Mateusz Bartnicki, grupa nr 3 środa 16:45-18:15

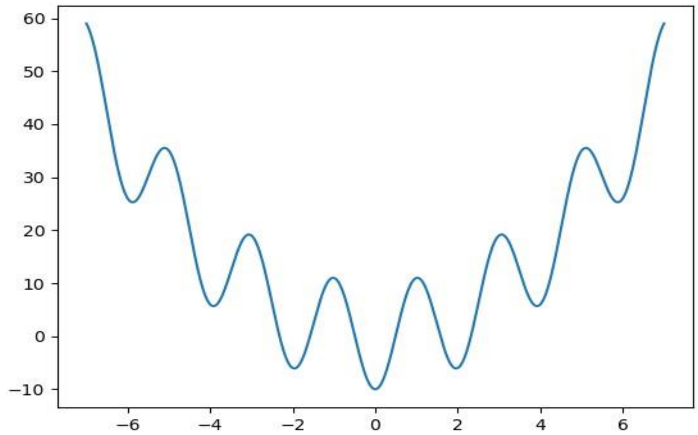
Metody obliczeniowe w nauce i technice, podsumowanie interpolacji - 12.04.2024 r.

Interpolacja – zagadnienie Lagrange'a i Hermite'a

1. Opracowana funkcja

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

Dla k = 1, m = 10 oraz x ∈ [-7, 7].



Rysunek 1 – wykres funkcji f(x)

2. Dane techniczne

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem bibliotek numpy oraz matplotlib. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz.

3. Realizacja ćwiczenia

Interpolacja została przeprowadzona na 3 różne sposoby: korzystając z metody Lagrange'a oraz metody Newtona w zagadnieniu Lagrange'a, a także w zagadnieniu Hermite'a.

W poniższych wzorach n oznacza stopień otrzymanego wielomianu, a w(x) jest otrzymywanym wielomianem interpolacyjnym.

5.1 Zagadnienie Lagrange'a – metoda Lagrange'a

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

5.2 Zagadnienie Lagrange'a – metoda Newtona

$$w(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \dfrac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}}$,

$f[x_i] = f(x_i)$

5.3 Zagadnienie Hermite'a

W przypadku zagadnienia Hermite'a, wielomian inteprolacyjny obliczany był na podstawie wzoru Newtona. W mojej implementacji używana była tylko pochodna pierwszego rzędu, a więc otrzymywany wielomian interpolacyjny był stopnia (2 * liczba węzłów – 1).

4. Dokładność przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej

W celu oszacowania dokładności przybliżenia wyznaczonej funkcji względem funkcji zadanej, wykorzystałem dwa wskaźniki:

a) Maksymalna różnica pomiędzy wartością zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu: $\max_k\{|f(x_k) - w(x_k)|\}, k \in \{1, 2, \dots, N\}$
b) Suma kwadratów różnic między wartościami zadanej funkcji oraz wyznaczonego wielomianu: $\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - w(x_i))^2$

N - liczba punktów, w których obliczana jest wartość funkcji

5. Porównanie różnych sposobów interpolacji

Wszystkie wartości były obliczane dla 1000 punktów (N = 1000). Przyjmowane węzły były równomiernie rozmieszczone, a implementacja uwzględnia tylko taki przypadek.

5.1 Wartości błędów przy interpolacji różnymi sposobami dla węzłów równomiernie rozmieszczonych

Stopień wielomianu	Zagadnienie Lagrange'a Metoda Lagrange'a		Zagadnienie Lagrange'a Metoda Newtona		Zagadnienie Hermite'a	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
3	16.53	18850	16.53	18850	20	74925
9	19.96	9640	19.96	9640	19.203	33022
19	4460	42646841	4460	42646841	61.583	137553
29	327.215	91822	327.215	91822	1307.889	12607362
39	0.258	0.0306	0.258	0.0306	90.496	23473
49	0.0032	9.964e-07	0.0046	2.578e-06	0.061	0.0055
59	3.257	0.525	0.2175	0.007265	0.00601	6.628e-06
69	1867	197519	356	14973	0.0375	0.00018
79	1622903	1.043e+11	132068	1.25e+9	8.597	21.837

Tabela 1 – wartości błędów przy interpolacji różnymi sposobami dla węzłów równomiernie rozmieszczonych

