Michele Beccari 856608 - Modelli Probabilistici per le Decisioni - Assignment 1 - Aprile 2023

1 Assignment 1

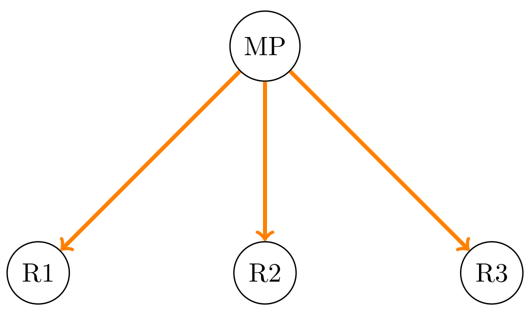
Supponiamo di avere 3 monete truccate, denotate a, b e c, in una borsa.
La probabilità che esca "testa" lanciando a, b e c è del 20%, 60% e 80%, rispettivamente.
Estraggo una moneta dalla borsa (la probabilità di estrarre a, b o c è la stessa) e la lancio 3 volte.

- Disegnare la Rete Bayesiana corrispondente (specificando le CPT). Caricare un'immagine o un documento contenente il disegno della Rete.

Per quanto detto al punto uno il gioco è rappresentato dalle seguenti variabili:

- MP la moneta pescata dalla borsa
- $R1$ il risultato del primo lancio
- $R2$ il risultato del secondo lancio
- $R3$ il risultato del terzo lancio

I tre lanci della moneta sono indipendenti fra di loro (il fatto che esca testa o croce al primo lancio non influenza il risultato dei successivi lanci) , mentre ogni lancio è dipendente da quale moneta è stata estratta.



Dopo avere definito la topologia della rete possiamo andare a definire le CPT.

$P(MP)$		
a	b	c
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

	$P(R1\|MP)$	
MP	T	C
a	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$
b	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$
c	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

	$P(R2\|MP)$	
MP	T	C
a	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$
b	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$
c	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

	$P(R3\|MP)$	
MP	T	C
a	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$
b	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$
c	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$

- Calcolare la probabilità che avendo ottenuto Testa, Testa, Croce la moneta estratta sia la a.

Per soddisfare la richiesta dobbiamo calcolare la distribuzione di probabilità congiunta sapendo che :

$$P(A|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) \vee P(B|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) \vee P(B|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) = 1$$

Procediamo quindi con il calcolo delle probabilità delle singole monete per la costante di normalizzazione α:

$$P(A|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) =$$

$$= \alpha \cdot P(A) \cdot P(R1 = T|A) \cdot P(R2 = T|A) \cdot P(R3 = C|A) =$$

Essendo i tre lanci di monete indipendenti sappiamo che:

$$P(R1 = T|A) = P(R2 = T|A)$$

da cui

$$= \alpha \cdot P(A) \cdot P(R1 = T|A)^2 \cdot P(R3 = C|A) =$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{10})^2 \cdot \frac{8}{10} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{4}{375}$$

Per B avremo:

$$P(B|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) =$$

$$= \alpha \cdot P(B) \cdot P(R1 = T|B) \cdot P(R2 = T|B) \cdot P(R3 = C|B) =$$

Essendo i tre lanci di monete indipendenti sappiamo che:

$$P(R1|B) = P(R2|B)$$

da cui:

$$= \alpha \cdot P(B) \cdot P(R1 = T|B)^2 \cdot P(R3 = C|B) =$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{6}{10})^2 \cdot (\frac{4}{10}) =$$

$$= \alpha \cdot \frac{6}{125}$$

Seguendo lo stesso ragionamento per C:

$$= \alpha \cdot P(C) \cdot P(R1 = T|C)^2 \cdot P(R3 = C|C) =$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot (\frac{8}{10})^2 \cdot \frac{2}{10} =$$

$$= \alpha \cdot \frac{16}{375}$$

A questo punto possiamo calcolare la costante di normalizzazione α

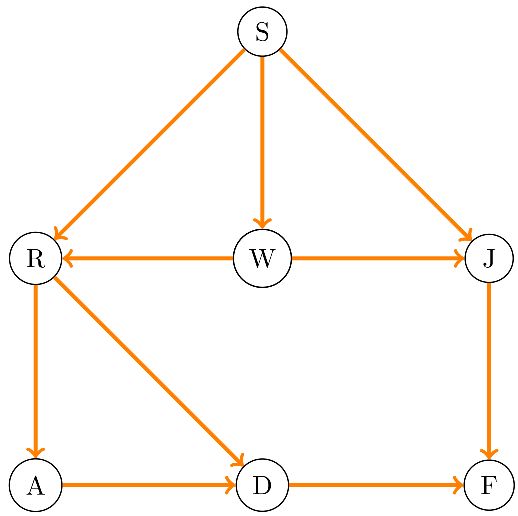
$$\alpha = \frac{1}{\frac{4}{375} + \frac{6}{125} + \frac{16}{375}} = \frac{375}{38}$$

