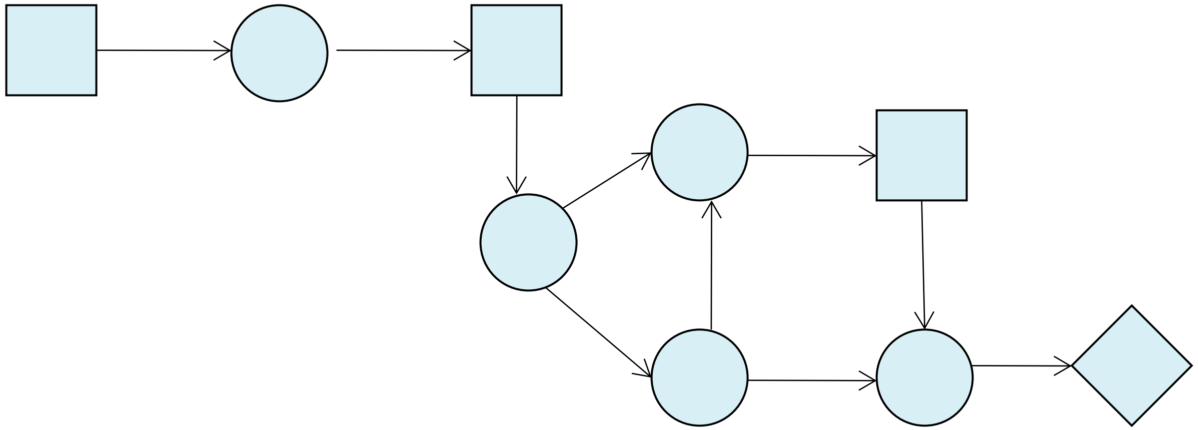
Elisabetta Fersini

Esercitazione

DISCo
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Viale Sarca, 336
20126 Milano
elisabetta.fersini@unimib.it



Esercizio 1

- Una industria produttrice di videoregistratori è talmente sicura della qualità dei propri prodotti da garantire per due anni la sostituzione dell’apparecchio in caso di guasto; le statistiche dell’azienda indicano che soltanto l’1% dei videoregistratori si guasta durante il primo anno ed il 5% durante il secondo. La garanzia non copre gli apparecchi forniti in sostituzione di quelli guasti. Formulare il problema come una catena di Markov, fornendo la matrice di transizione.

Esercizio 1

- La “vita” di un videoregistratore può essere rappresentata tramite una catena di Markov avente i seguenti stati:
  - stato 0: videoregistratore nuovo
  - stato 1: videoregistratore mai guasto nel primo anno,
  - stato 2: videoregistratore uscito di garanzia,
  - stato 3: videoregistratore guasto e sostituito.

- La matrice di transizione risulta la seguente

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.99 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

