Universidad Tecnologica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires
CEIT

FOTOCOPIADORA

MATERIA: ANALISIS II

TITULO: 1°PARCIAL RESUELTOS

DOCENTE:

CARRERA: HOMOGENEA

INGRESADO

CANT. COPIAS

Universidad Tecnológica Nacional Regional Bs.As. Análisis Matemático II 2010
Primer Parcial fecha: 15 – 05 – 10 Curso: Z 2 0 1 1

Tema: 1

Apellido y Nombre: ....

Teórico 1) Demostrar que si un campo escalar es diferenciable en $\overline{X_0} \Rightarrow f$ es continua en $\overline{X_0}$

Teórico 2) a) Defina punto regular de una superficie dada en forma paramétrica – vectorial

b) Analice si el punto $\overline{P}_0 = (1,2,4) \in S$ es regular según $\overline{F}(u,v) = (3u\cos v, 3u\,\mathrm{sen}\,v,\ 9-9u^2)$ con $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$. En caso afirmativo halle la ecuación del plano tangente y recta normal a dicha superficie S en $\overline{P}_0$. c) Halle la ecuación cartesiana de dicha superficie.
Esbozar el gráfico de S.

P1) Sea $f: IR^2 \to IR$ / $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x.y}{x^2+y^2} & si\ x \neq 0 \\ sen(x+y) & si\ x = 0 \end{cases}$

Se pide analizar: a) Continuidad de f en $\overline{X}_0 = (0,0)$
En caso de ser discontinua indique el motivo de la misma.
b) Derivabilidad de f en $(0,0)$ $\forall\ \breve{u}$. c) ¿f es diferenciable en $(0,0)$?

P 2) Sea $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación: $3.e^{2x-4y} + \ln z + x^2.y + z = 8$
Se pide: a) Aplicando diferencial, valor aproximado de $f(1{,}96;1{,}01)$
b) Ecuación del plano tangente y recta normal a la gráfica de ecuación $z = f(x,y)$ en $(2,1,z_0)$
c) El valor de la derivada direccional de f en $(2,1)$ respecto de un versor tangente en $(2,1)$ a la curva "C" si dicha curva es la que en cada uno de sus puntos tiene pendiente igual a $-\dfrac{x}{y}$.
d) El valor de la derivada direccional máxima de f en $(2,1)$ y la dirección que la promueve.

P3) Dada $z = f(u,v)$ definida implícitamente por $z.u + \ln(z-v) - u^2 - v - 2 = 0$
con $(u,v) = (\ x^2 + x.y\ ,\ \varphi(x) + 3\ )$ resulta una función compuesta "h".
a) Halle aproximadamente $h(1{,}03\,;\,1{,}98)$ siendo $x.\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 0$ con $\varphi(3) = 9$
b) Halle la ecuación de la Recta normal y la del plano tangente en $(1,2,h(1,2))$ a la gráfica de h

P 4) Sea la ecuación: $6x + 2y - 3z + 1 = 0$ la del plano tangente en $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ a la gráfica de ecuación $z = f(x,y)$ con f diferenciable.
a – Halle la derivada direccional mínima de f en (x_0, y_0) y la dirección responsable.

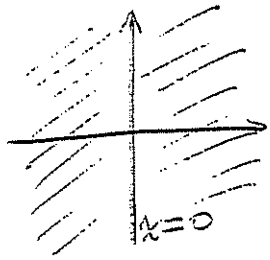
4b) Sea $f: IR^2 \to IR$ / $f(x,y) = \begin{cases} kx + 2y - 8 & si\ x \geq 0 \\ sen(x.y) & si\ x < 0 \end{cases}$

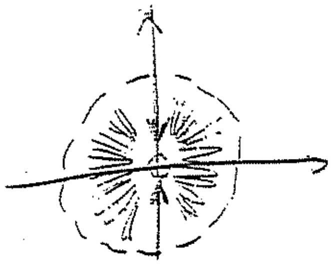
b_1 - Halle "k" para que exista $f'_x(0,4)$

b_2 – Halle el conjunto de nivel cero correspondiente al campo f del item "b" y represéntelo.

Tema 1 hoja (1)

P1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3xy}{x^2+y^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \operatorname{sen}(x+y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$





$f(0,0)=0$

Para analizar si existe $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y)$ se observa que los (x,y) se pueden aproximar al $(0,0)$ por $(x,y)/x=0$ y por $(x,y)/x\neq 0$

A) Si los $(x,y)\to(0,0)$ por $(x,y)/x=0$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) = \lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \operatorname{sen}(x+y) = 0$$

B) Si los $(x,y)\to(0,0)$ por $(x,y)/x\neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3xy}{x^2+y^2} \qquad \boxed{\frac{\to 0}{\to 0}}$$

Como presenta indeterminación y no se puede "salvar la misma" acudo a la información de los límites Radiales

C) Elijo acercarme al $(0,0)$ por $(x,y)/y=mx$

$$l_r = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2-3mx^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(2-3m)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{2-3m}{1+m^2}$$

Cada límite Radial existe pero son distintos entre sí

Por todo lo expuesto $\nexists \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) \Rightarrow f$ es discont esencial en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$

hoja 17

$$f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\breve{u}) - f(\bar{x}_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(ha, hb) - \overset{0}{\cancel{f(0,0)}}}{h}$$

A

Si $a = 0$ $\quad f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(hb)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} b \, \overbrace{\frac{\operatorname{sen}(hb)}{hb}}^{\to 1} = \boxed{b}$$

Si $a \neq 0$ $\quad f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(ha, hb)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2a^2 - 3h^2ab}{(h^2a^2 + h^2b^2)h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2(2a^2 - 3ab)}{h^3(\underbrace{a^2+b^2}_{1})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2a^2 - 3ab}{h} = \begin{cases} \boxed{0} & \text{si } 2a^2 - 3ab = 0 \\ \nexists & \text{si } 2a^2 - 3ab \neq 0 \end{cases}$$

Observación:
$2a^2 - 3ab = 0 \quad a(2a - 3b) = 0 \quad$ como $a \neq 0$
$\Rightarrow b = \frac{2}{3}a$

f es derivable en $(0,0)$ respecto de las direcciones donde $a = 0$ (ver A) y respecto de las direcciones donde $b = \frac{2}{3}a$

3) $\boxed{3e^{2x-4y} + \ln z + x^2 \cdot y + z - 8 = 0}$ (I) hoja (2)

Como $z = f(x,y)$ está definida implícitamente por la ecuación (I) se tiene por Cauchy-Dini:

$$f'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad f'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Si $(x_0+h,\ y_0+k) = (1{,}96\ ;\ 1{,}01)$

conviene que $(x_0,y_0) = (2,1)$

$z_0 = 1$ verifica la ecuación (I) para $(x_0,y_0) = (2,1)$

Sea $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / F(x,y,z) = 3e^{2x-4y} + \ln z + x^2 y + z - 8$

$\nabla F = (F'_x,\ F'_y,\ F'_z) = (6e^{2x-4y} + 2xy,\ -12e^{2x-4y} + x^2,\ \frac{1}{z} + 1)$

$\nabla F(2,1,1) = (10,\ -8,\ 2)$

$$f'_x(2,1) = -\frac{F'_x(2,1,1)}{F'_z(2,1,1)} = -\frac{10}{2} = \boxed{-5}$$

$$f'_y(2,1) = -\frac{F'_y(2,1,1)}{F'_z(2,1,1)} = -\frac{-8}{2} = \boxed{4}$$

a) $f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$f(1{,}96;1{,}01) \cong f(2,1) + f'_x(2,1)(1{,}96-2) + f'_y(2,1)(1{,}01-1)$

$\cong 1 + (-5)(1{,}96-2) + 4(1{,}01-1)$

b) Plano tangente $z = z_0 + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$z = 1 - 5(x-2) + 4(y-1)$

o bien $(\overline{X} - (2;1;1))\cdot(-5;4;-1) = 0$

P2) Continuación de ítem b

Recta normal

$\overline{X} = \overline{X}_0 + t\,\vec{V}$ con $t \in \mathbb{R}$

$\overline{X} = (2,1,1) + t(-5,4,-1)$ con $t \in \mathbb{R}$

c) Para hallar un versor tg en $(2,1)$ a $\mathcal{C}$ / en c/punto $y' = -\frac{x}{y}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\int y\,dy = \int -x\,dx \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \qquad \boxed{x^2 + y^2 = 2C}$

Si $(2,1) \in \mathcal{C}$ verifica: $4 + 1 = 2C \qquad C = \frac{5}{2}$

$\mathcal{C}: \boxed{x^2 + y^2 = 5}$ cuyas ecuac. param. $\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos t \\ y = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

Construyo $\overline{g}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 / \overline{g}(t) = (\sqrt{5}\cos t, \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t)$

Como $(2,1) \in \mathcal{C}$ satisface $\begin{cases} 2 = \sqrt{5}\cos t_0 \Rightarrow \cos t_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 = \sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t_0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\overline{g}'(t_0) = (-\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t_0, \sqrt{5}\cos t_0)$

$\overline{g}'(t_0) = (-\cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}, \cancel{\sqrt{5}}\,\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}) = (-1, 2) \qquad \breve{u} = \frac{\overline{g}'(t_0)}{\|\overline{g}'(t_0)\|}$

Como f es diferenciable: $f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \nabla f(\overline{X}_0) \cdot \breve{u}$

$\Rightarrow f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = (-5, 4) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{13}{\sqrt{5}}}$

d) Como f es diferenciable $f'_{máx}(\overline{X}_0) = \|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} =$
$= \sqrt{25 + 16} = \boxed{\sqrt{41}}$

La dirección es $\breve{u} = \frac{\nabla f(\overline{X}_0)}{\|\nabla f(\overline{X}_0)\|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}\right)$

hoja 4

P3 $\quad z$ es f

$$f \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ r \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases} \qquad z = h(x,y)$$

$$(A)\begin{cases} h'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_r \cdot r'_x \\ h'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_r \cdot r'_y \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$x\,\varphi'(x) = 2\varphi(x) \qquad \varphi(3) = 9$

si llamo $y = \varphi(x)$

$x \cdot y' = 2y \Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = 2y \qquad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx$

$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|k| \quad (k \neq 0)$

$\ln|y| = \ln|x|^2 + \ln|k| \qquad \ln|y| = \ln|kx^2|$

$\boxed{y = kx^2} \qquad \varphi(x) = kx^2 \qquad \varphi(3) = k \cdot 9$

$9 = k \cdot 9 \Rightarrow k = 1$

$\boxed{\varphi(x) = x^2}$

$$\therefore \begin{cases} u = x^3 + xy \\ r = x^2 + 3 \end{cases}$$

Cuando $(x_0, y_0) = (1,2)$

$u'_x = 3x^2 + y$	$u'_x(1,2) = 5$
$u'_y = x$	$u'_y(1,2) = 1$
$r'_x = 2x$	$r'_x(1,2) = 2$
$r'_y = 0$	$r'_y(1,2) = 0$

hoja 5

Como $z = f(u,v)$ está definida implícitamente

por : $\boxed{zu + \ln(z-v) - u^2 - v - 2 = 0}$

Se tiene : $f'_u(u_0, v_0) = - \dfrac{F'_u(u_0,v_0,z_0)}{F'_z(u_0,v_0,z_0)}$ $\quad f'_u(3,4) = - \dfrac{F'_u(3,4,5)}{F'_z(3,4,5)}$

$f'_v(u_0, v_0) = - \dfrac{F'_v(u_0,v_0,z_0)}{F'_z(u_0,v_0,z_0)}$ $\quad f'_v(3,4) = - \dfrac{F'_v(3,4,5)}{F'_z(3,4,5)}$

Sea $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, F(u,v,z) = zu + \ln(z-v) - u^2 - v - 2$

$\nabla F = (F'_u, F'_v, F'_z) = \left(z - 2u, \dfrac{-1}{z-v} - 1, u + \dfrac{1}{z-v}\right)$

$\nabla F(3,4,5) = (-1, -2, 4)$

$f'_u(3,4) = - \dfrac{-1}{4} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ $\quad f'_v(3,4) = - \dfrac{-2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ (A)

$h'_x(1,2) = f'_u(3,4) \cdot u'_x(1,2) + f'_v(3,4) \cdot v'_x(1,2)$

$h'_x(1,2) = \dfrac{1}{4} \cdot 5 + \dfrac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{\dfrac{9}{4}}$

$h'_y(1,2) = f'_u(3,4) \cdot u'_y(1,2) + f'_v(3,4) \cdot v'_y(1,2)$

$= \dfrac{1}{4} \cdot 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 0 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

hoja 6

P3 a) $h(1{,}03\,,\ 1{,}98) \cong h(1,2) + h'_x(1,2)(1{,}03-1) + h'_y(1,2)(1{,}98-2)$

$$\boxed{h(1{,}03;\,1{,}98) \cong 5 + \frac{9}{4}(0{,}03) + \frac{1}{4}(-0{,}02)}$$

3b) RN: $\overline{X} = (1,2,5) + t\left(\frac{9}{4},\ \frac{1}{4},\ -1\right) \quad t \in \mathbb{R}$

Plano tg: $\boxed{(\overline{X} - (1,2,5)) \cdot \left(\frac{9}{4}, \frac{1}{4}, -1\right) = 0}$

P4) $6x + 2y - 3z + 1 = 0$

$z = 2x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$

~~Dado~~ que dicho plano es tg a la gráfica de ecuación $z = f(x,y)$

$f'_x(x_0,y_0) = 2 \qquad f'_y(x_0,y_0) = \frac{2}{3}$

a) $f'_{\check{u}}(x_0,y_0) = -\|\nabla f(x_0,y_0)\| = -\sqrt{4 + \frac{4}{9}}$

4b) $f'_x(0,4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,4) - f(0,4)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,4)}{h}$

I) $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h,4)}{h} = \lim \dfrac{k\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = k$

II) $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h,4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(4h)}{h} = \lim \dfrac{4\operatorname{sen}(4h)}{4h} = 4$

$\boxed{k = 4}$

hoja (I)

