricos presentados en el curso para aproximar la solución de esta clase de problemas. Cada grupo tendrá asignado uno de estos problemas que se presentan.

En la sección 2 se listan tres problemas donde se propone obtener la aproximación a la solución de un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que modela la evolución de un proceso o sistema con el tiempo. Se solicita obtener aproximaciones de esa evolución así como realizar experimentos numéricos para determinar la longitud del intervalo de integración y el tamaño del paso de integración. Cada grupo tendrá asignado uno de estos problemas.

Asignación de la tarea.

Se publican en este documento 6 ejercicios: 3 en la primera sección y 3 en la segunda. Para conocer cuál es el ejercicio de cada sección que corresponde a cada grupo tomen el mayor número de legajo M de los componentes del grupo. Si el resto de dividir M por 3 es r entonces el número de ejercicio asignado es $r+1$. Consignen en la carilla de su presentación la ejecución del código siguiente en *Octave*:

```
rem(max(G),3) + 1
```

donde G es el vector con los números de legajo de los miembros del grupo. Por ejemplo:

```
G=[62576 60286 60761 59386];
ejercicio = rem(max(G),3)+1
ejercicio =  3
```

En este ejemplo el grupo debe presentar la solución al ejercicio 3 de cada una de las dos secciones.

Recomendaciones para la presentación.

Para la realización y entrega del **Promen** se propone que formen grupos de entre cuatro y seis alumnos. Se deberá presentar un informe escrito sobre el proyecto. Los proyectos se evaluarán tomando en cuenta los siguientes puntos:

- Redacción y forma.

- Resolución.
- Resultados.

Los informes deberán ser entregados en formato pdf. Cada trabajo tendrá un Primer Autor y los restantes integrantes como Co-Autores. La designación del orden de autoría queda a cargo de los autores. Se pide que incluyan email (del ITBA) del Primer Autor.

Sobre el informe.

El informe escrito deberá contener:

1. **Título del informe**: Puede ser un título de fantasía a elección de los autores o bien el tema o métodos numéricos que se implementen para resolver los problemas.

2. **Nombre(s) (o iniciales), apellido y número de legajo** de cada uno de los autores, indiquen claramente el primer autor con email (del ITBA).

3. **Enunciado completo del ejercicio** o situación a plantear y resolver.

4. **Redacción** Se recomienda el uso de la primera persona del plural en la redacción. No mezclen varias personas a lo largo de la redacción. Revisen con cuidado el uso de los signos de puntuación. Usen algún editor de ecuaciones para escribir expresiones matemáticas. Usen letra itálica para las variables que se mencionen en un texto. Numeren aquellas expresiones que sea necesario referenciar o aclarar en el texto.

5. **Planteo del problema y resultados obtenidos**: Los resultados obtenidos deben ser presentados con claridad y precisión, en cuanto a los resultados numéricos se debe considerar el número de decimales en acuerdo con precisión establecida o bien con el número de decimales que resulte adecuado en el contexto en que la variable se mide. Se recomienda la presentación de resultados usando tablas y/o gráficos. En el caso de las tablas (arreglos de de tipo matricial con resultados numéricos) los resultados deben presentarse con el número de cifras significativas en acuerdo con la cota del error con que fueron obtenidos. Las tablas deberán estar numeradas consecutivamentecon números arábigos y tener una leyenda aclaratoria. Las figuras (gráficos, fotos, mapas, curvas y otras imágenes) deberán estar numeradas consecutivamente con números arábigos y llevar un epígrafe que las describa brevemente. No alcanza con solo mostrar figuras, sino que deberán estar explicadas en el texto. El documento que presenten tendrá entonces: texto, expresiones matemáticas (algunas de ellas numeradas para poder se referenciadas en el texto), **tablas** (numeradas y referenciadas en el texto) y **figuras** (numeradas y referenciadas en el texto).

   En los gráficos se deben colocar leyendas cuando se representan más de una curva o serie de puntos. Deben colocar rótulos en los ejes vertical y horizontal de un gráfico cartesiano con la variable que se representa. Incluyan en el texto ó en un apéndice los códigos de *Matlab/Octave* utilizados y la invocación de linea de comando que se haya realizado para responder a los requerimientos del problema.

