

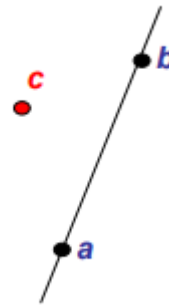
Algorytmy geometryczne, sprawozdanie – ćwiczenie 1 - 05.10.2023 r.

1. Opis ćwiczenia

Głównym celem ćwiczenia było określenie, po której stronie odcinka ab znajduje się punkt c . Aby to zrobić, potrzebne było obliczenie wyznacznika:

a) macierzy 2×2

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$



b) macierzy 3×3

$$\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

Jeżeli wyznacznik macierzy był większy od 0 (lub ϵ), to punkt c znajdował się po lewej stronie, jeśli mniejszy od 0 (lub $-\epsilon$), to po prawej stronie, natomiast jeśli był równy 0 (lub z zakresu $[-\epsilon, \epsilon]$), to punkt leżał na odcinku.

2. Dane techniczne

Ćwiczenie zostało wykonane na systemie operacyjnym Windows na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz. Do jego wykonania posłużyłem się Jupyter Notebook. Program został napisany przy użyciu języka Python, wykorzystując biblioteki takie jak numpy, pandas, matplotlib oraz random.

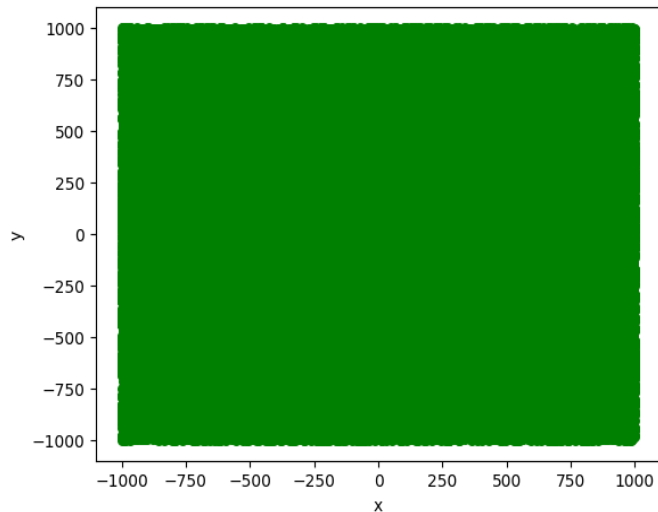
3. Przebieg ćwiczenia

- 1) Stworzenie zbioru 10^5 punktów w przestrzeni 2D z przedziału $x, y \in [-1000, 1000]^2$,
- 2) Stworzenie zbioru 10^5 punktów w przestrzeni 2D z przedziału $x, y \in [-10^{14}, 10^{14}]^2$,
- 3) Stworzenie zbioru 1000 punktów leżących na okręgu o środku w punkcie $0 = (0,0)$ i promieniu $R = 100$,
- 4) Stworzenie zbioru 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału $[-1000, 1000]$ leżących na prostej wyznaczonej przez **wektor** (a, b) , gdzie $a = [-1.0, 0.0]$, $b = [1.0, 0.1]$,
- 5) Napisanie funkcji liczącej znacznik 2×2 , 3×3 , 2×2 (z pomocą biblioteki numpy) oraz 3×3 (również z pomocą biblioteki numpy),
- 6) Napisanie programu, który będzie określać, po której stronie odcinka ab znajduje się dany punkt z wykorzystaniem różnych wyznaczników oraz zwizualizowanie otrzymanych wyników dla różnych ϵ .

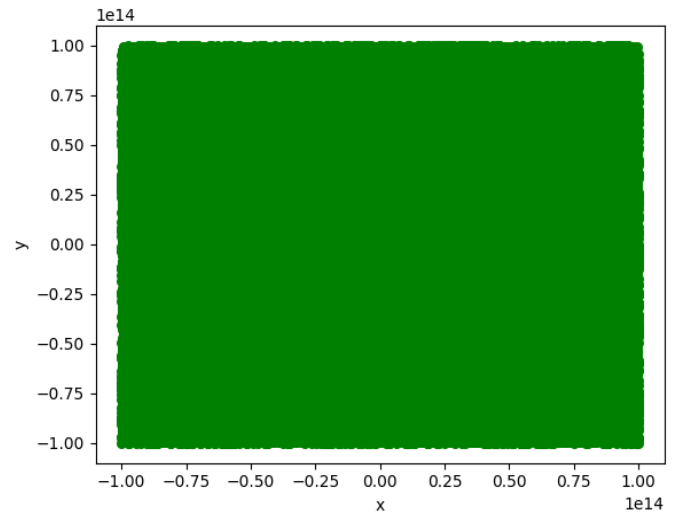
Do tworzenia zbiorów punktów wykorzystana została funkcja `random.uniform` z biblioteki `numpy`.

