Mateusz Bartnicki, grupa nr 3 środa 16:45-18:15

Metody obliczeniowe w nauce i technice, ćwiczenie 7 - 05.06.2024 r.

**Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi**

**1. Opis ćwiczenia**

Ćwiczenie to składa się z 2 zadań.

Pierwsze zadanie polega na utworzeniu macierzy **A** zadanej wzorem:

i, j = 1, 2, …, n (w moim przypadku k = 11, m = 2)

Następnie, zakładam wektor **x** jako znany, jest on dowolną n−elementową permutację ze zbioru {1, -1}. W moim przypadku jest to wektor [1, -1, 1, -1, …]. Na tej podstawie obliczam wektor **b** (wyliczam to z równania postaci **Ax** = **b**). Gdy mam już wyliczony wektor **b**, „zapominam” o znajomości wektora **x** i próbuję go wyliczyć rozwiązując równanie tej samej postaci korzystając z metody Jacobiego.

Drugie zadanie polega na zbadaniu zbieżności metody dla zadanego układu, czyli wyznaczeniu promienia spektralnego macierzy iteracji.

**2. Dane techniczne**

Program został napisany przy użyciu języka Python (3.10.12) z wykorzystaniem bibliotek numpy oraz matplotlib. Ćwiczenie zostało wykonane na WSL (Windows Subsystem for Linux) - Ubuntu 22.04.3 LTS na procesorze Intel Core i5-11400H 2.70GHz. Całe zadanie było przeprowadzane na precyzji float64.

**3. Kryterium pomiaru błędu**

Kryterium, którym posłużyłem się aby wyznaczyć wartości błędów dla obliczonych wartości wektora **x** względem zadanego wektora **x** była norma euklidesowa, która opisana jest wzorem:

, gdzie xi to i – ta wartość zadanego wektora **x**, natomiast xi’to i – ta wartość obliczonego wektora **x**.

**4. Kryteria stopu**

Kolejne iteracje, w których obliczany był wektor **x** odbywały się do momentu, gdy nie zostało spełnione pewne kryterium stopu. W tym zadaniu rozważyłem dwa kryteria stopu:

1. , oznaczane później jako *kryterium a*
2. , oznaczane później jako *kryterium b*

𝜌 jest pewnym przyjmowanym parametrem, od którego zależy dokładność otrzymanych wyników.

Norma była obliczana ze wzoru na normę euklidesową, tj. . W moim programie posłużyłem się funkcją linalg.norm z biblioteki numpy.

**5. Zadanie 2**

Ćwiczenie rozpocząłem od zadania 2, aby określić, dla jakich wartości n metoda jest zbieżna, czyli dla jakich n można spodziewać się wiarygodnych wyników.

Promień macierzy spektralnej jest maksymalną wartością z własności własnych macierzy (w wartości bezwzględnej). Wyznacza się ją z macierzy iteracji, która jest definiowana jako   
**B** = **D**−1 (**L** + **U**), gdzie **D** to macierz diagonalna zawierająca elementy diagonalne macierzy **A**, **L** to dolna trójkątna macierz zawierająca elementy pod diagonalą z macierzy **A**, natomiast **U** jest górną trójkątną macierzą zawierającą elementy nad diagonalą z macierzy **A**. W moim programie najpierw wyznaczam macierz **B** z tego wzoru, a następnie wyznaczam jej wartości własne korzystając z funkcji linalg.eigvals z biblioteki numpy, z których ostatecznie znajduję wartość własną o największej wartości bezwzględnej.

|  |  |
| --- | --- |
| n | Wartość promienia spektralnego macierzy |
| 2 | 0.0519 |
| 3 | 0.111 |
| 4 | 0.195 |
| 5 | 0.445 |
| 6 | 0.599 |
| 7 | 0.595 |
| 8 | 0.6 |
| 9 | 0.599 |
| 10 | 0.602 |
| 11 | 0.601 |
| 12 | 0.602 |
| 13 | 0.602 |
| 14 | 0.603 |
| 15 | 0.603 |
| 16 | 0.603 |
| 17 | 0.603 |
| 18 | 0.604 |
| 19 | 0.604 |
| 20 | 0.604 |
| 21 | 0.604 |
| 22 | 0.604 |
| 23 | 0.604 |
| 24 | 0.604 |
| 25 | 0.605 |
| 50 | 0.605 |
| 100 | 0.606 |
| 500 | 0.606 |
| 1000 | 0.607 |
| 2000 | 0.607 |
| 5000 | 0.607 |

