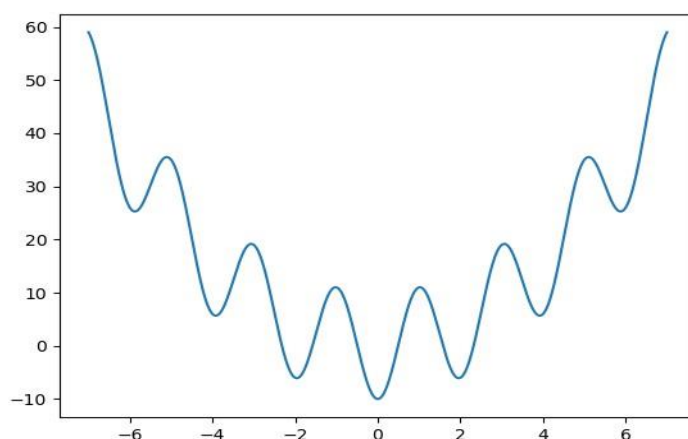


Interpolacja i aproksymacja - podsumowanie

1. Opracowana funkcja

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Dla $k = 1$, $m = 10$ oraz $x \in [-7, 7]$.



Rysunek 1 – wykres funkcji $f(x)$

Zadana funkcja jest symetryczna względem osi OY, ma 13 ekstremów lokalnych (równomiernie rozmieszczonych, w tym jedno dokładnie na osi OY) oraz 6 miejsc zerowych.

2. Dane techniczne

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem bibliotek numpy oraz matplotlib. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz.

3. Porównywane zagadnienia

W tym ćwiczeniu porównywane były interpolacje przeprowadzona na 5 różnych sposobów: korzystając z metody Lagrange'a oraz metody Newtona w zagadnieniu Lagrange'a, w zagadnieniu Hermite'a, z wykorzystaniem funkcji sklepanych 2 stopnia i z wykorzystaniem funkcji sklepanych 3 stopnia.

Oprócz tego, zestawione są do tego dwie aproksymacje: wielomianami algebraicznymi oraz funkcjami trygonometrycznymi.

W poniższych wzorach n oznacza stopień otrzymanego wielomianu, a $w(x)$ jest otrzymywanym wielomianem interpolacyjnym.

3.1 Zagadnienie Lagrange'a – metoda Lagrange'a

$$w(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3.2 Zagadnienie Lagrange'a – metoda Newtona

$$w(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}},$$

$$f[x_i] = f(x_i)$$

3.3 Zagadnienie Hermite'a

W przypadku zagadnienia Hermite'a, wielomian interpolacyjny obliczany był na podstawie wzoru Newtona. W mojej implementacji używana była tylko pochodna pierwszego rzędu, a więc otrzymywany wielomian interpolacyjny był stopnia ($2 \cdot \text{liczba węzłów} - 1$).

3.4 Funkcje sklepane 2 stopnia

Aby znaleźć współczynniki a, b, c wielomianów S_i pomiędzy punktami, rozwiązałem równanie postaci $A \cdot x = B$.

Poniżej przedstawiam wygląd macierzy A, x i B w przykładzie dla zadanych 4 punktów $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)]$. Otrzymujemy dla nich 3 wielomiany S_i . Parametr z w macierzy oznacza dobrany przez nas warunek brzegowy. W mojej implementacji, pierwszym przyjętym parametrem z było 0 - przyjąłem warunek $S(x_1)'' = 0$. Jako drugi warunek brzegowy przyjąłem $S(x_1)'' = f_1'$ (pochodna z funkcji, w moim programie obliczany jako iloraz różnicowy). W tym przypadku z był podwojoną wartością obliczonej pochodnej w punkcie.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 & x_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_3 & 1 & 0 & -2x_3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

3.4 Funkcje sklepane 3 stopnia

Aby znaleźć współczynniki wielomianów trzeciego stopnia S_i pomiędzy punktami, podobnie jak poprzednio, rozwiązałem równanie postaci $A \cdot x = B$.

To zadanie również rozwiązałem na dwa sposoby, z dwoma różnymi warunkami brzegowymi. Pierwszym przyjętym warunkiem brzegowym warunek $S(x_1)'' = S(x_n)'' = 0$ (dalej nazywany jako natural). Jako drugi warunek brzegowy przyjąłem $S(x_1)' = f_1'$ oraz $S(x_n)' = f_n'$.

W przypadku pierwszego warunku brzegowego, macierze A , x i B miały postacie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

W przypadku drugiego warunku brzegowego, macierze A , x i B miały postacie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wyjaśnienie symboli:

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ – iloraz różnicowy, gdzie x_i są danymi współrzędnymi x zadanych punktów, natomiast y_i są wartościami im odpowiadającymi.

Ostatecznie wielomian S otrzymuję, korzystając ze wzoru:

$$S(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \text{ dla } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

$$c_i = 3\sigma_i$$

$$d_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i}$$

3.5 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Mając dane:

- $(x_i, y_i = F(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$, czyli $(n+1)$ węzłów
- Układ funkcji bazowych $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, m$ (m oznacza również stopień otrzymanego wielomianu aproksymacyjnego)

Szukamy wielomianu uogólnionego:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

W tym celu, szukamy współczynników a spełniających warunek:

$$\min \sum_{i=0}^n w(x_i) [F(x_i) - f(x_i)]^2, w(x_i) \text{ to waga danego węzła (u mnie przyjęta jako 1)}$$

Aby je znaleźć, rozwiązujemy równanie postaci $A^*x = B$, które wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \Sigma w_i & \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 & \dots & \Sigma w_i x_i^m \\ \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 & \Sigma w_i x_i^3 & \dots & \Sigma w_i x_i^{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma w_i x_i^m & \Sigma w_i x_i^{m+1} & \Sigma w_i x_i^{m+2} & \dots & \Sigma w_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma w_i F_i \\ \Sigma w_i F_i x_i \\ \cdot \\ \Sigma w_i F_i x_i^m \end{bmatrix}$$