6. **Conclusiones**: deberán interpretar los resultados (no repetirlos). No es imprescindible incluir una sección de conclusiones. Suele resultar ventajoso combinar resultados y conclusiones en una sola sección para minimizar la repetición.

7. **Códigos desarrollados**: Los códigos desarrollados para responder a las preguntas propuestas deben estar debidamente documentados con comentarios aclaratorios. Se recomienda incluirlos como apéndice de la presentación e indicar en el trabajo las invocaciones que dan por resultado las tablas o gráficos solicitados.

Las citas bibliográficas en el texto deberán presentarse por autor(es) y año. Si se cita a mas de dos autores, deberá indicarse al primer autor, seguido de *et al* y el año. Por ejemplo:

J. H. Mathews, K. D. Fink : *Métodos numéricos con Matlab*, Prentice Hall, 2000.

1. Un problema de valor inicial con solución conocida.

1. **Ejercicio 1:** $y'(t)\,(1+t) = -2\,y(t) + \exp(t)\,(1+t)^{-1} \quad t \in [0,5], \quad y(0) = -3$. La solución del problema es $y(t) = (-4+\exp(t))\,(1+t)^{-2}$.

2. **Ejercicio 2:** $2\,t^2\,y'(t) - t\,y(t) = 2\,t\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t), \quad t \in [1,6], \quad y(1) = \mathrm{sen}(1)$. La solución del problema es $y(t) = \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}$.

3. **Ejercicio 3:** $y'(t) = y(t)\,\mathrm{sen}(t) \quad t \in [0,5], \quad y(0) = 1$. La solución del problema es $y(t) = \exp(1-\cos(t))$.

Actividades a realizar: Con el ejercicio que le corresponda al grupo se solicita realizar las actividades que se indican a continuación. Con t_0 y t_f se denotan los extremos izquierdo y derecho del intervalo de valores de la variable independiente y $T = t_f - t_0$ es la longitud del intervalo indicado en cada caso.

1. Obtenga un valor del paso de integración h_E de manera tal que el error global E en t_f sea menor que 10^{-4}. En esta situación el error global E se puede calcular porque se conoce la solución del problema de valor inicial. Considere valores de h de la forma $\frac{T}{2^r}$ para r tomando los valores de 2 a 9 y realice una tabla con dos columnas, una con el valor del paso h y la otra con el valor de E. Realice la elección de h_E usando los métodos de *Heun* y *Runge-Kutta* de orden 4.

2. Considere nuevamente la colección de valores de h del ítem anterior. Ejecute la estrategia *adelante - atrás* en $[t_0, t_f]$ hasta obtener una aproximación del valor inicial del problema con error menor que 10^{-6}. Use el método de *Runge-Kutta* de orden 4. Reseñe en una tabla los resultados del experimento numérico. Indique el valor de h para el que se obtiene la condición de alcanzar la aproximación del valor inicial.

3. Represente gráficamente el error global en $t = t_f$ para valores de h de la forma propuesta en el primer ítem. Para el error global recuerde que se conoce la solución del problema y entonces se puede calcular el error global. Use los métodos de *Heun* y *Runge-Kutta* de

orden 4 para aproximar el valor de $y(t_f)$. Realice el gráfico con escalas logarítmicas en los dos ejes y superponiendo los errores globales por ambos métodos. Genere un cálculo que ponga en evidencia el orden del error global de cada uno de estos métodos. Por ejemplo puede generar los cocientes incrementales entre puntos contiguos en la tabla donde reseñe el logaritmo del error global en función del logaritmo del paso h de integración. Esos cocientes incrementales tienden a una constante que es el orden del método de paso fijo utilizado.

