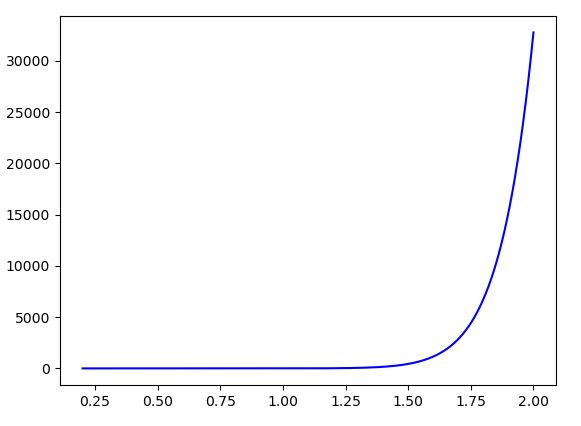
Mateusz Bartnicki, grupa nr 3 środa 16:45-18:15

Metody obliczeniowe w nauce i technice, ćwiczenie 5 - 08.05.2024 r.

**Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych**

**1. Opracowana funkcja**

w zadanym przedziale x [0.2, 2]. Rzeczywiste miejsce zerowe znajduje się w punkcie x = 0.56984 (na podstawie Wolfram Alpha)

Rysunek 1 – wykres funkcji f(x)

**2. Dane techniczne**

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem bibliotek numpy oraz matplotlib. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz.

**3. Kryteria stopu**

Kolejne iteracje, w których obliczane było miejsce zerowe funkcji odbywały się do momentu, gdy nie został spełniony warunek stopu. W tym ćwiczeniu zastosowane zostały 2 kryteria stopu:

1. kryterium przyrostowe
2. b) kryterium residualne

jest pewnym przyjmowanym parametrem, od którego zależeć będzie dokładność otrzymanych wyników, ale również liczba iteracji potrzebnych do uzyskania zadowalającego wyniku.

**4. Metody**

W tym ćwiczeniu wyznaczane były pierwiastki równania f(x) = 0 w zadanym przedziale [a, b] za pomocą metody Newtona oraz metody siecznych.

**4.1 Metoda Newtona**

Metoda ta polega na prowadzeniu stycznych do wykresu funkcji w kolejnych punktach xi. Początkowo, za punkt x0 przyjmowany jest początek przedziału, czyli 0.2. Współrzędna x przecięcia poprowadzonej stycznej z osią OX jest przybliżeniem rozwiązania równania. Procedurę te powtarzamy, aż nie spełni ona kryterium stopu.

W moim programie, kolejne punkty xi były obliczane ze wzoru:

**4.2 Metoda siecznych**

Ta metoda natomiast polega na wyznaczaniu siecznej przechodzącej przez punkty xi oraz xi-1. Rozwiązaniem równania jest współrzędna x przecięcia wyznaczonej siecznej z osią OX. Jeśli nie jest spełnione kryterium stopu, następne punkty wyznaczane są ze wzoru:

**5. Analiza rezultatów dla metody Newtona**

**5.1 Kryterium stopu – kryterium przyrostowe**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 0.27999 | 0.56987 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.3 | 0.36999 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.45996 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.54626 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.57458 | 0.56989 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.65348 | 0.57015 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.74666 | 0.57006 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.84 | 0.56988 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 0.93333 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 1.02667 | 0.56986 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 1.12000 | 0.56995 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 1.21333 | 0.57011 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 1.30667 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 1.30667 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 1.39378 | 0.57013 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 1.38216 | 0.56999 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 1.3659 | 0.56989 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 1.34566 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 2.0 | 1.32206 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 1 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda Newtona, kryterium przyrostowe

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 1 | 7 | 8 | 8 | 9 | 10 |
| 0.3 | 1 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| 0.4 | 1 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0.5 | 1 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| 0.6 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| 0.7 | 1 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0.8 | 1 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.9 | 1 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 1.0 | 1 | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1.1 | 1 | 11 | 12 | 12 | 13 | 14 |
| 1.2 | 1 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 |
| 1.3 | 1 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 1.4 | 1 | 15 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1.5 | 2 | 16 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 1.6 | 2 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1.7 | 3 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 1.8 | 4 | 18 | 19 | 19 | 20 | 21 |
| 1.9 | 5 | 19 | 20 | 20 | 21 | 22 |
| 2.0 | 6 | 20 | 20 | 21 | 22 | 23 |

