Problèmes inverses et optimisation convexe en traitement du signal et des images

Sandrine Anthoine, Valentin Emiya

M2 IAAA - UE SOAP

Sommaire

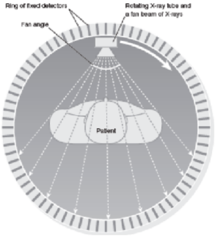
Programme de l'UE

- Bases de traitement du signal (12h) :
  - analyse fréquentielle (Fourier)
  - échantillonnage
  - filtrage
  - représentations
- Calcul scientifique avec JAX (3h)
- **Hybridations avec les problèmes inverses et l'optimisation convexe** (8h)
  - **Problèmes inverses et optimisation convexe : découverte**

    problème de déconvolution
    algorithme ISTA pour le cas parcimonieux
  - Problèmes inverses et optimisation convexe : approfondissement
  - Hybridation : méthodes Plug-and-Play
  - Hybridation : algorithmes déroulés
- Hybridations avec la physique (4h)

Exemples de problèmes inverses

Projection tomographique

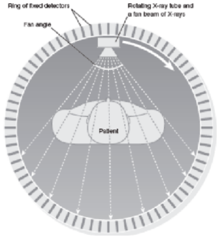


On mesure

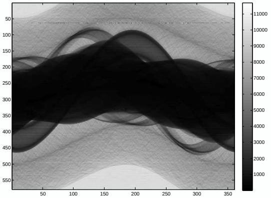
On cherche

Exemples de problèmes inverses

Projection tomographique



On mesure



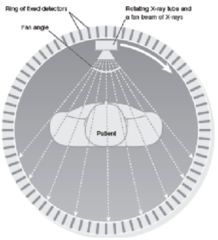
y

On cherche

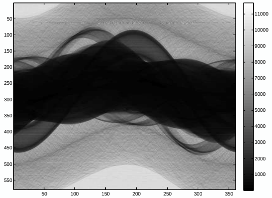
Images : Y. Boursier

Exemples de problèmes inverses

Projection tomographique

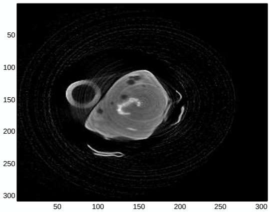


On mesure



y

On cherche



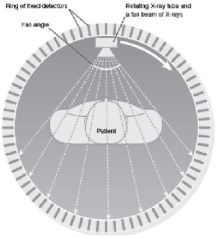
x^o

Images : Y. Boursier

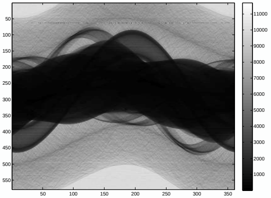
- $y = D_\sigma(Ax^o)$,

Exemples de problèmes inverses

Projection tomographique

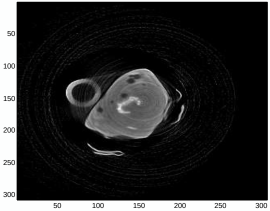


On mesure



y

On cherche



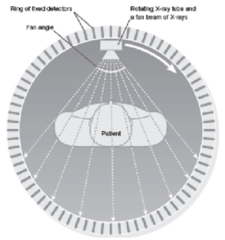
x^o

Images : Y. Boursier

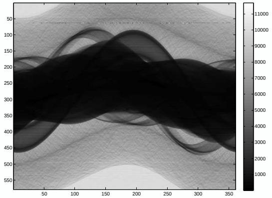
- $y = D_\sigma(Ax^o)$,
- A opérateur linéaire de projection tomographique

Exemples de problèmes inverses

Projection tomographique

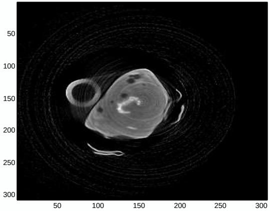


On mesure



y

On cherche



x^o

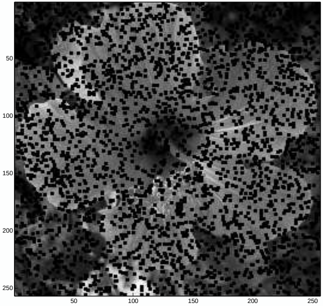
Images : Y. Boursier

- $y = D_\sigma(Ax^o)$,
- A opérateur linéaire de projection tomographique
- D_σ : bruit de Poisson.

