TEORÍA ANÁLISIS II

CONTINUIDAD:

$Dada\ f\colon H \subset R^n \to R^m\ con\ el\ punto\ \bar{A} \epsilon H, se\ dice\ que\ f\ es\ continua\ si$:

$$1. \exists f(\bar{A});\ \ f(\bar{A}) \in R^m$$

$$2. \exists \lim_{\bar{X} \to \bar{A}} f(\bar{X}) = L\,;\ L \in R$$

$$3. f(\bar{A}) = L$$

DERIVADA DIRECCIONAL:

$$Dada\ \bar{f}\colon H \subset R^n \to R^m\ con\ el\ punto\ \bar{A}\ interior\ de\ H\ y\ \breve{u} \in R^n;$$

$$se\ define\ la\ derivada\ direccional\ de\ f\ en\ \bar{A}\ seg\acute{u}n\ \breve{u}\ como:$$

$$f'(\bar{A}, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h}$$

LEY DE HOMOGENEIDAD:

$$Dada\ \bar{f}\colon H \subset R^n \to R^m, H\ abierto\ con\ el\ punto\ \bar{A}\epsilon H, y\ \breve{u} \in R^n; tal\ que$$

$$\exists\ f(\bar{A}, \breve{u}). Entonces\ f'(\bar{A}, \lambda\breve{u}) => f'(\bar{A}, \lambda\breve{u}) = \lambda\, f'(\bar{A}, \breve{u})\ , \forall\ \lambda \in R, \lambda \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN

$$f'(\bar{A}, \lambda\breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h(\ \lambda\breve{u})) - f(\bar{A})}{h}$$

$$f'(\bar{A}, \lambda\breve{u}) = \lambda \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h\ \lambda\breve{u}) - f(\bar{A})}{\lambda h}$$

$$\lambda h = t\ \ => cuando\ h \to 0\ \ => t \to 0$$

$$f'(\bar{A}, \lambda\breve{u}) = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{A} + t\breve{u}) - f(\bar{A})}{t}$$

TEOREMA DE SCHNARTZ:

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \to R^m, H\ abierto, \bar{f} \in C^2\ en\ H. Entonces:$$

$$\overline{f''}_{xixj} = \overline{f''}_{xjxi}\ ;\ 1 \leq i\ ;\ j \leq n$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\bar{f} \in C^3\ => \overline{f'''}_{xxy} = \overline{f'''}_{xyx} = \overline{f'''}_{yxx}$$

$$\bar{f} \in C^3\ => \bar{f} \in C^2\ => \overline{f''}_{xy} = \overline{f''}_{yx}$$

GRADIENTE:

$$Dada\ f: H \subset R^n \to R, con\ derivadas\ parciales\ en\ el\ punto\ \bar{A}\ \epsilon H$$

$$se\ define\ gradiente\ de\ f\ en\ \bar{A}, como: \nabla f(\bar{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{A}), \dots\dots\dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(\bar{A})\right)$$

TAYLOR 1er ORDEN:

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \to R, H\ abierto, con\ el\ punto\ \bar{A}\epsilon H, \bar{f} \in C^1\ en\ H. Entonces:$$

$$f(\bar{X}) = f(\bar{A}) + \nabla f(\bar{A})\ (\bar{X} - \bar{A}) + \varepsilon(\bar{X});\ \lim_{\bar{X} \to \bar{A}} \frac{\varepsilon(\bar{X})}{||\bar{X} - \bar{A}||} = 0$$

TAYLOR 2do ORDEN:

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^2 \to R, H\ abierto, con\ el\ punto\ \bar{A}\epsilon H, \bar{f} \in C^2\ en\ H. Entonces:$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(X_0,Y_0) + f'x(X_0,Y_0)\ (X - X_0) + f'y(X_0,Y_0)\ (Y - Y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(X_0,Y_0)(X - X_0)^2 + f''yy(X_0,Y_0)\ (Y - Y_0)^2 \right. \\ &\left. + 2f''xy(X_0,Y_0)\ (X - X_0)\ (Y - Y_0)\right] + \varepsilon(X,Y) \end{aligned}$$

$$;\ \lim_{\bar{X} \to \bar{A}} \frac{\varepsilon(\bar{X})}{||\bar{X} - \bar{A}||^2} = 0$$