Zakres sum: $i = 0, 1, \dots, n$

3.6 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami trygonometrycznymi

Układ funkcji bazowych: $\varphi_j(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin(mx), \cos(mx)$

$j = 0, 1, \dots, m$ (m oznacza również stopień otrzymanego wielomianu aproksymacyjnego)

Szukamy wielomianu trygonometrycznego o okresie 2π :

$$Q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

W tym celu, szukamy współczynników a i b spełniających warunek:

$$\min \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_i) - f(x_i)]^2, n \text{ to liczba węzłów}$$

Co prowadzi do zależności:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cos(kx_i')$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \sin(kx_i')$$

$x' = \frac{2\pi}{b-a}(x-a) - \pi$, x' to nowa wartość w przedziale $[-\pi, \pi]$, a x to wartość w pierwotnym przedziale $[a, b]$. Transformację tę stosujemy, aby przekształcić przedział funkcji $[-7, 7]$ na przedział $[-\pi, \pi]$.

4. Interpolacja, a aproksymacja

Interpolacja polega na wyznaczeniu funkcji przechodzącej przez wszystkie węzły. Aproksymacja natomiast polega na wyznaczeniu funkcji, która najlepiej odpowiada danym węzłom, poprzez minimalizację błędu pomiędzy wyznaczoną funkcją a zadanymi danymi. Z tego powodu, w aproksymacji wyznaczona funkcja nie zawsze przechodzi przez węzły, ale w zamian za to odwzorowuje ona ogólne zachowanie funkcji.

5. Dokładność przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej

W celu oszacowania dokładności przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej, wykorzystaliśmy dwa wskaźniki:

- Maksymalna różnica pomiędzy wartością zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu: $\max_k \{|f(x_k) - w(x_k)|\}, k \in \{1, 2, \dots, N\}$
- Suma kwadratów różnic między wartościami zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu: $\sum_{i=1}^N (f(x_i) - w(x_i))^2$

N - liczba punktów, w których obliczana jest wartość funkcji

6. Porównanie różnych sposobów interpolacji

Wszystkie wartości były obliczane dla 1000 punktów (N = 1000).

6.1 Zagadnienie Lagrange'a

Stopień wielomianu	Metoda Lagrange'a		Metoda Newtona	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
3	16.53	18850	16.53	18850
9	19.96	9640	19.96	9640
19	4460	42646841	4460	42646841
29	327.215	91822	327.215	91822
39	0.258	0.0306	0.258	0.0306
49	0.0032	9.964e-07	0.0046	2.578e-06
59	3.257	0.525	0.2175	0.007265
69	1867	197519	356	14973
79	1622903	1.043e+11	132068	1.25e+9

Tabela 1 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Lagrange'a dla węzłów równomiernie rozmieszczonych

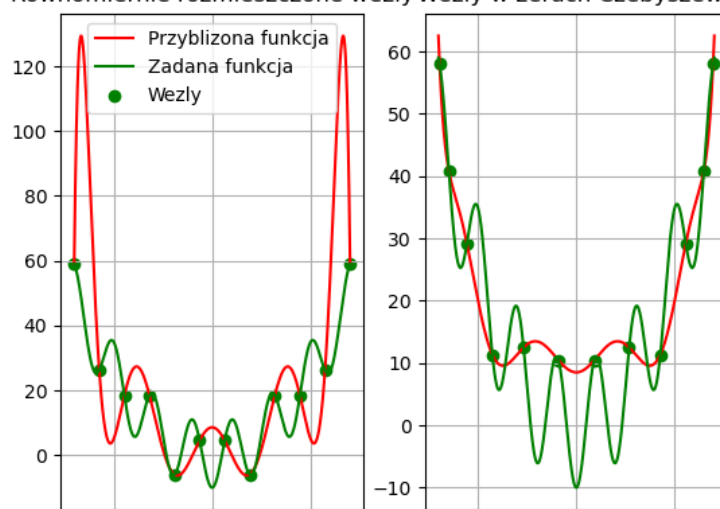
Na powyższym zestawieniu widzimy, że początkowo metody Lagrange'a i Newtona w zagadnieniu Lagrange'a niczym się od siebie nie różnią. Pierwsze marginalne różnice w ich błędach widzimy dla wielomianu stopnia 49, gdzie w tym zestawieniu jest tam również największa dokładność przybliżenia (najmniejsza suma kwadratów różnic). Dla kolejnego zwiększania stopnia wielomianu, zaczynają występować błędy numeryczne i nasze przybliżenie przestaje być dobre.

Stopień wielomianu	Metoda Lagrange'a		Metoda Newtona	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
3	16.64	17825	16.64	17825
9	21.94	11207	21.94	11207
19	14.987	1796	14.987	1796
29	0.0272	0.00825	0.0272	0.00825
39	5.998e-07	3.652e-12	0.0016	4.377e-07
49	7.407e-13	4.774e-24	0.0282	0.0001383
59	8.526e-14	5.072e-27	0.1778	0.002801
69	1.776e-13	6.45e-27	370	13072
79	1.421e-13	4.889e-27	53732562	1,66e+14

Tabela 2 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Lagrange'a dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa

Podobnie jak w przypadku równomiernie rozmieszczonych węzłów, na początku metody nie różnią się od siebie, tutaj jednak pierwsze różnice widoczne są już wcześniej, gdyż dla 39 stopnia wielomianu. W przypadku metody Newtona, również występują błędy numeryczne dla większych stopni wielomianu i są one znacznie większe niż dla równomiernie rozmieszczonych węzłów, natomiast w przypadku metody Lagrange'a, interpolacja jest o wiele dokładniejsza, nawet dla dużych stopni wielomianu.

