Mateusz Bartnicki, grupa nr 3 środa 16:45-18:15

Metody obliczeniowe w nauce i technice, ćwiczenie 1 - 28.02.2024 r.

1. Treść zadania (nr 12)

Dany jest wielomian Wilkinsona W(x) = (x–1)(x–2)...(x–20). Przekształcić wielomian do postaci $W(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + ... + a_1x + a_0$. Podać wyznaczone wartości współczynników a_i. Dla x = 1 oraz x = 20 dokładna wartość wielomianu wynosi 0. Obliczyć wartość wielomianu dla x = 1 oraz x = 20. Do wyznaczenia wartości wielomianu wykorzystać schemat Hornera oraz dowolny schemat sumacyjny. Obliczenia wykonać dla zmiennych typu float, double, long double.

2. Dane techniczne

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem biblioteki numpy. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz.

3. Przebieg ćwiczenia

a) Wyznaczenie współczynników a_i wielomianu Wilkinsona. Użyłem w tym celu funkcji poly z biblioteki numpy.

b) Obliczenie wartości wielomianu dla x = 1 oraz x = 20 z wykorzystaniem schematu Hornera, czyli obliczenie p(x) ze wzoru:

$$p(x) = a_0 + x\bigg(a_1 + x\Big(a_2 + x\big(a_3 + \cdots + x(a_{n-1} + x\,a_n)\cdots\big)\Big)\bigg)$$

c) Obliczenie wartości wielomianu dla x = 1 oraz x = 20 z wykorzystaniem metody dziel i rządź

4. Analiza otrzymanych wyników

Na początku warto przedstawić otrzymane współczynniki. Prezentują się one następująco:

a_{20} = 1	a_{10} = 1307535010540395
a_{19} = -210	a_9 = -1,014229986551145e+16
a_{18} = 20615	a_8 = 6,30308120992949e+16
a_{17} = -1256850	a_7 = -3,1133364316139066e+17
a_{16} = 53327946	a_6 = 1,2066478037803732e+18
a_{15} = -1672280820	a_5 = -3,599979517947607e+18
a_{14} = 40171771630	a_4 = 8,037811822645052e+18
a_{13} = -756111184500	a_3 = -1,2870931245150988e+19
a_{12} = 11310276995381	a_2 = 1,3803759753640704e+19
a_{11} = -135585182899530	a_1 = -8,7529480367616e+18
a_0 = 2,43290200817664e+18	

Tabela 1 – współczynniki wielomianu Wilkinsona, gdzie a_0 to wyraz wolny, natomiast a_{20} to współczynnik przy x^{20}

Jak widać, największa wartość jest liczbą rzędu 10^{19}, więc dalsze obliczenia będą wykonywane na liczbach o podobnych rzędach wielkości.

Następnym krokiem było obliczenie wartości wielomianu w punkcie x = 1 oraz x = 20. Są to miejsca zerowe naszego wielomianu, a więc otrzymane wartości powinny wynosić 0. Wyniki są jednakże zupełnie inne.

Wartości uzyskane przy wykorzystaniu schematu Hornera		
Typ liczbowy	Przybliżona otrzymana wartość wielomianu dla x = 1	Przybliżona otrzymana wartość wielomianu dla x = 20
float	$-5{,}20149438464 * 10^{11}$	$-2{,}3361908901674756 * 10^{21}$
double	1024	$-2{,}27029504 * 10^{10}$
long double	1184	$-2{,}27029504 * 10^{10}$

Tabela 2 – Wartości uzyskane przy wykorzystaniu schematu Hornera dla różnych użytych typów liczbowych

Wartości uzyskane przy wykorzystaniu metody dziel i rządź		
Typ liczbowy	Przybliżona otrzymana wartość wielomianu dla x = 1	Przybliżona otrzymana wartość wielomianu dla x = 20
float	$-5{,}20149438612 * 10^{11}$	$1{,}744499869825665 * 10^{27}$
double	1247	$1{,}7444998473213508 * 10^{27}$
long double	1184	$1{,}7444998473213508509 * 10^{27}$

Tabela 3 – Wartości uzyskane przy wykorzystaniu metody dziel i rządź dla różnych użytych typów liczbowych

Obliczone wartości znacząco różnią się od wartości oczekiwanej wynoszącej 0. Największą różnicę widać w wartości obliczonej w punkcie x = 20, gdzie przy wykorzystaniu metody dziel i rządź różnica jest liczbą rzędu 10^{27}. Dostrzec można również, że żadna uzyskana wartość nie jest nawet bliska 0. Dzieje się tak, ponieważ otrzymane wcześniej współczynniki są bardzo dużymi liczbami, więc podczas dodawania dwóch liczb, które są normalizowane, istnieje ryzyko „zgubienia" pewnych cyfr wychodzących poza zakres mantysy. Gdy powielamy takie operacje, błąd staje się coraz większy, co skutkuje tak dużymi różnicami w obliczeniach.

Pokusiłem się również, aby wykorzystać funkcję roots z biblioteki numpy, która służy do znajdywania miejsc zerowych wielomianu. W ten sposób dla liczb typu double miejsce zerowe w punkcie x = 20 zamieniło się w miejsce zerowe w punkcie x = 19,999, a miejsce zerowe w punkcie x = 19 zamieniło się w miejsce zerowe w punkcie x = 19,001. Prawie na każdej pozycji wystąpiły niewielkie przesunięcia. Zmianie nie uległy tylko punkty ze zbioru {1, 2, 3}, co tłumaczy mniejsze rozbieżności dla x = 1, a znacząco większe dla x = 20.