4. **Uso de ode45 en Octave** El procedimiento `ode45` de Octave implementa un procedimiento de aproximación de la solución de problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales ordinarias. El uso básico del procedimiento puede consultarse en la ayuda de *Octave* en la forma `help ode45` en la línea de comando o en algún manual en línea. Este procedimiento permite especificar el error global con una opción `AbsTol`. Proponer `1e-3` como valor de esa cota de error. Represente gráficamente la aproximación obtenida para la solución del problema inicial en $[t_0, t_f]$. Observe que el vector de valores de la variable independiente en donde se genera aproximación no necesariamente es de espaciado constante. Represente gráficamente el vector de valores de la variable independiente para mostrar como el espaciado entre valores consecutivos no es constante. Mostrar el mínimo y el máximo espaciamiento entre valores consecutivos de la variable independiente.

2. Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

2.1 Movimiento de un punto material en un anillo rotante.

Un punto material de masa m se mueve a lo largo de un anillo que gira con velocidad angular constante ω en torno de un diámetro que tiene la dirección vertical (fig. 1). Si θ es el ángulo que corresponde al arco de circunferencia que va del punto material en movimiento al punto mas bajo del anillo y no se considera el rozamiento entonces $\theta(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\ddot{\theta} + (\frac{g}{R} - \omega^2 \cos(\theta)) \sin(\theta) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y R el radio del anillo.

1. Escriba el problema de valor inicial para el sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del cual son solución $\theta(t)$ y $v(t) = \dot{\theta}(t)$. Verifique que el problema tiene el invariante $E = v^2 - \frac{2g}{R}\cos(\theta) - \omega^2 \sin^2(\theta)$, esta función de θ y $v = \dot{\theta}$ es una constante para todo valor de t y queda determinada por las condiciones iniciales. Para hacer esa verificación derive E respecto del tiempo y luego tenga en cuenta el sistema de ecuaciones diferenciales.

2. Suponga $\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$ un parámetro adimensional de interés en este problema. Si $\alpha > 1$ entonces hay un punto de equilibrio estable en $\theta_1 = 0$; si $\alpha < 1$ entonces el punto de equilibrio $\theta_1 = 0$ es inestable mientras que el punto de equilibrio θ_2 tal que $\cos\theta_2 = \alpha$ es estable. En los puntos de equilibrio se cumple que si $\theta(0)$ es igual a la coordenada

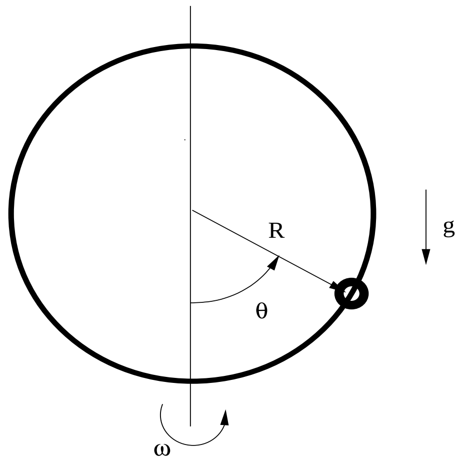

Figura 1: Punto material en un anillo rotante

del punto equilibrio entonces $\theta(t)$ es constante para todo valor de t. En los puntos de equilibrio estable se verifica que si $\theta(0)$ se aparta de la coordenada del punto equilibrio entonces el movimiento del punto en torno de dicha posición es oscilatorio. Si el punto de equilibrio es inestable y $\theta(0)$ es distinto de la coordenada de este punto entonces el punto material se *escapa* de esta posición; en este caso lo hace hacia la otra posición que es de equilibrio estable.

a) Suponga que $R = 1$, $g = 10$ y $\omega = 2.5$ (en unidades del SI), de manera tal que $\alpha > 1$. Obtenga una aproximación a $\theta(t)$, usando el *método de Runge-Kutta de orden 4*, para $\theta(0) = 0.1$ y $\theta(0) = 1$ si en ambos casos es $v(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Elija adecuadamente el intervalo de integración de manera tal que el anillo realice varias vueltas y que el valor del paso constante de integración h sea tal que la variación del invariante E, evaluado en la aproximación a la solución del problema de valor inicial, sea menor que 10^{-5} en todo el intervalo de integración. Represente gráficamente la aproximación a $\theta(t)$ en función de t y la trayectoria en el espacio teniendo en cuenta que, en coordenadas cartesianas, $x(t) = \sin(\theta(t))\cos(\omega\, t)$, $y(t) = \sin(\theta(t))\sin(\omega\, t)$ y $z(t) = 1 - \cos(\theta(t))$. Para esta última representación gráfica puede usarse **plot3** en *Octave*.