Tabela 1 – Wartości promienia spektralnego macierzy dla kolejnych n

Jak widać na powyższej tabeli, dla wszystkich zbadanych wartości n, wartości promieni są liczbami mniejszymi od 1, a więc spełniony jest warunek zbieżności. Na początku wartości te są bardzo małe, gdyż dla n = 2 wynosi ona zaledwie 0.05, jednak dość szybko one rosną aż do n = 6, gdzie wartość promienia wynosi 0.6. Dla kolejnych n wartości te praktycznie się nie różnią, są to różnice na 3 miejscu po przecinku. Nawet dla n = 5000 wartość ta wynosi w przybliżeniu 0.6.

**6. Zadanie 1**

Gdy już wartości promienia spektralnego zostały zbadane i mam pewność o zbieżności metody, przystępuję do realizacji zadania 1 opisanego we wstępie. Jako wektor początkowy przyjmuję wektor dlugości n wypełniony zerami.

Na początku wykonuję obliczenia dla 𝜌 = 1e-6.

Tabela 2 – Wartości błędów dla kolejnych n przy zastosowaniu różnych kryteriów stopu

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | Wartość błędu dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 2 | 2.7793e-08 | 2.7793e-08 |
| 3 | 1.2660e-08 | 1.2660e-08 |
| 4 | 5.2548e-08 | 5.2548e-08 |
| 5 | 3.0868e-07 | 6.0545e-08 |
| 6 | 1.0748e-06 | 1.3845e-07 |
| 7 | 5.7327e-07 | 1.1055e-07 |
| 8 | 2.4681e-07 | 4.8498e-08 |
| 9 | 7.3554e-07 | 8.2318e-08 |
| 10 | 2.5379e-07 | 4.9234e-08 |
| 11 | 8.2367e-07 | 9.1609e-08 |
| 12 | 3.0824e-07 | 5.9760e-08 |
| 13 | 9.4298e-07 | 1.0465e-07 |
| 14 | 3.2037e-07 | 6.1618e-08 |
| 15 | 5.7882e-07 | 1.1105e-07 |
| 16 | 3.5696e-07 | 3.9686e-08 |
| 17 | 6.3264e-07 | 1.2112e-07 |
| 18 | 3.7077e-07 | 4.0934e-08 |
| 19 | 6.6285e-07 | 1.2666e-07 |
| 20 | 2.2993e-07 | 4.4077e-08 |
| 21 | 7.0775e-07 | 1.3499e-07 |
| 22 | 2.3789e-07 | 4.5434e-08 |
| 23 | 7.3549e-07 | 1.4010e-07 |
| 24 | 2.5150e-07 | 4.8029e-08 |
| 25 | 7.7451e-07 | 1.4729e-07 |
| 50 | 3.6057e-07 | 3.9084e-08 |
| 100 | 2.9091e-07 | 5.4631e-08 |
| 500 | 2.1120e-07 | 3.9437e-08 |
| 1000 | 2.9826e-07 | 5.5641e-08 |
| 2000 | 2.4080e-07 | 4.4901e-08 |
| 5000 | 2.1738e-07 | 4.0521e-08 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | Liczba iteracji dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 8 | 8 |
| 4 | 9 | 9 |
| 5 | 17 | 19 |
| 6 | 24 | 28 |
| 7 | 27 | 30 |
| 8 | 29 | 32 |
| 9 | 27 | 31 |
| 10 | 29 | 32 |
| 11 | 27 | 31 |
| 12 | 29 | 32 |
| 13 | 27 | 31 |
| 14 | 29 | 32 |
| 15 | 28 | 31 |
| 16 | 29 | 33 |
| 17 | 28 | 31 |
| 18 | 29 | 33 |
| 19 | 28 | 31 |
| 20 | 30 | 33 |
| 21 | 28 | 31 |
| 22 | 30 | 33 |
| 23 | 28 | 31 |
| 24 | 30 | 33 |
| 25 | 28 | 31 |
| 50 | 30 | 34 |
| 100 | 31 | 34 |
| 500 | 33 | 36 |
| 1000 | 33 | 36 |
| 2000 | 34 | 37 |
| 5000 | 35 | 38 |