Tabela 2 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda Newtona, kryterium przyrostowe

Po spojrzeniu na tabelę 1, można dostrzec, że przyjmując = 10-2, otrzymujemy już dość dobre przybliżenia, a obliczone miejsca zerowe dla pewnych punktów startowych pokrywają się z rzeczywistym miejscem zerowym funkcji. Dla każdej mniejszej wartości , otrzymywany wynik jest ten sam. Jednak po spojrzeniu na tabelę 2, możemy już dostrzec różnice dla tych wartości – liczba iteracji jest tym większa, im mniejsze jest przyjmowane . Dodatkowo, zauważyć można również, że najmniejsza liczba operacji jest dla punktu startowego wynoszącego 0.6. Dzieje się tak, ponieważ rzeczywiste miejsce zerowe jest najbliżej tego właśnie punktu.

**5.2 Kryterium stopu – kryterium residualne**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 0.352 | 0.47504 | 0.56253 | 0.56987 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.3 | 0.37 | 0.43299 | 0.56701 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.46 | 0.45997 | 0.55542 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.546 | 0.54627 | 0.54627 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.575 | 0.57459 | 0.57459 | 0.56989 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.653 | 0.65348 | 0.5799 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.747 | 0.65062 | 0.57858 | 0.57006 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.784 | 0.68298 | 0.57393 | 0.56988 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 0.75883 | 0.66113 | 0.58388 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 0.77907 | 0.6787 | 0.57293 | 0.56986 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 0.79324 | 0.64518 | 0.57636 | 0.56995 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 0.74858 | 0.65226 | 0.57933 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 0.75242 | 0.65558 | 0.58092 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 0.75242 | 0.65558 | 0.58092 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 0.74907 | 0.65269 | 0.57952 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 0.79589 | 0.64731 | 0.57718 | 0.56999 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 0.78653 | 0.68518 | 0.57453 | 0.56989 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 0.77487 | 0.67505 | 0.59259 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 2.0 | 0.76128 | 0.66325 | 0.58509 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 3 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda Newtona, kryterium residualne

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| 0.3 | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| 0.4 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| 0.5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| 0.6 | 1 | 1 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 0.7 | 1 | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| 0.8 | 1 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 |
| 0.9 | 2 | 4 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 1.0 | 4 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| 1.1 | 5 | 7 | 10 | 11 | 13 | 14 |
| 1.2 | 6 | 9 | 11 | 12 | 14 | 15 |
| 1.3 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 |
| 1.4 | 9 | 11 | 13 | 15 | 16 | 18 |
| 1.5 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 |
| 1.6 | 11 | 13 | 15 | 17 | 18 | 19 |
| 1.7 | 11 | 14 | 16 | 17 | 19 | 20 |
| 1.8 | 12 | 14 | 17 | 18 | 20 | 21 |
| 1.9 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 22 |
| 2.0 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 23 |

Tabela 4 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda Newtona, kryterium residualne

Po spojrzeniu na powyższe tabele 3 i 4, a następnie porównaniu wyników z tabelami 1 i 2, wysuwa się wniosek, że przy zastosowaniu kryterium residualnego jako kryterium stopu otrzymujemy na ogół gorsze przybliżenia (bardziej odbiegające od rzeczywistej wartości miejsca zerowego), a pierwsze miejsca zerowe pokrywające się z rzeczywistym punktem otrzymujemy dopiero dla  = 10-4. Dzieje się tak, ponieważ wartości bezwzględne funkcji w tych punktach są bardzo bliskie 0, gdyż funkcja jest tam niemalże pozioma, a więc dla stosunkowo dużych wartości warunek stopu zostaje szybko spełniony i kończone są obliczenia. W porównaniu do kryterium przyrostowego, dla punktów startowych daleko oddalonych od prawdziwego miejsca zerowego, różnice między faktycznym miejscem zerowym a obliczonym są zdecydowanie mniejsze. Przewagą tego kryterium natomiast jest fakt, że dla niektórych przyjmowanych danych program wykonuje mniejszą liczbę iteracji potrzebną do uzyskania zadowalającego wyniku.

