1] Aproximar $f(0{,}031\,,\ 1{,}98)$

$z = f(x,y) \wedge x^2 z + y z^3 - 2xy + x g'_x(x,y) = 128$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{g(h,0)-g(0,2)}{h} = 36 \wedge g \in C^2[\mathbb{R}^2]$

Como f esta definida por una ecuación implícita de sus imagenes $z = f(x,y)$, busco un vector solución $\bar{a} = (a,b,c)$ de la ecuación dada para definir Luego un campo esc. auxiliar

Como me piden aproximar f en $(0{,}031\,,\ 1{,}98) \in E((0,2);\varepsilon)$

$$(0)^2 z + (2) z^3 - 2(0)(2) + 0\underbrace{g'_x(0,2)}_{\in\mathbb{R} \text{ por ser } g\in C^2[\mathbb{R}^2]} = 128 \qquad 2z^3 = 128\,,\ z^3 = 64\,,\ z = 4$$

Luego $\bar{a} = (0,2,4)$ es una solucion de la ecuación

$$H : E((0,2,4);\delta) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, H(x,y,z) = x^2 z + y z^3 - 2xy + x g'_x(x,y)$$

$$\nabla H(x,y,z) = (2xz - 2y + g'_x(x,y) + x g''_{xx}(x,y)\,,\ z^3 - 2x + x g''_{xy}(x,y)\,,\ x^2 + 3yz^2)$$

Como las componentes de $\nabla H(x,y,z)$ son continuas, $H \in C^1[E((0,2,4);\delta)]$

$$\nabla H(0,2,4) = (0 - 4 + g'_x(0,2) + 0\,,\ 64 - 0 + 0\,,\ 0 + 96) = (-4 + g'_x(0,2)\,,\ 64\,,\ 96) \neq \bar{0}$$

Como $H'_z(0,2,4) = 96 \neq 0$ por el teorema de Cauchy-Dini $z = f(x,y)$, $f \in C^1[E((0,2);\delta_1)]$ y

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{H'_x(x,y,z)}{H'_z(x,y,z)}\,,\ -\frac{H'_y(x,y,z)}{H'_z(x,y,z)}\right)$$, del cual

$$\nabla f(0,2) = \left(-\frac{-4 + g'_x(0,2)}{96}\,,\ -\frac{64}{96}\right) = \left(\frac{4 - g'_x(0,2)}{96}\,,\ -\frac{2}{3}\right)$$

Necesito el valor de $g'_x(0,2)$ para poder hacer la aproximación, utilizo la información que me dan de g

De $$\lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g((0,2) + h\overbrace{(1,0)}^{\breve{i}}) - g(0,2)}{h} = 36 = g'_x(0,2)$$

Por ser $g \in C^2[\mathbb{R}^2]$ es continua y derivable en $(0,2)$

Entonces $$\nabla f(0,2) = \left(\frac{-4 + 36}{-96}\,,\ -\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\,,\ -\frac{2}{3}\right)$$

Como $f \in C^1[E((0,2);\delta_1)]$, f es diferenciable en $(0,2)$, Luego $\forall (x,y) \in E((0,2);\delta_1)$:

$$f(x,y) \cong f(0,2) + T((x,y) - (0,2))$$

$$f(0{,}031\,,\ 1{,}98) \cong f(0,2) + T(0{,}031\,,\ -0{,}02)$$

Imagen de la transformación Lineal $T(\theta,\varphi) = \nabla f(0,2)\cdot(\theta,\varphi) = f'_x(0,2)\,\theta + f'_y(0,2)\,\varphi$

$$f(0{,}031\,,\ 1{,}98) \cong f(0,2) + (-1/3)(0{,}031) + (-\tfrac{2}{3})(-0{,}02)$$

$$f(0{,}031\,,\ 1{,}98) \cong 4{,}003$$

2] Punto comun de C y S $\bar{P} = \bar{f}(1,1)$

$C: \begin{cases} 6x^2 + 6y = z^2 + 9 \\ z = y + x^2 \end{cases}$ $\quad S: (x,y,z) = \bar{f}(t,w)$ con $\forall (t,w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : D\bar{f}(t,w) = \begin{bmatrix} w^2 & 2wt \\ 3 & 6w \\ w & t \end{bmatrix}$