Na powyższym zestawieniu widzimy, że początkowo metody Lagrange'a i Newtona w zagadnieniu Lagrange'a niczym się od siebie nie różnią. Pierwsze marginalne różnice w ich błędach widzimy dla wielomianu stopnia 49, gdzie w tym zestawieniu jest tam również największa dokładność przybliżenia (najmniejsza suma kwadratów różnic). Dla kolejnego zwiększania stopnia wielomianu, zaczynają występować błędy numeryczne i nasze przybliżenie przestaje być dobre. Dla zagadnienia Hermite'a natomiast, dla dwóch pierwszych wierszy mamy bardzo podobne wartości błędów jak w przypadku zagadnienia Lagrange'a. Dopiero dla 19 stopnia zaczynamy obserwować różnice, która w tym przypadku jest drastyczna, bo aż 2 rzędów wielkości. W zagadnieniu Hermite'a również później (dla większego stopnia wielomianu) otrzymujemy najdokładniejsze przybliżenie w tym zestawieniu, jednak jest ono bardzo zbliżone do najlepszego przybliżenia otrzymanego w wyniku interpolacji z zagadnienia Lagrange'a. Dostrzec można jeszcze jeden fakt, a mianowicie: istotne błędy numeryczne, które zatracają dokładność przybliżenia, zaczynają występować dopiero dla 79 stopnia wielomianu, podczas gdy dla zagadnienia Lagrange'a było to już dla 69 stopnia wielomianu (a zapewne nawet wcześniej, gdyż w tym przypadku wartości błędów są już naprawdę duże, jednak nie ma tego zawartego w tym zestawieniu).

5.2 Wartości błędów przy interpolacji różnymi sposobami dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa

Stopień wielomianu	Zagadnienie Lagrange'a Metoda Lagrange'a		Zagadnienie Lagrange'a Metoda Newtona		Zagadnienie Hermite'a	
	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic	Maksymalny błąd bezwzględny	Suma kwadratów różnic
3	16.64	17825	16.64	17825	25.797	67384
9	21.94	11207	21.94	11207	23.866	62405
19	14.987	1796	14.987	1796	29.156	39194
29	0.0272	0.00825	0.0272	0.00825	29.977	10780
39	5.998e-07	3.652e-12	0.0016	4.377e-07	0.0539	0.0494
49	7.407e-13	4.774e-24	0.0282	0.0001383	0.002	1.112e-06
59	8.526e-14	5.072e-27	0.1778	0.002801	0.0246	0.000165
69	1.776e-13	6.45e-27	370	13072	0.182	0.00689
79	1.421e-13	4.889e-27	53732562	1,66e+14	25.850	42.375

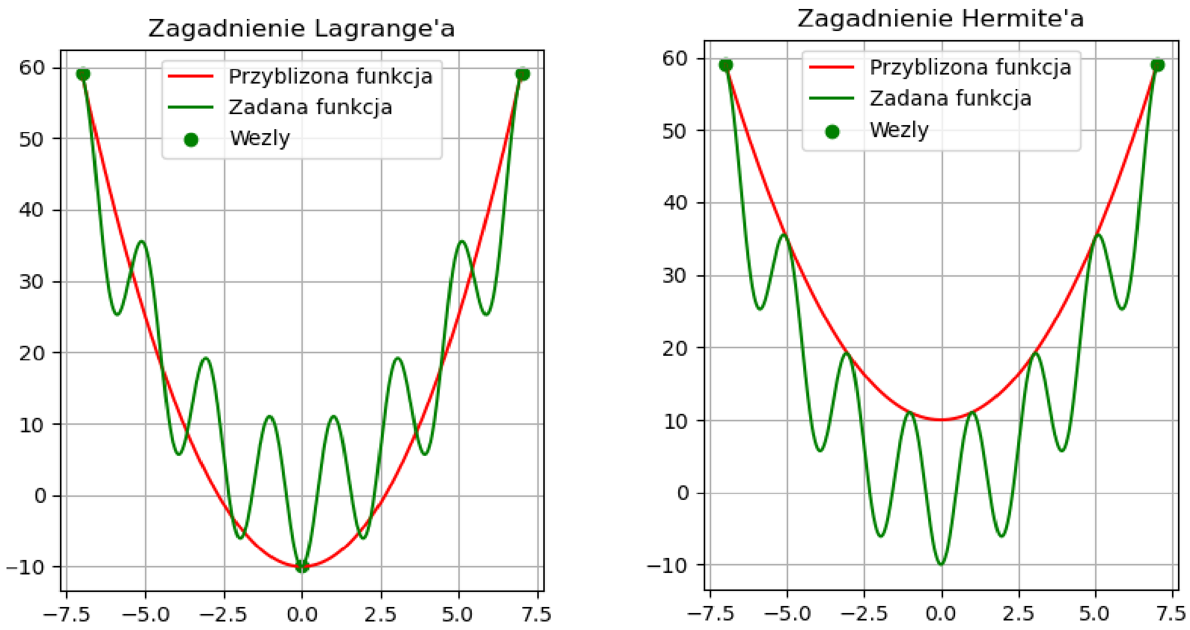
Tabela 2 – wartości błędów przy interpolacji różnymi sposobami dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa

Dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa, mamy bardzo podobny wniosek co do dwóch metod w zagadnieniu Lagrange'a. Początkowo otrzymujemy identyczne błędy, jednakże pierwsza różnica widoczna jest już dla 39 stopnia wielomianu, podczas gdy dla interpolacji z węzłami równomiernie rozmieszczonymi pierwsza różnica była widoczna dopiero dla 49 stopnia. Dla zagadnienia Hermite'a natomiast na samym początku otrzymujemy niemalże identyczne wartości błędów maksymalnych, ale po sumie kwadratów różnic widać wyraźnie, że przybliżenie się polepsza, podczas gdy dla równomiernie rozmieszczonych węzłów początkowe dodawanie kolejnych węzłów praktycznie pogorszało przybliżenie. Zastosowanie węzłów w zerach Czebyszewa znacząco poprawiło przybliżenie w przypadku zagadnienia Lagrange'a, a w przypadku metody Lagrange'a pozwoiło również wyeliminować błędy numeryczne (mowa tylko o analizowanych stopniach wielomianu). Oprócz tego, bardzo dobre przybliżenia obserwowalne są już dla mniejszych stopni wielomianu, co tyczy się również zagadnienia Hermite'a.

5.3 Wykresy porównawcze dla różnych sposobów interpolacji

5.3.1 Najmniejszy stopień wielomianu w zestawieniu (tabela 1 i 2)

5.3.1.1 Węzły równomiernie rozmieszczone

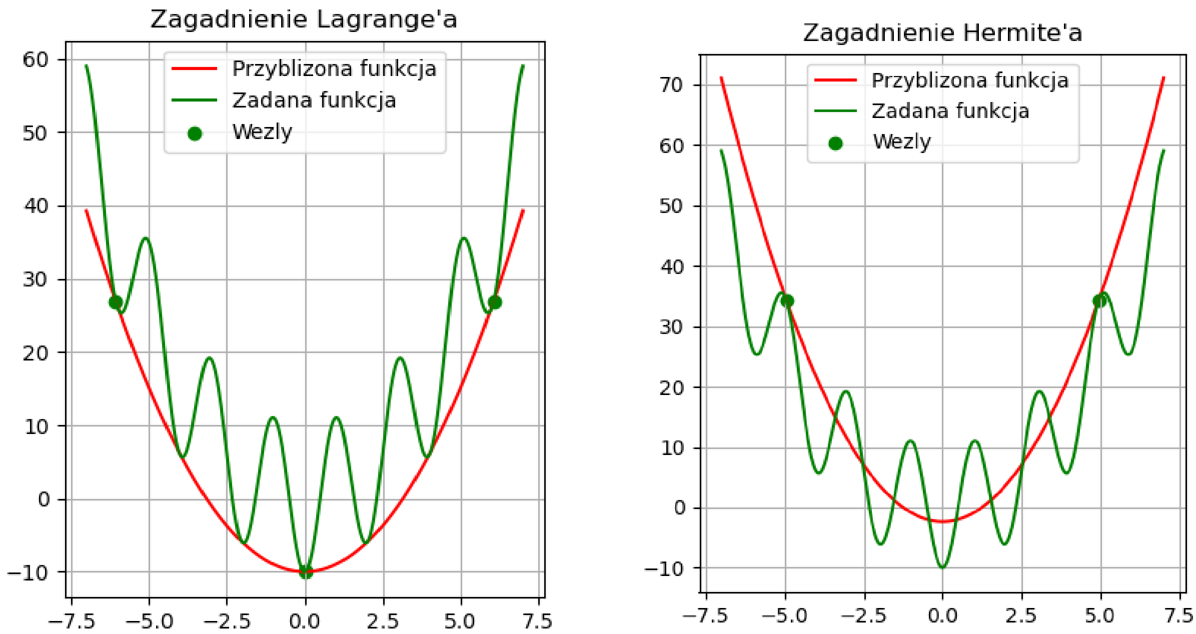


Rysunek 2 – Porównanie interpolacji w zagadnieniu Lagrange’a i Hermite’a dla węzłów równomiernie rozmieszczonych - 3 stopień wielomianu

