

1 Esercitazione 2

1.1 Esercizio 1

Consideriamo l'insieme di tutte le possibili mani di una partita a poker con 5 carte, utilizzando un mazzo formato da 52 carte.

- Quanti eventi atomici costituiscono la distribuzione di probabilità congiunta?

$$\binom{52}{5} = 2.598.960$$

- Qual è la probabilità di ciascun evento atomico?

$$\frac{1}{2.598.960}$$

- Qual è la probabilità di avere una scala reale?

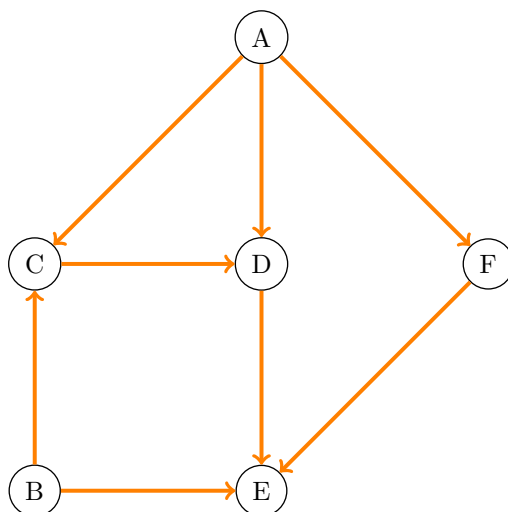
$$\frac{4}{2.598.960} = \frac{1}{649.740}$$

- Qual è la probabilità di avere una scala reale?

$$\frac{13 \cdot 48}{2.598.960} = \frac{1}{4.165}$$

1.2 Esercizio 2

Considerare questo grafo, quali tabelle di probabilità vanno specificate per fare sì che sia una rete bayesiana?



$P(A)$, $P(B)$, $P(C|A, B)$, $P(D|A, C)$, $P(E|B, D, F)$, $P(F|A)$
Qual è la markov blanket di ciascun nodo?

La markov blanket di un nodo è costituita dai suoi genitori, dai suoi figli e dai genitori dei figli. Un nodo non rientra mai nella sua coperta di markov

$$A = C, D, F, B$$

$$B = C, E, A, F, D$$

$$C = A, B, D$$

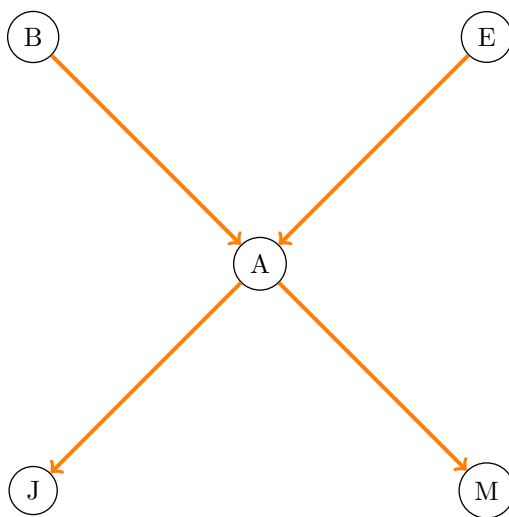
$$D = A, C, E, F, B$$

$$E = B, F, D$$

$$F = A, D, B$$

1.3 Esercizio 3

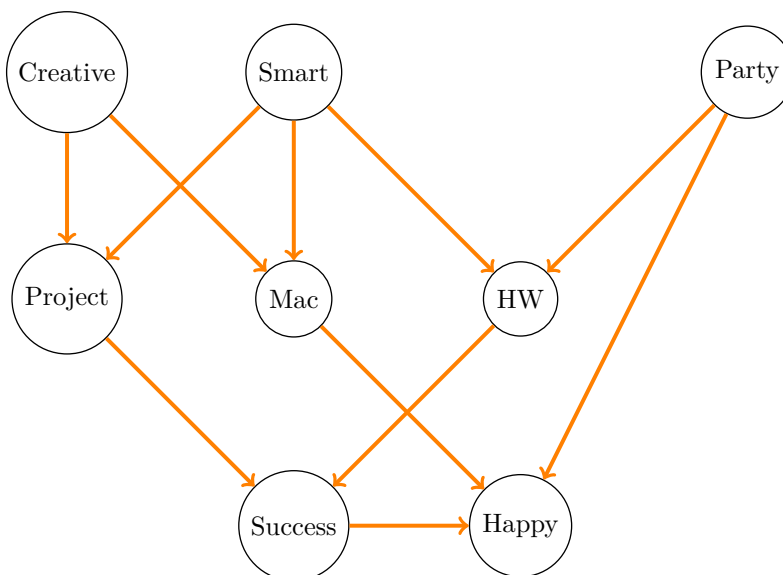
Data la seguente rete bayesiana, indicare quali affermazioni sono vere o false per indicare se due nodi sono condizionalmente indipendenti.



- $B \perp M$? Falso, perchè fra B e M c'è una connessione seriale ($B \rightarrow A \rightarrow M$) . Se A fosse osservato allora B e M sono indipendenti.
- $J \perp M \mid A$? Vero, perchè abbiamo una connessione divergente e sappiamo il valore di A . (Sapere se l'allarme è in funzione o meno non cambia il fatto che se Mary stia chiamando non ho modifiche sulle probabilità che anche John stia chiamando).
- $E \perp B \mid M$? Falso, se considero ($B \rightarrow A \leftarrow M$) c'è evidenza per un discendente di A (M) per cui non posso applicare la terza regola di d-seperazione.