Exemples de problèmes inverses

Inpainting

On mesure y

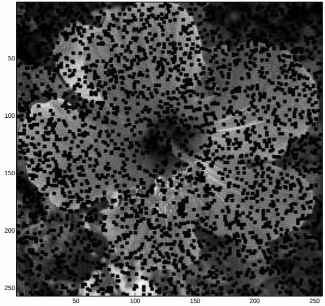


On cherche x^o

Exemples de problèmes inverses

Inpainting

On mesure y



On cherche x^o

- $y = D_\sigma(Ax^o)$,
- A est un masque : $(Ax^o)[i,j] = x^o[i,j]$ ou $(Ax^o)[i,j] = 0$.
- $D_\sigma = \mathrm{Id}$: pas de bruit (ici).

Notion de problème inverse

Résoudre un problème inverse c'est

- estimer un objet x^o
- à partir de mesures indirectes y et
- d'information sur l'opérateur "direct" A qui transforme l'objet en les mesures $y = A(x)$.

On peut étudier les problèmes inverses selon plusieurs points de vue : EDP, statistique...
→ Ici, on étudie les problèmes inverses en traitement du signal et des images.

Notion de problème inverse

Résoudre un problème inverse c'est

- estimer un objet x^o
- à partir de mesures indirectes y et
- d'information sur l'opérateur "direct" A qui transforme l'objet en les mesures $y = A(x)$.

On peut étudier les problèmes inverses selon plusieurs points de vue : EDP, statistique...
$\rightarrow$ Ici, on étudie les problèmes inverses en traitement du signal et des images.

Modèle du problème direct : $y = D_\sigma(Ax^o)$

- y : mesures/observations
- x^o : objet à estimer/signal original
- A : opérateur linéaire
- D_σ : perturbation de paramètre σ

Objectif :

Estimer x^o à partir des mesures y, de A et d'informations sur D_σ.

Opérateur A linéaire

A est linéaire si

Soient $y \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $A(y + x) = A(y) + A(x)$
- $A(\alpha y) = \alpha A(y)$

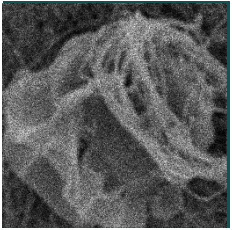
Conséquences :

- A peut se représenter par une matrice de $\mathbb{R}^{M \times N}$ (qu'on appelle encore A).
- Si $y = A(x)$ alors
  - $y[i] = \sum_{j=1}^{N} A[i, j]x[j]$.
  - $A[i, j]$ permet de calculer la contribution du pixel j de l'objet x à la i-ème mesure $y[i]$, c'est $A[i, j]x[j]$.

Sommaire

Quel est le problème direct ?

Déconvolution en microscopie

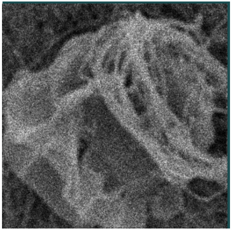


y

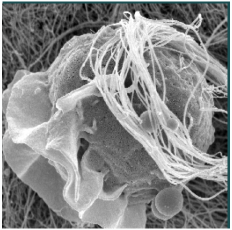
Images : C. Chaux

Quel est le problème direct ?

Déconvolution en microscopie



y



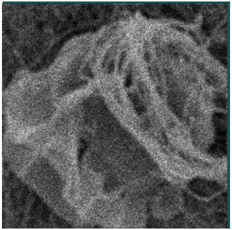
x^o

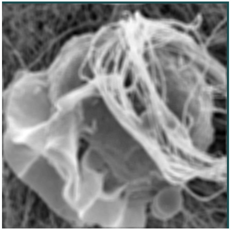
Images : C. Chaux

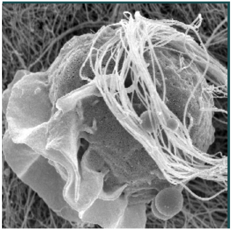
- $y = D_\sigma(Ax^o)$

Quel est le problème direct ?

Déconvolution en microscopie


y


Ax^o

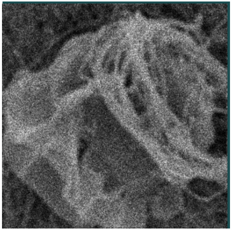

x^o

Images : C. Chaux

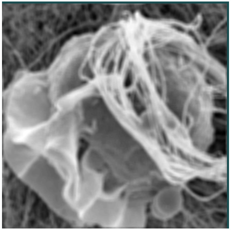
- $y = D_\sigma(Ax^o)$
- $D_\sigma(Ax^o) = Ax^o + b$: où b bruit gaussien de variance σ^2.