Parametrizo la curva

$\begin{cases} 6x^2 + 6y = z^2 + 9 \\ z = y + x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6z = z^2 + 9 \\ z = y + x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} (z-3)^2 = 0 \\ z = y + x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$ $\bar{X} = (v, -v^2 + 3, 3)$

Defino la función vectorial cuyas imagenes son la curva C

$\bar{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / \bar{g}(v) = \bar{X} = (v, -v^2 + 3, 3)$

$\bar{g}': \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / \bar{g}'(v) = (1, -2v, 0) \neq \bar{0}$, Luego $J\bar{g} = C$ es una curva regular

Busco un vector normal a la superficie S en $\bar{P} = \bar{f}(1,1)$

$D\bar{f}(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ del cual $\bar{n}(1,1) = (-3, 1, 0)$

Sea $\bar{g}(v_0) = \bar{f}(1,1) = \bar{P}$, resulta $\bar{g}'(v_0) = k(-3, 1, 0)$, $k \neq 0$

$\begin{cases} 1 = -3k \\ -2v_0 = k \\ 0 = 0.k \end{cases}$ $\begin{cases} k = -1/3 \\ v_0 = 1/6 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Luego $\bar{P} = \bar{g}(1/6) = (1/6, 107/36, 3)$

Recta Normal a S

Ec. Vect. Parametrica

$\bar{X} = (1/6, 107/36, 3) + \lambda(3, -1, 0)$

$\bar{X} = (1/6 + 3\lambda, 107/36 - \lambda, 3)$

S. Ecs. Cartesiano

$\begin{cases} \dfrac{x - 1/6}{3} = 107/36 - y \\ z = 3 \end{cases}$

Plano tangente a S

Ec. cartesiana

$[(x,y,z) - (1/6, 107/36, 3)] . (3, -1, 0) = 0$

$3x - y + 89/36 = 0$

Ec. vect. Parametrica

$\bar{X} = (\alpha, 3\alpha + 89/36, \alpha)$

3] Derivada direccional minima en $h(0,2,C)$

$h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, h(x,y,z) = f(3x^2y + xy + z^3,\ y^2 + x + z^2)$, $\bar{a}:(2\sqrt{2},6)$, $f(\bar{a})=5$

$f \in C^1[\mathbb{R}^2]$, $f'(\bar{a};(0,-7)) = 63$ y $f'_u(a) = f'_v(\bar{a})$

Como piden Derivada direccional minima de h en $(0,2,C)$, si h es diferenciable en $(0,2,C)$ esta derivada es $-|\nabla H(0,2,C)|$, Luego hay que ver si h es diferenciable en $(0,2,C)$

Esquema de composición

$$\begin{tikzcd}(x,y,z) \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, bend right, "h=f\circ j"'] & (u,v) \arrow[r, "f"'] & z:f(u,v)=h(x,y,z)\end{tikzcd}$$

$h = f \circ j$

$j(x,y,z) = (u,v) = (3x^2y + xy + z^3,\ y^2 + x + z^2)$, como Las componentes de $j(x,y,z)$ son expresiones polinomicas $D_j = \mathbb{R}^3$

$$Dj(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6xy + y & 3x^2 + x & 3z^2 \\ 1 & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{j'_x(x,y,z)} \quad \underbrace{}_{j'_y(x,y,z)} \quad \underbrace{}_{j'_z(x,y,z)}$$

Como j'_x, j'_y y j'_z son continuas: $j \in C^1[\mathbb{R}^3]$, j diferenciable en $\mathbb{R}^3$

Como tengo información de f en $\bar{a}:(2\sqrt{2},6)$, busco $(m,n,p) \,/\, j(m,n,p) = (2\sqrt{2},6)$