Dla zagadnienia Lagrange’a zamieszczony jest tylko jeden wykres, ponieważ nie różni się on pomiędzy metodą Newtona a metodą Lagrange’a dla tak małej liczby węzłów.

Na powyższym rysunku widoczna jest różnica w wyglądzie wielomianu interpolacyjnego pomiędzy zagadnieniami, jednak żaden z nich nie jest dokładny i wymagane jest dodanie kolejnych węzłów w celu zwiększenia przybliżenia.

5.3.1.2 Węzły w zerach Czebyszewa

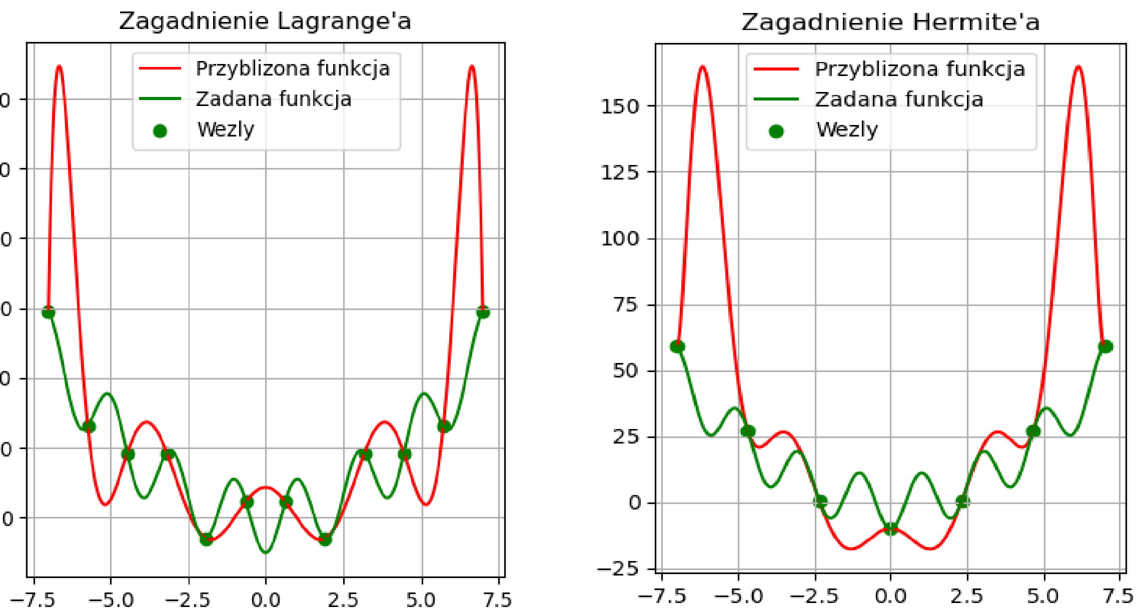


Rysunek 3 – Porównanie interpolacji w zagadnieniu Lagrange’a i Hermite’a dla węzłów w zerach Czebyszewa - 3 stopień wielomianu

Z tego samego powodu co dla węzłów równomiernie rozmieszczonych, dla zagadnienia Lagrange'a zamieszczony jest tylko jeden wykres.

Dla tak małego stopnia wielomianu nie można dostrzec żadnej różnicy w dokładności przybliżenia pomiędzy różnymi sposobami rozmieszczenia węzłów. W tym przypadku przybliżenia również są bardzo niedokładne i należy dodać kolejny węzły.

