1 Esercitazione 6

1.1 Esercizio 1

Si supponga di volere modellare il comportamento di una semplice lampadina. Si consideri il tempo scandito in modo discreto (di secondo in secondo) e che i problemi che possono presentarsi siano i seguenti:

1. La lampadina può fulminarsi e smette di funzionare con probabilità 0.05.
2. La lampadina può risultare troppo calda, per cui ha difficoltà ad accendersi. La probabilità che la lampadina si possa surriscaldare troppo vale 0.15 e che in tale situazione abbia probabilità 0.35 di accendersi.

Si supponga inoltre che il sistema (perfetto) di rilevazione degli errori che si intende utilizzare per verificare il corretto funzionamento della lampadina indichi l'assenza di errori (good) o la presenza di errori (bad). Modellare il problema mediante una catena di markov nascosta.

Per problemi di traduzione il testo è un po' ambiguo ma con "lampadina si possa surriscaldare troppo vale 0.15" si intende che la probabilità di diventare o rimanere surriscaldata è sempre 0.15

- Quali sono gli stati?

$$\Omega = OK,\ HOT,\ KO$$

- Quali sono le possibili osservazioni?

$$\Sigma = good,\ bad$$

- Quali sono le distribuzioni di probabilità di cui abbiamo bisogno?

1. Distribuzione iniziale di probabilità:

$$\pi = (0, 0, 1)^T$$

   Assumiamo che inizialmente la lampadina sia sempre funzionante

2. Matrice di transizione A

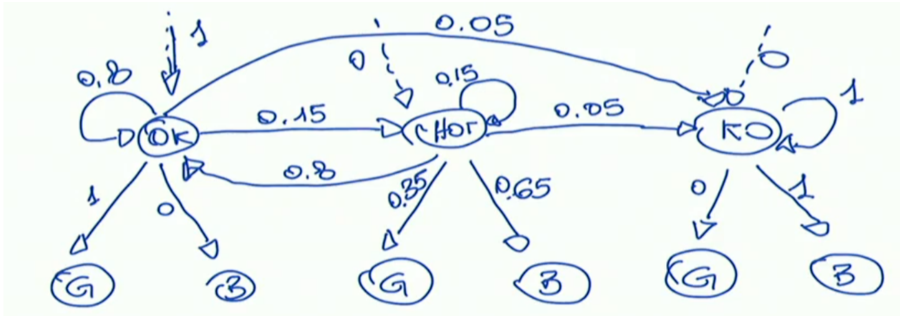
$$A = \begin{array}{c} \\ OK \\ HOT \\ KO \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} OK & HOT & KO \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Matrice di emissione delle osservazioni.

   La matrice di emissioni delle osservazioni mi dice per ogni stato quali osservazioni posso emettere.

$$E = \begin{array}{c} \\ OK \\ HOT \\ KO \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Good & Bad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.35 & 0.65 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Qual è la rappresentazione grafica dell' HMM?



1.2 Esercizio 2

Dato un HMM caratterizzato da:

- Un insieme di stati $S = \{S_1, ..., S_k\}$
- Un insieme di osservazioni $O = \{O_1, ..., O_m\}$

Quanti parametri sono necessari per definire un HMM?
I parametri necessari sono:

$$k + k^2 + km$$

- k rappresenta ciò che prima abbiamo chiamato π, ovvero il **vettore delle probabilità iniziali**.
  Sarà un vettore $\pi = [1, ..., k]$
- k^2 rappresenta la matrice di transizione fra gli stati, quella che prima abbiamo chiamato A.
- km è una matrice che rappresenta le possibili osservazioni che uno stato può produrre, quella che priam abbiamo chiamato E.

L'unione di questi parametri ci consente di specificare un HMM

1.3 Esercizio 3

Consideriamo questo HMM:

Vettore delle probabilità iniziali

$$P = 0.5; 0.5;$$

Matrice di transizione T

$$T = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Matrice di emissione delle osservazioni O

$$O = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$