4 b) $D_f = \mathbb{R}^2$

I) Si $x \geq 0$ $\quad 4x+2y-8=0$

II) Si $x < 0$ $\quad sen(x \cdot y) = 0$

I) Si $x \geq 0$ $\quad y = -2x + 4$

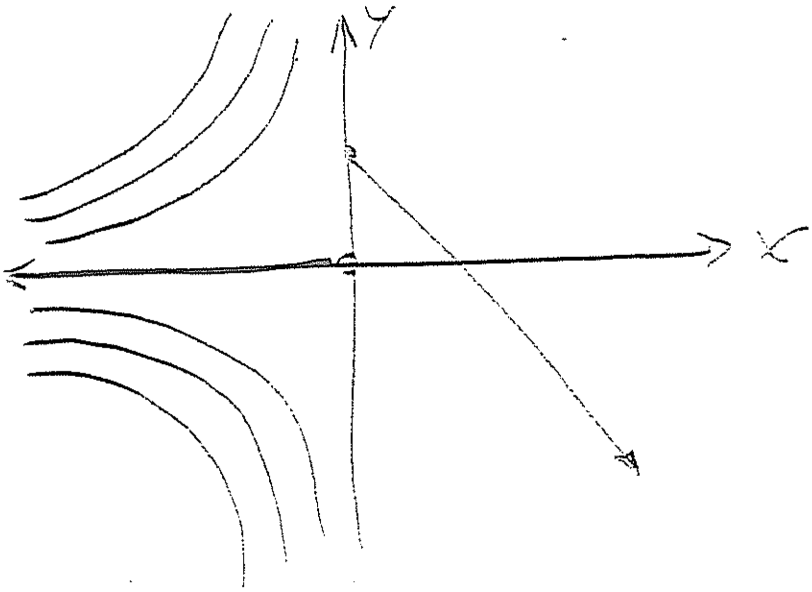
II) Si $x < 0$ $\quad sen(x \cdot y) = 0$

$$x \cdot y = k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Si $k = 0$ $\quad x \cdot y = 0$

$$\underbrace{x = 0}_{\text{descartado}} \vee y = 0$$

Si $k \neq 0$ $\quad x \cdot y = k\pi$ son hipérbolas



PRIMER PARCIAL ANÁLISIS MATEMÁTICO II Mayo 21 de 2010

P1) Hallar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria ortogonal a la familia $y = kx$ que pasa por el punto (3, 4)

P2) Siendo $z = f(x, y)$ una función definida implícitamente por la ecuación $(z-1)e^z + z = xy^2$ en un entorno del punto $(1, 1, z_0)$. Hallar en forma aproximada el valor de f en el punto (0.98, 1.01)

P3) Hallar el o los puntos de intersección de la curva definida por $\lambda(t) = (t+2, 2t+5, t+1)$ con la superficie de ecuación $x^2 + (y-3)^2 - z^2 = 1$ y determinar el ángulo que forma la recta tangente a la curva con el vector normal al plano tangente a la superficie en dichos puntos.

P4) La temperatura de una placa plana circular de radio 2 centrada en el origen de coordenadas ($x^2 + y^2 \leq 4$) está dada por la función $T(x, y) = x^2 + y$. Hallar el o los puntos en que la placa alcanza la mayor y la menor temperatura.

T1) Demostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es derivable en (x_0, y_0).

T2) Siendo $f(x_0, y_0)$ un extremo relativo de los valores de $f: \Re^2 \to \Re$, demostrar que f evaluada sobre la curva parametrizada por $\lambda(t)$ con $t \in \Re$, produce un extremo relativo en $t_0 / \lambda(t_0) = (x_0, y_0)$. Enunciar las hipótesis necesarias.

1º PARCIAL 21-5-10

1) $\begin{cases} y = kx \\ y' = k \end{cases} \rightarrow y = y'x \rightarrow y' = \frac{y}{x} \rightarrow y' = -\frac{x}{y} \rightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx \rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = C$

en $(3,4)$ $\quad \frac{4^2}{2} + \frac{3^2}{2} = C = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2} \rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{h(x,y)} = 25$ SP

$\nabla h_{(3,4)} = (2x, 2y) = (6, 8)$

$\bar{t} = (-4, 3)$

$\boxed{(x,y) = (3,4) + s(-4,3) \quad s \in \mathbb{R}}$

2) $z = f(x,y) \longleftarrow \underbrace{(x-1)e^z + z - xy^2}_{F(x,y,z)} = 0$

$(1,1,z) = (1,1,1)$

$f'_{x(1,1)} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{e^z - y^2}{(x-1)e^z + 1}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{e-1}{1} = 1-e$

$f'_{y(1,1)} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-2xy}{(x-1)e^z + 1}\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{-2}{1} = 2$

$f(0{,}98; 1{,}01) \cong 1 + (1-e)(-0{,}02) + 2 \cdot 0{,}01$

$\cong 1 + 0{,}034 + 0{,}02 = \boxed{1{,}054}$

3) $\bar{\lambda}(t) = (t+2, 2t+5, t+1)$

$x^2 + (y-3)^2 - z^2 = 1$

$(t+2)^2 + (2t+2)^2 - (t+1)^2 = 1$

$\cancel{t^2} + 4t + 4 + 4t^2 + 8t + 4 - \cancel{t^2} - 2t - 1 - 1 = 0$

$4t^2 + 10t + 6 = 0 \rightarrow 2t^2 + 5t + 3 = 0$

$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \bar{A} = (1, 3, 0) \\ \bar{B} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) \end{array}}$

$\bar{\lambda}' = (1, 2, 1)$

$\bar{\nabla} h = (2x, 2y - 6, -2z)$

$\bar{n} = (x, y-3, -z)$

$\bar{n}_1 = \frac{\nabla h_{(1,3,0)}}{2} = (1, 0, 0)$

$\cos \alpha_1 = \frac{(1,2,1)\,(1,0,0)}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{acos}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\boxed{\alpha_1 = 65{,}9^\circ}$

$\bar{n}_2 = \frac{\nabla h_{\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)}}{} = \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

$\cos \alpha_2 = \frac{(1,2,1)(1,-2,1)}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha_2 = \operatorname{acos}\left(\frac{-2}{6}\right)$

$\boxed{\alpha_2 = 109{,}5^\circ}$

4) $x^2+y^2 \leq 4$

$T(x,y) = x^3+y$

1°) $T'_x = 3x^2 = 0$

$T'_y = 1 \neq 0$

2°) $\overbrace{x^2+y^2}^{h(x,y)} = 4$

$\nabla T = \lambda \nabla h \rightarrow (3x^2, 1) = \lambda (2x, 2y)$

$$\begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x \longrightarrow x \neq 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}\lambda \\ 1 = 2\lambda y \longrightarrow \lambda \neq 0 \rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$\frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} = 4$

$16\lambda^4 +$

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$$

$T_{(t)} = 8\cos^3 t + 2\,\text{sen}\, t$

$T' = 24\cos^2 t\,(-\text{sen}\, t) + 2\cos t = 0$

$2\cos t\,(-12\,\text{sen}\, t\cos t + 1) = 0$

$\cos t = 0 \longrightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}}$ $\boxed{t_2 = \frac{3}{2}\pi}$

$2\,\text{sen}\, t\cos t = \frac{1}{6}$

$\text{sen}(2t) = \frac{1}{6} \rightarrow 2t_3 = 9{,}59° \longrightarrow \boxed{t_3 = 4{,}8°}$

$2t_4 = 170{,}4° \longrightarrow \boxed{t_4 = 85{,}2°}$

π — 180

$P_1 = (0, 2)$ $P_2 = (0, -2)$ $P_3 = (\quad , \quad)$ $P_4 = (\quad , \quad)$

$T_{(0,2)} =$

$T_{(0,-2)} =$

$T_{(\; , \;)} =$

$T_{(\; , \;)} =$

Análisis Matemático 2 (UTN) fecha curso
Apellido y nombre n° de legajo
parcial: 1° Tema 1

P 1	P 2	P 3	P 4	T 1	T 2	Nota práctica	Nota por promoción

P1 Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2 sen5y}{(x-1)^2+y^2} & si(x,y)\neq(1,0)\\ 0 & si(x,y)=(1,0)\end{cases}$

a) analizar la continuidad de f en (1,0) , b)analizar la existencia de derivadas direccionales en (1,0) , c)estudiar diferenciabilidad en (1,0) aplicando la definición d) la gráfica de f ¿ admite plano tangente en el punto (1,0,0)? justificar la respuesta

P2 a) Sea f: $R^2 \to R$ / z=f(u,v) una función de clase C^2 tal que su plano tangente en (-3,2,f(-3,2)) es π :3u-2v-z=6. Sea $\vec{g}(x,y)=(y^2-3x, y+2x^2)$, sea $h=fo\vec{g}$

¿Es posible que la derivada direccional de h en (1,0) para alguna dirección $\vec{r}$ valga 20? justificar

b) la ecuación $3e^{2x-4y}+\ln z+x^2y+z=8$ define implícitamente a z= f(x;y) calcular aproximadamente f(1.96,1.01) mediante un polinomio de Taylor de grado 1

P3

Sea γ_0 una curva en el plano xz definida por $(x+3)^2+z^2=9$, y=0 , sea S la superficie $x+y+z^2=5$,sea $\gamma\subset S$ tal que γ_0 es su proyección en el plano xz

a) parametrizar γ (no utilizar expresiones irracionales),dar la variación del parámetro b)hallar la ecuación de la recta tangente a γ en P_0 $(-3,y_0,3)$ c)verificar que la recta tangente a γ en P_0 está incluida en el plano tangente a S en P_0

P4 a) dada la familia de curvas asociada a la ecuación diferencial $y' + 4y = -e^{2x}$ se pide hallar la curva que pertenece a esta a familia que pasa por (0,2)

b) $f(x,y)=4x^3-y^3+3xy^2+2x^2$ hallar los puntos críticos y clasificarlos

T1 a) g(x,y)=$e^{f(x,y)}$ dónde f$\in C^2 en R^2$, (x_0,y_0) es punto crítico de f ,$g(x_0,y_0)=3$ $H_f(x_0,y_0)=1$ hallar $H_g(x_0,y_0)$

b) h=f.g f,g: $R^n\to R$ ambas C^1 demostrar que $\overline{\nabla h}=f.\overline{\nabla g}+g.\overline{\nabla f}$

T2 a)enunciar y demostrar la propiedad que permite aplicar una formula para el cálculo de la derivada direccional

b) sea $f:R^n\to R$ diferenciable en $\vec{x}_0$ tal que $\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ .Sea $\vec{u}\in R^n$, $\|\vec{u}\|=1$

demostrar que $D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)\leq\left\|\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\right\|$

TEMA 1

1

P1 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 \operatorname{sen} 5y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \underbrace{\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2}}_{\text{acotada } (*)} \operatorname{sen} 5y^{\to 0} = 0$

$0 \leq (x-1)^2 \leq (x-1)^2+y^2$

Si $(x,y) \neq (1,0)$

$(x-1)^2+y^2 > 0$

$L = 0 = f(1,0) \Rightarrow f$ es continua en $(1,0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{0 \leq \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+y^2} \leq 1}$ $(*)$

b) $f'((1,0), \check{r}) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h r_1, h r_2) - \cancel{f(1,0)}^{0}}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h^2 r_1^2 \operatorname{sen} 5hr_2 - 0}{h^2 r_1^2 + h^2 r_2^2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h^2} r_1^2 \operatorname{sen} 5hr_2}{h^{\cancel{3}} \underbrace{(r_1^2+r_2^2)}_{1}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1^2 \operatorname{sen} 5hr_2}{h} \; \frac{0}{0} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1^2 \; 5r_2 \cos 5hr_2}{1}$

$= 5 r_1^2 r_2$ / existen todas las derivadas direccionales en $(1,0)$

c) f es dif en $(1,0) \Leftrightarrow \Delta f = f'_x(1,0)(x-1) + f'_y(1,0)\, y + \omega \sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$f'_x(1,0) = 0$ (Ver derivada direccional $\check{r} = (1,0)$)

$f'_y(1,0) = 0$ " " $\check{r} = (0,1)$

donde $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \omega = 0$

$\Delta f = \dfrac{(x-1)^2 \operatorname{sen} 5y}{(x-1)^2+y^2} - 0 = 0 + 0 + \omega \sqrt{(x-1)^2+y^2}$ $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \omega = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^2 \operatorname{sen} 5y}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}$

(2)

$$L_C = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 \operatorname{sen} 5(x-1)}{(2(x-1)^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 \operatorname{sen} 5(x-1)}{2^{3/2} \cdot |x-1|^3}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)^2}}{2^{3/2}(x-1)^{\cancel{3}}} \operatorname{sen} 5(x-1) =$$

$$\underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{5 \cos 5(x-1)}{2^{3/2} \cdot 1} = \frac{5}{2^{3/2}} \neq 0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \omega \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1} \omega \neq 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} \omega \neq 0$$

$\Rightarrow$ f no es dif en $(1,0)$

d) como f no es dif en $(1,0) \Rightarrow \nexists$ plano tangente a f en $(1,0,0)$

P2 a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad z = f(u,v)$ $\quad f \in C^2$

el plano T a f en $(-3,2, f(-3,2))$ es π: $3u - 2v - z = 6$

$z = 3u - 2v - 6$

$\boxed{f'_u(-3,2) = 3}$ $\qquad$ $\boxed{f'_v(-3,2) = -2}$

$z_T = f(-3,2) + f'_u(-3,2)(u+3) + f'_v(-3,2)(v-2)$

$\nabla f(-3,2) = (3,-2)$

$h = f \circ \bar{g}$

$\vec{\nabla} h(1,0) = \vec{\nabla} f(\bar{g}(1,0)) \cdot D_{\bar{g}}(1,0)$

$\bar{\nabla} h(1,0) = \bar{\nabla} f(-3,2)\, D\bar{\varphi}(1,0)$

$(3,-2) \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{g}(x,y) = (y^2 - 3x,\ y + 2x^2)$

$\bar{g}(1,0) = (-3, 2)$

$D\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} -3 & 2y \\ 4x & 1 \end{bmatrix}$

$D\bar{\varphi}(1,0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{\nabla} h(1,0) = (-9-8,\ 0-2)$