**6. Analiza rezultatów dla metody siecznych**

Ta metoda była testowana na dwa różne sposoby:

1. przy przyjęciu stałego punktu końcowego (2.0) i zmienianiu punktu startowego
2. przy przyjęciu stałego punktu startowego (0.2) i zmienianiu punktu końcowego

**6.1 Kryterium stopu – kryterium przyrostowe**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.3 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0.8 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.9 | 0.9 | 0.9 | 0.9 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 1.09977 | 1.09977 | 1.09977 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 1.19925 | 1.19925 | 1.19925 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 1.29782 | 1.29782 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 1.39435 | 1.39435 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 1.48682 | 1.48682 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 1.57230 | 0.5711 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 1.64743 | 0.57118 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 1.70957 | 0.57066 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 1.75782 | 0.57009 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 5 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda siecznych, kryterium przyrostowe dla stałego punktu końcowego = 2.0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt końcowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.3 | 0.33570 | 0.56952 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.41193 | 0.56985 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.50267 | 0.50267 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.59864 | 0.59864 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.67885 | 0.57020 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.64483 | 0.64483 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.44661 | 0.44661 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 0.30450 | 0.56983 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 0.23918 | 0.56979 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 0.21323 | 0.21323 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 0.20454 | 0.20454 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 0.20165 | 0.20165 | 0.20165 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 0.20064 | 0.20064 | 0.20064 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 0.20026 | 0.20026 | 0.20026 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 0.20011 | 0.20011 | 0.20011 | 0.20011 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 0.20005 | 0.20005 | 0.20005 | 0.20005 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 0.20002 | 0.20002 | 0.20002 | 0.20002 | 0.56984 | 0.56984 |
| 2.0 | 0.20001 | 0.20001 | 0.20001 | 0.20001 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 6 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda siecznych, kryterium przyrostowe dla stałego punktu startowego = 0.2

Tabela 7 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda siecznych, kryterium przyrostowe dla stałego   
punktu końcowego = 2.0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15 | 16 |
| 0.3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 13 | 14 |
| 0.4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 11 | 12 |
| 0.5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 9 |
| 0.6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 7 | 9 |
| 0.7 | 2 | 2 | 2 | 2 | 11 | 12 |
| 0.8 | 2 | 2 | 2 | 2 | 14 | 15 |
| 0.9 | 2 | 2 | 2 | 2 | 16 | 17 |
| 1.0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 18 | 20 |
| 1.1 | 2 | 2 | 2 | 19 | 20 | 22 |
| 1.2 | 2 | 2 | 2 | 21 | 22 | 23 |
| 1.3 | 2 | 2 | 22 | 22 | 24 | 25 |
| 1.4 | 2 | 2 | 23 | 24 | 25 | 27 |
| 1.5 | 2 | 2 | 24 | 25 | 27 | 28 |
| 1.6 | 2 | 24 | 26 | 26 | 28 | 29 |
| 1.7 | 2 | 25 | 27 | 27 | 29 | 30 |
| 1.8 | 2 | 26 | 27 | 28 | 30 | 31 |
| 1.9 | 2 | 27 | 28 | 29 | 30 | 32 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt końcowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.3 | 1 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 0.4 | 1 | 7 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| 0.5 | 1 | 1 | 5 | 5 | 7 | 8 |
| 0.6 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| 0.7 | 1 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| 0.8 | 2 | 2 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.9 | 2 | 2 | 8 | 8 | 10 | 11 |
| 1.0 | 2 | 10 | 11 | 11 | 13 | 14 |
| 1.1 | 2 | 11 | 12 | 12 | 14 | 15 |
| 1.2 | 2 | 2 | 12 | 13 | 14 | 16 |
| 1.3 | 2 | 2 | 12 | 13 | 14 | 16 |
| 1.4 | 2 | 2 | 2 | 13 | 15 | 16 |
| 1.5 | 2 | 2 | 2 | 13 | 15 | 16 |
| 1.6 | 2 | 2 | 2 | 13 | 15 | 16 |
| 1.7 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15 | 16 |
| 1.8 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15 | 16 |
| 1.9 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15 | 16 |
| 2.0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 15 | 16 |