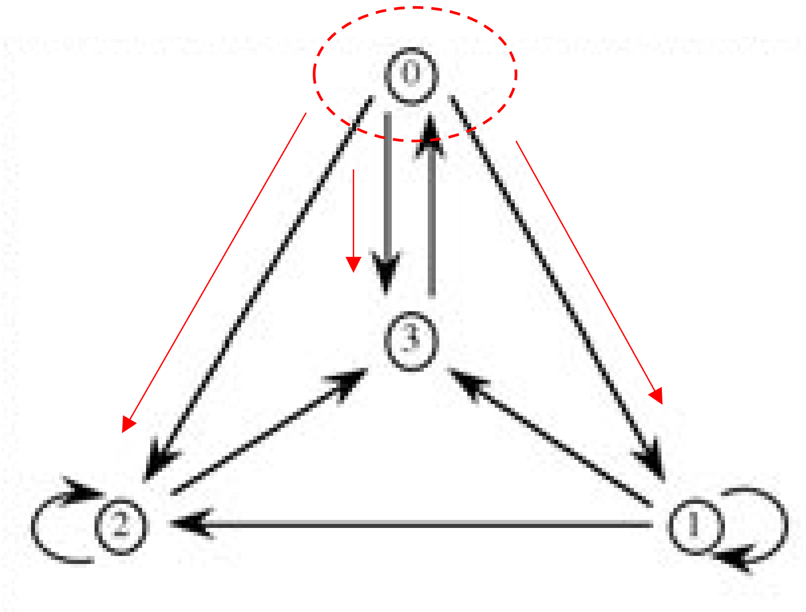
Esercizio 2

- Un processo produttivo è basato su di una macchina che si deteriora rapidamente così che alla fine di ogni giornata essa viene ispezionata per verificarne le condizioni. Queste ultime sono annotate e classificate in uno dei quattro seguenti stati:
  - stato 0: macchina come nuova
  - stato 1: macchina funzionante e poco deteriorata
  - stato 2: macchina funzionante ma molto deteriorata
  - stato 3: macchina danneggiata da sostituire con una nuova
- Il processo può essere modellato come una catena di Markov a stati finiti avente la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

1. Determinare la struttura della catena di Markov



$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

2. Determinare lo steady state

$$
\begin{cases}
\pi_0 = p_{00}\pi_0 + p_{10}\pi_1 + p_{20}\pi_2 + p_{30}\pi_3 \\
\pi_1 = p_{01}\pi_0 + p_{11}\pi_1 + p_{21}\pi_2 + p_{31}\pi_3 \\
\pi_2 = p_{02}\pi_0 + p_{12}\pi_1 + p_{22}\pi_2 + p_{32}\pi_3 \\
\pi_3 = p_{03}\pi_0 + p_{13}\pi_1 + p_{23}\pi_2 + p_{33}\pi_3 \\
1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\pi_0 = & & & & \pi_3 \\
\pi_1 = & \frac{7}{8}\pi_0 & +\frac{3}{4}\pi_1 & & \\
\cancel{\pi_2 =} & \cancel{\frac{1}{16}\pi_0} & \cancel{+\frac{1}{8}\pi_1} & \cancel{+\frac{1}{2}\pi_2} & \\
\pi_3 = & \frac{1}{16}\pi_0 & +\frac{1}{8}\pi_1 & +\frac{1}{2}\pi_2 & \\
1 = & \pi_0 & +\pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3
\end{cases}
$$

π0 = π2 = π3 = 2/13
π1 = 7/13 ;

Esercizio 3

- Consideriamo la catena di Markov su E = {1,2,3,4} associata alla matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

1. Qual è la probabilità partendo da 2 di essere in 2 dopo 2 passi?

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$p_{2,2}^{(2)} = (P^2)_{2,2} = \sum_h p_{2,h} \cdot p_{h,2} = \frac{1}{4}$$

E partendo da 3?

$$p_{3,2}^{(2)} = (P^2)_{3,2} = \sum_h p_{3,h} \cdot p_{h,2} = 0$$

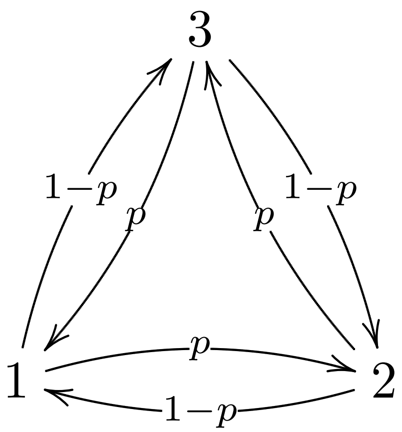
2. Qual è la probabilità di essere in 2 partendo da 2 dopo 12 passi?

$$p_{2,2}^{(12)} = 0.5^{12}$$

Esercizio 4

- Consideriamo la catena di Markov sui vertici di un triangolo equilatero definita dalle regole seguenti: ad ogni istante essa si può spostare da un vertice a quello adiacente in senso antiorario con probabilità p e in senso orario con probabilità 1−p, dove 0<p<1.

a) Mostrare che la catena è regolare



$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

b) Calcolare per n grande le probabilità $P\{X_n = 1, X_{n+1} = 2\}$ e $P\{X_n = 2, X_{n+1} = 1\}$.