5.3.2 Efekt Rungego

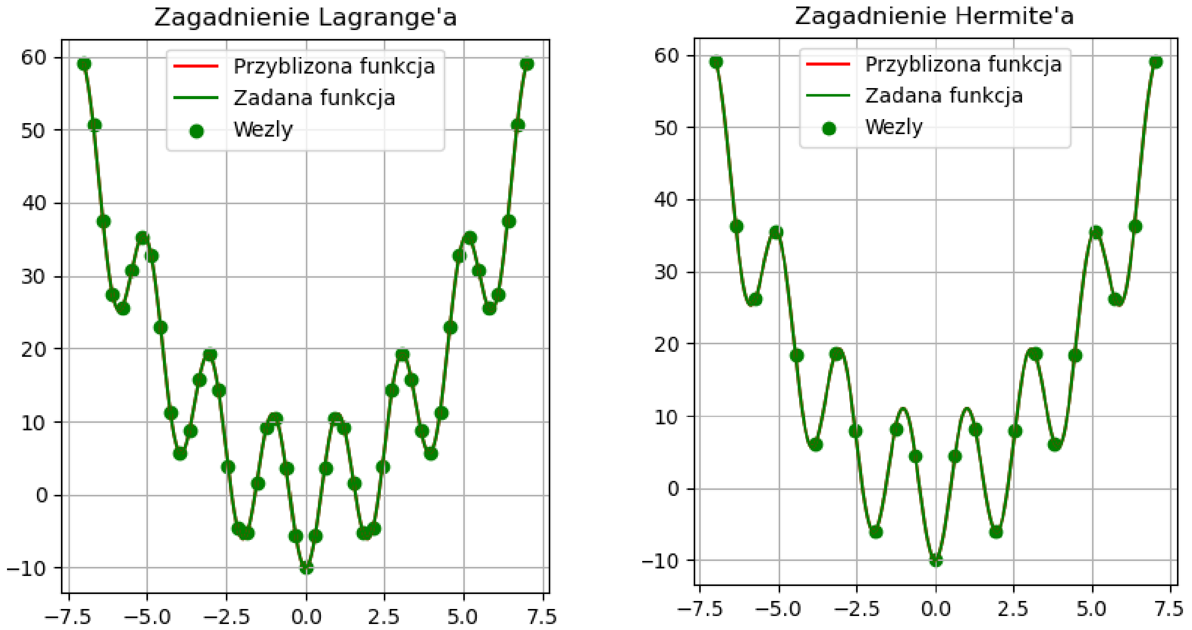


Rysunek 4 – Porównanie interpolacji w zagadnieniu Lagrange'a i Hermite'a dla węzłów równomiernie rozmieszczonych zagadnienie Lagrange'a – 11 stopień wielomianu, zagadnienie Hermite'a – 13 stopień wielomianu

W przypadku zagadnienia Lagrange'a znowu otrzymujemy identyczny wielomian dla metod Newtona i Lagrange'a.

Pierwsze wystąpienie efektu Rungego w przypadku zagadnienia Lagrange'a pojawia się dla 12 węzłów, czyli 11 stopnia wielomianu, natomiast w przypadku zagadnienia Hermite'a ma to miejsce już dla 7 węzłów, czyli 13 stopnia wielomianu. W przypadku zagadnienia Lagrange'a efekt ten zanika dopiero dla 36 stopnia wielomianu, a w przypadku zagadnienia Lagrange'a efekt zanika już dla 33 stopnia wielomianu. Wniosek stąd jest taki, że dla zagadnienia Hermite'a efekt pojawia się później oraz zanika szybciej. W obydwóch przypadkach zastosowanie węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa całkowicie niweluje ten efekt i nie pojawia się on.

5.3.3 Najdokładniejsze przybliżenie



Rysunek 5 – Porównanie interpolacji w zagadnieniu Lagrange'a i Hermite'a dla węzłów równomiernie rozmieszczonych zagadnienie Lagrange'a – 46 stopień wielomianu, zagadnienie Hermite'a – 45 stopień wielomianu

Jako kryterium najdokładniejszego przybliżenia przyjąłem sumę kwadratów różnic. Im mniejsza, tym dokładniejsze przybliżenie.