Quel est le problème direct ?

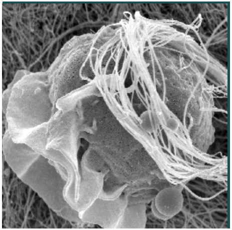
Déconvolution en microscopie



$y = h \star x^o + b$



$Ax^o = h \star x^o$



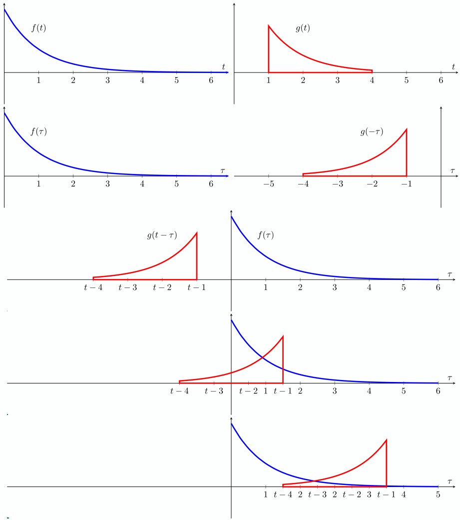
x^o

Images : C. Chaux

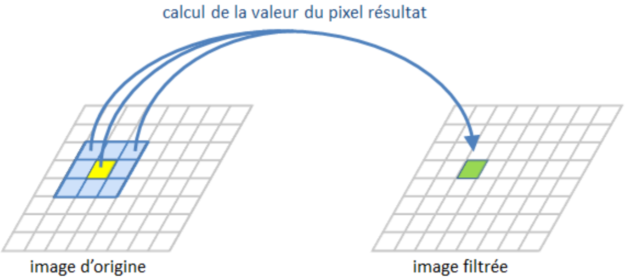
- $y = D_\sigma(Ax^o)$
- $D_\sigma(Ax^o) = Ax^o + b$: où b bruit gaussien de variance σ^2.
- $Ax^o = h \star x^o$: produit de convolution

$$\boxed{(h \star x^o)(s) = \sum_k h[k]x^o[s-k] = \sum_k h[s-k]x^o[k]}$$

Rappel : convolution (1D)



Rappel : convolution 2D



Problème de déconvolution

Modèle direct :

$$y = h \star x^o + b$$

Problème inverse : déconvolution

Comment estimer x^o à partir de y et h ?
Comment inverser le processus de convolution ?

Sommaire

Sommaire

Déconvolution par inversion

Modèle direct sans bruit : $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec A convolution par h et $D_\sigma = I$

$$y = h \star x^o$$

Solution par inversion :

Rappel transformée de Fourier : $\mathcal{F}(h)[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[k,l] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-\frac{i2\pi lm}{M}}$.

$$y = \qquad h \star x^o$$

Déconvolution par inversion

Modèle direct sans bruit : $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec A convolution par h et $D_\sigma = I$

$$y = h \star x^o$$

Solution par inversion :

Rappel transformée de Fourier : $\mathcal{F}(h)[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[k,l] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-\frac{i2\pi lm}{M}}$.

$$\begin{aligned}
y &= h \star x^o \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h \star x^o) \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(x^o) \\
\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)} &= \mathcal{F}(x^o) && \text{si } \mathcal{F}(h)[k,l] \neq 0 \\
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right) &= x^o
\end{aligned}$$

Conclusion : on me donne y et h, j'estime x définit par $x = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right)$ donc $x = x^o$!

Déconvolution par inversion

Modèle direct sans bruit : $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec A convolution par h et $D_\sigma = I$

$$y = h \star x^o$$

Solution par inversion :

Rappel transformée de Fourier : $\mathcal{F}(h)[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[k,l] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-\frac{i2\pi lm}{M}}$.

$$\begin{aligned}
y &= h \star x^o \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h \star x^o) \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(x^o) \\
\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)} &= \mathcal{F}(x^o) \qquad \text{si } \mathcal{F}(h)[k,l] \neq 0 \\
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right) &= x^o
\end{aligned}$$

Conclusion : on me donne y et h, j'estime x définit par $x = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)})$ donc $x = x^o$!
$\rightarrow$ ceci est peut-être trop... simple !