$\bar{\nabla} h(1,0) = (-17,-2)$

$h'((1,0), \breve{r})_{\text{máximo}} = \|\vec{\nabla} h(1,0)\| = \sqrt{(-17)^2 + (-2)^2} = \sqrt{293} < 20$

$\boxed{\text{por lo tanto no es posible que } h'((1,0),\breve{r}) = 20}$

3

b) $\underbrace{3e^{2x-4y} + \ln z + x^2 y + z}_{F(x,y,z)} = 8$

$z = f(x,y)$

$z_0 = f(2,1) = 1$

$3 + \ln z_0 + 4 + z_0 = 8$

$\ln z_0 + z_0 = 1$

$\to z_0 = 1$

$f'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{6e^{2x-4y} + 2xy}{\frac{1}{z}+1}$

$f'_x(2,1,1) = -\dfrac{6+4}{2} = -5$

$f'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{-12e^{2x-4y} + x^2}{\frac{1}{z}+1}$

$f'_y(2,1,1) = -\dfrac{(-12+4)}{2} = 4$

el polinomio de Taylor de grado 1 es el plano tangente a la gráfica de f en (2,1)

$(x,y) \cong (2,1) \to f(x,y) \cong \underbrace{f(2,1)}_{1} + \underbrace{f'_x(2,1)}_{-5}(x-2) + \underbrace{f'_y(2,1)}_{4}(y-1)$

$f(x,y) \cong 1 - 5(x-2) + 4(y-1)$

$f(1.96, 1.01) \cong 1 - 5(-0.04) + 4\, 0.01 = 1.24$

$\boxed{f(1.96, 1.01) \cong 1.24}$

P3 a) $\gamma_0 \subset$ plano xz $\quad (x+3)^2 + z^2 = 9$

$\gamma_0 \quad \overline{g_0}(t) = (-3+3\cos t, 0, 3\,\text{sen}\, t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma \quad \overline{\varphi}(t) = (-3+3\cos t, 5-((-3+3\cos t)+9\,\text{sen}^2 t), 3\,\text{sen}\, t) \quad 0 \le t \le 2\pi$

$\gamma \subset S \quad S: x+y+z^2 = 5 \to y = 5 - x - z^2$

$\boxed{\gamma: \overline{g}(t) = (-3+3\cos t, 8 - 3\cos t - 9\,\text{sen}^2 t, 3\,\text{sen}\, t) \quad 0 \le t \le 2\pi}$

b) $P_0(-3, y_0, 3) = \overline{\varphi}(\pi) \ldots$

4

$\bar{g}'(t) = (-3\,\text{sen}\,t,\ 3\,\text{sen}\,t - 18\,\text{sen}\,t\cos t,\ 3\cos t)$

$\bar{g}'(\frac{\pi}{2}) = (-3, 3, 0)$

$\boxed{\text{Recta } T:\ (x,y,z) = \underbrace{(-3,-1,3)}_{P_0} + \lambda\underbrace{(-3,3,0)}_{\vec{u}}\quad \lambda \in \mathbb{R}}$

c) $S:\ \overbrace{x + y + z^2}^{F(x,y,z)} = 5 \qquad \vec{\nabla}F(x,y,z) = (1,1,2z)$

plano T en $(-3,-1,3)$

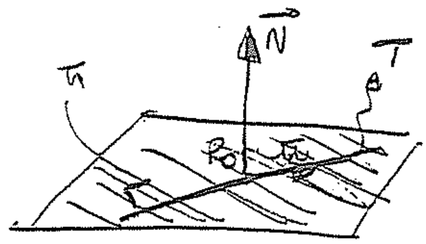
$\pi:\ \underbrace{\bar{\nabla}F(-3,-1,3)}_{(1,1,6)} \cdot (x+3,\ y+1,\ z-3) = 0$

como $P_0\ (-3,-1,3) \in T \cap S$

alcanza con probar que $\vec{N} \perp \vec{u}$

$(1,1,6) \cdot (-3,3,0) =$

$= -3 + 3 + 0 = 0$



$\boxed{\therefore\ T \subset S}$

P4 a) $y' + 4y = -e^{2x}$

$y = u\,v$

$u'v + uv' + 4uv = -e^{2x}$

$u'v + u(v' + 4v) = -e^{2x}$

$\begin{cases} v' + 4v = 0 & (1) \\ u'v = -e^{2x} & (2) \end{cases}$

(1) $\frac{dv}{v} = -4\,dx$

$\ln|v| = -4x + C_1$

$v = \underbrace{(\pm e^{C_1})}_{A} e^{-4x}$

$v = A e^{-4x}$

(2) $u' A e^{-4x} = -e^{2x}$

$u' = \frac{-1}{A} e^{2x} e^{4x} = \frac{-1}{A} e^{6x}$

$u = \left(\frac{-1}{6A} e^{6x} + C_2\right)$

$y = u \cdot v = \left(\frac{-1}{6A} e^{6x} + C_2\right) A e^{-4x}$

$= \frac{-1}{6A} A e^{2x} + \underbrace{C_2 A}_{B} e^{-4x}$

$y = -\frac{1}{6} e^{2x} + B e^{-4x}$ SG

$\boxed{y = -\frac{1}{6}e^{2x} \ldots e^{-4x}}$

5) $f(x,y) = 4x^3 - y^3 + 3xy^2 + 2x^2$ (5)

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 + 3y^2 + 4x = 0 \quad (1) \\ f'_y = -3y^2 + 6xy = 3y(-y+2x) = 0 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

$y = 0 \xrightarrow{(1)} 12x^2 + 4x = 4x(3x+1) \begin{cases} x = 0 \\ x = -1/3 \end{cases} \begin{matrix} \to \boxed{P_1(0,0)} \\ \to \boxed{P_2(-\frac{1}{3},0)} \end{matrix}$

$y = 2x \xrightarrow{(1)} 12x^2 + 12x^2 + 4x = 0$

$24x^2 + 4x = 0$

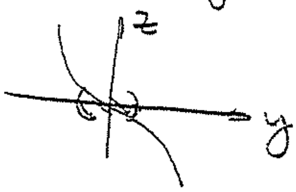
$4x(6x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \to (0,0) \text{ ya está} \\ x = -\frac{1}{6} \to \boxed{P_3(-\frac{1}{6},-\frac{1}{3})} \end{cases}$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 24x+4 & 6y \\ 6y & -6y+6x \end{vmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ el criterio no decide

$f(0,0) = 0$

$f(0,y) = -y^3 \begin{cases} y>0 \to f<0 \\ y<0 \to f>0 \end{cases}$



Como en $E(0,0)$, $f>0 \wedge f<0$
$\Rightarrow$ no es ni mínimo ni máx. relativo
$\boxed{P_1(0,0) \text{ es pto silla}}$

$H(-\frac{1}{3},0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +8 > 0 \to \boxed{P_2(-\frac{1}{3},0) \text{ hay máx. relativo}}$ ($-4 < 0$)

$H(-\frac{1}{6},-\frac{1}{3}) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \to \boxed{P_3(-\frac{1}{6},-\frac{1}{3}) \text{ es pto silla}}$

T1 a) $g(x,y) = e^{f(x,y)}$ $f \in C^2$ en $\mathbb{R}^2$ (6)

(x_0, y_0) es pto critico dif $\quad f \in C^2 \Rightarrow f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$

$g(x_0,y_0) = 3 = e^{f(x_0,y_0)}$

$H_f(x_0,y_0) = 1$

1°) $g'_x = e^{f(x,y)} f'_x \to g'_x(x_0,y_0) = 0$

$g'_y = e^{f(x,y)} f'_y \to g'_y(x_0,y_0) = 0$

$g''_{xx} = e^{f(x,y)} (f'_x)^2 + e^{f(x,y)} f''_{xx} \to g''_{xx}(x_0,y_0) = 0 + 3 f''_{xx}(x_0,y_0)$
$= 3f''_{xx}(x_0,y_0)$

$g''_{yy} = e^{f(x,y)} (f'_y)^2 + e^{f(x,y)} f''_{yy} \to g''_{yy}(x_0,y_0) = 0 + 3 f''_{yy}(x_0,y_0)$
$= 3f''_{yy}(x_0,y_0)$

$g''_{xy} = e^{f(x,y)} f'_x \cdot f'_y + e^{f(x,y)} f''_{xy} \to g''_{xy}(x_0,y_0) = 0 + 3 f''_{xy}(x_0,y_0)$
$= 3f''_{xy}(x_0,y_0)$

$$H_g(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} 3f''_{xx}(x_0,y_0) & 3f''_{xy}(x_0,y_0) \\ 3f''_{xy}(x_0,y_0) & 3f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 9 \underbrace{H_f(x_0,y_0)}_{1} = 9$$

$\boxed{H_g(x_0,y_0) = 9}$

b) $h = f \cdot g$. $\quad f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x}) \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^v$

$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$

$$\bar{\nabla} h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) e_i^v = g \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i^v}_{\bar{\nabla} f} + f \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} e_i^v}_{\bar{\nabla} g}$$

$\boxed{\bar{\nabla} h = g \bar{\nabla} f + f \bar{\nabla} g}$

T2 a) Ver demost carpeta anterior

≤1

Resolución

Primer parcial 4/08/2011 Prof. Fiorante

1] **Halle** $g'((1,0);(2,8))$, tal que $g: E((1,0);\delta)\to \mathbb{R}$ / $z=g(x,y) \wedge x^2+y^2+z^2=-z\,.\,\varphi(x+z^{-1})$, $\varphi\in C^1[\mathbb{R}]$, $\varphi'(0)=3$ y $\varphi(0)=2$.

2] **Encuentre** las coordenadas del punto de la recta normal, en $(4,8,c)$ a la superficie de ecuación vectorial paramétrica: $(x,y,z)=\underbrace{(v+u\,,\,v^2-u\,,\,u^3 v)}_{\overline{F}(u,v)}$ con $(u,v)\in[0;5]\times\mathbb{R}^+$, tal su ordenada es 24.

3] **Determine** una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial paramétrica del plano tangente a la superficie de ecuación: $y=j(x,z)$ en el punto $(6,1,4)$. Se sabe que: $h(t,w)=j(t^2w-w^3+3,\,t\,w+2w^2)$, $\nabla h(2,1)=(6,13)$ y $\{h\,,j\}\subset C^1[\mathbb{R}^2]$.

4] $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / $f(x,y)=(e^{x^2-xy}-1).g(x,y)$, g continua ,no derivable, en $\bar a=(0,1)$, $g(\bar a)=4$.
Responda ¿ Es f derivable en $(0,1)$? y ¿ cuál es el vector gradiente, si existe ?

Segundo parcial 4/08/2011 Prof. Fiorante

1] **Calcule** el área de la superficie esférica de centro en el origen y radio $\sqrt{6}$ contenida en la región de inecuación: $z\ge x^2+y^2$

2] **Halle** $\oint_{\partial D}(y\,h(x)+\operatorname{arctg}x\,,h(x)-e^y)\circ d\bar x$, con $D=\{\bar x/\bar x\in\mathbb{R}^2\wedge x\le 2-y^2\wedge |3-x|\le 2\}$ y $\forall x\in\mathbb{R}:\ 3h'(x)-3h(x)-6x=0$

3] **Determine** $\iint_{\partial K}\nabla(h(x,y,z)+xy^2)\circ\overline{dS}$ (flujo saliente), $h\in C^2[\mathbb{R}^3]$, h es un campo escalar armónico ,$K=\{\bar x/\bar x\in\mathbb{R}^3\wedge x^2\le y\le 4\ \wedge\ 1\le z\le 2\}$.

4] **Calcule** la integral curvilínea de $\overline{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ / $\overline{f}(x,y,z)=(z+2x.g(y)\,,3x-4y\,,z+g(y))$, a través de c : curva borde de $S=\{\bar x/\bar x\in\mathbb{R}^3\wedge y^2+x^2+z=9\wedge z\ge 5\wedge y\ge 0\}$ y $g\in C^1[\mathbb{R}]$.

1er parcial

$g\in C^1[E(1,0)]$

$\nabla g(1,0)=\left(-\frac{-1}{3},\frac{0}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},0\right)$

$g'((1,0);(2,8))=\nabla g(1,0)\circ(2,8)=2/3$

1] $H(\bar x)=x^2+y^2+z^2+z\,\varphi(\underbrace{x+z^{-1}}_{u})$; $\nabla H(\bar x)=(2x+z\varphi'(u),2y,2z+\varphi(u)-z\varphi'(u)z^{-2})$

$\nabla H(1,0,-1)=(2-3,\,0,\,-2+\underbrace{\varphi(0)}_{2}+1\cdot 3)=(-1,0,3)$

$H(1,0,c)=1+c^2+c\underbrace{\varphi(0)}_{2}=0$

$1+c^2+2c=0=(c+1)^2$; $c=-1$

2] $\begin{cases}v+u=4\\ v^2-u=8\end{cases}$ $\begin{cases}v=4-u\ ,\ u=4-v\\ v^2-4+v=8\ ,\ v^2+v=12\end{cases}$ $\begin{cases}u=1\\ v=3>0\end{cases}$ $\overline{F}'_u(u,v)=(1,-1,3u^2v)$, $\overline{F}'_u(1,3)=(1,-1,9)$

$\overline{F}'_v(u,v)=(1,2v,u^3)$, $\overline{F}'_v(1,3)=(1,6,1)$

$\overline{F}'_u(1,3)\wedge\overline{F}'_v(1,3)=(-55,8,7)=\bar n\neq\bar 0$

e.v.p. recta normal : $\bar X=\underbrace{(4,8,3)}_{\overline{F}(1,3)}+\lambda(-55,8,7)$, luego $y_0=8+8\lambda_0=24$, $\lambda_0=2$

El punto es: $(-106,24,17)$

3] $(t,w)\to(x,z)=(t^2w-w^3+3,\,tw+2w^2)\xrightarrow{j} j(x,z)=h(t,w)$; $Dh(t,w)=Dj(x,z)\cdot\begin{bmatrix}2tw & t^2-3w^2\\ w & t+4w\end{bmatrix}$

$(2,1)\to(6,4)\longrightarrow j(6,4)=1$, $Dh(2,1)=[\underbrace{j'_x(6,4)}_{A}\ \ \underbrace{j'_z(6,4)}_{B}]\begin{bmatrix}4&1\\1&6\end{bmatrix}=[6\ \ 13]$

$\begin{cases}4A+B=6\\ A+6B=13\end{cases}$ $\begin{cases}A=1\\ B=2\end{cases}$; $\nabla j(6,4)=(1,2)$; $S:\ \bar X=\overline{F}(x,z)=(x,j(x,z),z)$; $\overline{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$D\overline{F}(x,z)=\begin{bmatrix}1&0\\ j'_x(x,z)&j'_z(x,z)\\ 0&1\end{bmatrix}$; $D\overline{F}(6,4)=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\\0&1\end{bmatrix}$

Plano tangente : $(\bar X-(6,1,4))\circ(1,-1,2)=0$

$x-6-(y-1)+2(z-4)=\boxed{x-y+2z-13=0}$ e.c.