Wizualizacja zestawów danych

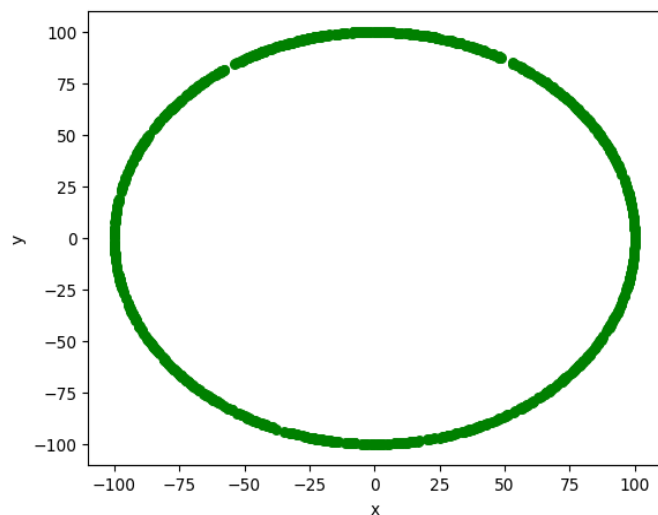
Wykres 1 - Zestaw danych 1)



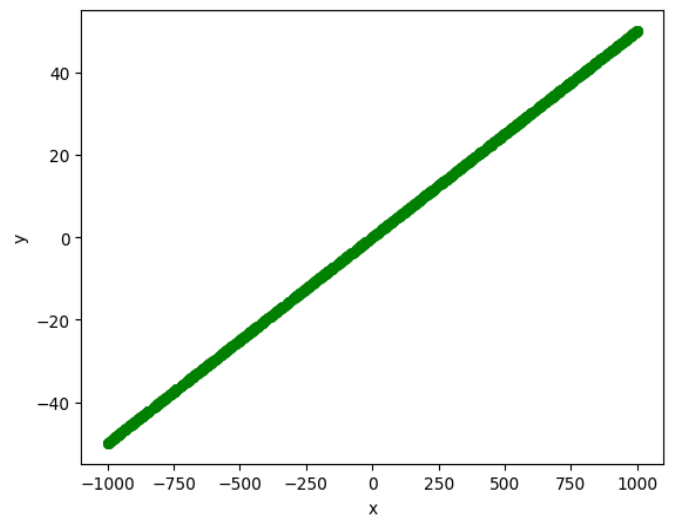
Wykres 2 - Zestaw danych 2)



Wykres 3 - Zestaw danych 3)



Wykres 4 - Zestaw danych 4)

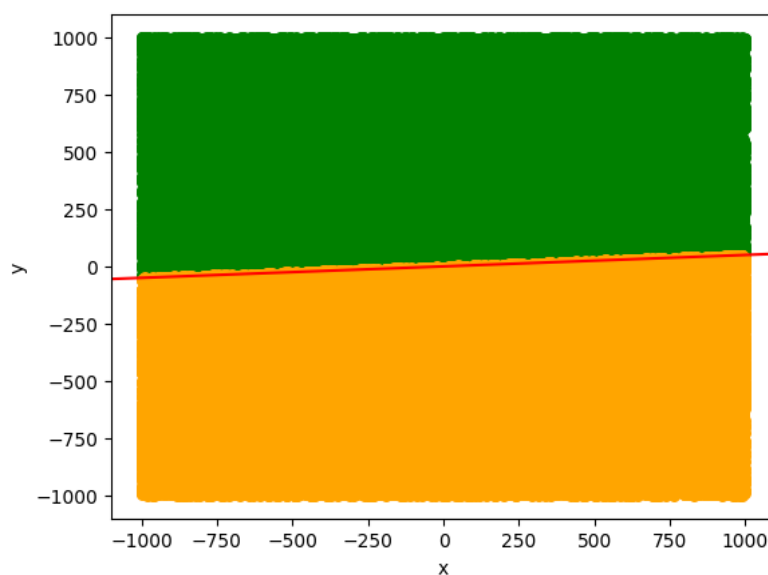


4. Opracowanie wyników (dla precyzji float64)

Punkty po lewej stronie będą oznaczone kolorem zielonym, po prawej – pomarańczowym, natomiast punkty na środku będą w kolorze fioletowym.

1) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 1 przy $\epsilon = 10^{-14}$

Wykres 5

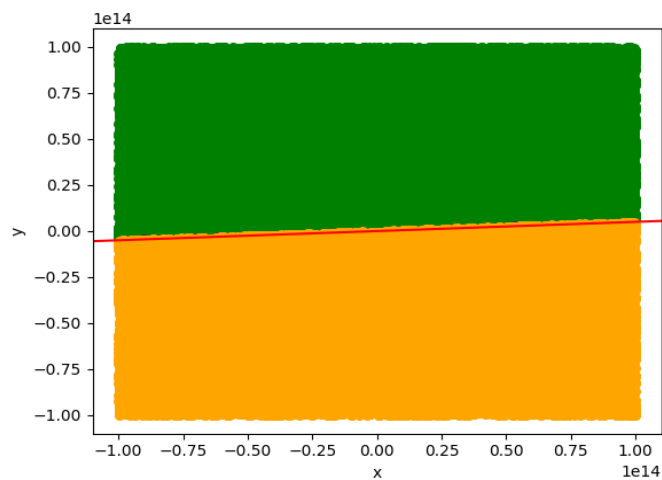


Wyznacznik 2x2 obliczany własną funkcją
po lewej: 50112 na środku: 0 po prawej: 49888

Dla każdego sposobu obliczania wyznacznika punkty zostały zaklasyfikowane tak samo.

