1 Esercitazione 2

1.1 Esercizio 1

Consideriamo l'insieme di tutte le possibili mani di una partita a poker con 5 carte, utilizzando un mazzo formato da 52 carte.

- Quanti eventi atomici costituiscono la distribuzione di probabilità congiunta?

$$\binom{52}{5} = 2.598.960$$

- Qual è la probabilità di ciascun evento atomico?

$$\frac{1}{2.598.960}$$

- Qual è la probabilità di avere una scala reale?

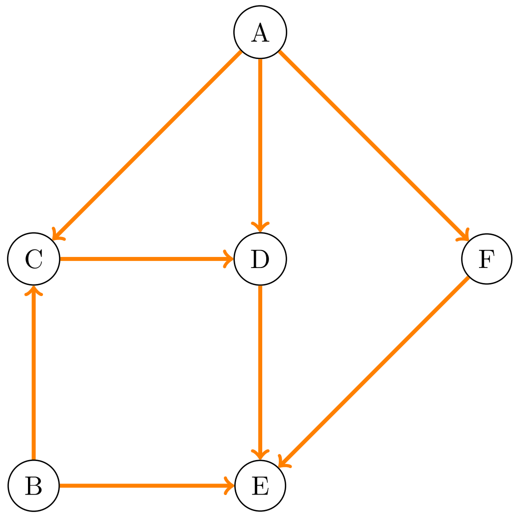
$$\frac{4}{2.598.960} = \frac{1}{649.740}$$

- Qual è la probabilità di avere una scala reale?

$$\frac{13 \cdot 48}{2.598.960} = \frac{1}{4.165}$$

1.2 Esercizio 2

Considerare questo grafo, quali tabelle di probabilità vanno specificate per fare sì che sia una reta bayesiana?



$P(A)$, $P(B)$, $P(C|A, B)$, $P(D|A, C)$, $P(E|B, D, F)$, $P(F|A)$
Qual è la markov blanket di ciascun nodo?

La markov blanket di un nodo è costituita dai suoi genitori, dai suoi figli e dai genitori dei figli. Un nodo non rientra mai nella sua coperta di markiv

$$A = C, D, F, B$$

$$B = C, E, A, F, D$$

$$C = A, B, D$$

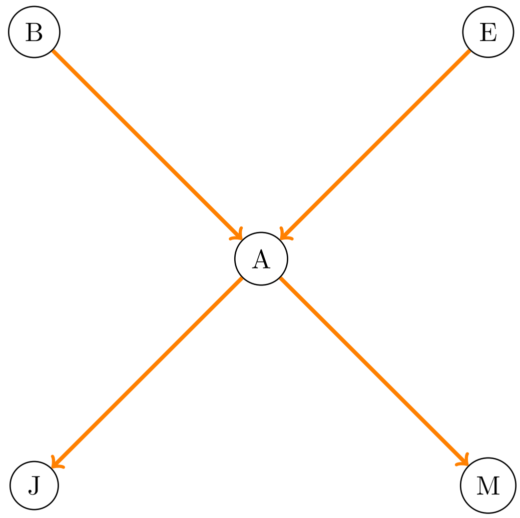
$$D = A, C, E, F, B$$

$$E = B, F, D$$

$$F = A, D, B$$

1.3 Esercizio 3

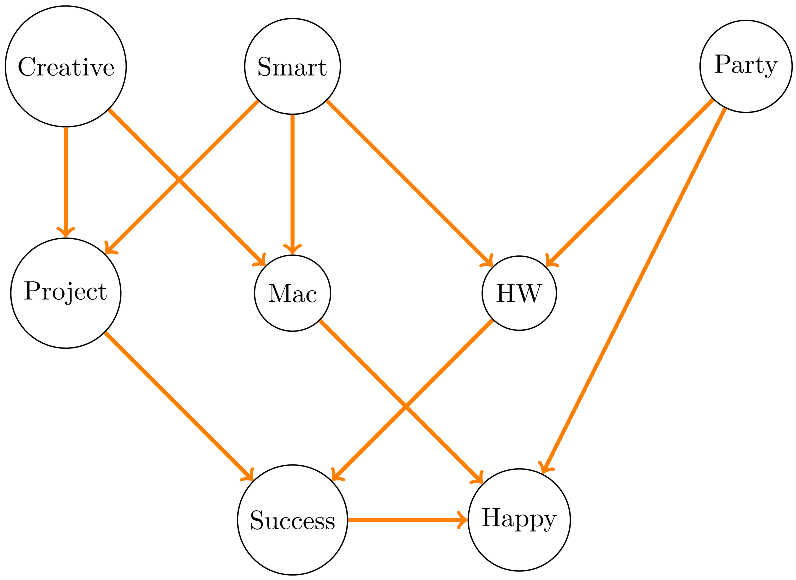
Data la seguente rete bayesiana, indicare quali affermazioni sono vere o false per indicare se due nodi sono condizionalmente indipendenti.