Déconvolution par inversion

Modèle direct sans bruit : $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec A convolution par h et $D_\sigma = I$

$$y = h \star x^o$$

Solution par inversion :

Rappel transformée de Fourier : $\mathcal{F}(h)[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[k,l] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-\frac{i2\pi lm}{M}}$.

$$\begin{aligned}
y &= h \star x^o \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h \star x^o) \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(x^o) \\
\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)} &= \mathcal{F}(x^o) \qquad \text{si } \mathcal{F}(h)[k,l] \neq 0 \\
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right) &= x^o
\end{aligned}$$

Conclusion : on me donne y et h, j'estime x définit par $x = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)})$ donc $x = x^o$!
$\rightarrow$ ceci est peut-être trop... simple ! Ajoutons du bruit.

Déconvolution par inversion

Modèle direct bruité : $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec A convolution par h et D_σ bruit additif gaussien

$$y = h \star x^o + b$$

avec $(b[k])_k$ variables aléatoires i.i.d gaussiennes centrées ($\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$).

Solution par inversion :

Rappel transformée de Fourier : $\mathcal{F}(h)[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[k,l] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} e^{-\frac{i2\pi lm}{M}}$.

$$\begin{aligned}
y &= h \star x^o && +b \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h \star x^o) && +\mathcal{F}(b) \\
\mathcal{F}(y) &= \mathcal{F}(h)\mathcal{F}(x^o) && +\mathcal{F}(b) \\
\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)} &= \mathcal{F}(x^o) && +\frac{\mathcal{F}(b)}{\mathcal{F}(h)} \qquad \text{si } \mathcal{F}(h)[k,l] \neq 0 \\
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right) &= x^o && +\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(b)}{\mathcal{F}(h)}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : on me donne y et h, j'estime x définit par $x = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(y)}{\mathcal{F}(h)}\right)$ donc $x = x^o + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(b)}{\mathcal{F}(h)}\right)$!

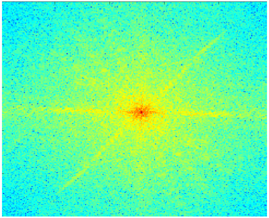
Sommaire

Les effets de la convolution

h est un "filtre gaussien" ($\sigma = 10$)

Image originale x^o

$X^o = \mathcal{F}(x^o)$

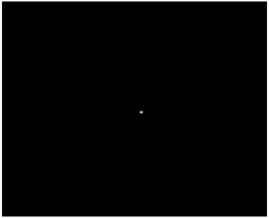


Les effets de la convolution

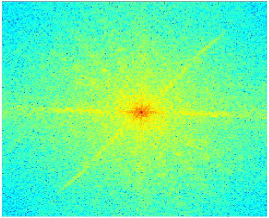
h est un "filtre gaussien" ($\sigma = 10$)

Image originale x^o

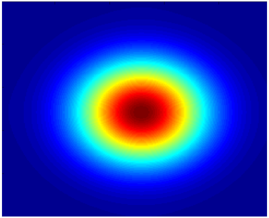
Filtre h



$X^o = \mathcal{F}(x^o)$



$\times H$

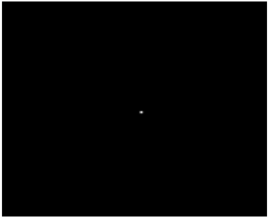


Les effets de la convolution

h est un "filtre gaussien" ($\sigma = 10$)