W tabelach 7 i 8, które mówią o liczbie wykonanych iteracji, można dostrzec pewną zależność, bardzo podobną do tej, którą dostrzegliśmy również w metodzie Newtona: im bliżej jeden z punktów położony jest rzeczywistego pierwiastka równania, tym mniej iteracji potrzebnych jest do wykonania. Po spojrzeniu natomiast na tabelę 5 i 6, w których zawarte są obliczone miejsca zerowe, okazuje się, że mała liczba iteracji wcale nie jest satysfakcjonująca, bowiem występują tam bardzo duże różnice pomiędzy otrzymanym miejscem zerowym a faktycznym pierwiastkiem równania. Wniosek z tego płynie taki, że w większości przypadków im więcej iteracji jest wykonane, tym lepsze przybliżenie otrzymujemy. Z tabeli 6, gdzie punkt startowy zawsze był umieszczony w punkcie 0.2, możemy również zobaczyć, że otrzymujemy lepsze przybliżenia w większej liczbie wierszy tabeli, niż w przypadku tabeli 5, gdzie punkt startowy był ruchomy, a punkt końcowy umieszczony był w punkcie 2.0. Jest to spowodowane tym, że punkt 0.2 jest o wiele mniej oddalony od faktycznego miejsca zerowego niż punkt 2.0.

Tabela 8 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda siecznych, kryterium przyrostowe dla stałego   
punktu startowego = 0.2

**6.2 Kryterium stopu – kryterium residualne**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 0.32284 | 0.41653 | 0.55658 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.3 | 0.3 | 0.40747 | 0.55284 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.55516 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.56973 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.6 | 0.57041 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.7 | 0.7 | 0.59956 | 0.56987 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.8 | 0.68175 | 0.59512 | 0.57056 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.80693 | 0.69747 | 0.5841 | 0.56994 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 0.81325 | 0.67151 | 0.58792 | 0.57007 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 0.81266 | 0.6712 | 0.58773 | 0.57006 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 0.80537 | 0.69774 | 0.5842 | 0.56995 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 0.79222 | 0.68636 | 0.59798 | 0.57088 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 0.81175 | 0.67048 | 0.58729 | 0.57004 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 0.7873 | 0.68211 | 0.59495 | 0.57054 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 0.79485 | 0.68864 | 0.59965 | 0.56987 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 0.79566 | 0.68934 | 0.60016 | 0.56987 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 0.78924 | 0.68378 | 0.59613 | 0.57066 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 0.81385 | 0.67221 | 0.58836 | 0.57009 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 9 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda siecznych, kryterium residualne dla stałego punktu końcowego = 2.0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt końcowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.3 | 0.33569 | 0.42892 | 0.53902 | 0.56952 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.4 | 0.41193 | 0.41193 | 0.53384 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.5 | 0.50267 | 0.50267 | 0.50267 | 0.56976 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.6 | 0.59864 | 0.59864 | 0.59864 | 0.57035 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.7 | 0.67885 | 0.67885 | 0.59030 | 0.57020 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.8 | 0.65192 | 0.64483 | 0.58671 | 0.57000 | 0.56984 | 0.56984 |
| 0.9 | 0.44661 | 0.44661 | 0.52827 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.0 | 0.30450 | 0.44753 | 0.55060 | 0.56983 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.1 | 0.23918 | 0.44078 | 0.54675 | 0.56979 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.2 | 0.21323 | 0.42448 | 0.53570 | 0.56984 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.3 | 0.32605 | 0.41922 | 0.53192 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.4 | 0.32399 | 0.41750 | 0.55704 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.5 | 0.32327 | 0.41690 | 0.55676 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.6 | 0.32301 | 0.41667 | 0.55665 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.7 | 0.32291 | 0.41659 | 0.55661 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.8 | 0.32286 | 0.41655 | 0.55660 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 1.9 | 0.32284 | 0.41653 | 0.55659 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |
| 2.0 | 0.32284 | 0.41653 | 0.55658 | 0.56985 | 0.56984 | 0.56984 |