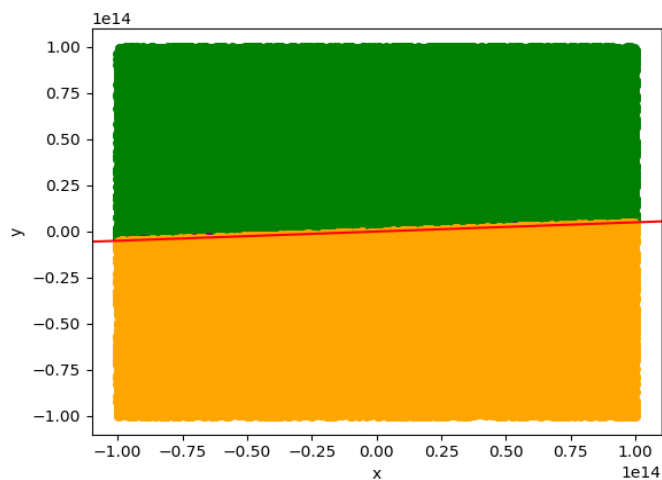
2) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 2 przy $\epsilon = 10^{-14}$

Wykres 6



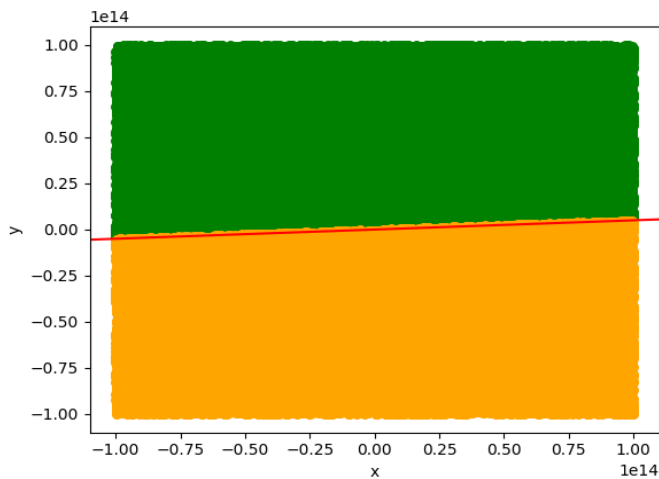
Wyznacznik 2x2 obliczany własną funkcją
po lewej: 50147 na środku: 6 po prawej: 49847

Wykres 7



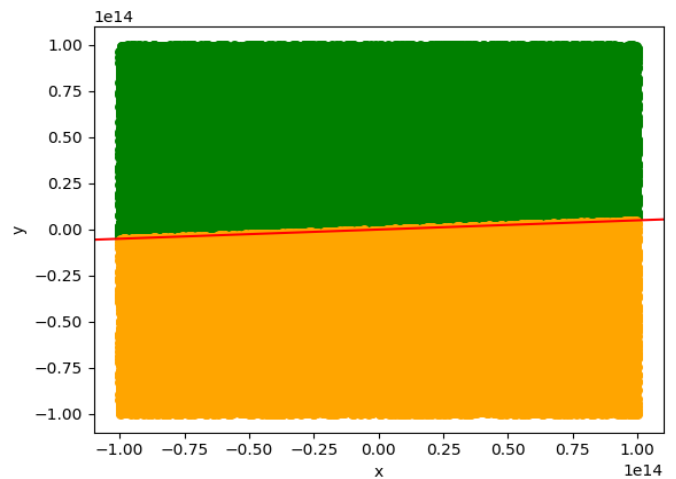
Wyznacznik 2x2 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 50145 na środku: 7 po prawej: 49848

Wykres 8



Wyznacznik 3x3 obliczany własną funkcją
po lewej: 50150 na środku: 0 po prawej: 49850

Wykres 9

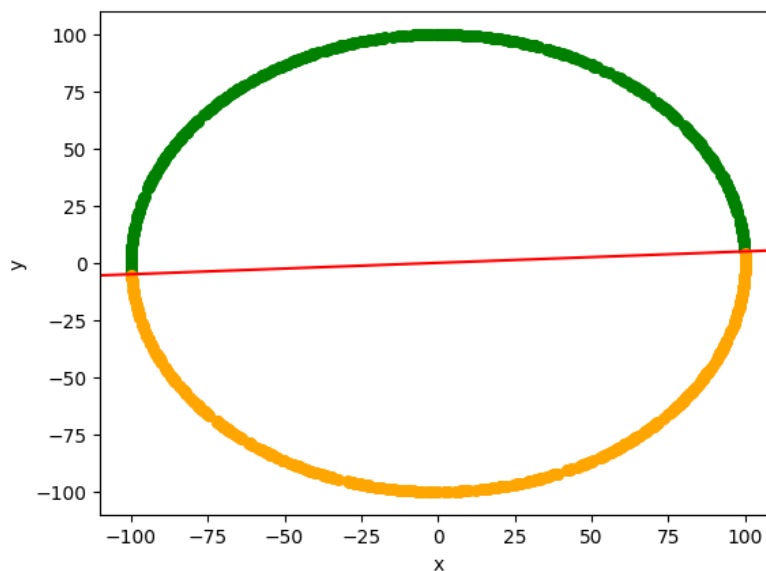


Wyznacznik 3x3 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 50150 na środku: 0 po prawej: 49850

