

# 1 Esercitazione 1

## 1.1 Esercizio 1

Dimostrare che  $P(a|b \wedge a) = 1$ .

Possiamo riscrivere  $P(a|b \wedge a)$  come

$$P(a|b \wedge a) = \frac{P(a \wedge b \wedge a)}{P(b \wedge a)} \quad (1)$$

Questo per la definizione di probabilità condizionata che dice che:

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Sappiamo anche che  $P(a \wedge b \wedge a) = P(a \wedge b)$ , per cui possiamo riscrivere l'equazione 1 come

$$P(a|b \wedge a) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b \wedge a)}$$

e dato che  $P(a \wedge b) = P(b \wedge a)$  possiamo concludere che  $P(a|b \wedge a) = 1$ .

## 1.2 Esercizio 2

Date le seguenti belief di un agente razionale:

$$P(A) = 0.4 \qquad P(B) = 0.3 \qquad P(A \vee B) = 0.5$$

Quale range di probabilità è ragionevole per  $A \wedge B$  ?

Sapendo che

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

y

$$0.4 + 0.3 - P(A \wedge B) = 0.5$$

Da cui:

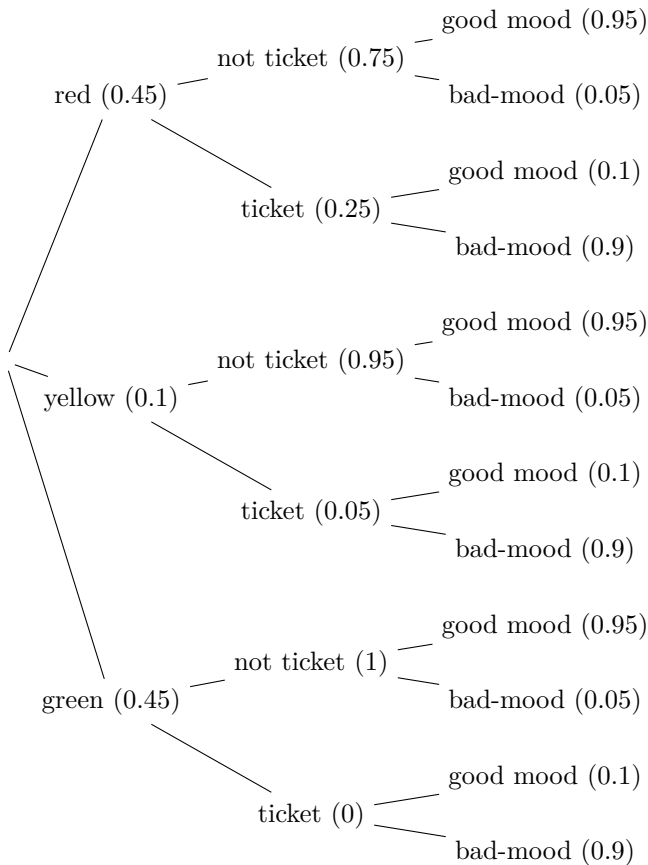
$$P(A \wedge B) = 0.2$$

### 1.3 Esercizio 3

Supponiamo di conoscere che la probabilità con cui un semaforo diventi verde sia pari a 0.45, arancione pari a 0.1 e che diventi rosso sia pari a 0.45. Inoltre, supponiamo di avere la probabilità del 25% di passare con il semaforo rosso senza prendere una multa, e il 5% di probabilità di prendere una multa passando con il semaforo arancione

In aggiunta, supponiamo che prendendo una multa, c'è il 90% di probabilità che si sia successivamente di cattivo umore; senza multa la probabilità è del 5%.

Qual è la probabilità totale di essere di cattivo umore?



Possiamo costruire la matrice delle probabilità congiunte:

	Green		Yellow		Red	
	Ticket	¬Ticket	Ticket	¬Ticket	Ticket	¬Ticket
Bad	$0.45 * 0 * 0.9$	$0.45 * 1 * 0.05$	$0.1 * 0.05 * 0.9$	$0.1 * 0.95 * 0.05$	$0.45 * 0.25 * 0.9$	$0.45 * 0.75 * 0.05$
Good	$0.45 * 0 * 0.1$	$0.45 * 1 * 0.95$	$0.1 * 0.05 * 0.1$	$0.1 * 0.95 * 0.95$	$0.45 * 0.25 * 0.1$	$0.45 * 0.75 * 0.95$

Da cui:

	Green		Yellow		Red	
	Ticket	¬Ticket	Ticket	¬Ticket	Ticket	¬Ticket
Bad	0	0.0225	0.0045	0.00475	0.10125	0.016875
Good	0	0.4275	0.00005	0.09025	0.01125	0.320625

## 1.4 Esercizio 4

Una società di consulenza ha creato un modello per prevedere le recessioni. Il modello prevede una recessione con l'80% di probabilità quando la recessione avviene realmente e con il 10% di probabilità quando non avviene. La probabilità incondizionata che si entri in una fase di recessione è del 20%. Se il modello prevede la recessione, qual è la probabilità che la recessione avvenga?