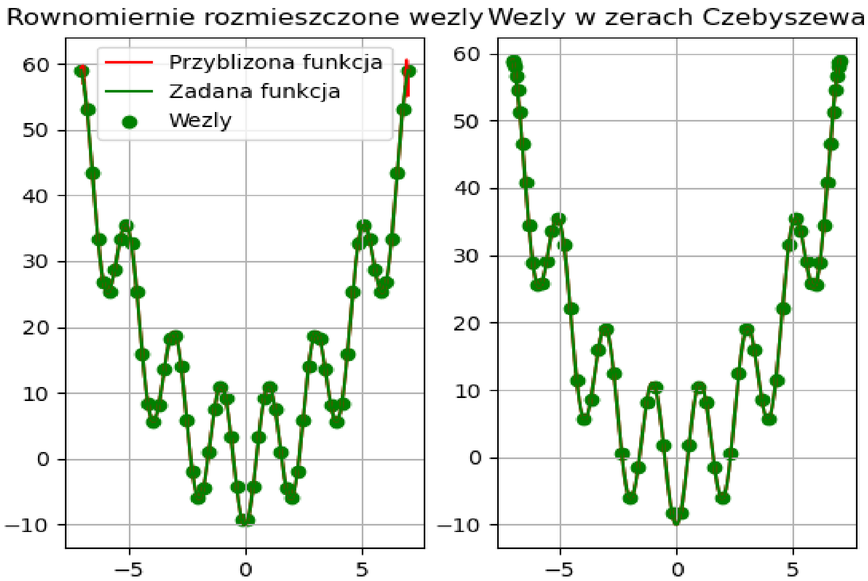
Zamieszczam po jednym rysunku dla zagadnienia Lagrange'a oraz zagadnienia Hermite'a, ponieważ w tej skali rysunku różnią się one tylko liczbą węzłów.

Dla zagadnienia Lagrange'a tym razem, metody Newtona i Lagrange'a osiągają swoje najdokładniejsze przybliżenia dla różnych liczb węzłów, zarówno dla węzłów równomiernie rozmieszczonych, jak i dla węzłów w zerach Czebyszewa. Dla węzłów równomiernie rozmieszczonych w przypadku metody Lagrange'a, najdokładniejsze przybliżenie osiągamy dla 47 węzłów, czyli 46 stopnia wielomianu, a suma kwadratów różnic jest liczbą rzędu 10^{-8}. W przypadku metody Newtona natomiast, błąd najdokładniejszego przybliżenia jest podobnej wielkości, a osiągalny jest on dla zaledwie jednego węzła mniej. W przypadku zagadnienia Hermite'a, błąd najdokładniejszego przybliżenia jest nieco większy, gdyż wynosi on $3{,}68 * 10^{-5}$, ale osiągamy je dla tego samego stopnia wielomianu co dla metody Newtona. Wynika to z tego faktu, że moja implementacja oparta jest właśnie na tej metodzie.

Duże różnice dostrzegalne są w wartościach błędów w przypadku zastosowania węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa dla metody Lagrange'a. Najdokładniejsze przybliżenie osiągalne jest dla 55 stopnia wielomianu, ale suma kwadratów różnic wynosi zaledwie $4{,}17 * 10^{-27}$, czyli jest to liczba aż 19 rzędów mniejsza niż w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych. Dla metody Newtona natomiast najdokładniejsze przybliżenie jest liczbą tego samego rzędu co w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych, a osiągalne jest ono już dla 36 stopnia wielomianu, czyli dla 9 węzłów mniej. Jeśli chodzi o zagadnienie Hermite'a natomiast, najdokładniejsze przybliżenie osiągane jest dla 37 stopnia wielomianu i jest ono liczbą rzędu 10^{-7}, czyli różni się ono tylko o 2 rzędy wielkości niż przy drugim sposobie doboru węzłów.