1.4 Esercizio 4

Data la seguente rete bayesiana, indicare quali affermazioni sono vere o false per indicare se due nodi sono condizionalmente indipendenti.



- $Party \perp Success \mid HW$
 - $Party \perp Smart \mid Success$
 - $Party \perp Creative \mid Happy$
-
- $Party \perp Success \mid HW$
Falso, c'è un cammino non bloccato che è $(Party \rightarrow HW \leftarrow Smart \rightarrow Project \rightarrow Success)$
 - $Party \perp Smart \mid Success$ Falso, perchè il cammino $Party \rightarrow HW \leftarrow Smart$ non è bloccato (Un discendente di HW, ovvero Success ha evidenza)
 - $Party \perp Creative \mid Happy$ Falso, perchè il cammino $Party \rightarrow Happy \leftarrow Mac \leftarrow Creative$ non è bloccato

1.5 Esercizio 5

Supponiamo che le variabili X_1, X_2, \dots, X_K non abbiano un genitore in una determinata rete Bayesiana che contiene n variabili in tutto, dove $n > k$

La rete Bayesiana asserisce che $P(X_1, X_2, \dots, X_K) = P(X_1) \cdot P(X_2) \dots P(X_K)$

L'affermazione è vera perchè se le variabili non hanno genitori (i nodi non hanno archi entranti) allora sono indipendenti, per cui la probabilità che siano tutte vere è calcolata come la probabilità di eventi indipendenti.

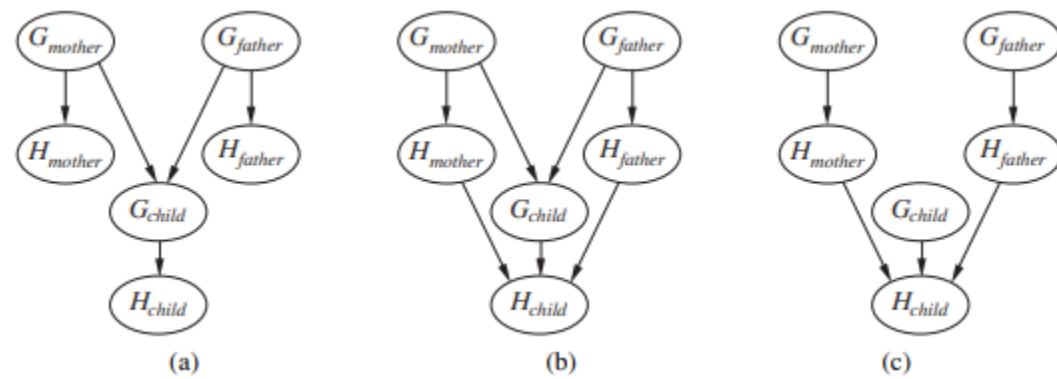
Un nodo è indipendente dai suoi predecessori dati i suoi genitori.

1.6 Esercizio 6

Sia H_X una variabile casuale che denota la manualità di un individuo x , la quale può assumere valore $L = \text{Left}$ e $R = \text{Right}$.

Un'ipotesi comune è che l'essere destrorsi (R) o mancini (L) sia ereditato da un semplice meccanismo: c'è un gene G_X che assume valori L o R , e con probabilità s l'individuo assume la stessa manualità del gene.

Inoltre il gene stesso ha uguale probabilità di essere ereditato da un genitore, ma con probabilità m può ereditare una manualità opposta a quella dei genitori.



- Quale delle tre reti esprime questa proprietà?

$$P(G_{Father}, G_{Mother}, G_{Child}) = P(G_{Mother}) \cdot P(G_{Father}) \cdot P(G_{Child})$$

La rete (c) perchè nella terza le tre probabilità sono indipendenti.

- Quali delle tre reti esprime le condizioni descritte dal testo del problema?

La prima e la seconda, la terza non va bene perchè non rappresenta il fatto che il gene del figlio venga ereditato dai genitori.

- Quale delle tre reti descrive al meglio l'ipotesi descritte nel problema?

La prima: la manualità dei genitori non influenza direttamente la manualità dei figli per cui la seconda rete non è corretta.

- Qual è la CPT per per G_C per la prima rete?

Quando nei genitori c'è sia L che R non viene considerato perchè è equivalente la probabilità che si passi da $L \rightarrow R$ o da $R \rightarrow L$

GMother	GFather	$P(G_{Child} = L \mid \dots)$	$P(G_{Child} = R \mid \dots)$
L	L	$1-m$	m
L	R	0.5	0.5
R	L	0.5	0.5
R	R	m	$1-m$

- Supponiamo che $P(G_F = L) = P(G_M = L) = x$. Qual è la probabilità che $P(G_C = L) = ?$ (condizionando solo con i nodi genitori G_M e G_F)

La richiesta equivale a:

$$P(G_C = L) = \sum_{G_F} \sum_{G_M} P(G_F) \cdot P(G_M) \cdot P(G_C | G_F, G_M)$$