Sappiamo che

$$P(\text{rec. pred.} \mid \text{rec. coming}) = \frac{8}{10}$$

,che

$$P(\text{rec.pred.} \mid \text{rec. not coming}) = \frac{1}{10}$$

e che  $P(\text{rec. coming}) = \frac{2}{10}$

Vogliamo trovare  $P(\text{rec. coming} \mid \text{rec. pred})$

Per la regola di Bayes sappiamo che :

$$P(\text{rec. coming} \mid \text{rec. pred}) = \frac{P(\text{rec. pred} \mid \text{rec. coming}) * P(\text{rec. coming})}{P(\text{rec. pred})}$$

Qual'è la  $P(\text{rec. pred})$  ?

Sappiamo che

$$P(\text{rec. pred}) = P(\text{rec. pred} \mid \text{rec.coming}) * P(\text{rec. coming}) + P(\text{rec. pred} \mid \text{rec. not coming}) * P(\text{rec. not coming})$$

Inoltre se  $P(\text{rec. coming}) = \frac{2}{10}$  segue che  $P(\text{rec. not coming}) = \frac{8}{10}$

Da cui:

$$P(\text{rec. pred}) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{24}{100}$$

Concludendo quindi che :

$$P(\text{rec. coming} \mid \text{rec. pred}) = \frac{\frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{24}{100}} = \frac{\frac{16}{100}}{\frac{24}{100}} = \frac{16}{100} \cdot \frac{100}{24} = \frac{2}{3}$$

## 1.5 Esercizio 5

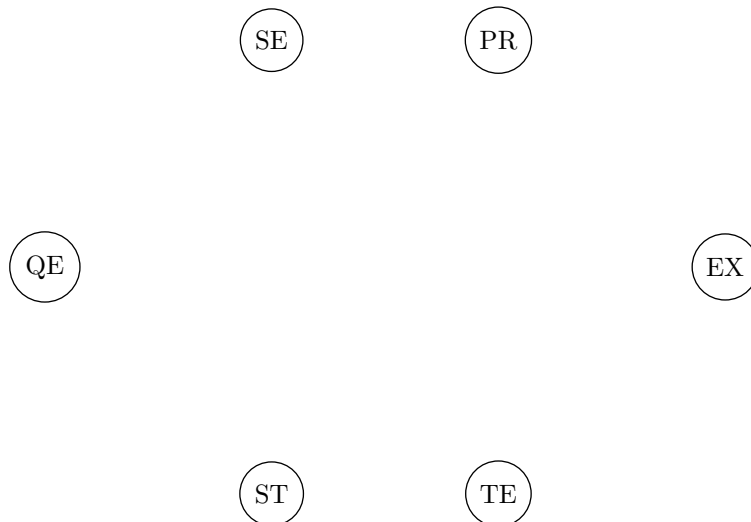
Sviluppare una rete di Bayes, per calcolare la probabilità che uno studente superi l'esame di MPD. Le proprietà di interesse del problema sono:

- Il superamento dell'esame  $EX \in \{true, false\}$
- L'acquisizione di buone capacità pratiche in MPD da parte dello studente  $PR \in \{true, false\}$
- L'acquisizione di buone capacità teoriche in MPD da parte dello studente  $TE \in \{true, false\}$
- Lo studente è efficientemente studioso  $ST \in \{true, false\}$
- La quantità di esercitazioni seguite dallo studente  $QE \in \{molte, poche, nessuna\}$
- L'aver fatto un numero sufficiente di esercizi  $SE \in \{true, false\}$