Tabela 10 – Obliczone miejsca zerowe dla zadanego i zadanego punktu startowego – metoda siecznych, kryterium residualne dla stałego punktu startowego = 0.2

Tabela 11 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda siecznych, kryterium residualne dla stałego   
punktu końcowego = 2.0

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt startowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.2 | 2 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 0.3 | 2 | 4 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 0.4 | 2 | 2 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 0.5 | 2 | 2 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| 0.6 | 2 | 2 | 2 | 4 | 7 | 8 |
| 0.7 | 2 | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 |
| 0.8 | 2 | 5 | 8 | 10 | 13 | 15 |
| 0.9 | 4 | 7 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 1.0 | 6 | 10 | 13 | 15 | 18 | 19 |
| 1.1 | 8 | 12 | 15 | 17 | 20 | 21 |
| 1.2 | 10 | 13 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| 1.3 | 12 | 15 | 18 | 20 | 23 | 25 |
| 1.4 | 13 | 17 | 20 | 22 | 25 | 26 |
| 1.5 | 15 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 |
| 1.6 | 16 | 19 | 22 | 25 | 27 | 29 |
| 1.7 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 30 |
| 1.8 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 | 31 |
| 1.9 | 18 | 22 | 25 | 27 | 30 | 31 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| →  -------------------  Punkt końcowy  ↓ | 10-1 | 10-2 | 10-3 | 10-4 | 10-8 | 10-15 |
| 0.3 | 1 | 1 | 6 | 8 | 11 | 10 |
| 0.4 | 1 | 1 | 4 | 7 | 9 | 10 |
| 0.5 | 1 | 1 | 1 | 4 | 6 | 8 |
| 0.6 | 1 | 1 | 1 | 3 | 6 | 7 |
| 0.7 | 1 | 1 | 4 | 6 | 9 | 10 |
| 0.8 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 0.9 | 2 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 |
| 1.0 | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 1.1 | 2 | 6 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 1.2 | 2 | 6 | 9 | 12 | 14 | 15 |
| 1.3 | 4 | 6 | 9 | 12 | 14 | 16 |
| 1.4 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1.5 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1.6 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1.7 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1.8 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1.9 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 2.0 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |

Tabela 12 – Liczba wykonanych iteracji w obliczeniach – metoda siecznych, kryterium residualne dla stałego   
punktu startowego = 0.2

Wnioski są bardzo podobne, co dla kryterium przyrostowego dla metody siecznych – im bliżej jeden z punktów jest położony faktycznego miejsca zerowego funkcji, tym mniej iteracji jest wykonywanych, natomiast im więcej operacji, tym dokładniejsze uzyskiwane wyniki. Również powtarza się zależność, którą dostrzegaliśmy w przypadku tego samego kryterium dla metody Newtona, a mianowicie wykonywana jest mniejsza liczba iteracji kosztem dokładności przybliżenia, jednakże uzyskiwane wyniki nie są aż tak rozbieżne od faktycznego miejsca zerowego w przypadkach, gdy punkty są bardzo oddalone od prawdziwego miejsca zerowego.

**7. Wnioski**

* Metoda Newtona pozwala osiągać znacznie dokładniejsze przybliżenia niż metoda siecznych, ale wymagana jest znajomość pochodnej funkcji
* Im mniejsze , tym więcej iteracji potrzebnych jest do wykonania, ale też tym dokładniejsze wyniki są otrzymywane
* Im bliżej dobrane punkty znajdują się faktycznego miejsca zerowego, tym mniej operacji jest wykonywanych do spełnienia warunku stopu
* Kryterium residualne, choć pozwala uzyskiwać wyniki o mniejszej rozbieżności od rzeczywistego miejsca zerowego w porównaniu do kryterium przyrostowego, tak żeby uzyskiwać dokładne wyniki, potrzebne są o wiele mniejsze wartości