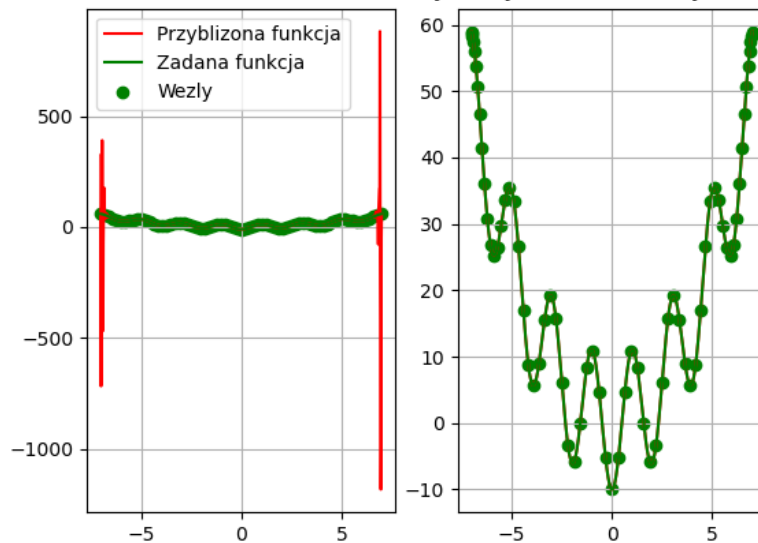
Równomiernie rozmieszczone węzły Węzły w zerach Czebyszewa



Rysunek 2 – interpolacja w zagadnieniu Lagrange'a dla 11 stopnia wielomianu

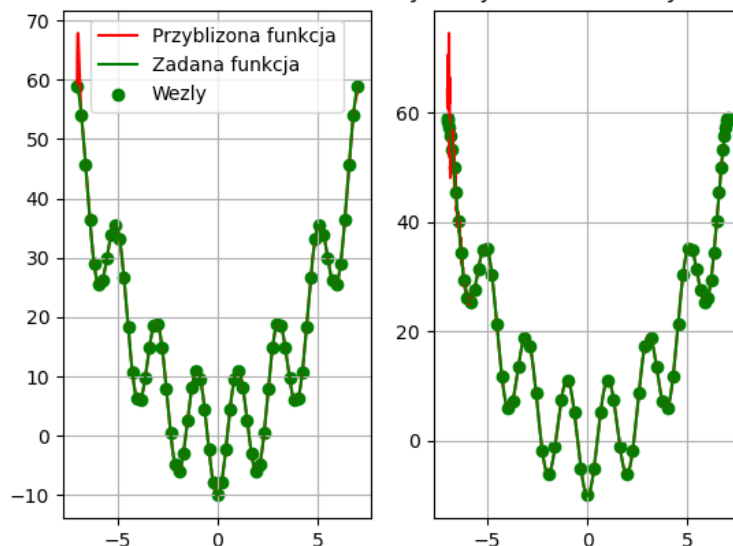
Na rysunku 2 widać wpływ sposobu doboru węzłów – przy doborze węzłów w zerach Czebyszewa eliminowany jest efekt Rungego, który występuje pierwszy raz dla 12 węzłów.

Równomiernie rozmieszczone węzły Węzły w zerach Czebyszewa



Rysunek 2 – interpolacja metodą Lagrange'a dla 69 stopnia wielomianu

Równomiernie rozmieszczone węzły Węzły w zerach Czebyszewa



Rysunek 3 – interpolacja metodą Newtona dla 68 stopnia wielomianu

W przypadku metody Lagrange'a, zastosowanie węzłów w zerach Czebyszewa nie tylko eliminuje efekt Rungego, ale również znacznie zwiększa dokładność interpolacji. W przypadku metody Newtona natomiast, otrzymujemy nieco inny efekt – błędy numeryczne na krańcach przedziału są większe.

Wnioski:

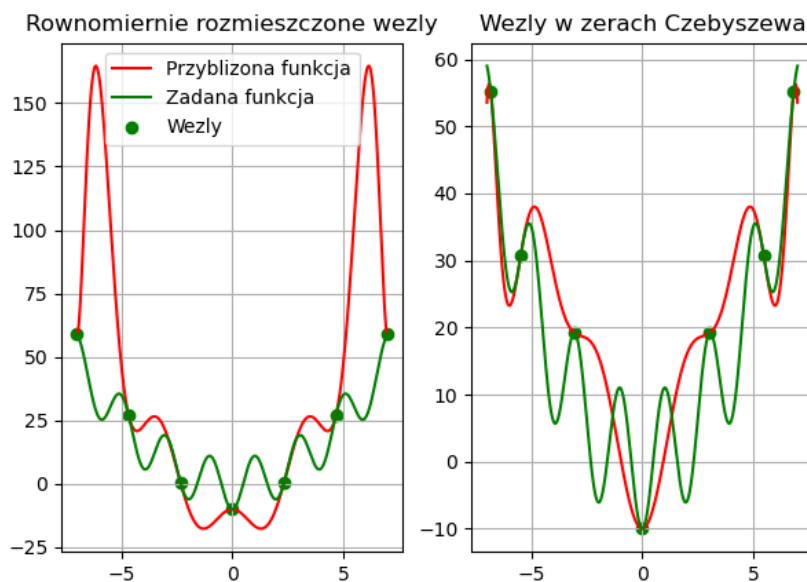
- Zastosowanie węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa eliminuje problem występowania efektu Rungego
- Zastosowanie węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa zwiększa dokładność w przypadku metody Lagrange'a, jednak zwiększa również błędy numeryczne w przypadku metody Newtona
- Zwiększanie liczby węzłów do pewnego momentu zwiększa dokładność, aż w końcu zaczynają występować błędy numeryczne i otrzymywany jest odwrotny efekt