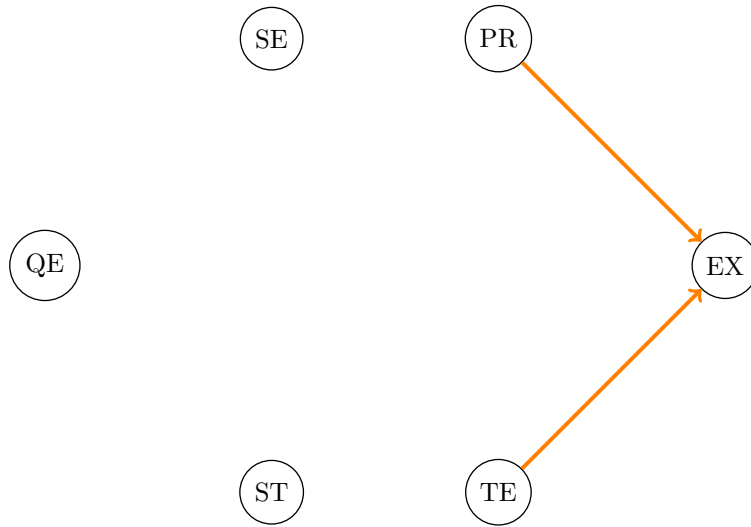
Costruire una rete bayesiana che rappresenti la conoscenza probabilistica relativa al dominio descritto dalle seguenti relazioni di dipendenza tra le variabili casuali:

- Il superamento dell'esame dipende dalle capacità teoriche e pratiche dello studente
- Se uno studente è studioso ha buone probabilità di acquisire capacità teoriche.
- Il numero di esercitazioni seguite dipende da quanto uno studente è studioso
- L'aver fatto sufficienti esercizi dipende dal numero di esercitazioni seguite, ed influenza le capacità pratiche dello studente.

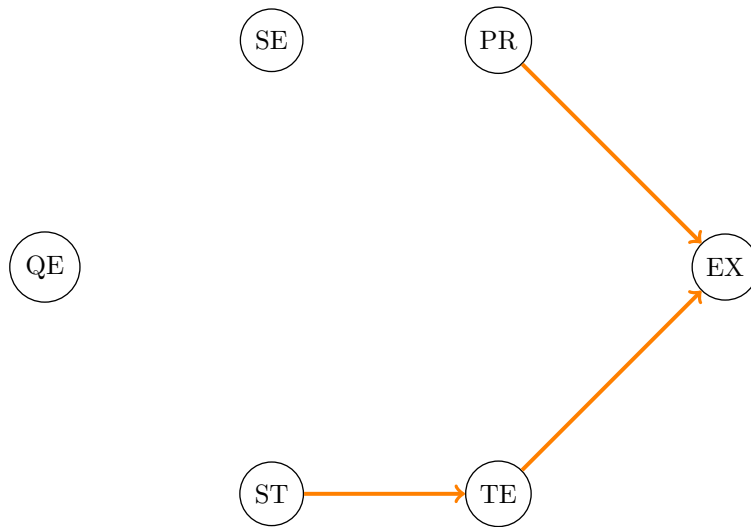
Dobbiamo un creare un DAG a partire dai seguenti nodi:



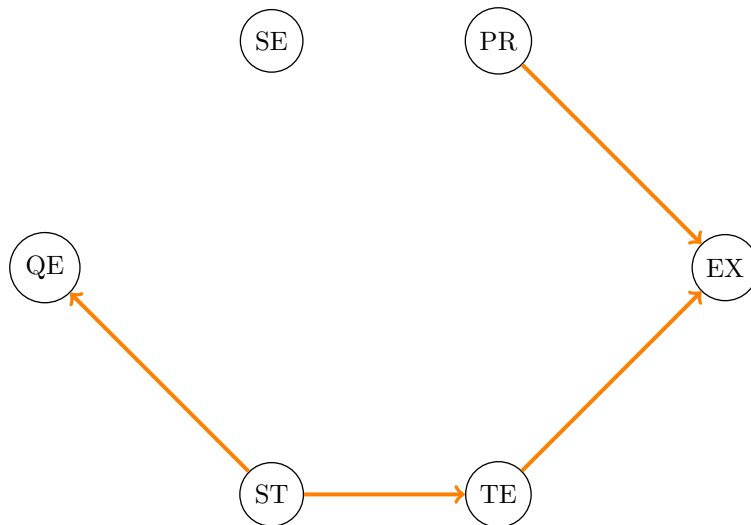
Sappiamo che il superamento dell'esame  $EX$  dipende dalle capacità teoriche ( $TE$ ) e pratiche ( $PR$ ) dello studente



