1. Considera le seguenti variabili casuali booleane relative allo stato di una data macchina:

   • Batteria: la batteria è carica?

   • Carburante: il serbatoio del carburante è vuoto?

   • Accensione: il sistema di accensione funziona?

   • Si muove: l'auto si muove?

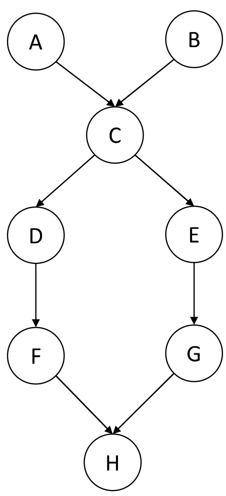
   • Radio: si può accendere la radio?

   • Partenze: il motore si accende?

   Riscrivere la funzione di densità di probabilità congiunta di tali variabili utilizzando la chain rule, dopo aver definito un proprio insieme di relazioni causali tra loro e rappresentare il problema utilizzando una rete bayesiana.

2. Considera quattro variabili casuali A, B, C e D.
   - Si scriva la loro funzione di densità di probabilità congiunta usando la chain rule, considerandole ordinate da D ad A.
   - Assumendo che non si possa fare alcuna ipotesi di indipendenza condizionale, si disegni la rete bayesiana corrispondente.
   - Quali osservazioni si possono fare sulla struttura della rete risultante?
   - Assumendo che tutte le variabili casuali siano booleane, quanti valori di probabilità devono essere forniti per definire la funzione di densità di probabilità congiunta utilizzando l'espressione derivata della regola della catena, ovvero la rete bayesiana corrispondente?

3. Si consideri la seguente Rete Bayesiana:



   a) D ed E sono indipendenti dati A and B?
   b) A e C sono indipendenti dato D?
   c) A e H sono indipendenti dato C?

4. Si supponga che uno studente possa trovarsi in 1 di 4 stati: Ricco, Medio, Povero e Indebitato. Assumiamo le seguenti probabilità di transizione:

• Se uno studente è Ricco, nella fase successiva lo studente sarà:

– Nella media: .75

– Scarso: .2

– In debito: 0,05

• Se uno studente è nella media, nella fase successiva lo studente sarà:

– Ricco: .05

– Nella media: .2

– In debito: .45

• Se uno studente è povero, nella fase successiva lo studente sarà:

– Nella media: .4

– Povero: .3

– In debito: .2

• Se uno studente è indebitato, nella fase successiva lo studente sarà:

– Nella media: .15

– Povero: .3

– In debito: .55

a) Disegna la corrispondente catena di Markov e ottieni la corrispondente matrice stocastica.

b) Assumiamo che uno studente inizi i suoi studi come “Medio”. Quale sarà la probabilità che siano "ricchi" dopo 1,2,3 passaggi temporali?

c) Qual è il vettore di probabilità in stato stazionario associato a questa catena di Markov?

5. Si considerino le seguenti matrici. Per le matrici che sono matrici stocastiche, si disegni la catena di Markov associata e si determini le probabilità relativa allo stato stazionario (se esiste, in caso contrario, motivare la risposta).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} .2 & .3 & .5 \\ .1 & .1 & .8 \\ .7 & .1 & .2 \end{pmatrix}$$

6. Considera la seguente catena di Markov:
   a) La catena è irriducibile?
   b) La catena è aperiodica?
   c) Calcolare la distribuzione stazionaria.