Da cui concludiamo che

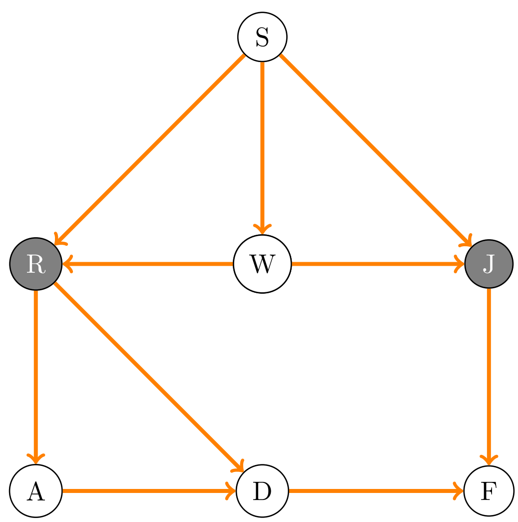
$$P(A|R1 \ = \ T, \ R2 \ = \ T, \ R3 \ = \ C) =$$

$$= \alpha \cdot \frac{4}{375} = \frac{375}{38} \cdot \frac{4}{375} \approx 0.1053$$

- Data la seguente Rete Bayesiana, si risponda (vero o falso) se le seguenti affermazioni di indipendenza condizionale sono riflesse dalla struttura della rete

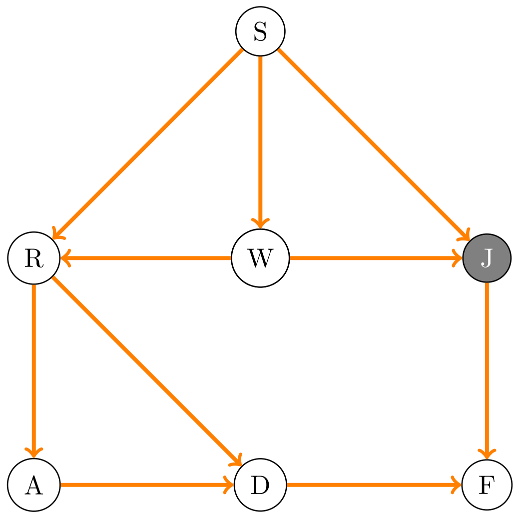


- R e J d-separano F e S?



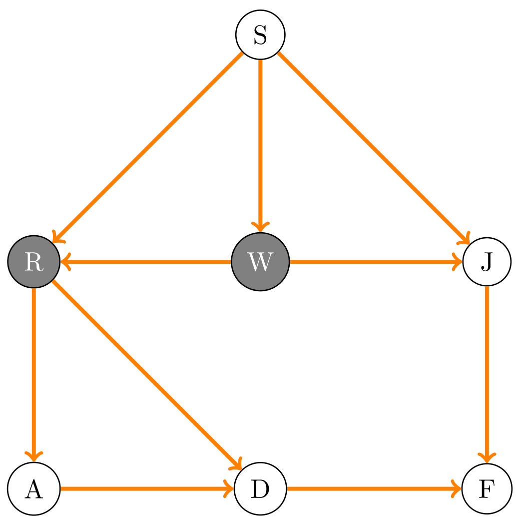
R e J d-separano F e S perchè sono presenti quattro casi di archi di ”tail-to-head” (S -> R -> D) (S -> J -> F) (W -> J -> F) (S -> R -> A) che bloccano tutti i cammini non orientati da F a S.

- J d-separa F e W?



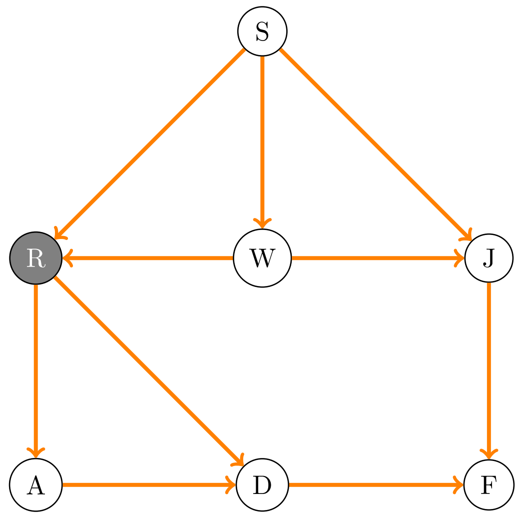
J non d-separa F e W perché su un cammino non orientato tra F e W non è presente nessun tipo di blocco (F -> D -> R -> W -> S)

- W e R d-separano D e S?



W e R d-separano D e S perchè tutti i cammini non orientati sono bloccati: sono presenti tre blocchi di tipo ”tail-to-head” (S -> W -> J) (S -> R -> D) (S -> R -> A) e un blocco di tipo ”head-to-head” (J -> F <- D)

- R d-separa D e J?



R d-separa D e J perchè sono presenti tre blocchi di tipo ”tail-to-head” (W -> R -> D) (S -> R -> A) (W -> R -> A) e un blocco di tipo ”head-to-head” (J -> F <- D).

- Si indichino tutte le coppie di nodi che sono indipendenti l’uno dall’altro dati i nodi S, R e D.