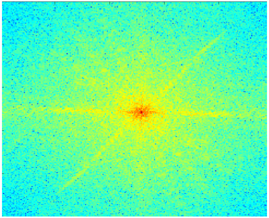
x^o

$\star h$

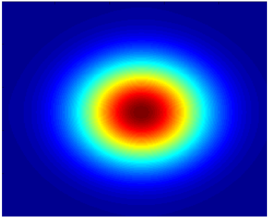


mesure $y = h \star x^o$

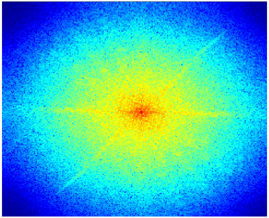
$X^o = \mathcal{F}(x^o)$



$\times H$



$Y = H \times X^o$

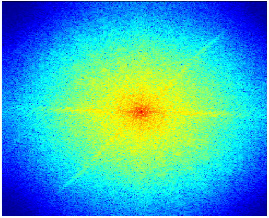


Déconvolution

Inversion du filtre : sans bruit, reconstruction parfaite

Image mesurée $y = h \star x^o$

Y



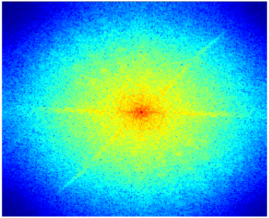
Déconvolution

Inversion du filtre : sans bruit, reconstruction parfaite

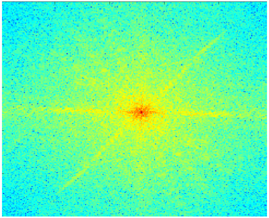
Image mesurée $y = h \star x^o$

Reconstruction

Y



Y/H



Déconvolution

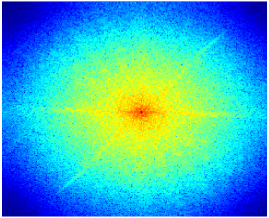
Inversion du filtre : sans bruit, reconstruction parfaite

Image mesurée $y = h \star x^o$

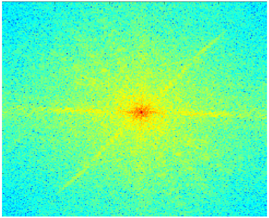
Reconstruction

Image originale x^o

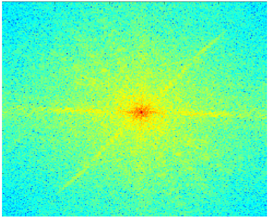
Y



Y/H



x^o



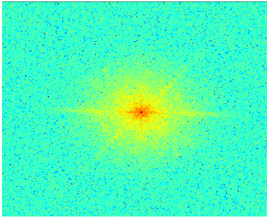
Déconvolution

Inversion du filtre : effet du bruit ($b \sim \mathcal{N}(0, 10)$)

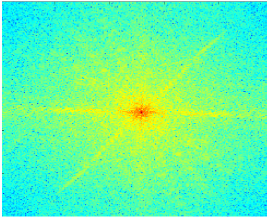
$y = h \star x^o + b$

Image originale x^o

$Y = H \times X^o + B$



X^o



Déconvolution

Inversion du filtre : effet du bruit ($b \sim \mathcal{N}(0, 10)$)

$y = h \star x^o + b$

Résultat : $x = \mathcal{F}^{-1}(\frac{Y}{H})$

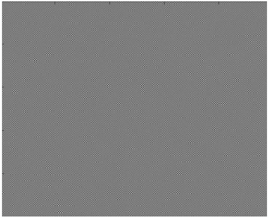
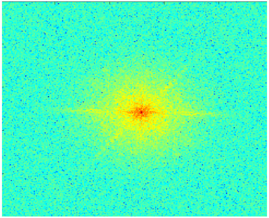
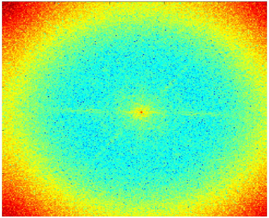


Image originale x^o

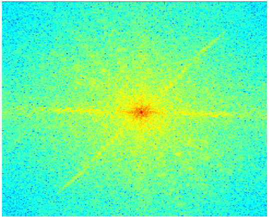
$Y = H \times X^o + B$



$\frac{Y}{H} = X^o + B/H$



X^o



Inversion de l'opérateur A

$$y = h \star x^o$$

ou plus généralement

$$y = Ax^o$$

A^{-1} peut exister mais

- être difficile à calculer
- amener à des erreurs numériques...

Inversion de l'opérateur A

$$y = h \star x^o$$

ou plus généralement

$$y = Ax^o$$

A^{-1} peut exister mais

- être difficile à calculer
- amener à des erreurs numériques...

$$y = Ax^o + b$$

Le bruit sur les mesures apporte une source d'instabilité supplémentaire : plus A est mal-conditionnée, plus l'instabilité est grande et le résultat mauvais.

Sommaire

Sommaire

Résolution par optimisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Problème inverse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + R(x)$$

avec R régularisation choisie en fonction du problème

Remarque

- si A est inversive et $R = 0$, on trouve la solution par inversion
- si $R = 0$ et A pas inversible, quelle est la solution ?

Résolution par optimisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Problème inverse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + R(x)$$

avec R régularisation choisie en fonction du problème

Remarque

- si A est inversive et $R = 0$, on trouve la solution par inversion
- si $R = 0$ et A pas inversible, quelle est la solution ?

$$x = A^+ y = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y$$

(A^+ pseudo-inverse de A)

même problème d'instabilité que pour l'inversion

Résolution par optimisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Problème inverse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + R(x)$$

avec R régularisation choisie en fonction du problème

Remarque

- si A est inversive et $R = 0$, on trouve la solution par inversion
- si $R = 0$ et A pas inversible, quelle est la solution ?

$$x = A^+ y = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y$$

(A^+ pseudo-inverse de A)

même problème d'instabilité que pour l'inversion

- si $R \neq 0$, on régularise : solution plus stable

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

quoi ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Ridge regression !