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

$$P\{X_n = 1, X_{n+1} = 2\} = P\{X_{n+1} = 2 | X_n = 1\} \cdot P\{X_n = 1\} = p_{1,2} \cdot \pi_1 = \frac{p}{3}$$

$$P\{X_n = 2, X_{n+1} = 1\} = P\{X_{n+1} = 1 | X_n = 2\} \cdot P\{X_n = 2\} = p_{2,1} \cdot \pi_2 = \frac{1-p}{3}$$

Esercizio 5

- Un computer può operare in due modalità. Ogni ora, il computer rimane nella stessa modalità oppure cambia modalità in accordo alla seguente matrice di probabilità di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Calcolare la probabilità di transizione a 2 step.
2. Se il sistema si trova nella modalità 1 alle 17:30, qual è la probabilità che esso si trovi nella modalità 1 alle 20:30?

Esercizio 5

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

1. Calcolare la probabilità di transizione a 2 step.

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.52 \end{bmatrix}$$

2. Se il sistema si trova nella modalità 1 alle 17:30, qual è la probabilità che esso si trovi nella modalità 1 alle 20:30?

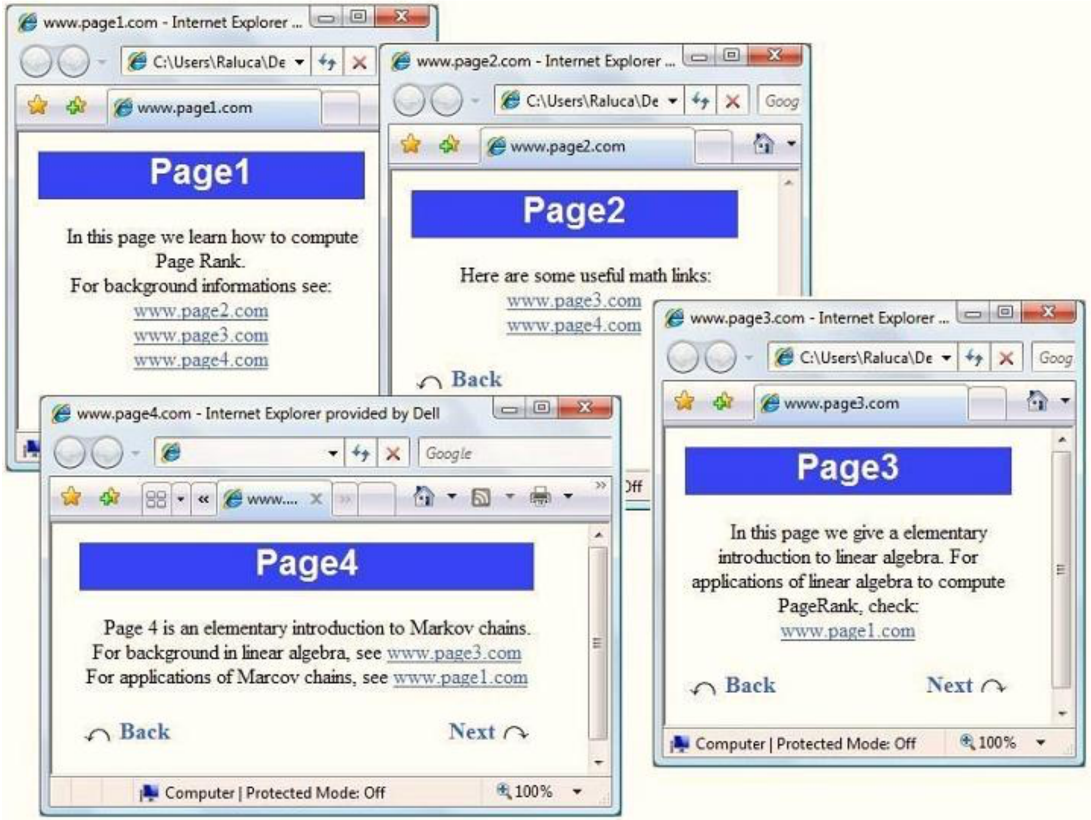
$$P^{(3)} = P^{(2)} P = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 \\ 0.48 & 0.52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.496 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Esercizio 6