W tym zestawie można już zauważyć pewne różnice. Dane na wykresach 6 i 7 niczym się od siebie nie różnią, jednak przy wykresach 8 i 9 można już zauważyć różnicę w klasyfikacji punktów. Co ciekawe, różnią się one nie tylko wykresów 8 i 9, lecz także względem siebie samych. Nie są to jednak duże różnice, gdyż tylko 7-8 punktów. Po spojrzeniu na punkty, które się zmieniają, okazuje się, że są to punkty o dużych wartościach bezwzględnych. Z tego powodu, mają one mniejszą dokładność, która ma kluczowe znaczenie przy liczeniu wyznaczników.

3) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 3 przy $\epsilon = 10^{-14}$

Wykres 10

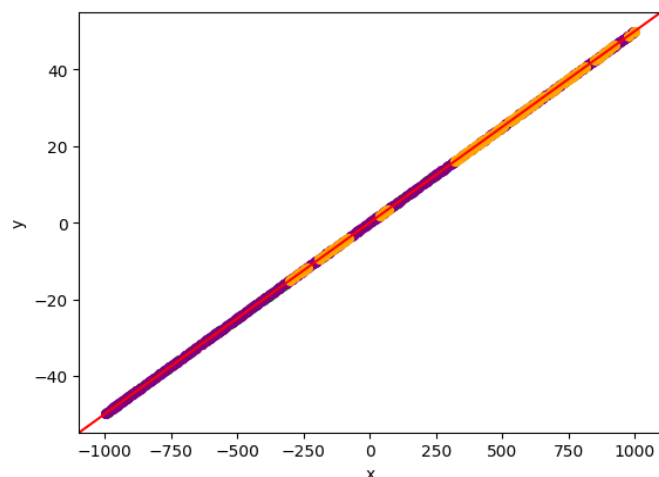


po lewej: 492 na środku: 0 po prawej: 508

W tym zestawie, podobnie jak w zestawie nr 1, zmiana metody liczenia wyznacznika nie miała wpływu na klasyfikację punktów.

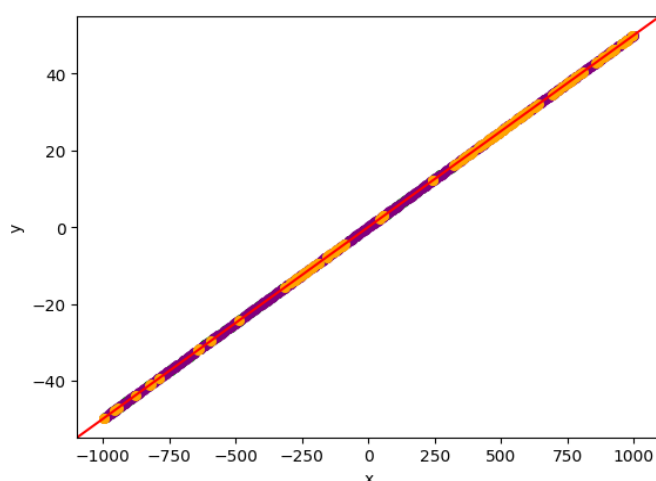
4) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 4 przy $\varepsilon = 10^{-14}$

Wykres 11



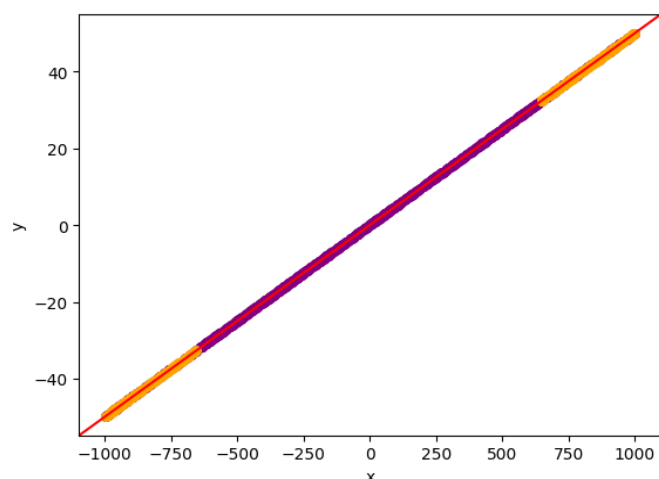
Wyznacznik 2x2 obliczany własną funkcją
po lewej: 153 na środku: 702 po prawej: 145