Tabela 3 – Liczba iteracji dla kolejnych n przy zastosowaniu różnych kryteriów stopu

W tabeli 2, w której znajdują się wartości błędów, możemy dostrzec, że są one do siebie bardzo zbliżone, a różnice występują dopiero na 7 lub nawet 8 miejscu po przecinku (co wynika również z wartości zastosowanego parametru 𝜌). Dla n = 2, 3, 4 wartości te są identyczne, a dla kolejnych n wartości błędów są mniejsze w przypadku kryterium a. Wyjątkami są tylko n = 2000 i 5000, gdzie to kryterium b okazuje się być lepsze.

W tabeli 3 dostrzegamy natomiast zależność, im większe n tym większa liczba iteracji jest wymagana. Ma to związek z promieniem spektralnym macierzy, gdyż im jest on większy, tym wolniej zbiega macierz, a więc tym więcej obliczeń jest potrzebnych. Widzimy jednak, że wszędzie ten promień spektralny miał podobną wartość, a więc i liczba iteracji jest podobna. Co ciekawe jednak, widać zależność pomiędzy parzystymi i nieparzystymi n – dla parzystych w większości przypadków było to 31 iteracji, a dla n nieparzystych były 32-33 iteracje.

Porównując ze sobą liczby wykonanych iteracji dla różnych kryteriów, dla n = 2, 3, 4 liczby wykonanych iteracji są identyczne, tak jak miało to miejsce w przypadku wartości błędów. Jednakże w tym miejscu dla kolejnych wartości n, w każdym przypadku kryterium b potrzebowało większej liczby iteracji aby spełnić warunek kryterium stopu. Wszędzie są to różnice tylko 3-4 iteracji.

Kolejnym krokiem w tym ćwiczeniu były eksperymenty z innymi wartościami wektora początkowego. Przyjąłem więc wektor początkowy jako wektor długości n postaci [100, 100, …], gdyż są one dalekie od rozwiązania. Te obliczenia również były wykonywane dla 𝜌 = 1e-6.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | Wartość błędu dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 2 | 7.5005e-09 | 7.5005e-09 |
| 3 | 4.9739e-08 | 4.9739e-08 |
| 4 | 1.1799e-07 | 2.3046e-08 |
| 5 | 1.4063e-07 | 6.2539e-08 |
| 6 | 1.1391e-06 | 1.4681e-07 |
| 7 | 3.5172e-07 | 4.3012e-08 |
| 8 | 1.3857e-06 | 1.7940e-07 |
| 9 | 2.7516e-07 | 5.8020e-08 |
| 10 | 8.6699e-07 | 1.8765e-07 |
| 11 | 3.2013e-07 | 4.0954e-08 |
| 12 | 8.9137e-07 | 1.9355e-07 |
| 13 | 3.4582e-07 | 4.4660e-08 |
| 14 | 8.8709e-07 | 1.9307e-07 |
| 15 | 3.7435e-07 | 4.8768e-08 |
| 16 | 8.9764e-07 | 1.9586e-07 |
| 17 | 2.3370e-07 | 5.0870e-08 |
| 18 | 8.8775e-07 | 1.9397e-07 |
| 19 | 2.4746e-07 | 5.4045e-08 |
| 20 | 8.9690e-07 | 1.9630e-07 |
| 21 | 2.5299e-07 | 5.5321e-08 |
| 22 | 8.8652e-07 | 1.9413e-07 |
| 23 | 2.6451e-07 | 3.4952e-08 |
| 24 | 8.9618e-07 | 1.9644e-07 |
| 25 | 2.6786e-07 | 3.5412e-08 |
| 50 | 9.0000e-07 | 1.1849e-07 |
| 100 | 5.7038e-07 | 1.2365e-07 |
| 500 | 7.1456e-07 | 8.7320e-08 |
| 1000 | 4.9728e-07 | 9.9521e-08 |
| 2000 | 3.5649e-07 | 6.9366e-08 |
| 5000 | 5.0553e-07 | 5.4367e-08 |