b) Suponga que $R = 1$, $g = 10$ y $\omega = 5$ (en unidades del SI), de manera tal que $\alpha < 1$. Obtenga una aproximación a $\theta(t)$, usando el *método de Runge-Kutta de orden 4*, para $\theta(0) = 0.1$ y $\theta(0) = 1$ si en ambos casos es $v(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Elija adecuadamente el intervalo de integración de manera tal que el anillo realice varias vueltas y que el valor del paso constante de integración h sea tal que la variación del invariante E, evaluado en la aproximación a la solución del problema de valor inicial, sea menor que 10^{-5} en todo el intervalo de integración. Represente gráficamente la aproximación a $\theta(t)$ en función de t y la trayectoria en el espacio teniendo en cuenta que, en coordenadas cartesianas, $x(t) = \sin(\theta(t))\cos(\omega\, t)$, $y(t) = \sin(\theta(t))\sin(\omega\, t)$ y $z(t) = 1 - \cos(\theta(t))$. Para esta última representación gráfica puede usarse **plot3** en *Octave*.

c) Considere las condiciones del item anterior respecto del movimiento oscilatorio en torno de $\theta = 0$. El período de oscilación depende de la amplitud. Para obtener valores del período para diferentes amplitudes utilice el procedimiento `periodo` en *Octave* que se muestra en el Apéndice. Tome amplitudes $\theta(0)$ iguales a 0.5, 1, 1.5 y 2. En todos los casos suponga $v(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

2.2 Movimiento de un punto material sobre la superficie de un cono.

Un punto material de masa m se mueve en la superficie de un cono de revolución con eje de simetría vertical y vértice en el origen de coordenadas. El cono se supone lo suficientemente liso como para despreciar el rozamiento. La altura del cono es igual al radio de la base. Sea $r(t)$ la distancia del punto de masa m al eje de simetría al instante t y $\theta(t)$ el ángulo que al instante t forma el plano que contiene al eje de simetría del cono y al punto en movimiento con un plano de referencia fijo que contiene al eje de simetría del cono (así r y θ son las coordenadas polares del punto de masa m, con polo en el origen de coordenadas). Como la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto en movimiento no tiene componente transversal entonces se conserva la componente z del momento cinético de este punto material respecto del origen de coordenadas. De aquí se tiene que, en todo instante, se cumple $r^2\,\dot{\theta} = C$, donde la constante C se calcula en el instante $t = 0$ a partir de los valores iniciales $r(0)$ y $\dot{\theta}(0)$ (la velocidad angular inicial).

Se puede probar que la coordenada radial $r(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{2\,r^3} + \frac{g}{2} = 0, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0,$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

No es difícil demostrar que este problema tiene un invariante temporal E (vinculado a la conservación de la energía mecánica) que se puede expresar de la siguiente manera:

$$v^2 + \frac{C^2}{2\,r^2} + g\,r = E,$$

donde $v(t) = \dot{r}(t)$. El valor de la constante E se calcula con las condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $v(0) = \dot{r}(0) = v_0$.
Una selección adecuada de las condiciones iniciales da lugar a que el movimiento del punto material sea circular y uniforme en un plano horizontal. En otras situaciones puede ocurrir que $r(t)$ quede acotado entre dos valores. En ambos casos el punto de masa m *orbita* en torno al eje de simetría del cono.