$\bar n=(1,-1,2)$

Análisis Matemático 2 (UTN)
Apellido y nombre
parcial: 1°

fecha 13/08/11 curso Z 2005
n° de legajo 1403450
Tema 1

P 1	P 2	P 3	P 4	T 1	T 2	Nota práctica	Nota por promoción
BBBB	BB	BBB	BB	B X	BB		8 (nueve)

P1 Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2\ln(1+4y)}{(x-3)^2+y^2} & si(x,y)\neq(3,0)\\ 0 & si(x,y)=(3,0)\end{cases}$ con $y>-1/4$

a) analizar la continuidad de f en (3,0) , b)analizar la existencia de derivadas direccionales en (3,0) , c)estudiar diferenciabilidad en (3,0) aplicando la definición d) la gráfica de f ¿ admite plano tangente en el punto (3,0,0)? justificar la respuesta

P2 a) Sea f: $R^2\to R/$ z=f(u,v) una función de clase C^1 tal que su plano tangente en (1,2,f(1,2)) es π :2u-2v-5z +6=0. Sea $\vec{g}(x,y)=(y^2+\sin x,\ -y+3\cos x)$, sea $h=fo\vec{g}$

¿Es posible que la derivada direccional de h en (0,1) para alguna dirección $\hat{r}$ valga -2 ? justificar

b) la ecuación $2e^{3x-2y}+\ln z+\frac{1}{6}x^2y+z=5$ define implícitamente a z= f(x;y) calcular aproximadamente f(2.02,2.99) mediante una aproximación lineal

P3 Sea γ_0 una curva en el plano yz definida por $(y+4)^2+(z-1)^2=16$, x=0 , sea S la superficie $x+y=5$,sea $\gamma\subset S$ tal que γ_0 es su proyección en el plano yz

a) parametrizar γ (no utilizar expresiones irracionales), dar la variación del parámetro
b)hallar la ecuación de la recta tangente a γ en P_0 $(x_0,-4,5)$ c)hallar la ecuación del plano normal a γ en P_0

P4 a) dada la familia $y=Ae^{2(x-3)}$ se pide a.1)hallar la familia ortogonal
a.2) hallar ~~los~~ el miembro~~s~~ de cada familia que pasan por (1,5) y graficarlos
b) $f(x,y)=x^4-x^2y^2+8x$ hallar los puntos críticos y clasificarlos

T1 a) g(x,y)=$Ln\,f(x,y)$ dónde f$\in C^2 en R^2$, (x_0,y_0) es punto crítico de f , $f(x_0,y_0)=e$
$H_f(x_0,y_0)$=5 hallar $H_g(x_0,y_0)$

b) Sea f$\in C^1$ en R^2, $\vec{\nabla}f(a,b)\neq\vec{0}$, γ es la curva de nivel de f que pasa por (a,b)
Demostrar que $\vec{\nabla}f(a,b)$ es perpendicular a la recta tangente a γ en (a,b)

T2 a)enunciar y demostrar la propiedad que permite calcular mediante una formula la derivada direccional de $f:R^n\to R$ en cualquier $\bar{x}_0$ y para cualquier dirección $\hat{r}$

b) $f'((a,b),\hat{r})=2r_1r_2^3$ es el resultado de la derivada direccional de f en (a,b) para cualquier dirección aplicando la definición

b.1) halle $\vec{\nabla}f(a,b)$ b.2) ¿f es diferenciable en (a,b)? justifique

Parte practica | | HOJA Nº 1 FECHA 15/08/11

P_1)

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2 \ln(1+4y)}{(x-3)^2 + y^2} & \text{si } (x;y) \neq (3,0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (3,0) \end{cases}$$

a) Continuidad de f en (3;0):

$f(3;0) = 0$

$$\lim_{(x;y)\to(3;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(3;0)} \frac{(x-3)^2 \cdot \ln(1+4y)}{(x-3)^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(3;0)} \frac{(x-3)^2}{(x-3)^2+y^2} \cdot \ln(1+4y) \quad *$$

$*$ como $0 \leq (x-3)^2 \leq (x-3)^2+y^2 \ \forall \ \mathbb{R}^2 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)^2+y^2} \leq 1 \rightarrow$ acotado

$$\Rightarrow \lim_{(x;y)\to(3;0)} \underbrace{\frac{(x-3)^2}{(x-3)^2+y^2}}_{\text{acotado}} \underbrace{\ln(1+4y)}_{\text{inf}} = 0$$

β

Rta:

como

$$\lim_{(x;y)\to(3;0)} f(x;y) = f(3;0) = 0 \rightarrow \text{continua}$$

b) Existencia de derivadas direccionales

Sea $\breve{r} = r_1; r_2 \ \wedge \ \|\breve{r}\| = 1$

$$f'((3,0);\breve{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f[(3;0)+h\breve{r}] - \cancel{f(3;0)}^{\,0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f[(3;0)+h\breve{r}]}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(3+hr_1-3)^2 \ \ln[1+4hr_2]}{(3+hr_1-3)^2 + (hr_2)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hr_1)^2 \cdot \ln[1+4hr_2]}{[(hr_1)^2+(hr_2)^2] \cdot h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}\, r_1^2 \ \ln(1+4hr_2)}{h^{\cancel{3}} \ (r_1^2+r_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{r_1^2 \cdot \ln(1+4hr_2)}{h \ (r_1^2+r_2^2)} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{r_1^2 \ 4r_2}{(1+4hr_2)}}{(r_1^2+r_2^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r_1^2 \cdot 4r_2}{(r_1^2+r_2^2)\ (1+4hr_2)} = \boxed{\frac{r_1^2 \cdot 4r_2}{\underbrace{(r_1^2+r_2^2)}_{1}}}$$

$\exists \ \forall \ f'[(3;0)\,\breve{r}] \quad \forall \breve{r} = (r_1;r_2)$

Existen todas las derivadas direccionales

c) Diferenciabilidad en $(3;0) = \vec{x_0}$

Sea $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x_0}$

$\vec{h} = h_1; h_2$

(1) $$\Delta f = f(3;0)+\vec{h} - f(3;0) = \frac{(3+h_1-3)^2 + \ln(1+4h_2)}{(3+h_1-3)^2+h_2^2} = \frac{h_1^2 \ \ln(1+4h_2)}{h_1^2+h_2^2}$$

(2) $$\vec{\nabla} f_{(3,0)} \cdot \vec{h} = \underset{0}{f'_x(3,0)} \cdot h_1 + \underset{0}{f'_y(3;0)}\, h_2 = 0$$

Si f dif:

$$(1) = (2) + \mathcal{E}\vec{h} \ \|\vec{h}\| \Rightarrow \frac{h_1^2 \ \ln(1+4h_2)}{h_1^2+h_2^2} = \mathcal{E}(\vec{h}) \cdot \sqrt{h_1^2+h_2^2} \Rightarrow \mathcal{E}(\vec{h}) = \frac{h_1^2 \ \ln(1+4h_2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{\quad}}$$

HOJA Nº 2

Parte practica

FECHA 13/08/11

si $\vec{x} \to \vec{x_0} \Rightarrow \vec{h} \to \vec{0} \Rightarrow (h_1; h_2) \to (0;0)$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} E(\vec{h}) = \lim_{(h_1;h_2)\to(0;0)} \frac{h_1^2 \ln(1+4h_2)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1;h_2)\to(0;0)} \frac{h_1^2 \ln(1+4h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{si } h_2 = m h_1 \Rightarrow \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2 \ln(1+4mh_1)}{(h_1^2+m^2h_1^2)^{3/2}} = \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2 \ln(1+4mh_1)}{(h_1^2)^{3/2}(1+m^2)^{3/2}} =$$

$$\boxed{\sqrt{h_1^2} = |h_1|}$$

$$= \lim_{h_1\to 0} \frac{\cancel{h_1^2} \ln(1+4mh_1)}{\cancel{|h_1|^3}(1+m^2)^{3/2}} = \lim_{h_1\to 0} \frac{\ln(1+4mh_1)}{h_1 (1+m^2)^{3/2}} \nearrow \% \underset{L'H}{\Rightarrow}$$

lateral

$$\underset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4m}{1+4mh_1}}{(1+m^2)^{3/2}} = \lim_{h\to 0} \frac{4m}{(1+m^2)^{3/2}(1+4mh_1)} = \frac{4m}{(1+m^2)^{3/2}} \Rightarrow \nexists \lim$$

Por depender de la constante "m"

como El $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} E(\vec{h}) \nexists \Rightarrow$ No es diferenciable !!! en (3;0)

d) La grafica no admite plano tg. por no ser diferenciable en (3,0)

(P2) $h = f \circ \vec{g} = f[\vec{g}(x;y)]$

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr] & \\ (x;y) \arrow[ur, "\vec{g}"] \arrow[dr] & & z \\ & v \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

si $(x;y) = (0,1) \Rightarrow$

$\vec{g}(0,1) = (1;2) \Rightarrow (u;v) = \vec{g}(0,1) = (1,2)$

cuando $(x;y) = (0,1)$

$(u;v) = (1;2)$

$h'((0,1);\check{r}) = \vec{\nabla} h(0,1) \cdot \check{r}$

$\vec{\nabla} h(0,1) = \vec{\nabla} f'(1,2) \cdot D\vec{g}(0,1) = \left(f'_u(1,2) \; ; \; f'_v(1,2)\right) \cdot \begin{vmatrix} \cos x & 2y \\ -3\,\text{sen}\,x & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} h(0,1) = \left(f'_u(1,2) ; f'_v(1,2)\right) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ *

Sabemos que $z = f(u;v)$ queda definida por $F(u;v;z)$ cuyo pl tg. en $z = f(1,2) = \Pi: 2u - 2v - 5z + 6 = 0$

$\Pi: 2u - 2v - 5z + 6 = 0 \Rightarrow 5z = 2u - 2v + 6 \Rightarrow z = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}u - \frac{2}{5}v$

Como $z = f(1,2) + f'_u(1,2)(u-1) + f'_v(1,2)(v-2) \Rightarrow z = f(1,2) - f'_u(1,2) - 2\,f'_v(1,2) + f'_u(1,2)\,u + f'_v(1,2)\cdot v$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} f'_u(1,2) &= 2/5 \\ f'_v(1,2) &= -2/5 \end{aligned}\right\} \vec{\nabla} f(1,2) = \left(2/5 \; ; \; -2/5\right)$$

$* \Rightarrow \vec{\nabla} h(0,1) = \left(2/5 ; -2/5\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{5} ; \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5} ; \frac{6}{5}\right)$

$\Rightarrow h'(0,1)\cdot\check{r} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por} \\ \text{ser } h \text{ dif.}}}{=} \vec{\nabla} h(0,1) \cdot \check{r} = \left(\frac{2}{5} ; \frac{6}{5}\right) \cdot \check{r} = \left\| \frac{2}{5} ; \frac{6}{5} \right\| \, \|\overset{1}{\check{r}}\| \cos\alpha$

si $\alpha = 0 \rightarrow$ derivada max $= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{40}{25}} = \frac{\sqrt{40}}{5}$ $\Big\} \Rightarrow$

si $\alpha = \pi \rightarrow$ derivada direc. min $= -\frac{\sqrt{40}}{5}$

Parte practica 13/08/11

Como

$$\underset{\text{min}}{-\frac{\sqrt{40}}{5}} \leq f'_{(0,1)}\check{r} \leq \underset{\text{max}}{\frac{\sqrt{40}}{5}} \qquad \forall \check{r} \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \text{como } -2 \notin \left[-\frac{\sqrt{40}}{5} ; \frac{\sqrt{40}}{5}\right]$$

Como -2 es menor que la derivada direccional minima $\Rightarrow$ es imposible que $f'_{(0,1)}\check{r} = -2$ ya que $\nexists\, \check{r} \in \mathbb{R}^2 \,/\, f'_{(0,1)}\check{r} = -2$

b) $z = f(x;y)$

$$F_{(x;y;z)} = 2e^{3x-2y} + \ln z + \frac{1}{6}x^2y + z - 5 = 0$$

$$z_0 = f(2;3) \Rightarrow F(2,3;z_0) = 2e^{3.2-2.3} + \ln z_0 + \frac{1}{6}4.3 + z_0 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + \ln z_0 + 2 + z_0 - 5 = 0 \Rightarrow \ln z_0 + z_0 = 1 \Rightarrow \boxed{z_0 = 1}$$

$$f'_x(2,3) = \frac{-F'_x(2,3,1)}{F'_z(2,3,1)} = -\frac{\left[2e^{3x-2y}.3 + \frac{2yx}{6\,3}\right]}{\frac{1}{z} + 1} = -\frac{(6+2)}{2} = -\frac{8}{2} = \boxed{-4}$$

$$f'_y(2,3) = \frac{-F'_y(2,3,1)}{F'_z(2,3,1)} = -\frac{\left(2e^{3x-2y}.-2 + \frac{x^2}{6}\right)}{\frac{1}{z} + 1} = -\frac{\left(-4 + \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{\frac{12}{3} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

$$f(x,y) = z_0 + f'_x(2,3)(x-2) + f'_y(2,3)(y-3) \Rightarrow f(x,y) = 1 - 2(x-2) + \frac{5}{3}(y-3)$$

$$f(2{,}01;2{,}99) \approx 1 - 4(0{,}01) + \frac{5}{3}(-0{,}01) \ldots$$

Parte practica

P3) $\gamma_0: \quad (y+4)^2 + (z-1)^2 = 16 \qquad x=0$

$4\cos\alpha = y+4 \Rightarrow y = 4\cos\alpha - 4$
$4\operatorname{sen}\alpha = z-1 \Rightarrow z = 4\operatorname{sen}\alpha + 1$ $\Big\}$ $\vec{\gamma}_0(\alpha) = (0 ; 4\cos\alpha - 4 ; 4\operatorname{sen}\alpha + 1) \quad \alpha \in [0; 2\pi]$