6.2 Zagadnienie Hermite'a

Liczba węzłów	Węzły równomiernie rozmieszczone		Węzły w zerach Czebyszewa	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
2	20	74925	25.797	67384
3	19.203	33022	23.866	62405
5	61.583	137553	29.156	39194
10	1307.889	12607362	29.977	10780
15	90.496	23473	0.0539	0.0494
20	0.061	0.0055	0.002	1.112e-06
25	0.00601	6.628e-06	0.0246	0.000165
30	0.0375	0.00018	0.182	0.00689
35	8.597	21.837	25.850	42.375
40	101648	569193998	4418564	1501861354398

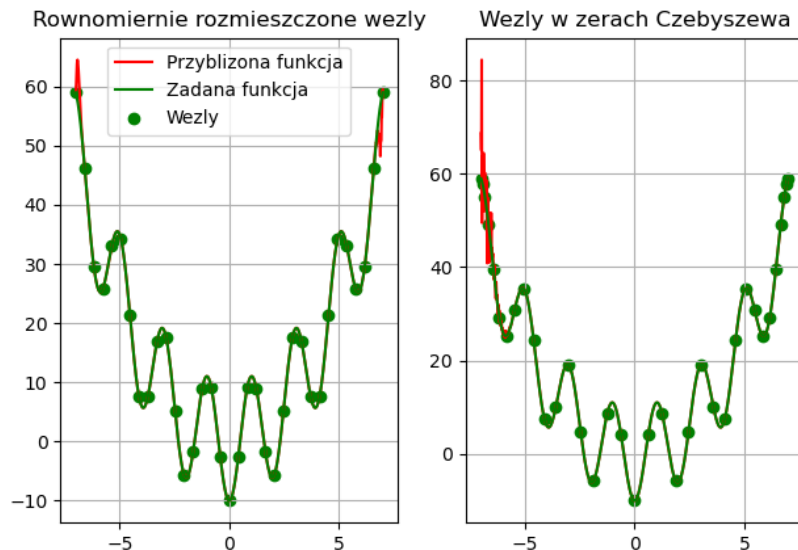
Tabela 3 – wartości błędów przy interpolacji w zagadnieniu Hermite'a

Na powyższym zestawieniu błędów można dostrzec, że interpolacja wielomianu z węzłami umieszczonymi w zerach Czebyszewa początkowo ma stałe wartości błędów (i mniejsze niż w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych z wyjątkiem 3 węzłów), jednakże przy większej liczbie węzłów również szybciej zaczynają występować błędy numeryczne. Wynika to z faktu, że implementacja oparta była na metodzie Newtona, gdzie efekt był identyczny.



Rysunek 4 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite'a dla 7 węzłów

W przypadku interpolacji w zagadnieniu Hermite'a, pierwszy efekt Rungego występuje już dla 7 węzłów (13 stopnia wielomianu), a więc dla nieco większego stopnia niż w przypadku zagadnienia Lagrange'a.



Rysunek 5 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite’a dla 35 węzłów

Pierwsze błędy numeryczne dostrzegalne są dla 35 węzłów, a więc dla dużo mniejszej liczby niż w przypadku zagadnienia Lagrange’a, i podobnie jak w przypadku metody Newtona, są większe dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa.

Wnioski:

- Węzły umieszczone w zerach Czebyszewa eliminują efekt Rungego i początkowo polepszają przybliżenie, jednak błędy numeryczne dla większych stopni wielomianu również są większe niż dla równomiernie rozmieszczonych węzłów
- Ze względu na większą ilość informacji (dodatkowo znane są pochodne), lepsze przybliżenia są uzyskiwane dla mniejszej liczby węzłów (w porównaniu do zagadnienia Lagrange’a)

Wnioski dla interpolacji wielomianami algebraicznymi:

W związku z faktem, że moja funkcja przyjmuje aż 13 ekstremów lokalnych w zadanej dziedzinie, w celu dobrego przybliżenia funkcji za pomocą wielomianu, potrzebny jest wielomian co najmniej 14 stopnia, aby mógł on również mieć 13 ekstremów.

6.3 Funkcje sklepane

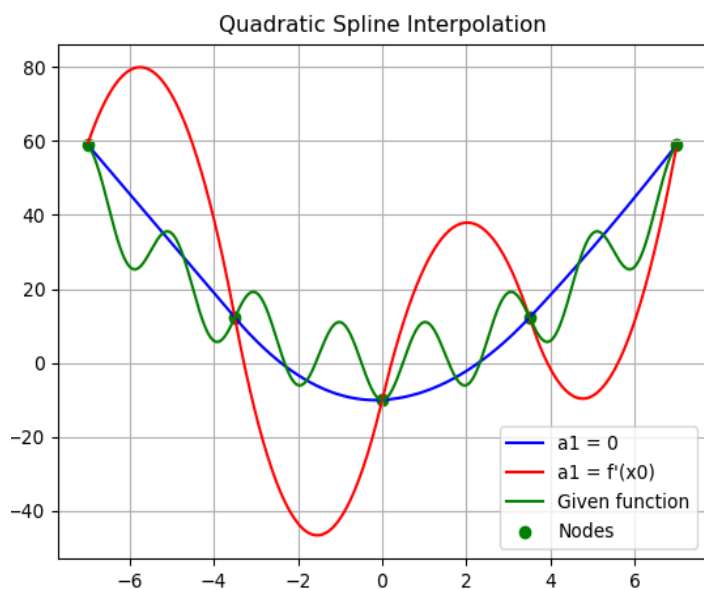
Liczba węzłów	warunek brzegowy $S(x_1)'' = 0$		warunek brzegowy $S(x_1)'' = f_1'$	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
2	68	2085	68	2085
3	151	10241	33	253
5	54	1019	19	103
10	29	176	20	101
15	138	3746	130	3136
20	5.28	6.64	8.45	11.93
25	1.33	0.5	4.3	5.5
30	0.89	0.16	2.82	2.86
50	0.426	0.074	0.975	0.452
100	0.137	0.0095	0.2405	0.0301