1. Escriba el problema de valor inicial para el sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del cual son solución $r(t)$, $v(t) = \dot{r}(t)$ y $\theta(t)$. Verifique que el problema tiene el invariante E y que imponiendo, por ejemplo, $r(0) = R$, $v(0) = 0$ y $R\,\dot{\theta}(0)^2 = g$ se cumple que el punto de masa m orbita con movimiento circular uniforme. Para verificar que E no cambia alcanza con derivarlo respecto del tiempo y usar el sistema de ecuaciones diferenciales que vincula las coordenadas y sus derivadas. Para la condición de movimiento circular pruebe que hay una relación para la cual los valores de r, z y $\dot{\theta}(t)$ resultan constantes.

2. Aproxime la solución del problema de valor inicial para los siguientes casos:

   a) $r(0) = z(0) = 1$, $v(0) = 0$ y $C^2 = 5$, verificar que este caso r está acotada y obtener las cotas.

   b) alguna selección de valores iniciales para el caso de la órbita circular.

   c) si $r(0) = z(0) = 1$, $v(0) = 0$ y C^2 tomando los valores 2, 3, y 4.

   Para obtener la aproximación de la solución del problema de valor inicial habrá que experimentar sobre el problema acerca de la longitud del intervalo de integración y el tamaño del paso de integración constante h. Para seleccionar este último parámetro numérico se sugiere utilizar el invariante E evaluado en la aproximación a la solución del problema de valor inicial. Comentar los experimentos numéricos realizados para elegir la longitud del intervalo y el paso de integración. Haga una elección del paso de integración de manera que la máxima variación de E en el intervalo de integración elegido no supere 10^{-4}

   En todos los casos se requiere representar gráficamente $r(t)$, $v(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en función de t así como la órbita del punto en el interior de la superficie cónica. Para este último gráfico habrá que obtener las aproximaciones de las coordenadas cartesianas x ,y y z a partir de las coordenadas polares r y θ. Como la altura del cono y el radio de la base son iguales entonces mientras el punto esté en contacto con la superficie se tiene $z = r$. Para esa representación puede usarse **plot3** en *Octave*.

3. Considere las condiciones $r(0) = z(0) = 1$, $v(0) = 0$ y C^2 tomando los valores 2, 3, 4 y 5. La coordenada r oscila en torno de un valor. El período de oscilación depende de la amplitud (que lo determina el valor de C^2). Para obtener valores del período de oscilación de r para diferentes amplitudes utilice el procedimiento `periodo` en *Octave* que se muestra en el Apéndice.

2.3 Un sistema mecánico de dos puntos vinculados.

Un punto material de masa m se mueve en un plano horizontal sin rozamiento sujeto a un hilo inextensible de longitud l y masa despreciable. El hilo pasa por un agujero en la mesa y en el otro extremo cuelga otro punto material de masa M que se mueve en la dirección vertical que pasa por el agujero (algunas versiones de este problema mecánico pueden verse, por ejemplo, en [1], [2] y [3]). Sea $r(t)$ la distancia del punto de masa m al agujero al instante t y $\theta(t)$ el ángulo que al instante t forma la dirección del hilo con una recta horizontal fija que pasa por el agujero (así r y θ son las coordenadas polares del punto de masa m, con polo en el agujero). Si se considera un eje vertical que pasa por el agujero y la coordenada z vale 0 en el plano, y positiva hacia arriba entonces la distancia del punto de masa M al plano es $l - r$, y la coordenada de posición es $z = r - l$ (que será negativa mientras el punto de masa *m no pase por el agujero*). Como la recta de acción de la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto que se mueve en la mesa pasa por el agujero, entonces se conserva el momento cinético de este punto material respecto del origen de coordenadas (que está en el agujero). De aquí se tiene que, en todo instante, se cumple $r^2\,\dot{\theta} = C$, donde la constante C se calcula en el instante $t = 0$ a partir de los valores iniciales $r(0)$ y $\dot{\theta}(0)$ (la velocidad angular inicial).