Wykres 12



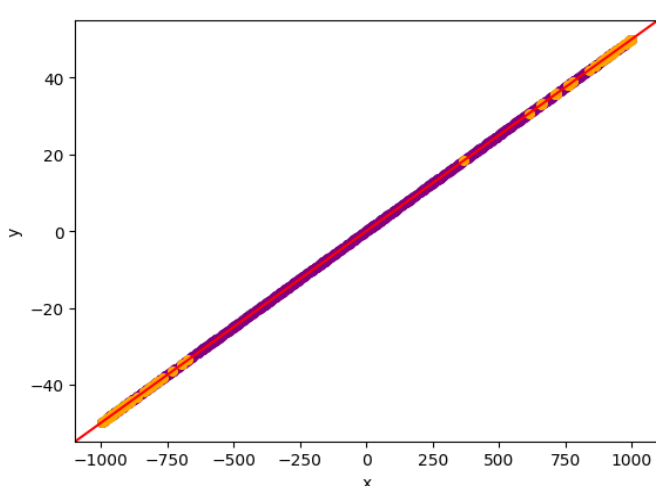
Wyznacznik 2x2 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 175 na środku: 675 po prawej: 150

Wykres 13



Wyznacznik 3x3 obliczany własną funkcją
po lewej: 1 na środku: 795 po prawej: 204

Wykres 14



Wyznacznik 3x3 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 23 na środku: 888 po prawej: 89

W opracowaniu tego zestawu danych można zauważyć największe dysproporcje między klasyfikacją punktów przy użyciu różnych metod obliczania wyznaczników. Między wykresami 11 i 12 istnieje różnica około 30 punktów, natomiast gdy spojrzysz na wykresy 13 i 14, w których wykorzystywany był wyznacznik macierzy 3x3, różnice te są o wiele większe. Prawie żadne punkty nie są klasyfikowane po stronie lewej, gdzie wcześniej było ich między 150 a 180. Przy wykresie 13, ilość punktów zaklasyfikowanych na środku jest większa o 100 od poprzednich wykresów, podczas gdy na wykresie 14 zaklasyfikowanych na środku jest kolejne blisko 100 punktów więcej.

Tabele porównawcze klasyfikacji punktów dla różnych ϵ (precyzja float64)

ϵ wykorzystywane w poniższych tabelach: 0, 10^{-14} , 10^{-12} , 10^{-10} , 10^{-8}

Tabela 1 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 1

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	na środku	po prawej
Każdy testowany	Każdy testowany	50112	0	49888

Tabela 2 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 2

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
2x2 własnej implementacji	Każdy testowany	50147	6	49847
2x2 z biblioteki numpy	Każdy testowany	50145	7	49848
3x3 własnej implementacji	Każdy testowany	50150	0	49850
3x3 z biblioteki numpy	Każdy testowany	50150	0	49850

Tabela 3 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 3

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
Każdy testowany	Każdy testowany	492	0	508

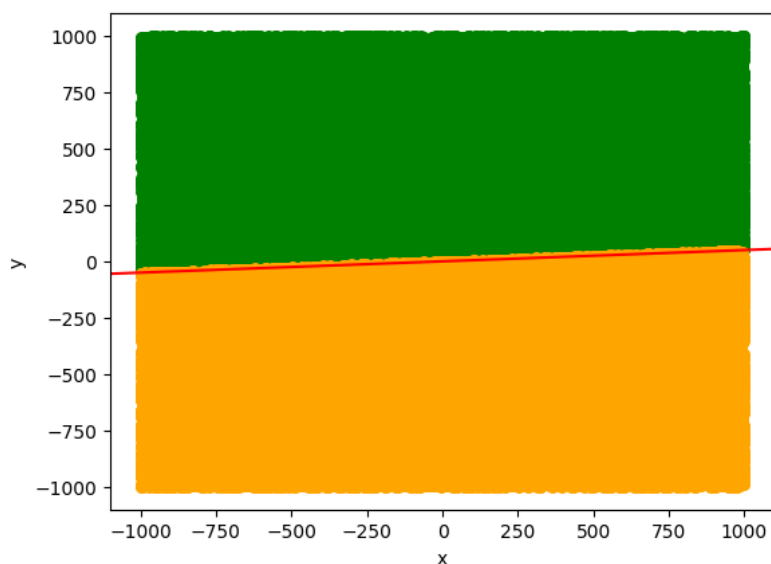
Tabela 4 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 4

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
2x2 własnej implementacji	0	162	684	154
	10^{-14}	153	702	145
	10^{-12}	82	832	86
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
2x2 z biblioteki numpy	0	187	653	160
	10^{-14}	175	675	150
	10^{-12}	132	756	112
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
3x3 własnej implementacji	0	124	577	299
	10^{-14}	1	795	204
	10^{-12}	0	1000	0
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
3x3 z biblioteki numpy	0	398	315	287
	10^{-14}	23	888	89
	10^{-12}	0	1000	0
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0

5. Opracowanie wyników (dla precyzji float32)

1) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 1 przy $\epsilon = 10^{-14}$

Wykres 15

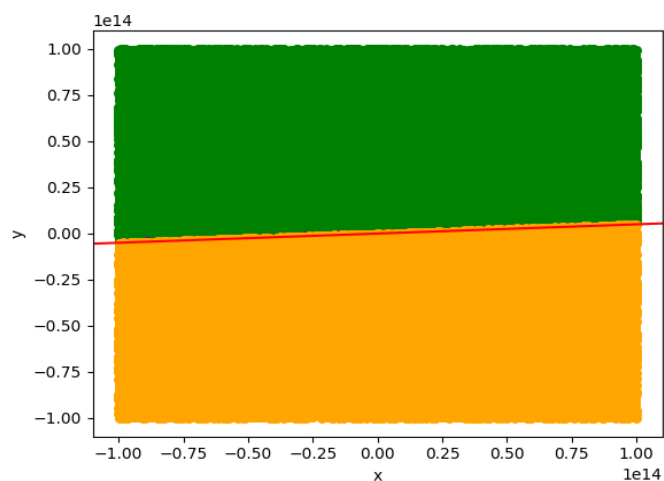


po lewej: 50124 na środku: 0 po prawej: 49876

W tym zestawie, tak jak w zestawie nr 1 dla float64, zmiana metody liczenia wyznacznika nie miała wpływu na klasyfikację punktów.