Tabela 4 – wartości błędów przy interpolacji funkcjami sklekanymi 2 stopnia

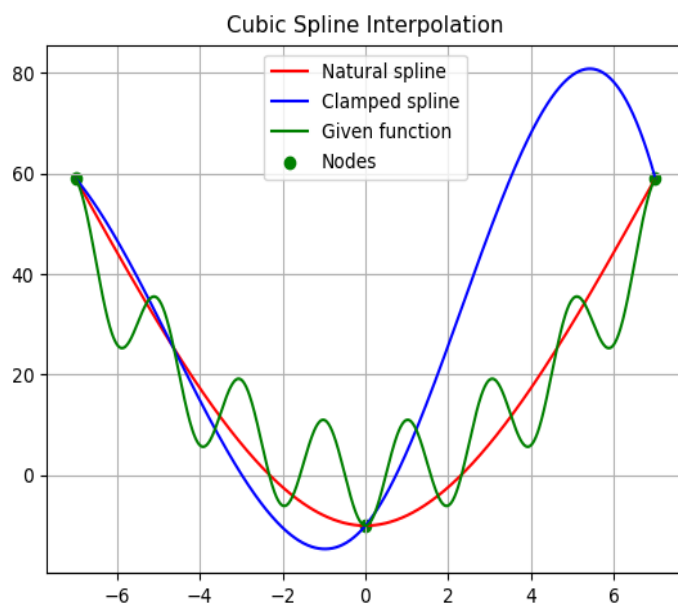
Liczba węzłów	warunek brzegowy $S(x_1)'' = S(x_n)'' = 0$		warunek brzegowy $S(x_1)' = f_1'$ oraz $S(x_n)' = f_n'$	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
3	19	96	62.3	804
5	18.9	96.9	23.2	115
10	19.8	95	19.8	94.2
15	5.9	2.5	13	6.99
20	4.4	2.4	3.5	1.6
25	2.4	0.3605	2.3	0.3484
30	1.47	0.0926	3.2	0.256
50	0.4308	0.004	2	0.0474
100	0.097	9.996e-05	0.582	0.0019

Tabela 5 – wartości błędów przy interpolacji funkcjami sklekanymi 3 stopnia

Po przeanalizowaniu tabeli 4 i 5 można dojść do wniosku, że funkcje sklepane 3 stopnia dają dokładniejsze przybliżenie funkcji. W przypadku zarówno funkcji sklepanych 2 stopnia, jak i 3 stopnia, dokładniejsze przybliżenia otrzymywane są przy zastosowaniu warunków brzegowych, gdzie druga pochodna funkcji jest równa 0.

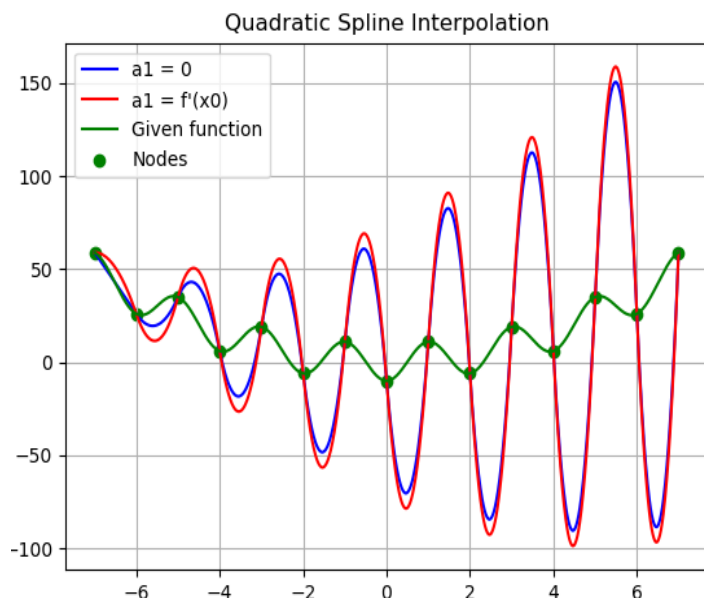


Rysunek 6 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 2 stopnia dla 5 węzłów

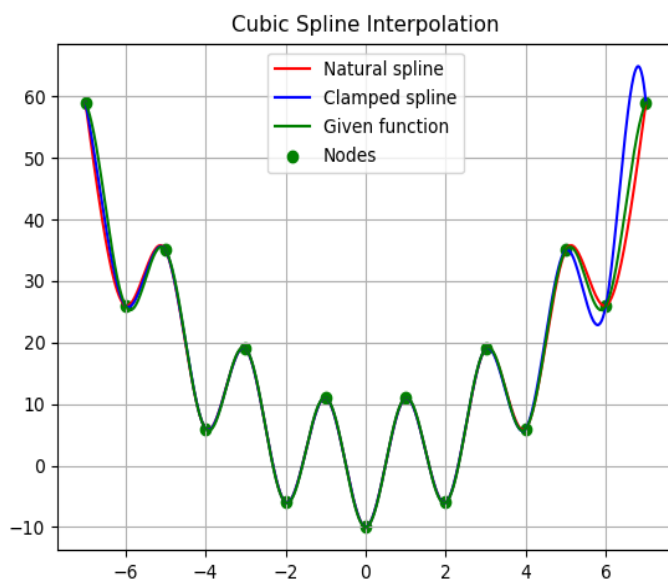


Rysunek 7 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia dla 3 węzłów

Powyższe rysunki przedstawiają, jak wyglądają różnice w interpolacji funkcjami sklejanymi w zależności od doboru warunków brzegowych. Przy warunkach brzegowych, gdzie druga pochodna wynosi 0, interpolowana funkcja wygląda jakby była uśrednieniem wartości, natomiast dla pozostałych warunków występują spore odchylenia.