Si $\alpha = \frac{m}{M}$, entonces $r(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{C^2}{r^3} - \frac{g}{1+\alpha}, \quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0,$$

donde g es la aceleración de la gravedad. No es difícil demostrar que este problema tiene un invariante temporal E (vinculado a la conservación de la energía mecánica) que se puede expresar de la siguiente manera:

$$v^2 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{C^2}{r^2} + \frac{2\,g\,r}{1+\alpha} = E,$$

donde $v(t) = \dot{r}(t)$. El valor de la constante E se calcula con las condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $v(0) = \dot{r}(0) = v_0$.

Una selección adecuada de las condiciones iniciales da lugar a que el movimiento del punto material en la mesa sea circular y uniforme en tanto que el otro punto queda en reposo. En otras situaciones puede ocurrir que $r(t)$ quede acotado entre dos valores. En ambos casos el punto de masa m *orbita* en torno al origen de coordenadas siempre que $\dot{\theta}(0)$ no valga cero. Si $\dot{\theta}(0) = 0$ el movimiento de ambos puntos es rectilíneo.

1. Escriba el problema de valor inicial para el sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias del cual son solución $r(t)$, $v(t) = \dot{r}(t)$ y $\theta(t)$. Verifique que el problema tiene el invariante E y que imponiendo, por ejemplo, $r(0) = R$, $v(0) = 0$ y $\alpha\,R\,\dot{\theta}(0)^2 = g$ se verifica que el punto de masa m orbita con movimiento circular uniforme. Para probar esto hay que demostrar que $r(t) = R$ para todo instante $t >= 0$.

2. Aproxime la solución del problema de valor inicial usando el *método de Runge-Kutta de orden 4* para los siguientes casos:

   a) $\alpha = 2$, $r(0) = 1$, $v(0) = 0$ y $C^2 = 2$, verificar que este caso r está acotada y obtener las cotas.

   b) $\alpha = 4$, $r(0) = 1$, $v(0) = 0$ y $C^2 = 2$, verificar que también r está acotada y obtener las cotas.

   c) alguna selección de valores iniciales para el caso de la órbita circular.

Para obtener la aproximación de la solución del problema habrá que experimentar sobre el problema acerca de la longitud del intervalo de integración T y el tamaño del paso de integración constante h. Para elegir el valor de T es deseable que se puedan observar varias vueltas en torno de origen de coordenadas. Para seleccionar el parámetro numérico h se sugiere utilizar el invariante E evaluado en la aproximación a la solución del problema de valor inicial. Considerar, por ejemplo, que el valor de h sea tal que la variación del invariante E, evaluado en la aproximación a la solución del problema de valor inicial, sea menor que 10^{-5} en todo el intervalo de integración. Comentar los experimentos numéricos realizados para elegir la longitud del intervalo y el paso de integración.
En todos los casos se requiere representar gráficamente $r(t)$, $v(t)$ y $\dot{\theta}(t)$ en función de t así como la órbita del punto sobre la mesa. Para este último gráfico habrá que obtener las aproximaciones de las coordenadas cartesianas x e y a partir de las coordenadas polares r y θ.

Referencias

[1] Tipler, Mosca: *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1A (Mecánica)*, (pág. 135, prob. 70), Reverté, 2003.

[2] F. Beer et al., *Mecánica vectorial para ingenieros (Dinámica)*, (pág. 801, prob. 13.96; pag. 730, prob. 12.93/94), Mc. Graw Hill, 2005.

[3] W. Hauser : *Introducción a los principios de la Mecánica*, (pág. 309, prob. 8.12), Uteha, 1969.

3. Apéndice:

El procedimiento `periodo`

El procedimiento `periodo` determina aproximadamente el período de oscilación de un movimiento oscilatorio a partir del **registro de la posición en instantes igualmente espaciados en varios ciclos**. Se determina el lapso de tiempo entre dos pasajes por la posición de equilibrio en un mismo sentido en varios ciclos y luego se promedian. A continuación se muestra el código y un ejemplo de uso. Para tener en cuenta: la precisión de determinación del período tiene como límite el paso de tiempo entre valores consecutivos (por ejemplo el paso h de integración en el problema en el que buscan determinar aproximadamente el período).

```
function p = periodo(r,h)
% r es un vector con las posiciones y
% h es el paso de tiempo entre valores de r
T=[];r = r-mean(r);
for k = 1:length(r)-1
    if r(k+1)*r(k)<0
      T = [T;k*h];
    end
end
T=T(1:2:end);
p=mean(diff(T));
```