$S: x+y=5$ y $\gamma \subset S \Rightarrow x = 5 - y$ como $y = 4\cos\alpha - 4 \Rightarrow x = 5 - 4\cos + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 9 - 4\cos\alpha$

a) $\vec{\gamma}(\alpha) = (9 - 4\cos\alpha ; 4\cos\alpha - 4 ; 4\operatorname{sen}\alpha + 1) \quad \alpha \in [0; 2\pi]$

b) $P_0 = (x_0 ; -4 ; 5) \Rightarrow y = -4 = 4\cos\alpha - 4 \Rightarrow 4\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2$ o $\cancel{\frac{3}{2}\pi}$

$z = 5 = 4\operatorname{sen}\alpha + 1 \Rightarrow 4\operatorname{sen}\alpha = 4 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \pi/2$

$x_0 = 9 - 4\cos(\pi/2) \Rightarrow x_0 = 9$

$P_0 = (9, -4, 5)$

$r_{tg} = P_0 + \lambda \vec{\gamma}'(\pi/2)$

$\vec{\gamma}'(\alpha) = (4\operatorname{sen}\alpha ; -4\operatorname{sen}\alpha ; 4\cos\alpha) \Rightarrow \vec{\gamma}'(\pi/2) = (4 ; -4 ; 0)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{tg} = (9 ; -4 ; 5) + \lambda (4 ; -4 ; 0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Sea π: Pl normal a γ en P_0

y $\vec{v}$ el vector normal a dicho plano

$\vec{v}$ = al vector director de la recta t_g en P_0 $= \vec{\gamma}'(P_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} = (4, -4, 0)$

$\Rightarrow \pi$ tiene la forma $4x - 4y = d$

como $P_0 = (9; -4; 5) \in \pi \Rightarrow 4 \cdot 9 - 4 \cdot (-4) = d \Rightarrow 36 + 16 = d \Rightarrow \boxed{d = 52}$

$\Rightarrow \boxed{\pi: 4x - 4y = 52} \Rightarrow \boxed{\pi: x - y = 13}$

B

P4) b)

$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + 8x$

$\vec{\nabla} f(x,y) = f'_x(x,y) ; f'_y(x,y) = (4x^3 - 2y^2x + 8, -2x^2y)$

Para que $\bar{P}_0$ se Punto crítico $\Rightarrow \vec{\nabla} f(\bar{P}_0) = (0,0) \Rightarrow$

$4x^3 - 2y^2x + 8 = 0 \longrightarrow$ si $x = 0 \Rightarrow 8 \neq 0 \to$ No vale

$-2x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ si $y = 0 \Rightarrow 4x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

$\bar{P}_0 \to$ Punto crítico $\Rightarrow \boxed{\bar{P}_0 : (\sqrt[3]{-2}; 0)}$

$$H(\sqrt[3]{-2}; 0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\sqrt[3]{-2}; 0) & f''_{xy}(\sqrt[3]{-2}; 0) \\ f''_{yx}(\sqrt[3]{-2}; 0) & f''_{yy}(\sqrt[3]{-2}; 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12[\sqrt[3]{-2}]^2 & 0 \\ 0 & -2[\sqrt[3]{-2}]^2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$f''_{xx} = 12x^2 - 2y^2 \Rightarrow f''_{xx}(\sqrt[3]{-2}; 0) = \boxed{12(\sqrt[3]{-2})^2}$

$f''_{xy} = -4yx \Rightarrow f''_{xy}(\sqrt[3]{-2}; 0) = 0$

$f''_{yx} = -4yx \Rightarrow f''_{yx}(\sqrt[3]{-2}; 0) = 0$

$f''_{yy} = -2x^2 \Rightarrow f''_{yy}(\sqrt[3]{-2}; 0) = -2(\sqrt[3]{-2})^2$

$H(\bar{P}_0) = -24(-2)^{4/3} < 0 \Rightarrow \boxed{\bar{P}_0 \text{ Punto } \cancel{\text{nulo}}}$ de ensilladura

$\Rightarrow \bar{P}_0 \Rightarrow$ Punto nulo ?

B

Parte practica.

HOJA Nº 5

FECHA 13/08/11

P4) a) $y = A\,e^{2x-6} \Rightarrow y' = A\cdot e^{2x-6}\cdot 2 \Rightarrow A = \dfrac{y'}{2\cdot e^{2x-6}} \Rightarrow$

a,1)

$y = \dfrac{y'}{2\cancel{e^{2x-6}}}\cdot \cancel{e^{2x-6}} \Rightarrow y' = 2y \Rightarrow y = \dfrac{y'}{2} \Rightarrow y_\perp = \dfrac{-1}{2y'} \Rightarrow$

$y_\perp \cdot y' = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{y^2}{\cancel{2}} = -\dfrac{x}{\cancel{2}} + c \Rightarrow y^2 = -x + c$ con $-x+c \geq 0$

$\Rightarrow y_1 = \sqrt{-x+c} \;\wedge\; y_2 = -\sqrt{-x+c}$

$(1,5) \notin y_2$

$(1,5) \in \to y_1 = \sqrt{-x+c} \Rightarrow 5 = \sqrt{-1+c} \Rightarrow c = 26$

a,2) $y_\perp = \sqrt{-x+26}$

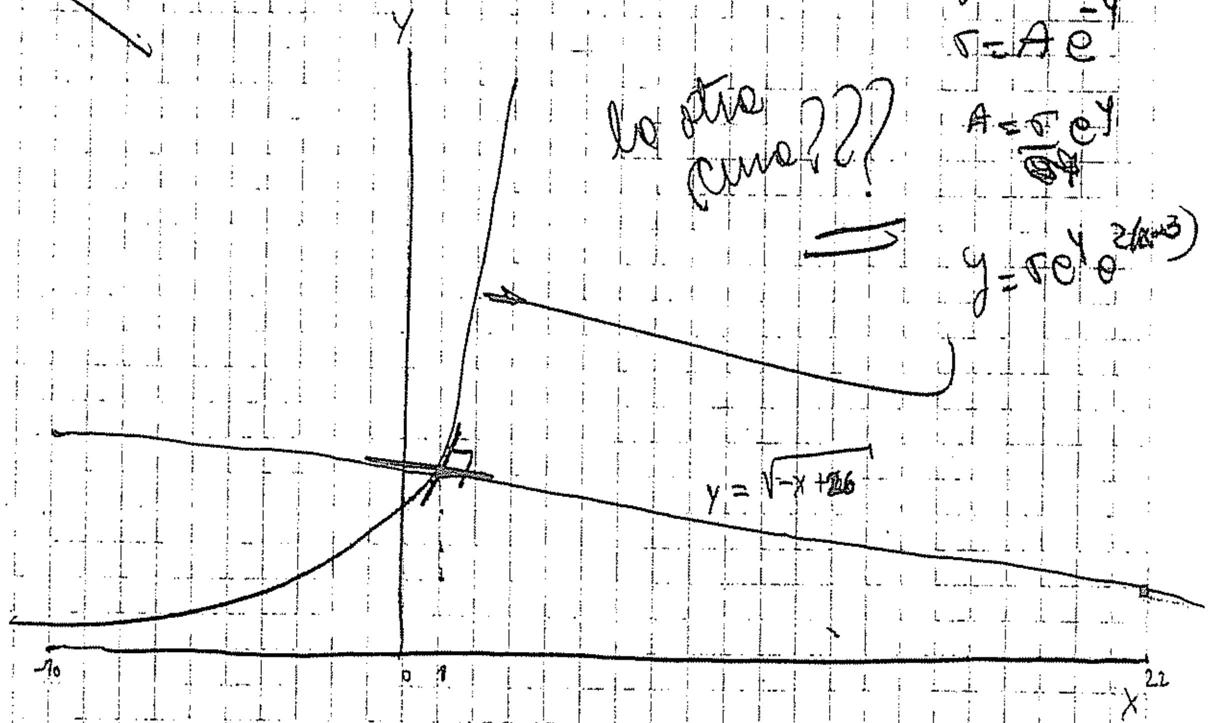
$y = A\,e^{2(x-3)}$

$5 = A\,e^{-4}$

$A = 5\,e^{4}$

$y = 5e^{4}\,e^{2(x-3)}$

lo otra curva??



Parte teoria | HOJA Nº 1 | FECHA 13/08/11

T2) a) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable [redacted] en $\vec{X_0} \in$ Dominio $\subset \mathbb{R}^n$

Al decir diferenciable asumimos que f cont. en $\vec{X_0}$ y $\exists$ ~~...~~ $\forall f'(\vec{x_0}; \check{r}) \Rightarrow$

Si f diferenciable en $\vec{x_0} \Rightarrow \boxed{f'(\vec{x_0}; \check{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{x_0}) \cdot \check{r}}$

Demostración: Sea $\vec{X_0} = (X_0; Y_0)$

$$f'(x_0;y_0)\, \check{r} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0;y_0) + h\check{r} - f(x_0;y_0)}{h} \Rightarrow$$ sea $h\check{r} = \vec{X} - \vec{X_0}$ y sea $\Delta f = f\vec{x} - f\vec{x_0}$ $$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0;y_0) + h\check{r} - f(x_0;y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} \Rightarrow$$ se f dif. en $\vec{x_0}$ $$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\nabla} f(x_0;y_0) \cdot h\check{r} + \varepsilon(h\check{r})\, \|h\check{r}\|}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\vec{\nabla} f(x_0;y_0) \cdot \cancel{h}\check{r}}{\cancel{h}}}_{\vec{\nabla} f(x_0;y_0)\, \check{r}} + \underbrace{\frac{\varepsilon(h\check{r})\, \overbrace{|h|}^{\pm 1}\, \overbrace{\|\check{r}\|}^{1}}{h}}_{0 \cdot (\pm 1) \cdot 1 = 0}$$ * Si f es dif. $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h\check{r}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_0;y_0)\, \check{r} = \vec{\nabla} f(x_0;y_0) \cdot \check{r}}$$

B

b) $f'((a;b), \check{r}) = 2 r_1 r_2^3$

b1) $\vec{\nabla} f(a,b) = f'_x(a,b); f'_y(a,b) = f'(a;b);(1,0) \; ; \; f'(a;b);(0,1) =$ ~~...~~ $2 \cdot 1 \cdot 0^3 ; 2 \cdot 0 \cdot 1^3 = \boxed{(0,0)}$

b2) f es dif $\Leftrightarrow f'((a;b)\, \check{r}) = \vec{\nabla} f(a;b) \cdot \check{r} \Rightarrow$ como $\vec{\nabla} f(a;b) = \bar{0} \Rightarrow \vec{\nabla}(a;b)\, \check{r} = 0 \Rightarrow$

$f'(a;b)\, \check{r} = 2 r_1 r_2^3 \neq 0$ Para ~~...~~ $r_1 \neq 0$ y $r_2 \neq 0 \Rightarrow$ Se $\check{r} = r_1; r_2$ con $r_1 \neq 0$ y $r_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ No es diferenciable!!

$f' \ldots \check{r} \ldots 2 r_1 r_2^3 \ldots$ [illegible]

T1) a) sea $g(x;y) = \ln f(x;y)$

$f(x_0;y_0) = e$

$\vec{\nabla} f(x_0;y_0) = (0,0)$ → por ser punto crítico $\Rightarrow f'_x(x_0;y_0) = 0$ y $f'_y(x_0;y_0) = 0$

$$Hf(x_0;y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0;y_0) \\ f''_{yx}(x_0;y_0) & f''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0;y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left(f''_{xy}(x_0;y_0)\right)^2 = 5$$

$f''_{xy}(x_0;y_0) = f''_{yx}(x_0;y_0)$ por $f \in C^2$

$$Hg(x_0;y_0) = \begin{vmatrix} g''_{xx}(x_0;y_0) & g''_{xy}(x_0,y_0) \\ g''_{yx}(x_0;y_0) & g''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix} *$$

*

$$g'_x(x_0;y_0) = \frac{1\, f'_x(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} \Rightarrow g''_{xx}(x_0;y_0) = \frac{-[\cancelto{0}{f'_x(x_0;y_0)}]^2}{[f(x_0;y_0)]^2} + \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} = \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)}{e}$$

$$g'_y(x_0;y_0) = \frac{f'_y(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} \Rightarrow g''_{yy}(x_0;y_0) = \frac{-[\cancelto{0}{f'_y(x_0;y_0)}]^2}{[f(x_0;y_0)]^2} + \frac{f''_{yy}(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} = \frac{f''_{yy}(x_0;y_0)}{e}$$

$$g''_{xy}(x_0;y_0) = \frac{-\cancelto{0}{f'_x(x_0;y_0)} \cdot \cancelto{0}{f'_y(x_0;y_0)}}{[f(x_0;y_0)]^2} + \frac{f''_{xy}(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} = \frac{f''_{xy}(x_0;y_0)}{e}$$

$$g''_{yx}(x_0;y_0) = \cancel{\frac{-\cancelto{0}{f'_y(x_0;y_0)}\ f'_x(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)}} + \frac{f''_{yx}(x_0;y_0)}{f(x_0;y_0)} = \frac{f''_{yx}(x_0;y_0)}{e}$$

$\Rightarrow$

Parte teoría

2

13/08/11

$$* \; H_{g(x_0;y_0)} = \begin{vmatrix} g''_{xx}(x_0;y_0) & g''_{xy}(x_0;y_0) \\ g''_{yx}(x_0;y_0) & g''_{yy}(x_0;y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)}{e} & \frac{f''_{xy}(x_0;y_0)}{e} \\ \frac{f''_{yx}(x_0;y_0)}{e} & \frac{f''_{yy}(x_0;y_0)}{e} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$= \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)\, f''_{yy}(x_0;y_0)}{e^2} - \frac{[f''_{xy}(x_0;y_0)]^2}{e^2} = \frac{1}{e^2}\left[f''_{xx}(x_0;y_0)\, f''_{yy}(x_0;y_0) - [f''_{xy}(x_0;y_0)]^2\right] =$$

$$= \boxed{\frac{5}{e^2}} \Rightarrow H_g(x_0;y_0) = \frac{H f(x_0;y_0)}{e^2} = \frac{5}{e^2}$$

B

Universidad Tecnológica Nacional
Análisis Matemático II (cuatrimestral)

Facultad Regional Buenos Aires
Primer Parcial Tema 1

Nombre y Apellido: ....
Curso: ......Z2173...... Fecha:......18-10......