DIFERENCIABILIDAD:

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \rightarrow R^m, H\ abierto, con\ el\ punto\ \bar{A} \epsilon H,$$

$$se\ dice\ que\ \bar{f}\ es\ diferenciable\ en\ \bar{A}\ si:$$

$$\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A}) + \mathrm{D}f(\bar{A}\,)\ (\bar{X} - \bar{A}) + \varepsilon(\bar{X});\ \ \lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \frac{||\varepsilon(\bar{X})||}{||\bar{X} - \bar{A}||} = 0$$

$$Donde\ Df\ es\ la\ matriz\ jacobiana\ de\ \bar{f}\ en\ \bar{A}$$

TEOREMA (DIFERENCIABLE => CONTINUA):

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \rightarrow R^m, H\ abierto, \bar{A} \epsilon H, tal\ que\ \bar{f}\ es\ diferenciable\ en\ \bar{A}.$$

$$Entonces\ \ \bar{f}\ es\ continua\ en\ \bar{A}$$

DEMOSTRACION:

$$Por\ hipótesis\ \bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A}) + \mathrm{D}f(\bar{A}\,)\ (\bar{X} - \bar{A}) + \varepsilon(\bar{X});\ \ \lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \frac{||\varepsilon(\bar{X})||}{||\bar{X} - \bar{A}||} = 0$$

$$\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A}) + \mathrm{D}f(\bar{A}\,)\ (\bar{X} - \bar{A}) + \frac{\varepsilon(\bar{X})\ \ ||\bar{X} - \bar{A}||}{||\bar{X} - \bar{A}||}$$

$$\lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \bar{f}(\bar{X}) = \lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \bar{f}(\bar{A}) + \lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \mathrm{D}f(\bar{A}\,)\ (\bar{X} - \bar{A}) + \lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \frac{\varepsilon(\bar{X})\ \ ||\bar{X} - \bar{A}||}{||\bar{X} - \bar{A}||}$$

$$\lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A}) + 0 + 0$$

$$\lim_{\bar{X}\to\bar{A}} \bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A})\quad => f\ es\ continua\ en\ \bar{A}$$

TEOREMA (DIFERENCIABLE => DERIVABLE):

$$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \rightarrow R^m, H\ abierto, \bar{A} \epsilon H, tal\ que\ \bar{f}\ es\ diferenciable\ en\ \bar{A}.$$

$$Entonces\ \ \bar{f}\ es\ derivable\ en\ \bar{A}\ \forall \breve{u} \in R^n$$

DEMOSTRACION:

$$\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{A}) + \mathrm{D}f(\bar{A})\ (\bar{X} - \bar{A}) + \varepsilon(\bar{X});\ \ \lim_{\bar{X} \to \bar{A}} \frac{||\varepsilon(\bar{X})||}{||\bar{X} - \bar{A}||} = 0$$

$$\bar{X} = \bar{A} + h\breve{u}; h \in E(0); \breve{u}\ como\ versor\ fijo$$

$$\bar{f}(\bar{A} + h\breve{u}) = \bar{f}(\bar{A}) + \mathrm{D}f(\bar{A})\ (h\breve{u}) + \varepsilon(h);\ \ \lim_{\bar{X} \to \bar{A}} \frac{||\varepsilon(h)||}{||h||} = 0$$

$$\frac{f(\bar{A} + h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h} = \mathrm{D}f(\bar{A})\ (\breve{u}) + \frac{\varepsilon(h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A} + h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h} = \lim_{h \to 0} \mathrm{D}f(\bar{A})\ (\breve{u}) + \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h}$$

$$f'(\bar{A}, \breve{u}) = \mathrm{D}f(\bar{A})\ (\breve{u})$$

TEOREMA (CASO FUNCION ESCALAR):

$$f\ diferenciable\ en\ \bar{A}\ \ => f'(\bar{A}, \breve{u}) = \mathrm{D}f(\bar{A})\ (\breve{u})$$