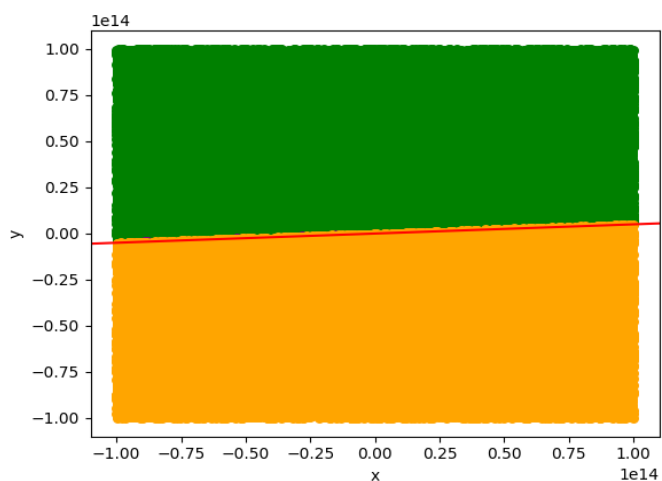
2) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 2 przy $\epsilon = 10^{-14}$

Wykres 16



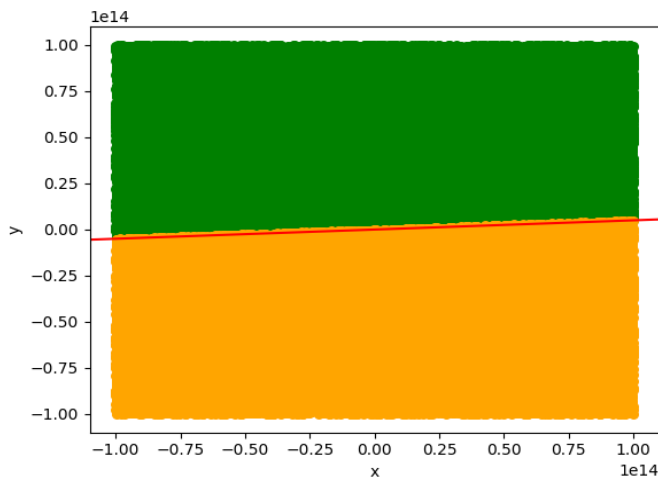
Wyznacznik 2x2 obliczany własną funkcją
po lewej: 49831 na środku: 4 po prawej: 50165

Wykres 17



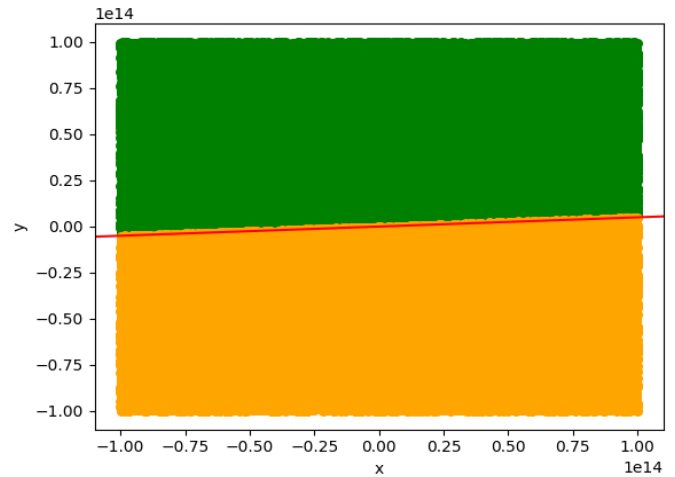
Wyznacznik 2x2 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 49829 na środku: 6 po prawej: 50165

Wykres 18



Wyznacznik 3x3 obliczany własną funkcją
po lewej: 49834 na środku: 0 po prawej: 50166

Wykres 19

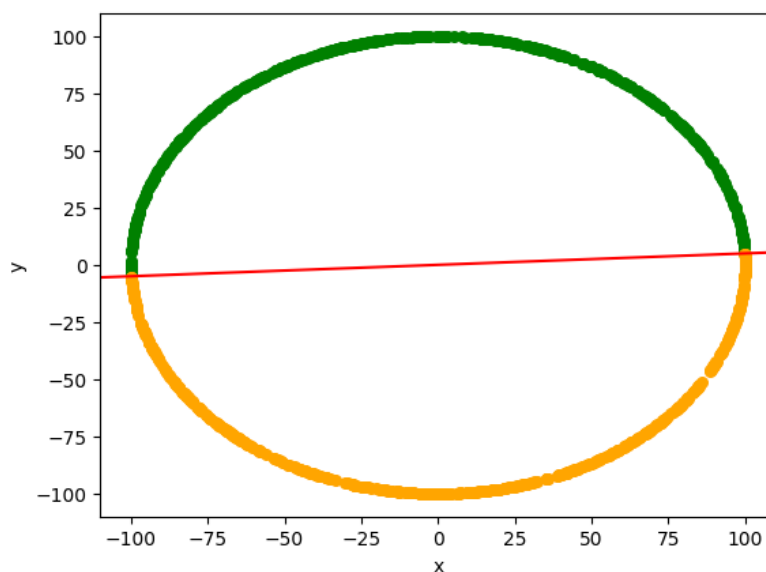


Wyznacznik 3x3 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 49834 na środku: 0 po prawej: 50166