Rysunek 8 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 2 stopnia dla 15 węzłów



Rysunek 9 – Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia dla 15 węzłów

W przypadku funkcji sklejanych 2 stopnia występuje efekt oscylacji, który jest dobrze widoczny dla 15 węzłów. Pojawia się on dla obydwóch przyjętych warunków brzegowych. Dla funkcji sklejanych 3 stopnia, ten efekt się nie pojawia, ale otrzymywane jest już bardzo dobre przybliżenie, z wyjątkiem brzegów przedziału.

Wnioski:

- W interpolacji funkcjami sklejanymi zwiększanie liczby węzłów polepsza przybliżenie
- W obydwóch przypadkach, warunek brzegowy natural okazuje się dawać dokładniejsze przybliżenie
- Dla tej interpolacji nie występuje efekt Rungego, natomiast w przypadku funkcji sklejanych 2 stopnia pojawia się efekt oscylacji, które bezpośrednio wynikają z rozmieszczenia węzłów. Moja funkcja jest monotoniczna przedziałami, i tę samą wartość przyjmuje dla paru punktów. Gdy węzły umieszczone zostaną w taki sposób, że położone są one niemonotonicznie (w rozumieniu wartości na osi OY), to pojawia się właśnie ten efekt oscylacji.

7. Porównanie aproksymacji

7.1 Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

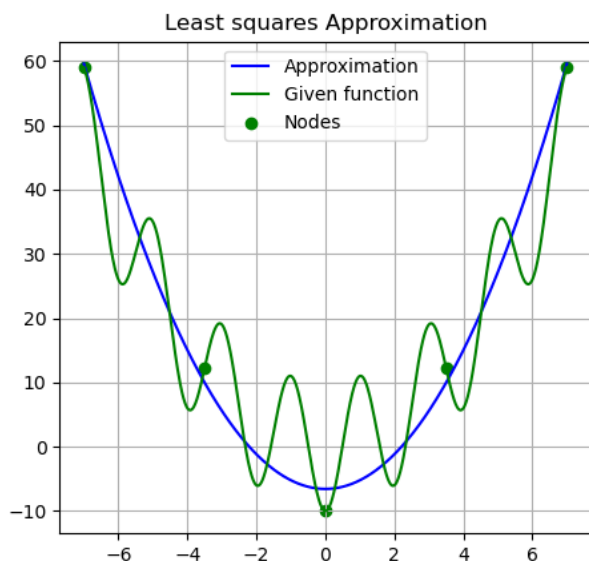
L. węzłów → ----- St. wielomianu ↓	3	6	11	16	31	51	151
2	36.53	16.22	13.89	12.23	11.31	10.9	10.43
5	-	19.9	15.13	11.47	10.94	10.82	10.7
10	-	-	20.02	32.04	10.44	10.43	10.50
15	-	-	-	3322	14.57	11.38	11.32
30	-	-	-	-	5741	166	87
50	-	-	-	-	-	3998	15.39
150	-	-	-	-	-	-	1420

Tabela 6 – wartości maksymalnych błędów bezwzględnych aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

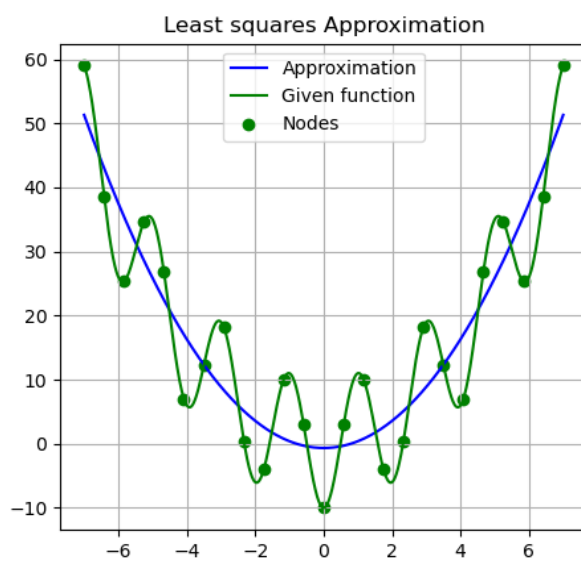
L. węzłów → ----- St. wielomianu ↓	3	6	11	16	31	51	151
2	517	75.36	56.2	51.58	50.47	50.19	50.04
5	-	104.96	60.6	50.94	50.08	49.83	49.64
10	-	-	104.59	107.58	43.92	43.35	42.63
15	-	-	-	505400	39.02	34.25	33.72
30	-	-	-	-	779169	286	242
50	-	-	-	-	-	125830	2.72
150	-	-	-	-	-	-	5592

Tabela 7 – wartości sumy kwadratów różnic aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

Otrzymane wartości błędów zestawione w tabelach 6 i 7 sugerują, że zwiększanie liczby węzłów dla stałego stopnia wielomianu powoduje zwiększanie dokładności aproksymacji, natomiast zwiększanie stopnia dla stałej liczby węzłów niekoniecznie.

