

Zadanie 808 z Klubu 44M

Marcin Barylski

11 październik, 2020
Gdańsk

1 Treść zadania

Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$

2 Rozwiązanie

Przekształćmy równanie do wygodniejszej postaci:

$$(1) \quad x^y = xy$$

$$(2) \quad x^y - xy = 0$$

$$(3) \quad x(x^{y-1} - y) = 0$$

Z założenia zadania $y > 1$, stąd wykładnik $y - 1$ nadal pozostaje dodatni. Miejsca zerowe w (3) to:

$$(4) \quad x(x^{y-1} - y) = 0 \iff x = 0 \vee x^{y-1} - y = 0$$

Pierwszy przypadek z (4) eliminujemy (bo w założeniach zadania $x > 1$). Kontynuujemy rozważania dla drugiego przypadku z (4):

$$(5) \quad x^{y-1} - y = 0$$

$$(6) \quad x^{y-1} = y$$

Podnosząc (6) obustronnie do potęgi $\frac{1}{y-1}$ (dozwolone, bo $y - 1 > 0$) otrzymujemy:

$$(7) \quad x = y^{\frac{1}{y-1}}$$

$y > 1$, stąd $y - 1 > 0$ oraz $\frac{1}{y-1} > 0$. Z własności potęgowania mamy wtedy: $y^{\frac{1}{y-1}} > 1$, czyli $x > 1$

Wniosek końcowy: rozwiązaniem jest każda para liczb wymiernych (x, y) postaci $(y^{\frac{1}{y-1}}, y)$, $y > 1$.