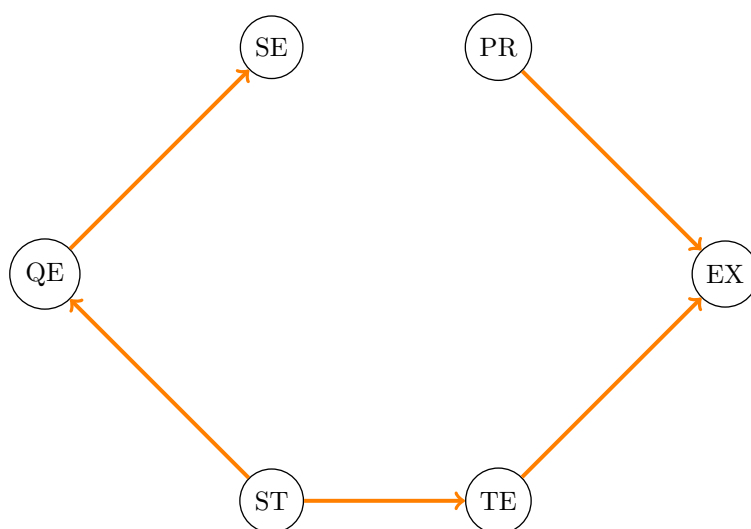
Sappiamo anche che se uno studente è studioso ( $ST$ ) ha buone probabilità di acquisire capacità teoriche ( $TE$ ).



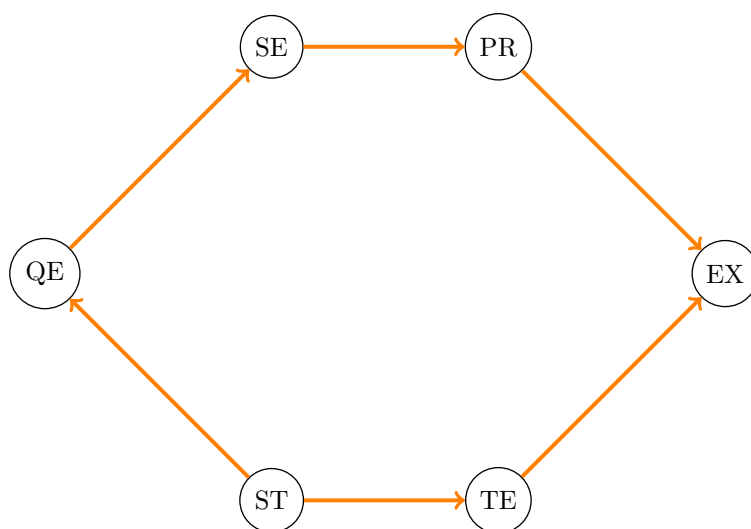
Sappiamo anche che la quantità di esercitazioni seguite ( $TE$ ) dipende da quanto lo studente sia studioso ( $ST$ )



Inoltre sappiamo è che avere fatto un numero sufficiente di esercizi ( $SE$ ) dipende dalla quantità di esercitazioni seguite ( $QE$ )



Infine sappiamo che avere svolto un numero sufficiente di esercizi influenza le capacità pratiche dello studente.



Abbiamo ora la struttura topologica, è necessario avere anche le distribuzioni di probabilità a priori o condizionate.

Il nodo ( $ST$ ) ha una distribuzione di probabilità a priori per i suoi possibili valori ( $true, false$ ).

Tutte le altre probabilità sono condizionate da uno o più genitori:

Prendiamo dei dati a caso come esempio:

$P(ST)$	
$true$	$false$
0.7	0.3

Per quando riguarda ad esempio la probabilità  $TE$  è condizionata da un solo genitore  $ST$ , avremo quindi una situazione di questo tipo:

ST	$P(TE   ST)$	
	T	F
true	x	1-x
false	y	1-y

Se prendiamo una probabilità con due genitori, come  $EX$ , avremo una situazione di questo tipo:

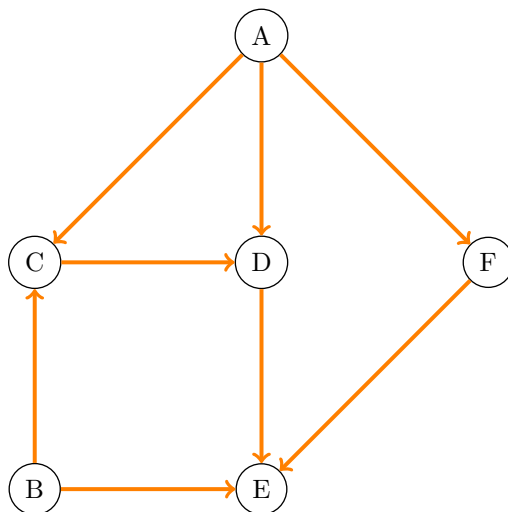
		$P(EX   TE, PR)$	
TE	PR	true	false
true	true	x	
false	false	y	
false	true	z	
false	false	a	

Proviamo a costruire la tabella della probabilità  $QE$  con dei valori plausibili, un esempio potrebbe essere:

ST	$P(EX   TE, PR)$		
	molte	poche	nessuna
true	0.5	0.3	0.2
false	0	0.1	0.9

## 1.6 Esercizio 6

Consideriamo questa rete bayesiana:



Quali sono le probabilità da definire per avere una rete bayesiana?