Tabela 4 – Wartości błędów dla kolejnych n przy zastosowaniu różnych kryteriów stopu, inny wektor początkowy

Po zmianie wektora początkowego, różnice dostrzegalne są już na pierwszy rzut oka. Choć wnioski są podobne co w przypadku analizy tabeli 2, tak jednak w tym przypadku dostrzegalne są różnice w rzędach błędu pomiędzy tymi dwiema tabelami. W tabeli 2, w przypadku kryterium b wszystkie błędy były rzędu 1e-7 lub 1e-8, tutaj pojawiają nam się błędy rzędu 1e-6. Pomiędzy tymi dwiema tabelami, parę wierszy z błędami różni się wartościami o jeden rząd wielkości, na niekorzyść tych obliczanych dla wektora początkowego [100,…]. Wniosek stąd płynie taki, że dobór wektora początkowego ma wpływ na wartości błędów.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n | Liczba iteracji dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 2 | 8 | 8 |
| 3 | 10 | 10 |
| 4 | 13 | 14 |
| 5 | 26 | 27 |
| 6 | 34 | 38 |
| 7 | 35 | 39 |
| 8 | 34 | 38 |
| 9 | 36 | 39 |
| 10 | 35 | 38 |
| 11 | 36 | 40 |
| 12 | 35 | 38 |
| 13 | 36 | 40 |
| 14 | 35 | 38 |
| 15 | 36 | 40 |
| 16 | 35 | 38 |
| 17 | 37 | 40 |
| 18 | 35 | 38 |
| 19 | 37 | 40 |
| 20 | 35 | 38 |
| 21 | 37 | 40 |
| 22 | 35 | 38 |
| 23 | 37 | 41 |
| 24 | 35 | 38 |
| 25 | 37 | 41 |
| 50 | 35 | 39 |
| 100 | 36 | 39 |
| 500 | 36 | 40 |
| 1000 | 37 | 40 |
| 2000 | 38 | 41 |
| 5000 | 38 | 42 |

Tabela 5 – Liczba iteracji dla kolejnych n przy zastosowaniu różnych kryteriów stopu, inny wektor początkowy

W tej tabeli natomiast dostrzegamy, w zestawieniu z wartościami z tabeli 3, że liczby iteracji dla poszczególnych n znacznie wzrosły, gdyż dla n = 5 jest to różnica aż 8 iteracji. Dla każdych kolejnych wartości n różnice w liczbie iteracji są z zakresu [3-6] Stąd wniosek, że dobór wektora początkowego ma również bardzo duży wpływ na liczbę iteracji.

Dla tych 2 wektorów początkowych wykonałem również zestawienie czasowe wykonywania tych algorytmów dla poszczególnych n.

Tabela 6 – zestawienie czasów wykonywania jednej iteracji algorytmu dla różnych wektorów początkowych i różnych kryteriów stopu