5.3.4 Błędy numeryczne

5.3.4.1 Metoda Lagrange'a – zagadnienie Lagrange'a

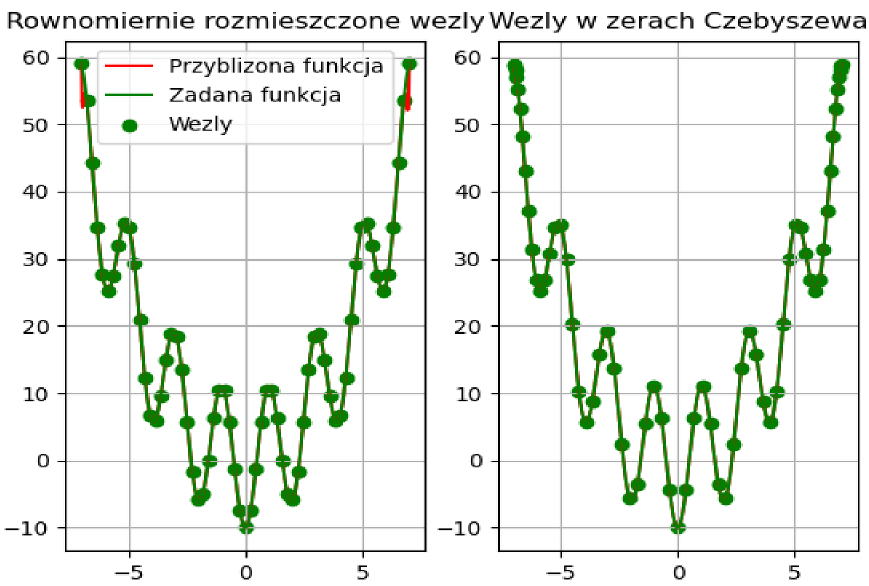


Rysunek 6 – Interpolacja metodą Lagrange'a w zagadnieniu Lagrange'a dla 60 węzłów

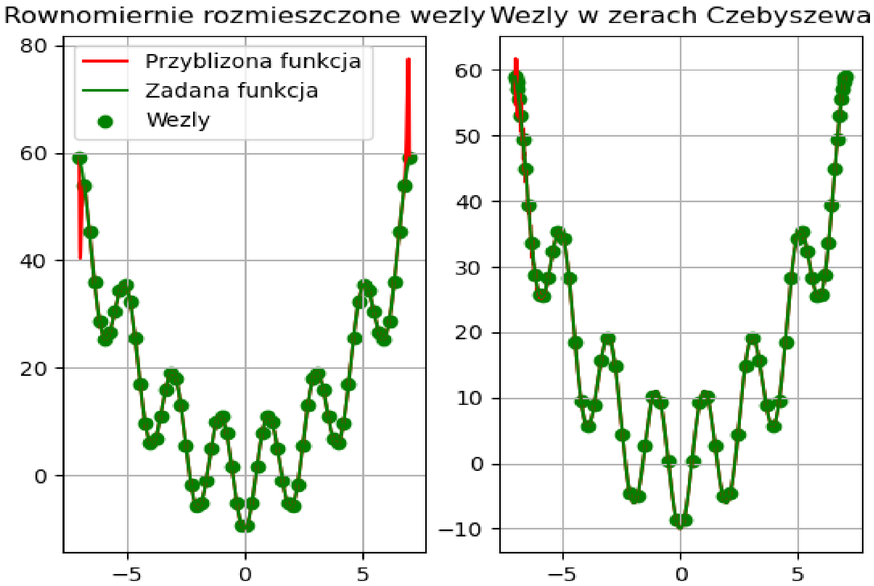
Dla metody Lagrange'a pierwsze błędy numeryczne występują już dla 59 stopnia wielomianu w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych. Objawiają się one błędnie wyznaczonymi wartościami funkcji na skrajach przedziału. Przy kolejnym zwiększaniu liczby węzłów, błędy te również się powiększają.

Dla węzłów umieszczonych w zerach Czebyszewa nie zaobserwowałem takiego efektu aż do 100 węzłów, a większe obliczenia zajmują zbyt dużo czasu mojemu komputerowi.

5.3.4.2 Metoda Newtona – zagadnienie Lagrange'a



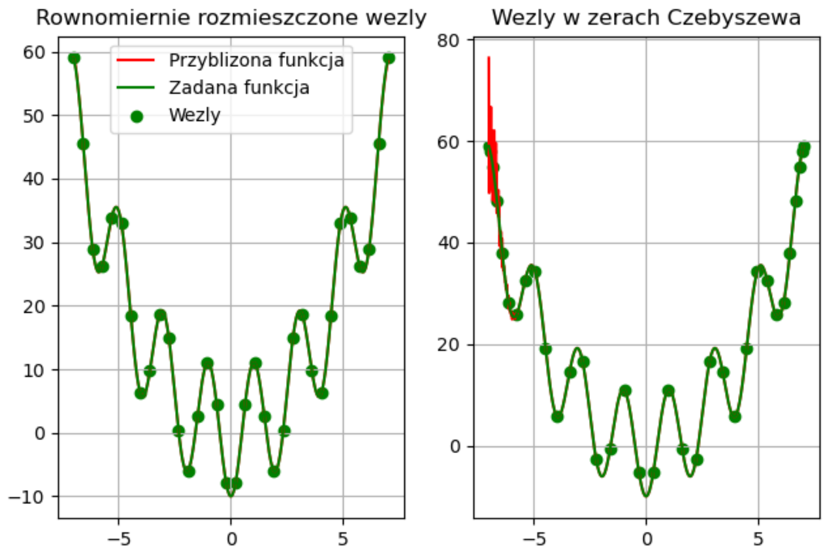
Rysunek 7 – Interpolacja metodą Newtona w zagadnieniu Lagrange'a dla 63 węzłów