- $B \perp M$? Falso, perchè fra B e M c'è una connessione seriale (B -> A -> M) . Se A fosse osservato allora B e M sono indipendenti.
- $J \perp M \ |A$? Vero, perchè abbiamo una connessione divergente e sappiamo il valore di A. (Sapere se l'allarme è in funzione o meno non cambia il fatto che se Mary stia chiamando non ho modifiche sullale probabilità che anche John stia chiamando).
- $E \perp B \ |M$? Falso, se considero (B -> A <- M) c'è evidenza per un discendente di A (M) per cui non posso applicare la terza regola di d-seperazione.

1.4 Esercizio 4

Data la seguente rete bayesiana, indicare quali affermazioni sono vere o false per indicare se due nodi sono condizionalmente indipendenti.



- $Party \perp Success \mid HW$
- $Party \perp Smart \mid Success$
- $Party \perp Creative \mid Happy$

- $Party \perp Success \mid HW$
  Falso, c'è un cammino non bloccato che è (Party -> HW <- Smart -> Project -> Success)
- $Party \perp Smart \mid Success$ Falso, perchè il cammino Party -> HW <- Smart non è bloccato (Un discendente di HW, ovvero Success ha evidenza)
- $Party \perp Creative \mid Happy$ Falso, perchè il cammino Party -> Happy <- Mac <- Creative non è bloccato

1.5 Esercizio 5

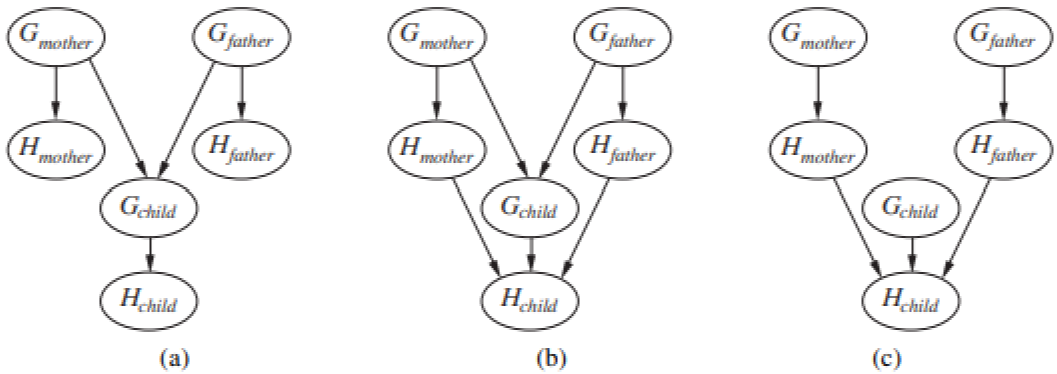
Supponiamo che le variabili X_1, X_2, ..., X_K non abbiano un genitore in una determinata rete Bayesiana che contiene n variabili in tutto, dove n > k
La rete Bayesiana asserisce che $P(X_1, X_2, ..., X_K) = P(X_1) \cdot P(X_2)...P(X_K)$
.

L'affermazione è vera perchè se le variabili non hanno genitori (i nodi non hanno archi entranti) allora sono indipendenti , per cui la probabilità che siano tutte vere è calcolata come la probabilità di eventi indipendenti.

Un nodo è indipendente dai suoi predecessori dati i suoi genitori.

1.6 Esercizio 6

Sia H_X una variabile casuale che denota la manualità di un individuo x, la quale può assumere valore L = Left e R = Right.
Un'ipotesi comune è che l'essere destrorsi (R) o manicini (L) sia ereditato da un semplice meccanismo: c'è un gene G_X che assume valori L o R, e con probabilità s l'individuo assume la stessa manualità del gene.
Inoltre il gene stesso ha uguale probabilità di essere ereditato da un genitore, ma con probabilità m può ereditare una manualità opposta a quella dei genitori.



- Quale delle tre reti esprime questa proprietà?

$$P(G_{Father}, G_{Mother}, G_{Child}) = P(G_{Mother}) \cdot P(G_{Father}) \cdot P(G_{Child})$$

La rete (c) perchè nella terza le tre probabilità sono indipendenti.

- Quali delle tre reti esprime le condizioni descritte dal testo del problema?

La prima e la seconda, la terza non va bene perchè non rappresenta il fatto che il gene del figlio venga ereditato dai genitori.

- Quale delle tre reti descrive al meglio l'ipotesi descritte nel problema?

La prima: la manualità dei genitori non influenza direttamente la manualità dei figli per cui la seconda rete non è corretta.

- Qual è la CPT per per G_C per la prima rete?

Quando nei genitori c'è sia L che R m non viene considerato perchè è equivalente la probabilità che si passi da L -> R o da R -> L

GMother	GFather	P(GChild = L | ...)	P(GChild = R | ...)
L	L	1-m	m
L	R	0.5	0.5
R	L	0.5	0.5
R	R	m	1-m

- Supponiamo che $P(G_F = L) = P(G_M = L) = x$. Qual è la probabilità che $P(G_C = L) =$? (condizionando solo con i nodi genitori Gm e Gf)

La richiesta equivale a:

$$P(G_C = L) = \sum_{G_F} \sum_{G_M} P(G_F) \cdot P(G_M) \cdot P(G_C | G_F, G_M)$$