# Zadanie 807 z Klubu 44M

Marcin Barylski

28 październik, 2020
Gdańsk

## 1 Treść zadania

Dane są liczby $A, B>0$; $AB<1$. Funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki:

$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|, |g(x) - g(y)| \leqslant B|x - y|$

przy czym $f$ jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$ ; ma więc funkcję odwrotną $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(f(h(x)) = h(f(x)) = x)$.

Udowodnić, że funkcja $g + h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.

## 2 Rozwiązanie

Funkcja odwrotna do funkcji oryginalnej ma oś symetrii $k(x) = x$. Zatem jeśli:

(1) $|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|$

to funkcja odwrotna $h$ spełnia:

(2) $|h(x) - h(y)| \geqslant \frac{1}{A}|x - y|$

Z założenia zadania:

(3) $AB<1$

Dzieląc obustronnie (3) przez $A$ ($A$ jest dodatnie, zgodnie z założeniami, a więc nie ma zmiany znaku nierówności):

(4) $B<\frac{1}{A}$

Łącząc założenie (2) z (4) i założeniem o $g$:

(5) $|h(x) - h(y)| \geqslant \frac{1}{A}|x - y|>B|x - y| \geqslant |g(x) - g(y)|$

Funkcja $f$ jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$ z własnością (1), tak więc jest albo rosnąca, albo malejąca. Funkcja odwrotna zachowuje monotoniczność funkcji oryginalnej - $h$ jest nadal odpowiednio albo rosnąca, albo malejąca.

Z (5) wynika, że przyrost wartości funkcji $h$ dla danej pary argumentów $x, y$ jest zawsze większy od przyrostu wartości funkcji $g$, czyli $g$ nie może zmienić monotoniczności $h$ w $h + g$, nawet jeśli jest przeciwnej monotoniczności do $h$.

Dziedziną $h + g$ pozostaje zbiór $\mathbb{R}$, zaś przeciwdziedziną - cały zbiór $\mathbb{R}$. Monotoniczność $h + g$ daje różnowartościowość tego odwzorowania.

**Wniosek końcowy**: $g + h$ jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.