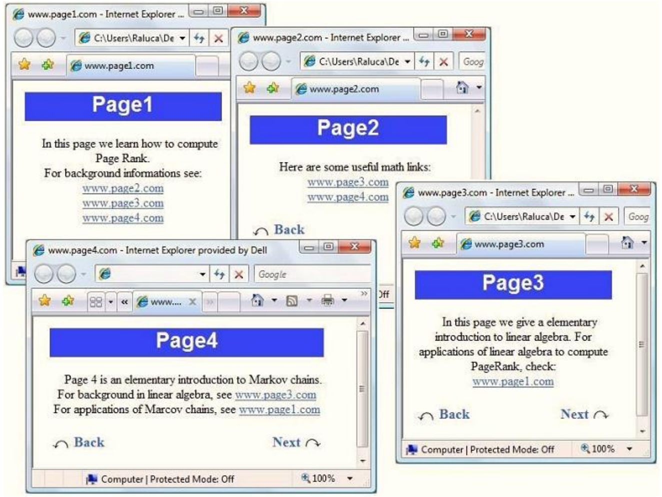
- Supponiamo di disporre di una piccola rete Internet costituita da soli 4 siti Web che si riferiscono l'un l'altro come riportato dall'immagine.

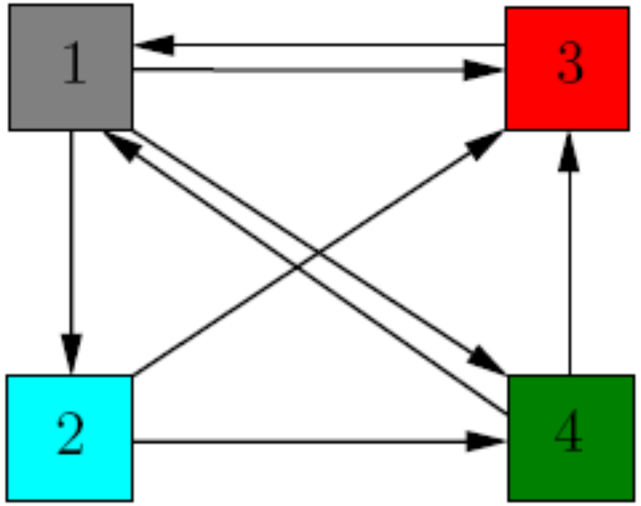
1. Calcolare il coefficiente di PageRank in modo "dinamico" utilizzando le transizioni di una catena markoviana.

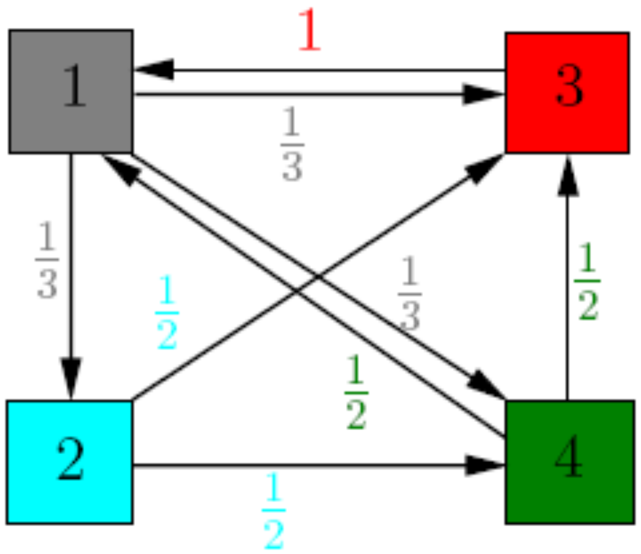
2. Calcolare il coefficiente di PageRank in modo "statico" determinando la distribuzione di probabilità stazionaria mediante il calcolo del principale autovettore.



Esercizio 6







$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 6

1. Calcolare il coefficiente di PageRank in modo "dinamico" utilizzando le transizioni di una catena markoviana.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6

2. Calcolare il coefficiente di PageRank in modo "statico" determinando la distribuzione di probabilità stazionaria mediante il calcolo del principale autovettore.