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| n | Średni czas wykonania jednej iteracji algorytmu [sekundy]: | | | |
| Wektor początkowy [0…] | | Wektor początkowy [100…] | |
| Kryterium a | Kryterium b | Kryterium a | Kryterium b |
| 2 | 6.5565e-06 | 7.1923e-06 | 6.0499e-06 | 7.0035e-06 |
| 3 | 5.3644e-06 | 5.9605e-06 | 4.2915e-06 | 6.0797e-06 |
| 4 | 5.2717e-06 | 5.7220e-06 | 3.9247e-06 | 5.0919e-06 |
| 5 | 3.9970e-06 | 4.9942e-06 | 3.7780e-06 | 4.7684e-06 |
| 6 | 3.7253e-06 | 4.8620e-06 | 3.6464e-06 | 8.1188e-06 |
| 7 | 3.8059e-06 | 4.8558e-06 | 3.7874e-06 | 6.3334e-06 |
| 8 | 3.6667e-06 | 4.7758e-06 | 3.8287e-06 | 4.6617e-06 |
| 9 | 3.7176e-06 | 4.8914e-06 | 3.8015e-06 | 4.6461e-06 |
| 10 | 3.6832e-06 | 4.7311e-06 | 3.7534e-06 | 4.6743e-06 |
| 11 | 3.9118e-06 | 4.7914e-06 | 3.8081e-06 | 4.6432e-06 |
| 12 | 3.7243e-06 | 4.6641e-06 | 3.7738e-06 | 4.5300e-06 |
| 13 | 3.6028e-06 | 4.6453e-06 | 5.2585e-06 | 4.4763e-06 |
| 14 | 3.6832e-06 | 4.6864e-06 | 4.7343e-06 | 4.4986e-06 |
| 15 | 3.6444e-06 | 4.6838e-06 | 8.6427e-06 | 4.4703e-06 |
| 16 | 3.8229e-06 | 4.6817e-06 | 4.7207e-06 | 4.4609e-06 |
| 17 | 4.6492e-06 | 4.6530e-06 | 4.7555e-06 | 4.4763e-06 |
| 18 | 3.7818e-06 | 4.7250e-06 | 8.9100e-06 | 4.4798e-06 |
| 19 | 4.6151e-06 | 4.7145e-06 | 7.1719e-06 | 4.5240e-06 |
| 20 | 3.7114e-06 | 4.7178e-06 | 6.7915e-06 | 4.5676e-06 |
| 21 | 3.7806e-06 | 4.6530e-06 | 9.5432e-06 | 4.7505e-06 |
| 22 | 3.7511e-06 | 5.2958e-06 | 7.5477e-06 | 4.6994e-06 |
| 23 | 3.8232e-06 | 4.6607e-06 | 4.3366e-06 | 4.9021e-06 |
| 24 | 3.7988e-06 | 4.7395e-06 | 3.8419e-06 | 6.1361e-06 |
| 25 | 3.7977e-06 | 4.7991e-06 | 4.5428e-06 | 8.2051e-06 |
| 50 | 4.0531e-06 | 5.1611e-06 | 4.8774e-06 | 6.4556e-06 |
| 100 | 3.6147e-04 | 6.5845e-03 | 3.7570e-03 | 2.5158e-03 |
| 500 | 1.6738e-04 | 3.0458e-05 | 3.1313e-03 | 2.3326e-03 |
| 1000 | 4.0167e-04 | 7.5842e-03 | 2.6302e-03 | 1.0429e-02 |
| 2000 | 3.0213e-03 | 1.3669e-02 | 6.4850e-03 | 1.4815e-02 |
| 5000 | 1.9281e-02 | 3.5514e-02 | 2.1262e-02 | 3.6869e-02 |

W powyższej tabeli widać, że w każdym przypadku jedna iteracja algorytmu wykonywała się szybciej w przypadku, gdy wartości przyjętego wektora początkowego były bliższe rozwiązania. Choć nie są to duże różnice, tak dla dużo większych n i większej liczby obliczanych wyników mogą mieć one jednak spore znaczenie.

Oprócz tego, zawsze jedna iteracja algorytmu wykonywała się szybciej w przypadki kryterium a – jest to związane po prostu ze złożonością obliczeń równań w obydwóch kryteriach W przypadku kryterium b, równanie **Ax** – **b** jest bardzo kosztowne obliczeniowo. Dodatkowo, w związku z większą liczbą iteracji w przypadku tego kryterium, obliczenia te wymagają o wiele więcej czasu.

Jako ostatni eksperyment, zmieniane były wartości 𝜌. Jako wektor początkowy był tutaj zastosowany wektor zer.