Teóricos		Prácticos					Calificación con promoción	Calificación para firma de T.P.
1	2	1	2	3	4	5		10 (diez)
		B	B	B	B			

TEÓRICOS

T1. a. Dada la superficie imagen de la función diferenciable $\bar{F}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, deduzca una expresión para el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = \bar{F}(u_0, v_0)$ e indique las condiciones suficientes para su existencia.
b. Dada la función $\bar{F}(u,v) = (v\cos(u),\ v\,sen(u),\ v)$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 3$ obtenga una expresión vectorial para el plano tangente a la superficie imagen de $\bar{F}$ en el punto (0 , 1 , 1).

T2- Defina diferenciabilidad de un campo escalar f en un punto $\bar{A}$; demuestre que si f es diferenciable en $\bar{A}$ admite derivada direccional en toda dirección en dicho punto.

PRÁCTICOS

B **P1.** Determine los puntos de la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = 0$ y analice si en alguno de ellos el correspondiente valor de $f(x,y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$, definida en $\mathbb{R}^2$, es extremo local. En caso afirmativo, clasifíquelo.

B **P2.** Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\bar{\nabla} f(2,-1) = (3,4)$. Calcule la derivada direccional en (1,1) de $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $h(x,y) = f(xy + y,\ y^2x - 2x)$ en dirección de un vector tangente a la curva imagen de $\bar{\sigma}: [-1,3] \to \mathbb{R}^2$: $\bar{\sigma}(t) = (1 - t, t^2)$ en (1,0).

B **P3.** Determine $k \in \mathbb{R}$ de manera que las familias $y^3 = Ax$, $x^2 + ky^2 = B^2$ sean ortogonales.

B **P4.** Determine si la recta normal en el punto $(1,-1,-1)$ a la superficie dada por la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 = 1$ intersecta al plano $x = y$.

FECHA

$f''_{xx}(x,y) = -6x$

$f''_{xy}(x,y) = 2$

$f''_{yy}(x,y) = -2$

No presenta máximos ni mínimos absolutos por ser $f(x,y)$ polinomio.

Para $P_1 = (1,1)$

$f''_{xx}(1,1) = -6$

$f''_{xy}(1,1) = 2$

$f''_{yy}(1,1) = -2$

$$\det H_1(1,1) = \det\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 8 > 0$$

$f(1,1) = 1$

∴ Como $\det H_{(1,1)} > 0$ y $f''_{xx}(1,1) < 0 \Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en el pto $(1,1)$ y su valor es 1.

Para $P_2 = (-1/3, -1/3)$

$f''_{xx}(-1/3,-1/3) = 2$

$f''_{xy}(-1/3,-1/3) = 2$

$f''_{yy}(-1/3,-1/3) = -2$

$$\det H_2(-1/3,-1/3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -8 < 0$$

∴ Como $\det H_2(-1/3,-1/3) < 0$, f no presenta extremos

3)

$$\begin{cases} (1)\ y^3 = Ax \implies A = \dfrac{y^3}{x} \\ (2)\ x^2 + K \cdot y^2 = B^2 \end{cases}$$

Derivo (1):

$$3y^2 \cdot y' = A = \frac{y^3}{x} \implies y' = \frac{y^3}{3y^2 x}$$

Para que sean ortogonales:

$$(3)\quad \frac{1}{y'} = \frac{-3y^2x}{y^3} = \frac{-3x}{y}$$

Derivo (2):

$$2x + 2Ky \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2Ky} \quad (4)$$

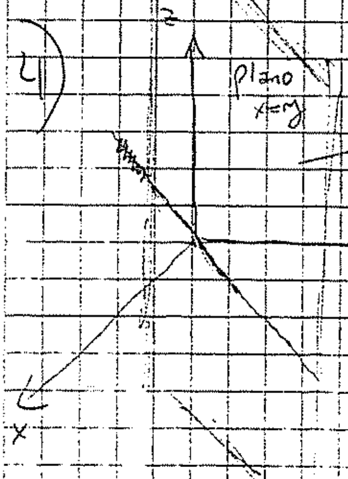
✓

Igualo (3) y (4)

$$\frac{\cancel{-2x}}{2K\cancel{y}} = \frac{\cancel{-}3\cancel{x}}{\cancel{y}} \implies \boxed{K = \frac{1}{3}}$$

✓

4)



→ ∥ al eje z, entonces la recta normal no debe ser multiplo de K, para intersectar al plano x=y

$$\cancel{z = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}$$

$$z = f_1(x, y)$$

FECHA

$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-2xy-y^2}$; f_1 es ~~[illegible]~~ diferenciable por ser todos polinomios

$f'_{1x}(x,y) = \dfrac{-2x-2y}{\sqrt{1-x^2-2xy-y^2}}$; $f'_{1x}(1,-1) = 0$

$f'_{1y}(x,y) = \dfrac{-2y-2x}{\sqrt{1-x^2-2xy-y^2}}$; $f'_{1y}(1,-1) = 0$

$\bar{\nabla} f_1(1,-1) = (0,0)$

~~como las derivadas parciales en el pto (1,-1) dieron cero~~ ✓

Como $\bar{\nabla} f(1,-1) = (0,0)$ entonces la recta normal en el pto $(1,-1)$ es $\parallel$ al eje z, por ende NO corta al plano $x=y$.

Bien!

FECHA

2) $\overline{\nabla} f(2,-1) = (3,4)$ ✓

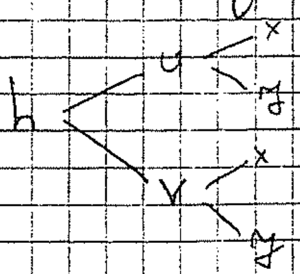
$h(x,y) = f(xy+y,\ y^2x-2x)$ ✓

$\overline{T}: [-1,3] \to \mathbb{R}^2 : \overline{T}(t) = (1-t, t^2)$ en $(1,0)$ ✓

$h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $\begin{cases} u(x,y) = xy+y \\ v(x,y) = y^2x-2x \end{cases}$

$\begin{cases} u(1,1) = 2 \\ v(1,1) = -1 \end{cases}$ ✓

h es diferenciable en el punto $(1,1)$, ya que las funciones f, u y v lo son.



$h'_x(x,y) = f'_u(u(x,y), v(x,y)) \cdot u'_x(x,y) + f'_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v'_x(x,y) =$ ✓

$h'_x(1,1) = f'_u(2,-1) \cdot u'_x(1,1) + f'_v(2,-1) \cdot v'_x(1,1) = 3.1 + 4.(-1) = \underline{-1}$

$h'_y(x,y) = f'_u(u(x,y), v(x,y)) \cdot u'_y(x,y) + f'_v(u(x,y), v(x,y)) \cdot v'_y(x,y) =$ ✓

$h'_y(1,1) = f'_u(2,-1) \cdot u'_y(1,1) + f'_v(2,-1) \cdot v'_y(1,1) = 3.2 + 4.2 = \underline{14}$

$u'_x(x,y) = y$; $u'_x(1,1) = 1$; $v'_x(x,y) = y^2 - 2$; $v'_x(1,1) = -1$

$\overline{\nabla} h_{(1,1)} = (-1, 14)$ ✓

$\forall t \in [-1,3]$

$\overline{T}'_{(t)} = (-1, 2t) \Longrightarrow T_{(t)}$ es derivable por ser ambas componentes polinomios ✓

$\overline{T}_{(t)} = (1-t, t^2)$

$1 \quad 0$

$$\begin{cases} 1-t=1 \Longrightarrow \boxed{t=0} \\ t^2=0 \end{cases}$$

$\overline{T}'_{(0)} = (-1, 0)$

debe justificar el uso de esta fórmula. B.

$$f'_{\vec{v}}(1,1) = \underline{\overline{\nabla} h_{(1,1)} \cdot \overbrace{(-1,0)}^{\vec{v}}}$$

$$f'((1,1),(-1,0)) = (-1,14)\cdot(-1,0) = \boxed{1}$$ ✓

1) $z = f(x,y)$

$f(x,y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$; f es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ por ser todos polinomios ✓

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 1 - 3x^2 + 2y = 0 \\ f'_y(x,y) = -2y + 2x = 0 \Longrightarrow \underline{x = y} \end{cases}$$

$1 - 3x^2 + 2x = 0$

CA:

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4(-3)\cdot 1}}{-6} = \dfrac{-2 \pm 4}{-6}$

$x_1 = 1 \lor x_2 = -\frac{1}{3}$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$P_1 = (1,1)$ ✓ $P_2 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ✓

UTN - FRBA **ANÁLISIS MATEMÁTICO II** **Primer Parcial**

NOMBRE Y APELLIDO: 21-10-11

CURSO: Z-2

1	2	3	4	T1	T2	Calificación sin promoción	Calificación con promoción

1. Exprese una ecuación vectorial y un sistema de ecuaciones cartesianas que describan la recta normal a la superficie imagen de $\overline{f}$, siendo $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $\overline{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}, \mathbf{u}^2)$, en un punto donde el plano tangente es paralelo al de ecuación $\mathbf{4\,x - y + \frac{5}{2}\,z = 8}$

2. Sea $\varphi(x)$ la T.O. en (0;0) de la familia de curvas: $c\,x = e^{-2y}$. Hallar la ecuación de la recta tg y el plano normal a la curva $\begin{cases} y + z + x\ \varphi(x) = -2 \\ z - 4y = -1. \end{cases}$ en (-1; 0 ; 1).

3. Sea $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 + 2y^3}{4x^2 + 3y^2} & si \quad \overline{x} \neq \overline{0} \\ 0 & si \quad \overline{x} = \overline{0} \end{cases}$

Analizar continuidad (en caso de discontinuidad, clasificar), derivabilidad en toda dirección y diferenciabilidad en el origen.

4. Sea h = w o $\overline{g}$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\overline{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $\overline{g}(x;y) = (x^2 - x\,y + 1\,;\ x + y + 1)$ y $w = f(u\,;\,v)$ definida por : $u\,w - \ln(w - v) - 15 = 0$. Hallar h ´máx. (2;1), y h (1,98, 1.01).

Teórico 1

a)Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ demostrar la relación que existe entre el *grad* $f(x_0;y_0)$ y la curva de nivel que pasa por punto$(x_0;y_0)$ interior del dominio de *f*.

b) Dada la curva $2\,x^3 y + x\,y^3 - 2\,x\,y^2 - 1 = 0$ obtener la ecuación de la recta tg en (1;1) y analizar si dicha recta corta a la gráfica de $z = 6 - x^2 - y$, en caso afirmativo, hallar los puntos de intersección.

Teórico 2

a) Definir extremos relativos y absolutos de campos escalares, ejemplificar con campos escalares no diferenciables

1) $D_1\bar{f}=(1;-1;2u)$ $D_2\bar{f}=(1;2v;0)$ $\Big\}$ $D_1\bar{f}\times D_2\bar{f}=(-4uv;2u;2v+1)=\lambda(4;-1;\frac{5}{2})\Rightarrow\begin{cases}u=-1\\v=2\end{cases}$

$\bar{n}=D_1\bar{f}\times D_2\bar{f}=(8;-2;5)$ $\quad \bar{f}(-1;2)=(1;5;1)$

recta $\perp$: $\frac{x-1}{8}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{5}$; $\bar{r}(\mu)=(1;5;1)+\mu(8;-2;5)$; $\mu\in\mathbb{R}$

---

2) $c=-2y'e^{-2y}\Rightarrow x(-2y'e^{-2y})=e^{-2y}\Rightarrow -2xy'=1\xrightarrow{T.O.}\frac{2x}{y'}=1=2x\frac{dx}{dy}\Rightarrow dy=2x\,dx$

$y=x^2+c\Rightarrow y(0)=0=C\Rightarrow y=\varphi(x)=x^2\Rightarrow\begin{cases}y+z+x^3=-2\\z-4y=-1\Rightarrow z=-1+4y=-1+4t\end{cases}$ $\quad y=t=0$

$x=\sqrt[3]{-2-t-(-1+4t)}=\sqrt[3]{-1-5t}$

$\bar{g}(t)=(\sqrt[3]{-1-5t};t;4t-1)$

$\bar{g}'(t)=\left(\frac{-5}{3\sqrt[3]{(-1-5t)^2}};1;4\right)\Rightarrow\bar{g}'(0)=(-\frac{5}{3};1;4)$

recta tg $\frac{x+1}{-5/3}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+1}{4}$ $\wedge$ pl $\perp\rightarrow -\frac{5}{3}(x+1)+y+4(z+1)=0$

---

3) $\left|\frac{3x^3+2y^3}{4x^2+3y^2}\right|=3\left|\frac{x^2}{4x^2+3y^2}\right||x|+2|y|\left|\frac{y^2}{4x^2+3y^2}\right|<3\delta+2\delta=5\delta=\varepsilon\therefore f\in C$ en $\bar{0}$

$f'[\bar{0};(u;v)]=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3u^3+2h^3v^3-0}{h(4h^2u^2+3h^2v^2)}=\frac{3u^3+2v^3}{4u^2+3v^2}\ \exists\,\forall(u;v)/u^2+v^2\neq 0\Rightarrow$

$D_1f(\bar{0})=\frac{3}{4}\wedge D_2f(\bar{0})=\frac{2}{3}\Rightarrow\bar{\nabla}f(\bar{0})=(\frac{3}{4};\frac{2}{3})\wedge f'(a;b)=\frac{3a^3+2b^3}{4a^2+3b^2}\neq(\frac{3}{4};\frac{2}{3})\cdot(a;b)$

---

4) $(x_0;y_0)=(2;1)\Rightarrow(u_0;v_0)=(3;4)\Rightarrow w_0=5$

$\bar{\nabla}h=(h'_x;h'_y)=(f'_u;f'_v)\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}=\left(-\frac{w}{u-\frac{1}{w-v}};-\frac{\frac{1}{w-v}}{4-\frac{1}{w-v}}\right)\cdot\begin{pmatrix}2x-y & -x\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$

$=(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2})\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=(-8;\frac{9}{2})\Rightarrow h'$ máx $=\sqrt{(-8)^2+(\frac{9}{2})^2}$

$z=z_0+\bar{\nabla}h\cdot(x-2;y-1)=5+(-8)(x-2)+\frac{9}{2}(y-1)$

9(nueve)

Universidad Tecnológica Nacional Regional Bs.As. **Curso: Z 2122** **Fecha:** 14/10/11
Primer Parcial de Análisis Matemático II

Apellido y Nombre:..