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Ridge regression !

Intérêt ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Ridge regression !

Intérêt ?

Contrainte sur la norme l_2 de la solution.

Solution ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 1 : problème inverse avec régularisation de Tikhonov

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Ridge regression !

Intérêt ?

Contrainte sur la norme l_2 de la solution.

Solution ?

$$x = \left(A^T A + \lambda I\right)^{-1} A^T y$$

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

quoi ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Intérêt ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Intérêt ?

Solution avec un faible nombre de valeurs non-nulles et beaucoup de zéros (parcimonie).

Solution ?

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \ \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Intérêt ?

Solution avec un faible nombre de valeurs non-nulles et beaucoup de zéros (parcimonie).

Solution ?

Pas de solution analytique

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Intérêt ?

Solution avec un faible nombre de valeurs non-nulles et beaucoup de zéros (parcimonie).

Solution ?

Pas de solution analytique
Pas de descente de gradient : $\|x\|_1$ non différentiable

Exemples de problème inverse avec régularisation

Modèle direct avec bruit additif gaussien

$$y = Ax^o + b$$

Exemple 2 : problème inverse avec régularisation parcimonieuse

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Vous reconnaissez...

Lasso !

Intérêt ?

Solution avec un faible nombre de valeurs non-nulles et beaucoup de zéros (parcimonie).

Solution ?

Pas de solution analytique
Pas de descente de gradient : $\|x\|_1$ *non différentiable*
Quel(s) algorithme(s) ?

Sommaire

Comment résoudre le Lasso ?

Problème d'optimisation :

$$\arg\min_{x} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

- Fonction non différentiable à cause de $\|x\|_1$, $|.|$ étant non-différentiable en 0.
- Mais **fonction convexe** : pas de minima locaux, on peut *facilement* descendre vers un minimum global.

→ **Optimisation convexe**, nombreux algorithmes efficaces reposant sur la notion de sous-gradient et d'opérateur proximal.

Ici, l'opérateur proximal associé à $\lambda |.|$ est le seuillage doux.

Iterative Soft Thresholding Algorithm (ISTA) pour résoudre le Lasso

Problème d'optimisation :

$$\arg\min_x \|Ax - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \text{ avec } \lambda > 0$$

Algorithme 1 ISTA

Entrées: $A \in \mathbb{R}^{N \times M}, y \in \mathbb{R}^N, \lambda > 0, \eta > 0, N_{\text{iter}}$

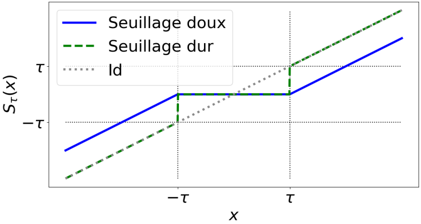
1: $x \leftarrow 0_M$
2: **pour** $i = 0 \ldots N_{\text{iter}} - 1$ **faire**
3: $\quad u \leftarrow x - 2\eta A^T (Ax - y)$
4: $\quad x \leftarrow S_{\lambda\eta}(u)$
5: **fin pour**

Sorties: x

Alternance entre

- une étape de descente de gradient sur le terme $\|Ax - y\|_2^2$ (l. 3)
- une étape de seuillage doux (l. 4) avec la fonction de seuillage doux de seuil τ

$$S_\tau(x) = \text{sign}(x) \max(0, |x| - \tau)$$



Sommaire

Synthèse

- On s'intéresse à **inverser** un **modèle direct** de la forme $y = D_\sigma(Ax^o)$ avec un opérateur linéaire connu A et une dégradation D_σ.

  Cas particulier aujourd'hui :
  $A \equiv$ convolution par h,
  $D_\sigma \equiv$ bruit additif gaussien,
  x^o parcimonieux.

- Formulation via un problème d'optimisation régularisé

  Lasso

- Résolution par méthode d'optimisation convexe

  ISTA

La suite :

- TP : mise en œuvre du cas particulier ci-dessus
- Prochaine séance : cas général

  opérateurs, bruits, régularisations, 2D/image, applications, algos

- Ensuite : approches hybrides optimisation/apprentissage.