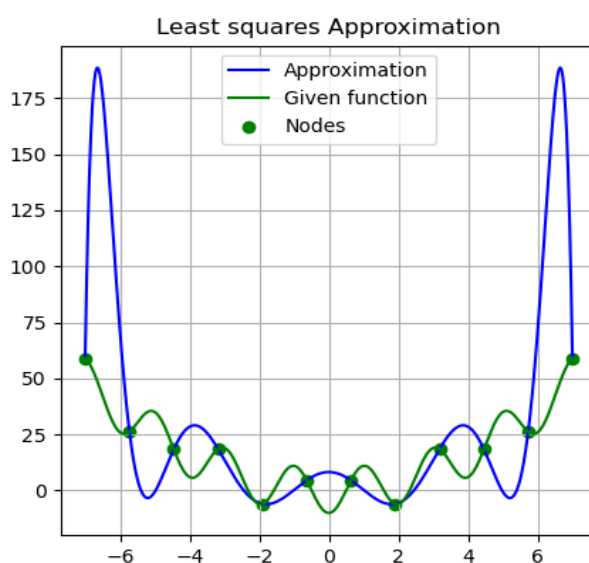


Rysunek 10 – Wykres aproksymacji dla 5 węzłów i 2 stopnia wielomianu

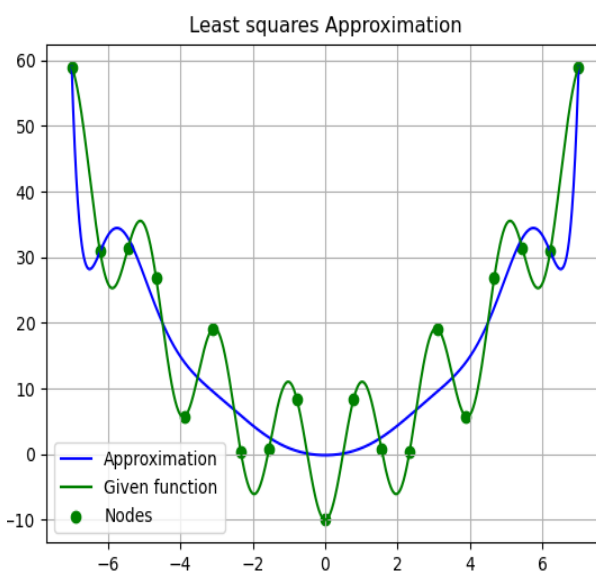


Rysunek 11 – Wykres aproksymacji dla 25 węzłów i 2 stopnia wielomianu

Moja funkcja jest symetryczna względem osi OY, a zatem aproksymacja również jest symetryczna. Na powyższych rysunkach 10 i 11 widać, że zwiększanie liczby węzłów polepsza aproksymację, która w tym przypadku bardzo dobrze uśrednia wartości funkcji.

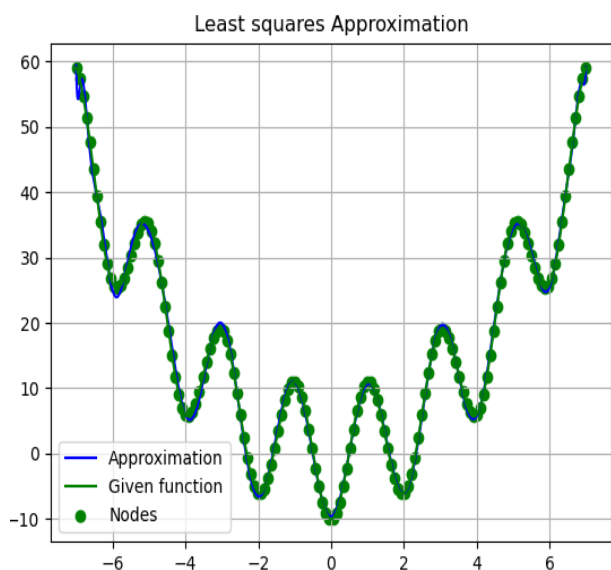


Rysunek 12 – Wykres aproksymacji dla 12 węzłów i 11 stopnia wielomianu

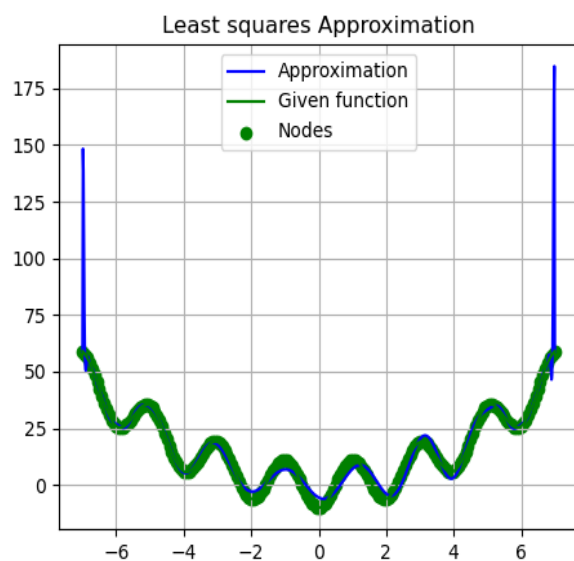


Rysunek 13 – Wykres aproksymacji dla 19 węzłów i 12 stopnia wielomianu

W przypadku zagadnienia aproksymacji również pojawia się efekt Rungego. Można pozbyć się go, zwiększając liczbę węzłów.



Rysunek 14 – Wykres aproksymacji dla 150 węzłów i 35 stopnia wielomianu



Rysunek 15 – Wykres aproksymacji dla 197 węzłów i 141 stopnia wielomianu

Korzystając z aproksymacji można również dobrze przybliżyć funkcję, jeśli zastosujemy odpowiednio duży stopień wielomianu i odpowiednio dużą liczbę węzłów. Trzeba jednak uważać, gdyż ze względu na złe uwarunkowanie macierzy, występują błędy numeryczne na krańcach przedziału, które są lekko widoczne na rysunku 14 na lewym krańcu przedziału, a na rysunku 15 są już bardzo duże wartości błędów na obydwóch granicach.

