Bases de signal: analyse fréquentielle

De Joseph Fourier (1768–1830) à Claude Shannon (1916–2001)

SOAP Séance 1
Aix-Marseille Université
Valentin Emiya

14 novembre 2024

Programme de l'UE

13 séances

- Bases de traitement du signal (12h) :
  - analyse fréquentielle (Fourier)
  - échantillonnage
  - représentations
- Calcul scientifique avec JAX (3h)
- Hybridations avec les problèmes inverses et l'optimisation convexe (8h)
- Hybridations avec la physique (4h)

Traitement du signal ?

Le traitement du signal, c'est l'art

- d'échantillonner ($\rightarrow$ partie 1)
- et de filtrer ($\rightarrow$ partie 2)

pour représenter, modéliser, transformer (parties suivantes) des données temporelles, spatiales, etc.

Un résultat fondamental

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist

Pour ne pas perdre d'information ni dégrader le signal, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois plus élevée que la fréquence maximale présente dans le signal d'origine.

Un résultat fondamental

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist

Pour ne pas perdre d'information ni dégrader le signal, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois plus élevée que la fréquence maximale présente dans le signal d'origine.

Un résultat fondamental

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist

Pour ne pas perdre d'information ni dégrader le signal, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois plus élevée que la fréquence maximale présente dans le signal d'origine.

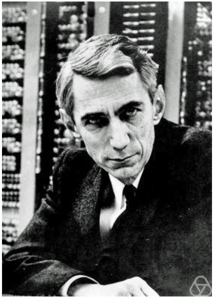
Kézaco

- un signal ?
- l'échantillonnage ?
- une fréquence ?
- dégradation, perte d'information ?
- analyse de Fourier ?

« Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 17 mai 1830 à Paris. Il est connu pour avoir déterminé par le calcul la diffusion de la chaleur, en utilisant la **décomposition d'une fonction périodique** en une série trigonométrique, qui sous certaines conditions, converge vers la fonction. Il est aussi l'un des premiers à avoir évoqué la **notion d'effet de serre pour l'atmosphère terrestre**. Joseph Fourier a donné son nom aux **séries de Fourier**, un outil mathématique fondamental pour l'étude des fonctions périodiques [...] et aux **intégrales de Fourier**, leur extension aux fonctions non périodiques.

Source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier`

»



« Claude Elwood Shannon, né le 30 avril 1916 à Petoskey (Michigan) et mort le 24 février 2001 à Medford (Massachusetts), est un ingénieur en génie électrique et mathématicien américain. Il est l'un des pères, si ce n'est le père fondateur, de la **théorie de l'information**. Il est en 1956 l'un des organisateurs de la conférence de Dartmouth, considérée comme importante dans l'histoire de l'intelligence artificielle. »

Source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Claude_Shannon`

1. Introduction
2. Signal et échantillonnage
3. Analyse fréquentielle
   - Fréquences
   - Transformée de Fourier discrète
4. Théorème d'échantillonnage
5. Conclusion

Plan

Que signifie échantillon/échantillonnage/échantillonner ?

Qu'est-ce qu'un signal ?

Un **signal** est un vecteur $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^N$ représentant une séquence de coefficients appelés échantillons. $\mathrm{x}[n]$ est l'amplitude du n-ième échantillon.

Exemple : un son est un signal.

La **fréquence d'échantillonnage** (*sampling frequency, sampling rate*) est le nombre d'échantillons par seconde.

Exemple : $f_s = 44100$Hz pour un CD.

Questions :

- quelle est la durée d'un signal de taille N et de fréquence d'échantillonnage f_s ?
- quelle est l'expression de l'instant t_n du n-ième échantillon en fonction de n et de f_s ?

Plan

Plan

Fonctions sinus et cosinus

Fonction T-périodique : ?

Sinus : fonction de $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, 2π-périodique, impaire.

Cosinus : fonction de $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, 2π-périodique, paire.

Ces fonctions sont égales à une translation de $\pi/2$ près :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Voir illustrations dans le notebook.

Fonctions sinus et cosinus

Fonction T-périodique : $\forall x, f(x) = f(x+T)$

Sinus : fonction de $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, 2π-périodique, impaire.

Cosinus : fonction de $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, 2π-périodique, paire.

Ces fonctions sont égales à une translation de $\pi/2$ près :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Voir illustrations dans le notebook.

Sinusoïde réelle

$$x(t) = \alpha \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

- fréquence f_0
- amplitude $\alpha \geq 0$
- phase initiale φ_0

Voir illustrations dans le notebook.

Sinusoïde complexe

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \alpha e^{i(2\pi f_0 t + \varphi_0)} \\
&= \alpha \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + i\alpha \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)
\end{aligned}
$$

- fréquence f_0
- amplitude $\alpha \geq 0$
- phase initiale φ_0

Voir illustrations dans le notebook.

Échantillonnage d'une sinusoïde

Échantillonnage aux instants $t_n = \frac{n}{f_s}$:

$$x[n] = \alpha e^{i(2\pi f_0 t_n + \varphi_0)} = \alpha e^{i\varphi_0} e^{i2\pi \frac{f_0}{f_s} n} = \alpha e^{i\varphi_0} e^{i2\pi \nu_0 n}$$

On parle de fréquence réduite (ou normalisée) $\nu_0 = \frac{f_0}{f_s}$.

Selon les situations, on utilise une fréquence f_0 en Hz et un temps t_n en secondes, ou une fréquence réduite $\nu_0 \in [0, 1]$ sans dimension et un entier n. Le nombre d'échantillons par période est $\frac{1}{\nu_0}$.

Plan

À faire au tableau + voir notebook.

Plan

Le théorème

Théorème d'échantillonnage de Shannon-Nyquist

Pour ne pas perdre d'information ni dégrader le signal, la fréquence d'échantillonnage f_s doit être au moins deux fois plus élevée que la fréquence maximale présente dans le signal d'origine.

En pratique :

- utilisation 1 : échantillonner un signal physique/continu
- utilisation 2 : sous-échantillonner un signal numérique.
- on utilise un filtre *antirepliement* pour supprimer les fréquences supérieures à $\frac{f_s}{2}$.
- si la condition du théorème n'est pas remplie : dégradation du signal par repliement spectral $\equiv$ on retrouve entre 0 et $f_s/2$ l'énergie des fréquences qui étaient en dehors de cet intervalle (cf. exemples dans notebook)
- sur-échantillonnage : pas de précaution à prendre

Formule de reconstruction

Sous les hypothèses du théorème, pour reconstruire le signal $x(t)$ en fonction de son échantillonnage $x[n]$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \sum_n x[n] \times sinc\left(f_s t - n\right)$$

où $sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$ et $sinc(0) = 1$.
Cette formule est utile pour ré-échantillonner un signal : on obtient $x(t)$ pour tous les nouveaux instants t souhaités.

Plan

Conclusion

- Notions vues aujourd'hui : signal, échantillonnage, fréquence, transformée de Fourier discrète, théorème de Shannon
- Prochaine séance : échantillonnage des images, DFT 2D, fréquences spatiales, TP.
- À faire pour la prochaine fois : étudier les exemples du notebook