En el siguiente ejemplo de uso se considera un vector con valores de $\mathrm{sen}(t)$ en el intervalo $(0,\, 40)$ con paso $h = 0.0001$.

```
tt = 0:0.0001:40;g = sin(tt);
periodo(g,0.0001)
ans =  6.2832
ans/(2*pi)
ans =  1.0000
```

El procedimiento RK4 en Octave para sistemas de ecuaciones diferenciales

Este código que sigue implementa en *Octave* el método RK4 para un sistema de ecuaciones diferenciales. Está incorporado un argumento de entrada (P) extra que permite introducir en la invocación del procedimiento el pasaje de los eventuales parámetros de los que dependa la función que calcula las derivadas de las incógnitas del sistema de ecuaciones. El uso del comando `feval` permite usar por igual funciones definidas en forma anónima en la línea de comando así como funciones en línea de comando (usando la definición `function`) o bien una función definida en un archivo `.m` generado en el entorno del editor.

```
function [T Y]=rk4p(f,a,b,ya,M,P)
h=(b-a)/M;
T=zeros(M+1,1);
Y=zeros(M+1,length(ya));
T(1)=a;
Y(1,:)=ya;
for j=1:M
  T(j+1)=T(j)+h;
  K1=h*feval(f,T(j),Y(j,:),P);
  K2=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j,:)+K1/2,P);
  K3=h*feval(f,T(j)+h/2,Y(j,:)+K2/2,P);
  K4=h*feval(f,T(j+1),Y(j,:)+K3,P);
  Y(j+1,:)=Y(j,:)+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
end
end
```

A continuación se muestran invocaciones del procedimiento con las dos maneras de definir la función que calcula las derivadas de las funciones incógnita.

Si el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - 0.2\, y, \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales fuesen $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$, con $t \in [0, 20]$ entonces el siguiente código en línea de comando permite obtener la solución aproximada con paso $h = 0.02$,

```
fmine=@(t,X,P) [ X(2)   -X(1)-.2*X(2)]; % se define la función en la forma anónima
[t,X]=rk4p(fmine,0,20,[1 0],1000,[]); % se invoca la función con su nombre
plot(t,X)
```

Observe que en este caso no fue necesario transferir a `fmine` parámetros y asi el último argumento en `rk4p` fue el vector vacío [].

Si fuese necesario pasar parámetros ó realizar cálculos, comparaciones u otras operaciones entonces se impone definir la función como un procedimiento usando la definición con `function`.

Por ejemplo si el sistema de ecuaciones diferenciales fuese:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a\,x - b\,y + c\,u(t-d) \end{aligned}$$

donde a, b, c y d son parámetros y $u(t)$ es la función que vale 1 si $t \geq 0$ y 0 si $t < 0$. El vector de parámetros `P` tendrá 4 componentes. A continuación se muestra la definición de la función que calcula las derivadas de las incógnitas y la invocación del procedimiento `rk4p` con el vector de parámetros con 4 valores específicos de los parámetros. Se puede ingresar en la línea de comando tanto la definición de la función que calcula las derivadas como la invocación del procedimiento `rk4p`:

```
function s=fyo(t,X,P)
s(1)=X(2);
s(2)=-P(1)*X(1)-P(2)*X(2)+P(3)*(t>=P(4));
end
[t,X]=rk4p('fyo',0,30,[10 0],500,[0.5 0.4 20 10]);
plot(t,X)
```

En este ejemplo la derivada de las funciones incógnitas depende de cuatro parámetros (habrá que tener cuidado en el orden en que se presentan los cuatro elementos del vector `P`). Lo mas importante es tener en cuenta que al haber definido la función como un procedimiento (con `function` en la línea de comando o bien como archivo `.m`)ese argumento de `rk4p` se debe invocar como una cadena de caracteres (un texto)y debe escribirse entre comillas.