$$f'(\bar{A}, \breve{u}) = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{X}_1}(\bar{A}), \ldots \ldots \ldots \ldots, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{X}_n}(\bar{A}) \right) \begin{pmatrix} \breve{u}_1 \\ \vdots \\ \breve{u}_n \end{pmatrix}$$

$$f'(\bar{A}, \breve{u}) = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{X}_1}(\bar{A})\ \breve{u}_1, \ldots \ldots \ldots \ldots, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{X}_n}(\bar{A})\ \breve{u}_n \right)$$

$$f'(\bar{A}, \breve{u}) = \nabla f(\bar{A})\ \ \breve{u}$$

CURVA:

$Dada\ \bar{g}: H \subset R^n \rightarrow R^m, continua, se\ llama\ curva\ al\ conjunto\ de\ las\ imágenes\ de\ ^-$

$La\ funcion\ \bar{g}\ se\ llama\ parametrización\ de\ la\ curva.$

CURVA REGULAR:

$Dada\ c\complement\ R^n\ y\ \bar{A} \in c\ , se\ dice\ que\ \bar{A}\ es\ punto\ regular\ de\ c,$

$si\ existe\ al\ menos\ una\ parametrización$:

$$\bar{X} = \bar{g}(t), tal\ que\ \bar{A} = \bar{g}(t_0)\ \ y\ \ \exists \bar{g}'(t_0) \neq 0$$

Si todos los puntos de c son regulares, entonces se dice que la curva es regular

PUNTO SINGULAR:

Punto donde falla la regularidad de una curva regular a trozos

CURVA LISA O SUAVE:

$Dada\ c\complement\ R^n\ y\ \bar{A} \in c\ , se\ dice\ que\ c\ es\ lisa\ o\ suave\ en\ \bar{A}\ si\ existe\ una$

$parametrización: \bar{X} = \bar{g}(t), tal\ que\ \bar{A} = \bar{g}(t_0);\ \bar{g} \in C^1\ \ y\ \ \exists \bar{g}'(t_0) \neq 0$

SUPERFICIE:

$Dada\ \bar{g}: H\complement\ R^2 \to R^3, continua, se\ llama\ superfici\ \ \ al\ conjunto\ de\ las\ imágenes\ de\ \bar{g}$

$La\ funcion\ \bar{g}\ se\ llama\ parametrización\ de\ la\ superficie.$

PUNTO REGULAR DE LA SUPERFICIE:

$Dada\ S\complement\ R^3\ y\ \ \bar{A} \in S, se\ dice\ que\ \ \bar{A} \in c\ es\ punto\ regular\ de\ S, si\ existe\ al\ menos$

$una\ parametrización: \bar{X} = \bar{g}(u,v), con\ \bar{A} = \bar{g}(u_0, v_0), tal\ que\ \bar{g}\ es\ diferenciable$

$en(u_0, v_0)\ y\ además\ existe\ \ \overline{n_0} = \bar{g}'u(u_0, v_0)x\ \bar{g}'v(u_0, v_0) \neq 0$

$Si\ todos\ los\ puntos\ de\ S\ son\ regulares, se\ dice\ que\ S\ es\ regular$

$Si\ S\ es\ regular\ y\ \bar{g} \in C^1\ se\ dice\ que\ S\ es\ lisa\ o\ suave$

TEOREMA (REGLA DE LA CADENA):

$Dada\ \bar{g}: H \subset R^n \to R^n, y\ \ \bar{f}: D \subset R^m \to R^S\ con\ \ \bar{g}(H) \subset \bar{f}(D), tal\ que\ \bar{g}\ es\ diferenciable\ en$

$\bar{A} \in H\ y\ \bar{f}\ es\ diferenciable\ en\ \bar{g}(\bar{A}) \in D\ Entonces\ \bar{h} = \bar{f} o \bar{g}\ es\ diferenciable\ en\ \bar{A}\ y$:

$$\mathrm{D}\bar{h}(\bar{A}) = \mathrm{D}\bar{f}(\bar{g}(\bar{A})) * \mathrm{D}\bar{g}(\bar{A})$$