7.2 Aproksymacja średniokwadratowa funkcjami trygonometrycznymi

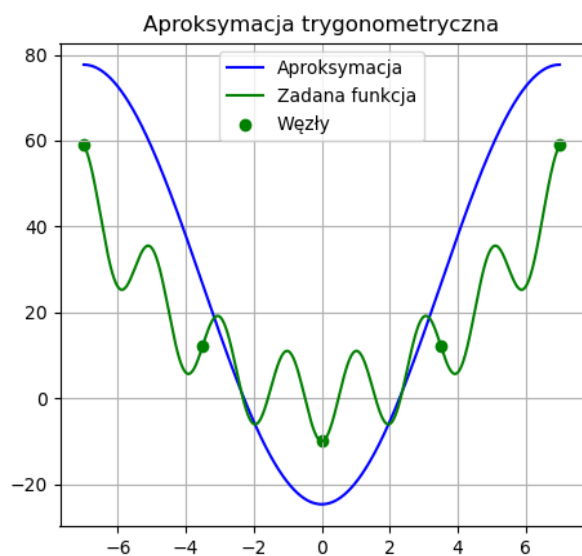
L. węzłów → ----- St. wielomianu ↓	5	9	15	21	31	51	61
2	46.64	32.17	19.34	17.97	18.16	20	20.47
4	-	51.02	28.74	23.47	19.49	16.37	15.60
7	-	-	38.65	25.07	16.99	13.03	12.36
10	-	-	-	50.6	33.34	19.6	16.2
15	-	-	-	-	53.3	31.63	26.22
25	-	-	-	-	-	55.49	46.12
30	-	-	-	-	-	-	56.07

Tabela 8 – wartości maksymalnych błędów bezwzględnych aproksymacji średniokwadratowej funkcjami trygonometrycznymi

L. węzłów → ----- St. wielomianu ↓	5	9	15	21	31	51	61
2	132892	34646	6857	4122	2508	1436	1187
4	-	54443	10091	4905	2478	1241	999
7	-	-	16851	7233	3159	1374	1070
10	-	-	-	7047	2132	470	274
15	-	-	-	-	3413	750	436
25	-	-	-	-	-	1331	773
30	-	-	-	-	-	-	947

Tabela 9 – wartości sumy kwadratów różnic aproksymacji średniokwadratowej funkcjami trygonometrycznymi

Po spojrzeniu na powyższe tabele i porównaniu wyników, można dojść do takiego samego wniosku, jak w przypadku wielomianów algebraicznych: zwiększanie liczby węzłów zwiększa dokładność, a zwiększanie stopnia niekoniecznie. Wyniki z tabeli sugerują, że najlepszego przybliżenia funkcji będzie można oczekiwać dla wielomianu stopnia ~ 10 , gdyż w tym wierszu znajdują się najmniejsze wartości błędów.

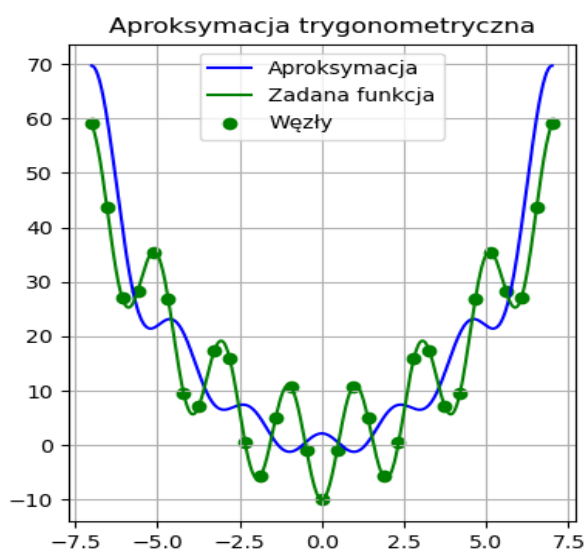


Rysunek 16 – Wykres aproksymacji dla 5 węzłów i 2 stopnia wielomianu



Rysunek 17 – Wykres aproksymacji dla 61 węzłów i 2 stopnia wielomianu

Dla aproksymacji trygonometrycznej wnioski są identyczne jak dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi - zwiększanie liczby węzłów polepsza aproksymację, która dobrze uśrednia wartości funkcji.



Rysunek 18 – Wykres aproksymacji dla 31 węzłów i 7 stopnia wielomianu



Rysunek 19 – Wykres aproksymacji dla 31 węzłów i 15 stopnia wielomianu

Zwiększanie stopni wielomianu, choć polepszają przybliżenie „w środku” przedziału, tak na granicach powoduje spore odstępstwa od oryginalnych wartości. Płyne stąd wniosek, że zwiększanie stopni wielomianu niekoniecznie powoduje lepsze przybliżenie.

Wnioski dla aproksymacji:

- Dla obydwóch sposobów aproksymacji zwiększanie liczby węzłów powoduje zwiększanie jej dokładności, natomiast zwiększanie stopnia wielomianu niekoniecznie
- W przypadku zastosowania funkcji trygonometrycznych, użyte funkcje bazowe są ortogonalne, a więc błędy na granicach nie są aż takie duże jak w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi
- Przy porównaniu wartości błędów aproksymacji funkcjami trygonometrycznymi w zestawieniu z wartościami błędów aproksymacji wielomianami algebraicznymi, dojść można do wniosku, że aproksymacja funkcjami trygonometrycznymi na ogół pozwala uzyskiwać lepsze przybliżenia
- Z powodu równomiernie rozmieszczonych ekstremów lokalnych funkcji, które naprzemiennie są minimum i maksimum lokalnym, aproksymacja bardzo dobrze uśrednia funkcję, przyjmując wartości pomiędzy nimi.

8. Podsumowanie

- Ciężko jednoznacznie stwierdzić, który sposób przybliżania funkcji jest najlepszy. Wpływa na to wiele czynników, jak np. ilość informacji, którymi dysponujemy czy chęć uzyskania konkretnych wyników (np. aby przechodziła przez węzły). W przypadku mojej funkcji, najlepsze przybliżenie funkcji otrzymywane jest dla interpolacji metodą Lagrange'a z wykorzystaniem węzłów rozmieszczonych w zerach Czebyszewa
- Jeśli nie chcemy używać dużej liczby węzłów, najlepsze przybliżenie otrzymane jest wtedy z wykorzystaniem funkcji sklepanych 3 stopnia
- Jeśli funkcja spełnia warunki Dirichleta, to lepiej jest zastosować aproksymację funkcjami trygonometrycznymi niż wielomianami algebraicznymi