B- T1) Demostrar que si f (campo escalar de dos variables) es diferenciable en $\overline{X}_0$ entonces f es contínuo en dicho punto .

T2) a- Definir punto regular de una superficie dada en forma paramétrica-vectorial.
b- Analice si es regular el punto de coordenadas $\overline{P}_0 = (1, 1,2)$ de la superficie S que proviene de $\overline{F}(u,v)$ = (u cosv, u.senv , 4-u^2) con (u,v) ∈ IR^2 / u ≥ 0 y 0 ≤ v ≤ 2 π . En caso afirmativo halle la ecuación del plano tangente a "S" en dicho punto, y la ecuación cartesiana de S. Represente S y el plano tangente a la superficie en $\overline{P}_0 = (1, 1,2)$.
B-

B P1) Dada $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} /\ f(u,v) = u^2 + 3v^2 + 1 + \cos(u.v^2)$
con $u = \pi x^2.y$ $\quad v = \varphi(x,y)$ definida implícitamente por $v^2.y + e^{v.(z-1)} = \ln v + 2$ resulta $z = h(x,y)$
Hallar la derivada direccional mínima de h en $(1,1)$ y la dirección responsable.

$$P2)\ Sea\ f: IR^2 \to IR \ /\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)y}{(x-2)^2 + y^2} & si\ x \neq 2 \\ sen(x-2+y) & si\ x = 2 \end{cases}$$

a) Represente el dominio de f, y el conjunto de nivel 0

B- b) Analice si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} (f(\overline{X}))$

c) Analice derivabilidad de f en $(2,0)$ $\forall \vec{u}$. Observación: El estudio de derivabilidad no se dará por concluído hasta que no esté analizado respecto de TODA DIRECCIÓN.

$$P3)\ Sea\ f: IR^2 \to IR \ /\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2.y}{x^2 + y^2} & si\ y \neq 0 \\ sen(5x+2y) & si\ y = 0 \end{cases}$$

B a) Represente el dominio de f
b) Analice diferenciabilidad de f en $\overline{X}_0 = (0,0)$

P 4) Sea $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación
$x^2.y^3 + 3.z + e^{z.x-y} + \ln z - y - 4 = 0$ Se pide : a) Hallar valor aproximado de $f(1{,}01;0{,}98)$ B
b) El valor de la derivada direccional de f en $\overline{X}_0 = (1,1)$ respecto de un versor tangente a la curva en el punto $\overline{B} = (3,4)$ siendo dicha curva la que en cada uno de sus puntos tiene pendiente $-\dfrac{x}{y}$. → MAL
R
c) Ecuación del plano tangente a la gráfica de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,1,z_0)$ B
d) Analice si la recta normal a la gráfica de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,1,z_0)$ corta al plano(x,y)
B

FECHA 14/10/11

Práctica

P1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(u,v) = u^2 + 3v^2 + 1 + \cos(uv^2)$ con $u = \pi x^2 y$

$v = \varphi(x,y)$ definida por $v^2 y + e^{v(x-1)} = \ln v + 2$ $\quad z = h(x,y)$

$h'_{max}(1,1) = ?$

Sea $g = (u,v)$

$$h = z \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$h = f \circ g$

$h = f(g(x,y))$

- Al ser f de tipo polinómica, es de C^1, por lo tanto diferenciable.

- Como $u \in C^1$ (también de tipo polinómica) y v está definida implícitamente (cumple con Cauchy - Dini) también son diferenciables.

- La composición de las dos funciones, también lo será.

- Como h es diferenciable, puedo asegurar que su derivada direccional mínima será igual a la opuesta de la norma del vector gradiente y su dirección correspondiente será la opuesta al gradiente.

$h'_x(x,y) = f'_u(u,v)\, u'_x(x,y) + f'_v(u,v) \cdot v'_x(x,y)$

$h'_y(x,y) = f'_u(u,v)\, u'_y(x,y) + f'_v(u,v)\, v'_y(x,y)$

Sea $v^2 y + e^{v(x-1)} - \ln(v) + 2 = 0$ la superficie de nivel "0" de la ecuación $F: D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y,v) = v^2 y + e^{v(x-1)} - \ln v + 2$

$\vec{\nabla} F(x,y,v) = \left(e^{v(x-1)} v \,;\, v^2 \,;\, 2yv + e^{v(x-1)}(x-1) - \frac{1}{v} \right)$

$v = \varphi(x,y) \Rightarrow \varphi(1,1) = v_0$

$v^2 \cdot 1 + e^{v(1-1)} = \ln v + 2$

$v^2 + 1 = \ln v + 2$

NOTA

$v^2 = \ln v + 1 \Rightarrow \boxed{v = 1}$

$\overline{\nabla} F(x_0, y_0, v_0) = \left(e^{v(x-1)} \cdot v_0 \,;\, v_0^2 \,;\, 2yv + e^{v(x-1)}(x-1) - \frac{1}{v}\right)$

$\overline{\nabla} F(1,1,1) = (1 \,;\, 1 \,,\, 2 + 0 - 1) = (1 \,;\, 1 \,,\, 1)$

$v'_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0, v_0)}{F'_v(x_0, y_0, v_0)}$

$v'_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F'_y(x_0, y_0, v_0)}{F'_v(x_0, y_0, v_0)}$

Por cumplir el teorema de Cauchy-Dini por estar definida de forma implícita

$\boxed{v'_x(1,1) = -1}$

$\boxed{v'_y(1,1) = -1}$

$u = \pi x^2 y \Rightarrow u'_x(x,y) = 2\pi x y \quad u'_y(x,y) = \pi x^2 \Rightarrow \boxed{u'_x(1,1) = 2\pi \quad u'_y(1,1) = \pi}$

$u_0 = \pi \cdot 1^2 1$

$\boxed{u_0 = \pi}$

$\boxed{v_0 = 1}$

$f(u,v) = u^2 + 3v^2 + 1 + \cos(u \cdot v^2)$

$f'_u(u,v) = 2u + (-\operatorname{sen}(u \cdot v^2)) \cdot v^2 \cdot 1 \Rightarrow f'_u(\pi, 1) = 2\pi + (-0) \cdot 1^2 = \boxed{2\pi}$

$f'_v(u,v) = 6v + (-\operatorname{sen}(u \cdot v^2))\, 2uv \qquad f'_v(\pi, 1) = 6 + (-0) \cdot 2\pi \cdot 1 = \boxed{6}$

Con todos los datos obtenidos, tengo:

$h'_x(1,1) = f'_u(\pi,1) \cdot u'_x(1,1) + f'_v(\pi,1) \cdot v'_x(1,1)$

$h'_x(1,1) = 2\pi \cdot 2\pi + 6 \cdot (-1) = \boxed{4\pi^2 - 6}$

$h'_y(1,1) = f'_u(\pi,1) \cdot u'_y(1,1) + f'_v(\pi,1) \cdot v'_y(1,1)$

$h'_x(1,1) = 2\pi \cdot \pi + 6(-1) = \boxed{2\pi^2 - 6}$

FECHA

$\bar{\nabla} h(1,1) = (4\pi^2 - 6 \; ; \; 2\pi^2 - 6)$ ✓

$h'_{MIN}(1,1) = -\|\bar{\nabla} h(1,1)\| = -\sqrt{(4\pi^2-6)^2+(2\pi^2-6)^2}$

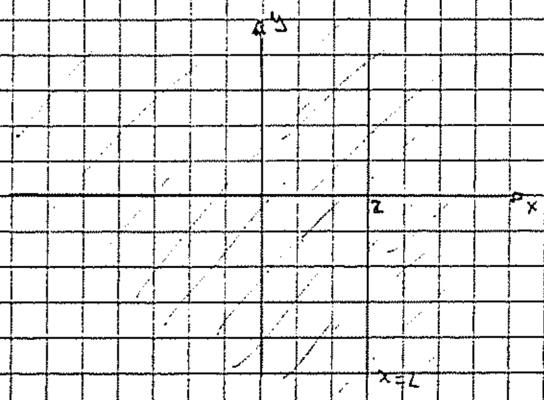
$\|\bar{\nabla} h(1,1)\| = \sqrt{(4\pi^2-6)^2+(2\pi^2-6)^2} =$

y la dirección correspondiente es $\breve{u} = -\dfrac{(4\pi^2-6, 2\pi^2-6)}{\sqrt{(4\pi^2-6)^2+(2\pi^2-6)^2}}$

P2)

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\,y}{(x-2)^2+y^2} & \text{si } x \neq 2 \\ \operatorname{sen}(x-2+y) & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

a) Representación del dominio



$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$ ✓

Representación del conjunto de nivel 0

$f(x,y) = 0$

$x \neq 2$

$\dfrac{(x-2)\,y}{(x-2)^2+y^2} = 0$

$(x-2)\,y = 0$

$\cancel{x-2=0}$ ó $\boxed{y=0}$

Porque $x \neq 2$ ✓

$x=2$

$\operatorname{sen}(x-2+y) = 0$

$\operatorname{sen}(x-2+y) = 0$ ✓

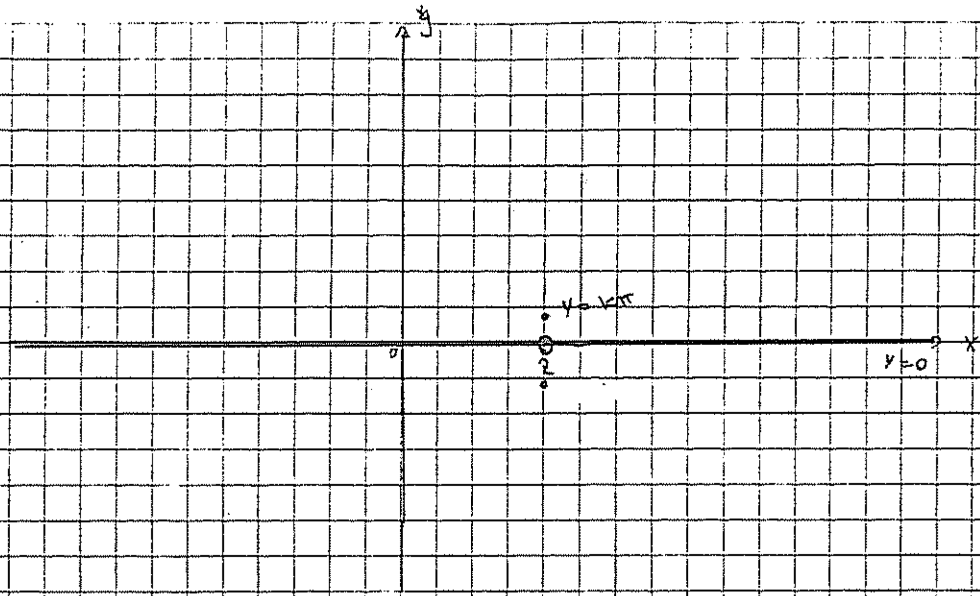
$x-2+y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$y = k\pi - x + 2$ ✓

$\boxed{y = k\pi}$ (Porque $x = 2$)

Gráfico del otro lado

NOTA



b) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(\bar{x})$

Me acerco por los (x,y) / $x = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \operatorname{sen}(x-2+y) = 0$$

Me acerco por los (x,y) / $x \neq 2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)\,y}{(x-2)^2+y^2}$$

Como no puedo salvar la indeterminación, acudo a la información de los límites radiales con $y = m(x-2)$

$$l_r = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,m(x-2)}{(x-2)^2+(m(x-2))^2} = \lim_{x\to 2} \frac{m\,\cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}\,(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

Los límites radiales existen, pero son distintos.