W zestawie nr 2 możemy dostrzec niewielkie zmiany pomiędzy wynikami. Są to różnice tylko dwóch punktów, a pomiędzy wynikami pozyskanymi przy użyciu obydwóch metod obliczania wyznacznika macierzy 3x3 nie ma żadnej różnicy. Dane te zachowują się podobnie do tego samego zestawu rozważanego w precyzji float64

3) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 3 przy $\varepsilon = 10^{-14}$

Wykres 20

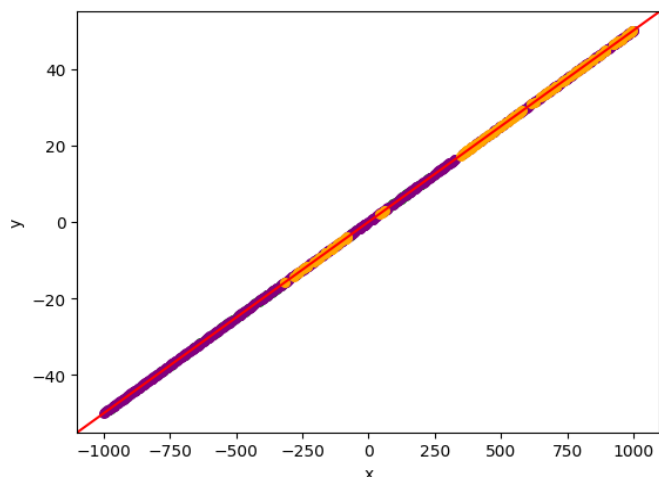


po lewej: 475 na środku: 0 po prawej: 525

W tym zestawie, podobnie jak w zestawie nr 3 dla float64, zmiana metody liczenia wyznacznika nie miała wpływu na klasyfikację punktów.

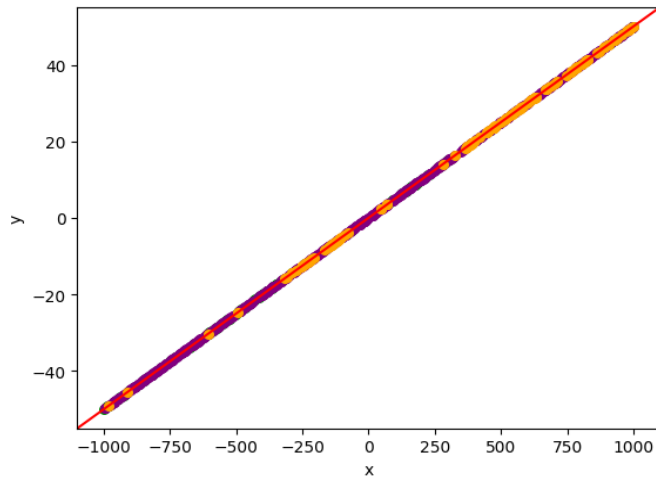
4) Opracowanie wyników dla zestawu danych nr 4 przy $\varepsilon = 10^{-14}$

Wykres 21



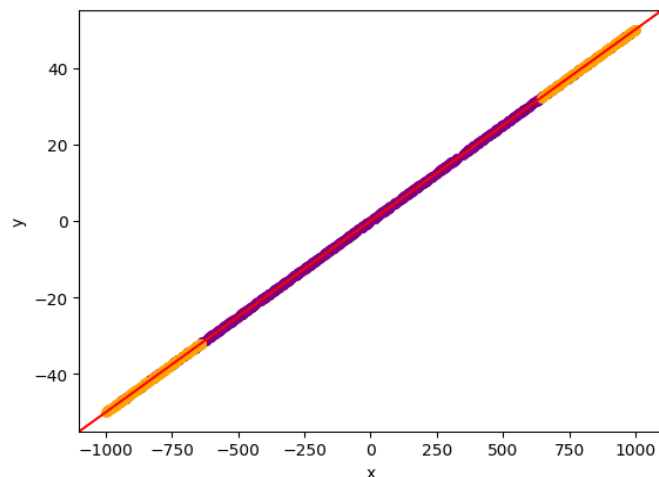
Wyznacznik 2x2 obliczany własną funkcją
po lewej: 125 na środku: 736 po prawej: 139