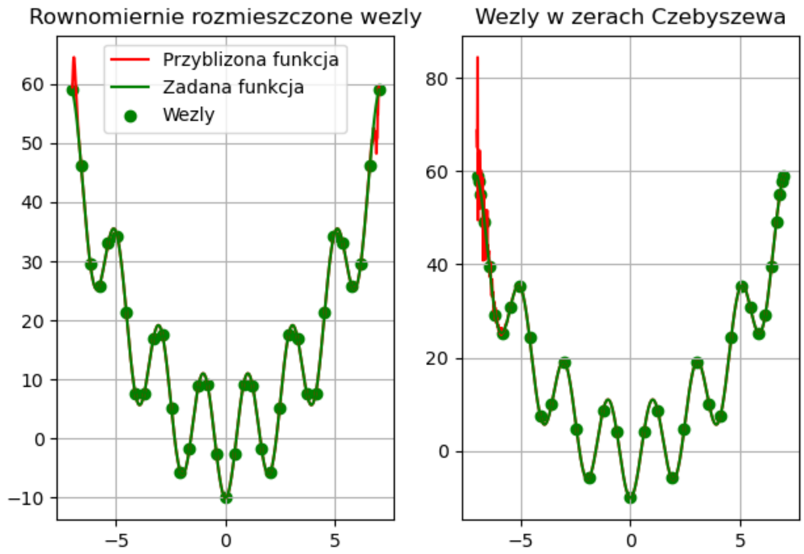
Rysunek 8 – Interpolacja metodą Newtona w zagadnieniu Lagrange'a dla 66 węzłów

Dla metody Newtona pierwsze błędy numeryczne pojawiają się dla 62 stopnia wielomianu w przypadku węzłów równomiernie rozmieszczonych, natomiast dla węzłów w zerach Czebyszewa pojawiają się one dopiero po dodaniu trzech kolejnych węzłów. Na rysunku 8 możemy już dostrzec, w jakim stopniu powiększają się te błędy w przypadku równomiernie rozmieszczonych węzłów.

5.3.4.3 Zagadnienie Hermite'a



Rysunek 9 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite'a dla 34 węzłów (67 stopień wielomianu)



Rysunek 10 – Interpolacja w zagadnieniu Hermite'a dla 35 węzłów (69 stopień wielomianu)

W przypadku zagadnienia Hermite'a natomiast, błędy te pojawiają się najpóźniej, bo dopiero dla 67 stopnia wielomianu. Co jednak jest wyróżniające, w tym przypadku pierwsze błędy obserwujemy dla węzłów w zerach Czebyszewa, a nie dla równomiernie rozmieszczonych jak miało to miejsce w zagadnieniu Lagrange'a. Dla równomiernie rozmieszczonych węzłów pierwsze błędy można zaobserwować po dodaniu zaledwie jednego węzła więcej, dlatego w tym przypadku dobór węzłów pod względem błędów numerycznych nie ma większego znaczenia.

6. Wnioski

- Podsumowując, w przypadku każdej interpolacji zastosowanie węzłów w zerach Czebyszewa nie tylko niweluje efekt Rungego, ale także pomaga uzyskać dokładniejsze przybliżenia.
- Dla stopnia wielomianu mniejszego od 34, metoda Lagrange'a i metoda Newtona w zagadnieniu Lagrange'a daje identyczne wyniki.
- Najdokładniejsze przybliżenie uzyskujemy dla metody Lagrange'a, natomiast metoda Newtona w zagadnieniu Lagrange'a i zagadnienie Hermite'a również oparte na tej metodzie nie różnią się od siebie pod tym względem zbyt wiele.
- Dodawanie kolejnych węzłów nie zawsze pomaga. Początkowo, z dodawaniem nowych węzłów zaczynamy obserwować efekt Rungego, który powoduje duże rozbieżności i duże wartości błędów. Po przekroczeniu pewnego stopnia wielomianu, dodawanie kolejnych węzłów powoduje występowanie coraz większych błędów numerycznych związanych z reprezentacją liczb w komputerze.