$No\ se\ puede\ aplicar\ regla\ de\ la\ cadena\ cuando\ la\ función\ no\ tiene\ derivada$

TEOREMA (FUNCIÓN IMPLÍCITA):

$Dada \bar{g}: H \subset R^3 \to R, H\ abierto, G \in C^1, \overline{A} = (X_0, Y_0, Z_0) \in H\ tal\ que\ G(\overline{A}) = 0\ y\ G'z(\overline{A}) \neq 0$

$Entonces, la\ ecuación\ G(X, Y, Z) = 0\ define\ localmente\ y\ en\ forma\ implícita, una$

$única\ función\ Z = f(X, Y), f \in C^1\ , en\ E(X_0, Y_0)\ tal\ que$:

$$f'x(X_0, Y_0) = -\frac{G'x(\overline{A})}{G'z(\overline{A})}$$

$$f'y(X_0, Y_0) = -\frac{G'y(\overline{A})}{G'z(\overline{A})}$$

$$h(X, Y) = G(X, Y, Z(X, Y));\ \forall (X, Y) \in E(X_0, Y_0)$$

CONJUNTOS DE NIVEL:

$Dada\ G: H \subset R^n \to R, k \in R, se\ define\ al\ conjunto\ de\ nivel\ k\ de\ G\ como$:

$$C_k = \{\ \overline{X} \in H / G(\overline{X}) = k\}$$

TEOREMA (GRADIENTE ORTOGONAL A LA CURVA):

$Dada\ la\ curva\ c \subset R^2, de\ ecuación\ G(X,Y) = k, con\ G \in C^1. Dada\ \overline{A}\ \in C\ punto\ regular,$
$tal\ que\ \nabla G(\bar{A}) \neq (\bar{0}). Entonces\ \nabla G(\bar{A})\ es\ ortogonal\ a\ C\ en\ \bar{A}$

DEMOSTRACIÓN:

$$Por\ hipotesis\ de\ regularidad\ del\ punto\ \ \bar{A}\ , existe\ una\ parametrización$$
$$\bar{X} = \bar{g}(t), tal\ que\ \bar{A} = \bar{g}(t_0)\ \ y\ \ \exists \bar{g}'(t_0) \neq 0$$

$$Definimos\ \bar{h}(t) = G\big(\bar{g}(t)\big); G \in C^1\ => es\ diferenciable\ en\ t_0$$

$$Luego, por\ ser\ C\ la\ curva\ de\ nivel\ k\ de\ G:$$
$$\bar{h}(t) = G\big(\bar{g}(t)\big) = k, \forall t \in E(t_0)\ \ \ => \bar{h}'(t_0) = 0\ por\ ser\ h\ constante$$
$$\bar{h}'(t_0) = \nabla G\big(\bar{g}(t_0)\big)\ .\ \bar{g}'(t_0) = 0$$
$$\bar{h}'(t_0) = \nabla G(\bar{A})\ .\ \bar{g}'(t_0) = 0$$

TEOREMA (GRADIENTE ORTOGONAL A LA SUPERFICIE):

$Dada\ la\ superficie\ S \subset R^3, de\ ecuación\ G(X,Y,Z) = k, con\ G \in C^1.$
$Dada\ \overline{A}\ \in S\ punto\ regular, tal\ que\ \nabla G(\overline{A}) \neq (\overline{0}).$
$Entonces\ \nabla G(\bar{A})\ es\ ortogonal\ a\ S\ en\ \bar{A}$

DEMOSTRACIÓN:

$Por\ hipotesis\ de\ regularidad\ del\ punto\ \ \bar{A}\ , existe\ una\ parametrización$
$\bar{X} = \bar{g}(u,v), tal\ que\ \bar{A} = \bar{g}(u_0,v_0)\ \ y\ \ \bar{g}\ es\ diferenciable\ en (u_0,v_0)\ tal\ que$
$\bar{g}'u(u_0,v_0) x\ \bar{g}'v(u_0,v_0) \neq 0$

$$Definimos\ \bar{h}(u,v) = G\big(\bar{g}(u,v)\big)$$

$$Luego, por\ ser\ S\ la\ superficie\ de\ nivel\ k\ de\ G:$$

$$\bar{h}(u,v) = G\big(\bar{g}(u,v)\big) = k, \forall (u,v) \in E(u_0,v_0) => \ Por\ ser\ h\ constante$$

$$\bar{h}'u(u_0,v_0) = 0\ y\ \bar{h}'v(u_0,v_0) = 0$$

$$\begin{cases} \bar{h}'u(u_0,v_0) = \nabla G(\bar{g}(u_0,v_0))\ .\ \bar{g}'u(u_0,v_0) = 0 \\ \bar{h}'u(u_0,v_0) = \nabla G(\bar{g}(\bar{A}))\ .\ \bar{g}'u(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{h}'v(u_0,v_0) = \nabla G(\bar{g}(u_0,v_0))\ .\ \bar{g}'v(u_0,v_0) = 0 \\ \bar{h}'v(u_0,v_0) = \nabla G(\bar{g}(\bar{A}))\ .\ \bar{g}'v(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Entonces } \nabla G(\bar{g}(\bar{A}))\ es\ ortogonal\ a\ \bar{g}'u(u_0,v_0)\ y\ \ \bar{g}'v(u_0,v_0)$$

$$\text{Entonces } \nabla G(\bar{g}(\bar{A}))\ es\ paralelo\ a\ \bar{g}'u(u_0,v_0)\ x\ \ \bar{g}'v(u_0,v_0)$$

$$\text{Luego } \nabla G(\bar{g}(\bar{A}))\ es\ ortogonal\ a\ S\ en\ \bar{A}$$

SOLUCIONES:

Solución general: Es una función que satisface la ecuación diferencial y contiene "n" constantes indeterminadas, siendo "n" el orden de la ecuación diferencial.

Solución particular: Es una función que satisface la ecuación diferencial y se obtiene a partir de la solución general, dándole valores numéricos a las constantes.

Solución singular: Es una función que satisface la ecuación diferencial pero su forma es diferente a la solución general

TEOREMA (DERIVADA IGUAL A 0, EXTREMOS):

$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \rightarrow R, H\ abierto, \bar{A} \epsilon H, \breve{u} \epsilon R^n\ tal\ que\ f(\bar{A}) es\ extremo\ local\ y$

$además\ existe\ f'(\bar{A}, \breve{u}). Entonces\ f'(\bar{A}, \breve{u}) = 0$

DEMOSTRACIÓN:

$Definimos\ una\ función\ compuesta; h(t) = f(\bar{A} + t\breve{u}); t \in E(0)$

$Supongamos\ que\ f(\bar{A})\ es\ máximo\ local$

$h(0) = f(\bar{A}) \geq f(\bar{A} + t\breve{u}) = h(t); \forall t \in E(0)$

$h(0) \geq h(t); \forall t \in E(0) \quad => \quad h(0) es\ máximo\ local\ de\ h$

$$h'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = f'(\bar{A}, \breve{u})$$

$Entonces\ h(0) es\ máximo\ local\ y\ además\ existe\ h'(0). Entonces\ por\ teorema\ de\ fermat\ debe$

$ser\ h'(0) = 0. Resulta\ f'(\bar{A}, \breve{u}) = 0$

TEOREMA (DERIVADA IGUAL A 0, EXTREMOS):

$Dada\ \bar{f}: H \subset R^n \rightarrow R, H\ abierto, \bar{A} \epsilon H, f\ diferenciable\ en\ \bar{A}\ tal\ que\ f(\bar{A}) es$

$extremo\ local. Entonces\ \nabla f(\bar{A}) = \bar{0}$

DEMOSTRACIÓN:

$Por\ hipótesis\ \ de\ diferenciabilidad\ de\ f\ en\ \bar{A}\ existe\ f'(\bar{A}, \breve{u}), \forall\ \breve{u}\ \in\ R^n.$

$Entonces\ f'(\bar{A}, \breve{u}) = 0\ \forall\ \breve{u}\ \in\ R^n. En\ particular\ \nabla f(\bar{A}) = \bar{0}$