Tabela 7 – Wartości błędów dla różnych kryteriów stopu i różnych wartości 𝜌

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 𝜌 | n | Wartość błędu dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 1e-12 | 2 | 1.0520e-14 | 1.0520e-14 |
| 5 | 1.4080e-13 | 6.2612e-14 |
| 10 | 3.6915e-13 | 7.6682e-14 |
| 50 | 4.0542e-13 | 4.8817e-14 |
| 100 | 2.9768e-13 | 5.9560e-14 |
| 1000 | 2.5587e-13 | 6.4591e-14 |
| 1e-10 | 2 | 3.8962e-12 | 3.8962e-12 |
| 5 | 1.8190e-11 | 3.5972e-12 |
| 10 | 4.3612e-11 | 5.1774e-12 |
| 50 | 3.0393e-11 | 5.9570e-12 |
| 100 | 2.3327e-11 | 4.5045e-12 |
| 1000 | 2.2162e-11 | 4.1558e-12 |
| 1e-6 | 2 | 2.7793e-08 | 2.7793e-08 |
| 5 | 3.0868e-07 | 6.0545e-08 |
| 10 | 2.5379e-07 | 4.9234e-08 |
| 50 | 3.6057e-07 | 3.9084e-08 |
| 100 | 2.9091e-07 | 5.4631e-08 |
| 1000 | 2.9826e-07 | 5.5641e-08 |
| 1e-4 | 2 | 5.3501e-07 | 5.3501e-07 |
| 5 | 1.9248e-05 | 3.6234e-06 |
| 10 | 3.5659e-05 | 3.9438e-06 |
| 50 | 3.1070e-05 | 5.8340e-06 |
| 100 | 2.5330e-05 | 4.7402e-06 |
| 1000 | 2.6277e-05 | 4.8996e-06 |
| 1e-2 | 2 | 1.9825e-04 | 1.9825e-04 |
| 5 | 3.9795e-03 | 6.2887e-04 |
| 10 | 2.9535e-03 | 5.6274e-04 |
| 50 | 2.7013e-03 | 5.0590e-04 |
| 100 | 2.2178e-03 | 4.1436e-04 |
| 1000 | 2.3168e-03 | 4.3189e-04 |

Otrzymujemy spodziewany efekt: im większa wartość 𝜌, tym większa wartość błędu. Ten sam efekt otrzymujemy dla obydwóch kryteriów stopu. Uwidacznia nam się tutaj jednak pewna zależność, która wcześniej była niedostrzegalna dla wartości 𝜌 = 1e-6, a mianowicie, kryterium b przeważnie daje nam mniejsze wartości błędów w stosunku do wartości błędu z kryterium a.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 𝜌 | n | Liczba iteracji dla kryterium stopu: | |
| Kryterium a | Kryterium b |
| 1e-12 | 2 | 11 | 11 |
| 5 | 35 | 36 |
| 10 | 54 | 57 |
| 50 | 55 | 59 |
| 100 | 56 | 59 |
| 1000 | 58 | 61 |
| 1e-10 | 2 | 9 | 9 |
| 5 | 29 | 31 |
| 10 | 45 | 49 |
| 50 | 47 | 50 |
| 100 | 48 | 51 |
| 1000 | 50 | 53 |
| 1e-6 | 2 | 6 | 6 |
| 5 | 17 | 19 |
| 10 | 29 | 32 |
| 50 | 30 | 34 |
| 100 | 31 | 34 |
| 1000 | 33 | 36 |
| 1e-4 | 2 | 5 | 5 |
| 5 | 12 | 14 |
| 10 | 20 | 24 |
| 50 | 22 | 25 |
| 100 | 23 | 26 |
| 1000 | 25 | 28 |
| 1e-2 | 2 | 3 | 3 |
| 5 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 15 |
| 50 | 14 | 17 |
| 100 | 15 | 18 |
| 1000 | 17 | 20 |

Tabela 8 – Liczba iteracji dla różnych kryteriów stopu i różnych wartości 𝜌

Z analizy tej tabeli również płynie jeden wniosek: im mniejsza wartość 𝜌, tym większa liczba iteracji jest wymagana, aby zaszło kryterium stopu. Również i dla innych wartości 𝜌 niż 1e-6 kryterium b potrzebuje więcej iteracji, aby zostało spełnione.

**7. Wnioski**

* Dla coraz większych n, wartość promienia spektralnego macierzy rośnie, jednak dla n > 5 są to już różnice niewielkie, na 3 miejscu po przecinku
* Im większa wartość promienia spektralnego, tym większa liczba iteracji potrzebna do spełnienia kryterium stopu
* Kryterium b okazuje się dawać mniejsze wartości błędów kosztem większej liczby iteracji i większego czasu wykonywania jednej iteracji.
* Dobry dobór wektora początkowego ma wpływ na wielkość błędu oraz liczbę iteracji
* Im mniejsza wartość 𝜌, tym większe wartości błędów, lecz mniejsza liczba iteracji do wykonania