Entonces puedo decir que no existe el $\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)$

Continúa en hoja 3

FECHA

c) Sea $\breve{u} = (a,b)$ / $a^2+b^2=1$

$$f'((2,0),\breve{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((2,0)+h(a,b)) - f(2,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+ha, hb)}{h}$$

Si $a = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+ha, hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}((2+ha)-2+hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ha+hb)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h(a+b))}{h} \cdot \frac{(a+b)}{a+b} = \boxed{a+b}$$ $(a+b) \neq 0$ porque $a=0$ $\Rightarrow$ $b=1$ ó $b=-1$

Si $a \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+ha; hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+ha-2)\, hb}{(ha)^2+(hb)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\, ab}{h^2\,(a^2+b^2)}}{h}$$ $(a^2+b^2) = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}\, ab}{h^{3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } ab = 0 \\ \nexists & \text{si } ab \neq 0 \end{cases}$$

$$? \begin{cases} ab = 0 \\ a^2+b^2 = 1 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=0} \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ ó } \boxed{a=-1}$$

f admitirá derivada direccional en los $\breve{u} = (a,b)$ /

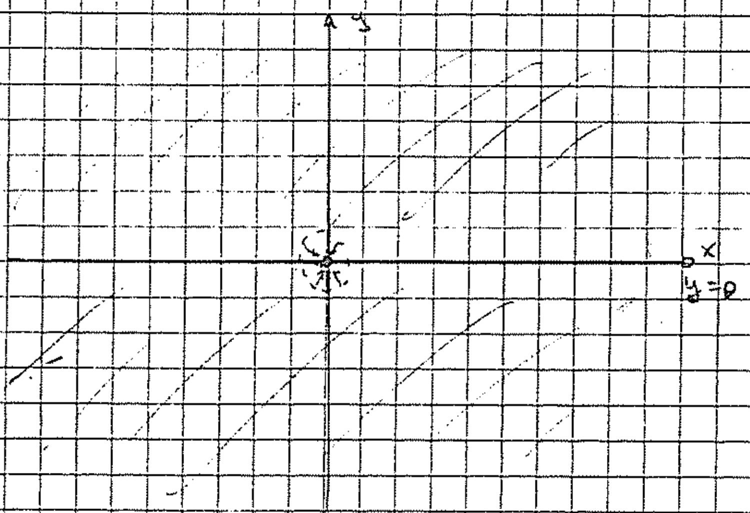
$u_1 = (0,1)$ $u_2 = (0,-1)$

$u_3 = (1,0)$ ó $u_4 = (-1,0)$

NOTA

P3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ \text{sen}\,(5x+2y) & \text{si } y = 0 \end{cases}$

a) Representación del dominio



$\text{Dom} f = \mathbb{R}^2$

b) Analizamos la continuidad en $\bar{x}_0 = (0,0)$, dado que si no es continua, tampoco será diferenciable.

i) $f(0,0) = \exists$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$

iii) $\exists = L$

i) $f(0,0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Me acerco por los $(x,y) \;/\; y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\,(5x+2y) = 0$$

Me acerco por los $(x,y) \;/\; y \neq 0$

$\lim f(x,y) = \lim \dfrac{x^2 y}{\ldots}$

Continúa en Hoja 4

FECHA

ACOTADA ENTRE 0 y 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2 \cdot y}{x^2+y^2} = 0$$

$0 \le x^2 \le x^2+y^2$

$0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$

Por ser el caso de ACOTADA x INF.

iii) Como los límites y el valor de la función en el punto son iguales $\Rightarrow$ la función es continua en $X_0=(0,0)$

Analizo derivabilidad en el punto, pues si no es derivable $\forall \vec{u}=(a,b)$, no es diferenciable

$$f'((0,0),(a,b)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h}$$

Si $b=0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5ha+2hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h(5a+2b))}{h} \cdot \frac{5a+2b}{5a+2b} =$$

$= \boxed{5a+2b}$ Pero como $b=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \boxed{5a}$

Si $b\neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(ha)^2\, hb}{h^2a^2+h^2b^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3\, a^2 b}{h^3\,(a^2+b^2)} = \boxed{a^2b}$$

Para que f sea diferenciable tiene que cumplir

1) tener una derivada direccional máxima que va a ser igual al módulo del gradiente

2) tener una derivada direccional mínima que va a ser igual al opuesto del módulo del gradiente.

NOTA

3) Tene $\boxed{2}$ derivadas direccionales nulas.

4) $f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \breve{u}$

Si elegimos el ~~versor~~ $\breve{u} = (\sqrt{\frac{2}{3}} ; \sqrt{\frac{1}{3}})$, según el análisis ~~de~~ derivada direc. debería ser $\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}$ (por a) b)

Sin embargo $\bar{\nabla} f(\bar{x}_0) = (f'_x(\bar{x}_0) ; f'_y(\bar{x}_0))$ y por el análisis anterior $f'_x(\bar{x}_0) = 5$ y $f'_y(\bar{x}_0) = 0$

$$\bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \breve{u} = (5, 0) \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = 5 \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \neq \tfrac{2}{3}\sqrt{1/3}$$

$\Rightarrow$ Puedo asegurar que f no es diferenciable en $\bar{x}_0 = (0,0)$

P4) $z = f(x,y)$ def implícitamente por $x^2 y^3 + 3z + e^{zx-y} + \ln z - y - 4 = 0$

a) $f(1{,}01 ; 0{,}98) = ?$ tomaré como valor conocido $f(1,1)$

Sea $x^2 y^3 + 3z + e^{zx-y} + \ln z - y - 4 = 0$ la superficie de nivel "0" de $F(x,y,z) = x^2 y^3 + 3z + e^{zx-y} + \ln z - y - 4$

$$\bar{\nabla} F(x,y,z) = \left(2y^3 x + e^{zx-y} \cdot z \; ; \; 3y^2 x^2 + e^{zx-y}(-1) - 1 \; ; \; 3 + e^{zx-y}(x) + \frac{1}{z}\right)$$

Averiguo el valor de z_0:

$$1^2 1^3 + 3z_0 + e^{z_0 \cdot 1 - 1} + \ln z_0 - 1 = 4$$

$$1 + 3z_0 + e^{z_0 - 1} + \ln z_0 - 1 = 4$$

$$3z_0 + e^{z_0 - 1} + \ln z_0 = 4$$

$$\boxed{z_0 = 1}$$

$$\bar{\nabla} F(1,1,1) = (2 \cdot 1 + 1 \; ; \; 3 - 1 - 1 \; ; \; 3 + 1 + 1)$$

$$\boxed{\bar{\nabla} F(1,1,1) = (3 ; 1 ; 5)}$$

FECHA

$f'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \boxed{-\frac{3}{5}}$

$f'_y(1,1) = -\frac{F'_y(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \boxed{-\frac{1}{5}}$

Porque al estar f definida de forma implícita, cumple con el teorema de Cauchy - Dini

$z = f(x,y) \Rightarrow 1 = f(1,1) \Rightarrow \boxed{z=1}$

a) $\Delta f \cong dz$

$f(x_0+h;\ y_0+k) \cong f'_x(x_0,y_0)\,h + f'_y(x_0,y_0)\,k + f(x_0,y_0)$

$f(1+0{,}01;\ 1-(0{,}02)) \cong -\frac{3}{5}(0{,}01) + \left(-\frac{1}{5}\right)(-0{,}02) + 1$

$f(1{,}01;\ 0{,}98) \cong 0{,}989$

b) $y' = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

$\int y\,dy = \int -x\,dx$

$\boxed{\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C}$ Solución general

$\frac{1}{2}16 = -\frac{1}{2}9 + C$

$8 = \frac{-9}{2} + C$

$\boxed{\frac{25}{2} = C}$

$\boxed{x^2+y^2 = 25}$ Solución particular

$\Rightarrow$ Sea $F(x,y) = x^2+y^2$ cuya curva de nivel "25" es $x^2+y^2=25$

$\bar{\nabla} F(x,y) = (2x, 2y)$

$\bar{\nabla} F(3,4) = (6,8)$ $\Rightarrow \boxed{\breve{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)}$ este no es ~~tangente~~ sino NORMAL

NOTA

$f'((1,1),(\frac{3}{5},\frac{4}{5})) = \bar{\nabla} f(1,1) \cdot (\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ dado que f es diferenciable por estar definida de forma implícita (cumple Cauchy-Dini)

$\bar{\nabla} f(x,y) = (f'_x(x,y) , f'_y(x,y))$

$\bar{\nabla} f(1,1) = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ Por el punto (A)

$f'((1,1),\breve{u}) = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})\cdot(\frac{3}{5},\frac{4}{5}) \overset{\nabla\partial}{=} -\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + (-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}) = \boxed{-\frac{13}{25}}$

c) Plano tangente $\bar{N}_\pi = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1)$

$\pi: -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - 1z + D = 0$

Reemplazo en el punto (1,1,1)

$-\frac{3}{5} - \frac{1}{5} - 1 = -D$

$\boxed{D = \frac{9}{5}}$

$\boxed{\pi: -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - z + \frac{9}{5} = 0}$

d) Recta normal

$\bar{X} = \bar{X}_0 + t\bar{V} \quad t \in \mathbb{R}$

$\bar{X} = (1,1,1) + t(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -1)$

$\bar{X} \begin{cases} x = 1 + t(-\frac{3}{5}) \\ y = 1 + t(-\frac{1}{5}) \\ z = 1 + t(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}t + 1 \\ y = -\frac{1}{5}t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

Pl (x,y) $\Rightarrow$ Pl $z=0$

$0 = -t + 1$

$\boxed{t = 1}$

Si, la recta normal corta al Pl (x,y) en el $P_0 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0)$

FECHA

Teoría

T1) Si f es diferenciable en $\bar{x}_0$, entonces f es continua en dicho punto.

Demostración

Si f es diferenciable en $\bar{x}_0 \in Dom f$ (punto interior), verifica en un entorno de $\bar{x}_0$:

$$f(\bar{x}_0+\bar{v}) - f(\bar{x}_0) = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)\cdot\bar{v} + \varepsilon(\bar{v})\cdot\|\bar{v}\|$$

Donde $\bar{v}$ es el vector incremento y $\lim_{v\to 0} \varepsilon(\bar{v}) = 0$

$$\therefore \quad f(\bar{x}_0+\bar{v}) = f(\bar{x}_0) + \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)\cdot\bar{v} + \varepsilon(\bar{v})\cdot\|\bar{v}\|$$

Pasando a calcular el $\lim_{v\to 0}$ en ambos miembros (lados), se verificará

• Si el límite existe y es igual en ambos lados de la ecuación.

Se puede ver:

1) $\lim_{\bar{v}\to 0} f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0)$ dado que $\bar{x}_0 \in D_f$ y es un número real

2) $\lim_{\bar{v}\to 0} \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)\cdot\bar{v} = 0$ dado que las componentes del gradiente existen (por ser f diferenciable en x_0) y no dependen de $\bar{v}$.

3) $\lim_{\bar{v}\to 0} \varepsilon(\bar{v})\cdot\|\bar{v}\| = 0$ dado que $\lim_{\bar{v}\to 0} \varepsilon(\bar{v}) = 0$ (por hipótesis)

y $\lim_{\bar{v}\to 0} \|\bar{v}\| = 0$

Por todo lo escrito queda demostrado que

$$\lim_{\bar{v}\to 0} (\bar{x}_0+\bar{v}) = f(\bar{x}_0)$$

$\Rightarrow$ f es continua en $\bar{x}_0$.

NOTA

T2) a) Sea F un campo vectorial $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / F es diferenciable en $(u_0, v_0) \in D$, decimos que el punto $(x_0, y_0, z_0) = F(u_0, v_0)$ es regular según la representación paramétrica de F en D si

$$F'_u(u_0, v_0) \times F'_v(u_0, v_0) \neq \bar{0} \quad \text{con}$$

$$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

b) $P_0 = (1, 1, 2)$ $\quad \bar{F}(u,v) = (u \cos v, u \,\text{sen}\, v, 4-u^2)$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ / $u \geq 0$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

$$F: \begin{cases} x_0 = u_0 \cos v_0 \\ y_0 = u_0 \,\text{sen}\, v_0 \\ z_0 = 4 - u_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = u_0 \cos v_0 \\ 1 = u_0 \,\text{sen}\, v_0 \\ 2 = 4 - u_0^2 \end{cases}$$

$\frac{1}{u_0} = \cos v_0$

$\frac{1}{u_0} = \text{sen}\, v_0$

$+2 = u_0^2$

$\boxed{u_1 = \sqrt{2}}$ ó $\cancel{u_2 = -\sqrt{2}}$ Por $\notin$ Dom(u)

$\bar{F}(u,v) = (u \cos v, u \,\text{sen}\, v, 4-u^2)$

$\bar{F}'_u(u_0, v_0) = (\cos v_0, \text{sen}\, v_0, -2u_0)$

$$\boxed{F'_u(u_0, v_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right)}$$

$F'_v(u_0, v_0) = (u_0(-\text{sen}\, v_0), u_0 \cos v_0, 0)$

$F'_v(u_0, v_0) = \left(\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right); 0\right)$

$$\boxed{F'_v(u_0, v_0) = (-1; 1, 0)}$$

$F'_u(u_0, v_0) \times F'_v(u_0, v_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right) \cdot (-1, 1, 0) \neq \bar{0}$

$\Rightarrow$ El $P_0 = (1, 1, 2) = F(u_0, v_0)$ es un punto regular

Plano tangente

$$S \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \,\text{sen}\, v \\ z = 4 - u^2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = (u \cos v)^2 + (u \,\text{sen}\, v)^2$

$x^2 + y^2 = u^2 \underbrace{(\cos^2 v + \text{sen}^2 v)}_{1}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 \\ \ldots \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - z$

FECHA

e)

$$\boxed{S: x^2+y^2-z=4}$$

Sea $x^2+y^2-z-4=0$ la superficie de nivel "0" de

$F(x,y,z) = x^2+y^2-z-4$

Sabemos que el gradiente de F en el punto resultarán las componentes del vector normal a la superficie en el punto

$\overline{\nabla} F(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$

$\boxed{\overline{\nabla} F(1,1,2) = (2, 2, -1)}$ $\quad \vec{N}_S = (2,2,-1)$

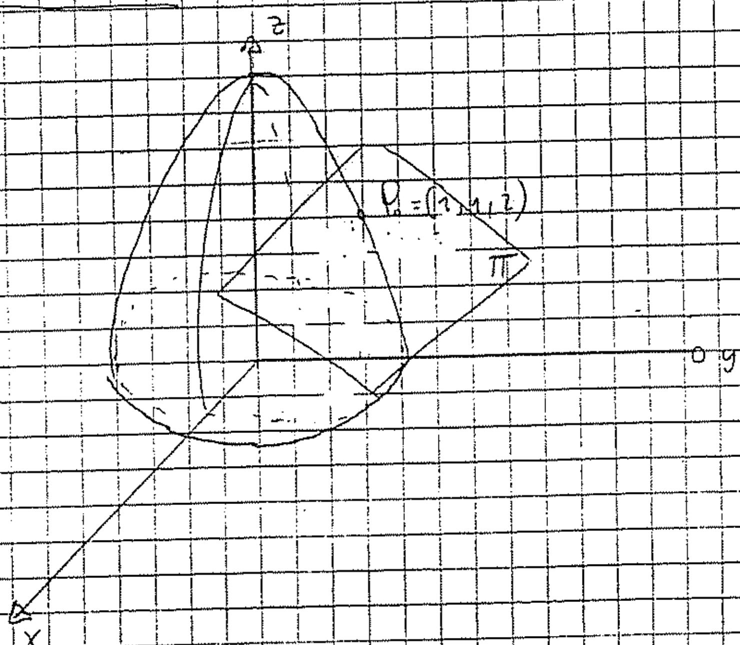
Plano tangente

$\pi: 2x+2y-z+D=0$

$\pi: 2+2-2+D=0$

$\boxed{D=-2}$

$\boxed{\pi: 2x+2y-z-2=0}$



NOTA