Planteo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3m^2n + mn + p^3 = 2\sqrt{2} \\ n^2 + m + p^2 = 6 \end{cases}$$

como piden La derivada direccional minima de h en $(0,2,C)$, busco p con $m=0$ y $n=2$

$$\begin{cases} p^3 = 2\sqrt{2} \\ p^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} p^3 = 2\sqrt{2} \\ p = \sqrt{2} \end{cases}$$

entonces $(0,2,C) = (0,2,\sqrt{2})$

De $f'(\bar{a};(0,-7)) = 63 = \nabla f(a)\cdot(0,-7)$ por ser $f \in C^1[\mathbb{R}^2]$ y por lo tanto f diferenciable en $\mathbb{R}^2$

$(f'_u(\bar{a}), f'_v(\bar{a}))(0,-7) = 63$, $-7f'_v(\bar{a}) = 63$, $f'_v(\bar{a}) = -9$ y como $f'_u(\bar{a}) = f'_v(\bar{a})$

$f'_u(\bar{a}) = -9$, Como j y f son clase 1 y diferenciables $h = f\circ j$ tambien, Luego

$Dh(0,2,\sqrt{2}) = Df(2\sqrt{2},6)\cdot D(0,2,\sqrt{2})$ Por la regla de la cadena

$$D(0,2,\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -9 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -36 & -54-18\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\min\{h'((0,2,\sqrt{2});\check{v})\} = -|(-27,-36,-54-18\sqrt{2})| = -\sqrt{(-27)^2 + (-36)^2 + (-54-18\sqrt{2})^2}$$

$$\min\{h'((0,2,\sqrt{2});\check{v})\} = \sqrt{5589 + 1944\sqrt{2}} \cong 91{,}314$$

Si $\breve{w}$ es el versor que genera esta derivada

$$\breve{w} = \frac{-1}{|\nabla H(0,2,C)|} \cdot \nabla H(0,2,\sqrt{2}) = \left(\frac{-27}{\sqrt{5589+1944\sqrt{2}}}, \frac{-36}{\sqrt{5589+1944\sqrt{2}}}, \frac{-54-18\sqrt{2}}{\sqrt{5589+1944\sqrt{2}}} \right)$$

$$\cong \left(\frac{-27}{91,314}, \frac{-36}{91,314}, \frac{-54-18\sqrt{2}}{91,314} \right)$$

4)

f continuo en $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 + xy^4}{y^2 + x^2} & , \bar{x} \neq \bar{0} \\ k & , \bar{x} = \bar{0} \end{cases}$

Como f es continuo en $\mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f(x,y) = k = f(\bar{0})$

$$\lim_{\bar{x}\to 0} \frac{3x^3 + xy^4}{y^2+x^2} = \lim_{\bar{x}\to 0}\left(3x\frac{x^2}{x^2+y^2} + xy^2\frac{y^2}{y^2+x^2}\right) = 0 = f(\bar{0}) = k$$

$(\to 0)$ (acotado) + $(\to 0)$ (acotado)

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$c(h) = \frac{f(\bar{0} + h(u,v)) - f(\bar{0})}{h} = \left(\frac{3u^3h^3 + h^5u.v^4}{h^2v^2 + h^2u^2}\right).\frac{1}{h} = \frac{h^3(3u^3 + h^2v.u^4)}{(u^2+v^2)h^3}$$

$$c(h) = \frac{3u^3 + h^2v^4u}{u^2+v^2} \quad ; \quad \lim_{h\to 0} c(h) = \frac{3u^3}{u^2+v^2} = f'(\bar{0};(u,v))$$

Luego f es derivable en $\bar{0}$

$f'(\bar{0};(u,u)) = 96 = \dfrac{3u^3}{2u^2}$, $u = 64$ y $(u,u) = (64,64)$

De $f'(\bar{0};(u,v)) = \dfrac{3u^3}{u^2+v^2}$, $f'_x(\bar{0}) = \dfrac{3(1)^3}{1}$, $f'_x(\bar{0}) = 3$

$f'_y(\bar{0}) = \dfrac{3(0)^3}{1}$, $f'_y(\bar{0}) = 0$, Luego $\nabla f(\bar{0}) = (3,0)$

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} : f'(\bar{0};(u,v)) = \dfrac{3u^3}{u^2+v^2} \neq \nabla f(\bar{0}).(u,v) = 3u$

Luego f no es diferenciable en $\bar{0}$