Wykres 22



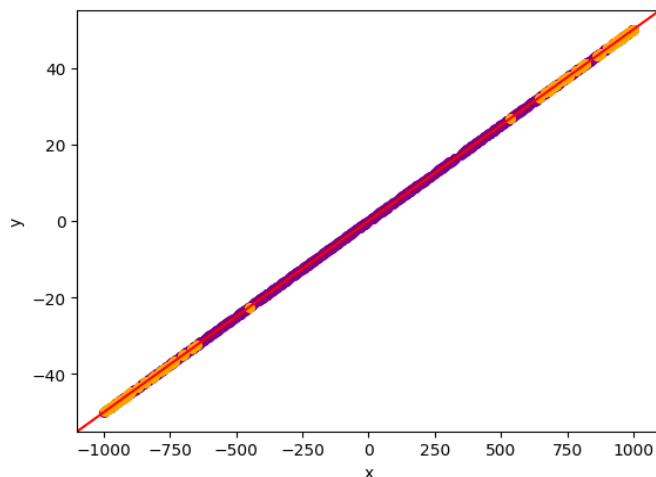
Wyznacznik 2x2 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 171 na środku: 695 po prawej: 134

Wykres 23



Wyznacznik 3x3 obliczany własną funkcją
po lewej: 0 na środku: 767 po prawej: 233

Wykres 24



Wyznacznik 3x3 obliczany z biblioteki numpy
po lewej: 12 na środku: 880 po prawej: 108

Wnioski dla tego zestawu danych są bardzo podobne do zestawu nr 4 dla float64. Można tak samo zauważyć największe dysproporcje między klasyfikacją punktów przy użyciu różnych metod obliczania wyznaczników. Między wykresami 21 i 22, które utworzone zostały przy użyciu wyznaczników macierzy 2x2 znowu istnieje różnica około 20-30 punktów, natomiast gdy spojrzeć na wykresy 23 i 24, w których wykorzystywany był wyznacznik macierzy 3x3, różnice te są tak samo duże jak dla float64.

Tabele porównawcze klasyfikacji punktów dla różnych ϵ (precyzja float32)
 ϵ wykorzystywane w poniższych tabelach: 0, 10^{-14} , 10^{-12} , 10^{-10} , 10^{-8}

Tabela 5 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 1

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
Każdy testowany	Każdy testowany	50124	0	49876

Tabela 6 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 2

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
2x2 własnej implementacji	Każdy testowany	49831	4	50165
2x2 z biblioteki numpy	Każdy testowany	49829	6	50165
3x3 własnej implementacji	Każdy testowany	49834	0	50166
3x3 z biblioteki numpy	Każdy testowany	49834	0	50166

Tabela 7 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 3

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
Każdy testowany	Każdy testowany	475	0	525

Tabela 8 - Tabela porównawcza klasyfikacji punktów dla zestawu 4

Wyznacznik	ϵ	Punkty zaklasyfikowane:		
		po lewej	po lewej	po lewej
2x2 własnej implementacji	0	132	723	145
	10^{-14}	125	736	139
	10^{-12}	73	843	84
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
2x2 z biblioteki numpy	0	178	680	142
	10^{-14}	171	695	134
	10^{-12}	125	780	95
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
3x3 własnej implementacji	0	118	569	313
	10^{-14}	0	767	233
	10^{-12}	0	1000	0
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0
3x3 z biblioteki numpy	0	362	312	326
	10^{-14}	12	880	108
	10^{-12}	0	1000	0
	10^{-10}	0	1000	0
	10^{-8}	0	1000	0

6. Wnioski

Po przeanalizowaniu danych, okazuje się, że dobór metody obliczania wyznacznika oraz dobór tolerancji dla zera (ϵ) mają spore znaczenie. W zestawach danych 1 i 3 nie widać tego w ogóle, ponieważ dla każdej tolerancji i dla każdej metody liczenia wyznacznika otrzymane wyniki były identyczne, jednak już w zestawie drugim można zobaczyć pewne różnice przy doborze wyznacznika. Wyznaczniki 3x3 liczone własną funkcją jak i funkcją z biblioteki numpy nie klasyfikowały żadnego punktu na środku, natomiast wyznaczniki 2x2 już tak, a w dodatku różną od siebie. Największe zmiany można dostrzec jednak w zestawie 4, gdzie wszystko już miało ogromne znaczenie. Drobna zmiana epsilon powodowała, że wszystkie punkty zaczynały być klasyfikowane na środku (czyli tak, jak teoretycznie powinno być), bądź na odwrót. Im większa była tolerancja dla zera, tym więcej punktów uznawanych było za współliniowe. Drugim aspektem, który miał duży wpływ na tę klasyfikację, był również dobór metody obliczania wyznacznika, gdyż każda metoda zwracała inne wyniki. Z analizy tabel 4 i 8

wynika, że najlepsze wyniki dawał wyznacznik 2×2 własnej implementacji, gdyż najwięcej punktów uznawał on za leżące na prostej, natomiast najgorszy okazał się być wyznacznik 3×3 z biblioteki numpy. Oprócz wyznaczników i tolerancji, dość istotną rolę odgrywała również wybrana precyzja liczbowa. Dla float32 otrzymane wyniki były z pewnością mniej dokładne, gdyż przy obsłudze mniejszej precyzji, można zaniedbać dalsze miejsca rozwinięcia liczby, które jak się okazuje mają duże znaczenie przy tych obliczeniach.