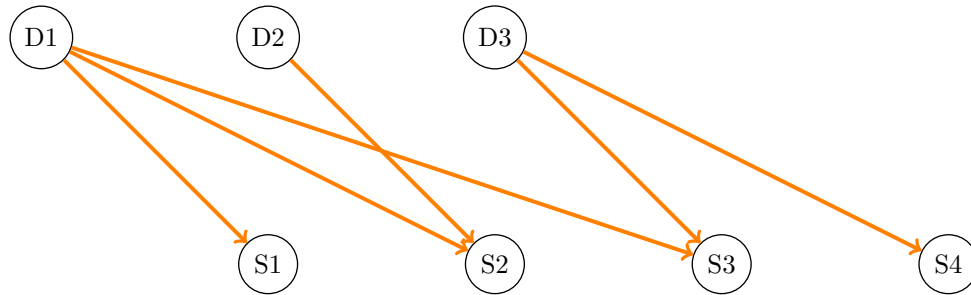
- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(C|B, A)$
- $P(D|C, A)$
- $P(E|B, D, F)$
- $P(F|A)$



## 1.7 Esercizio 7

Un paziente si reca dal dottore per sottoporre una patologia, il dottore sospetta 3 possibili malattie come causa della condizione patologica. Le 3 malattie sono  $D_1, D_2, D_3$  le quali sono marginalmente indipendenti tra loro. Ci sono 4 sintomi  $S_1, S_2, S_3, S_4$  di cui il dottore vuole verificare la presenza in modo da trovare la causa più probabile per la condizione patologica. I sintomi sono condizionalmente dipendenti alle 3 malattie come segue:  $S_1$  dipende solamente da  $D_1$ ,  $S_2$  dipende da  $D_1$  e da  $D_2$ ,  $S_3$  dipende da  $D_1$  e da  $D_3$ , e  $S_4$  dipende solamente da  $D_3$ . Si assuma che tutte le variabili casuali siano booleane.

- Costruire la struttura topologica alla rete bayesiana per il problema descritto.



- Scrivere la distribuzione di probabilità congiunta espressa come prodotto delle probabilità condizionate

$$\begin{aligned}
 P(D_1, D_2, D_3, S_1, S_2, S_3, S_4) &= \\
 &= P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) \cdot \\
 &= P(S_1 | D_1) \cdot P(S_2 | D_1, D_2) \cdot \\
 &= P(S_3 | D_1, D_3) \cdot P(S_4 | D_3)
 \end{aligned}$$

- Qual è il numero di parametri indipendenti richiesti per descrivere la distribuzione congiunta?

Iniziamo ad immaginare le CPT (*conditional probability table*) di ogni nodo.

Ad esempio per  $D_1$  avremo due valori nella CPT (*true e false*), così come  $D_2$  e  $D_3$ .

Invece  $S_1$  ha un genitore ( $D_1$ ) per cui la tabella avrà quattro possibili valori.

Analogamente  $S_2$  ha due ( $D_1$  e  $D_2$ ) per cui la tabella avrà otto possibili valori.

Seguendo con questo ragionamento arriveremo ad avere

$$2 + 2 + 2 + 4 + 8 + 8 + 4 = 30$$

parametri.

Come possiamo stimare i parametri indipendenti?

Essendo una distribuzione booleana per  $D_1, D_2$  e  $D_3$  serve un parametro per ciascuno.

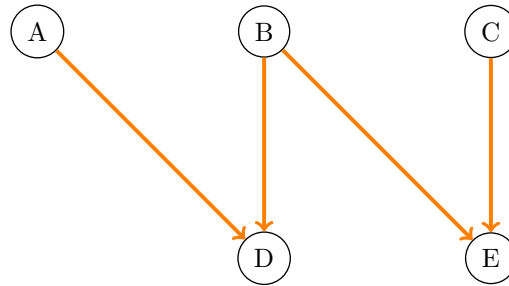
Per  $S_1$  ne serviranno 2, così come per  $S_4$ : per  $S_2$  ed  $S_3$  serviranno 4 variabili, in totale serviranno quindi 15 parametri.

- Assumendo che non ci sia dipendenza condizionale tra le variabili, quanti parametri indipendenti sarebbero dunque richiesti?

$$2^7 - 1$$

## 1.8 Esercizio 8

Supponiamo di avere la seguente rete Bayesiana su spazio booleano.



Sappiamo che  $P(A = T) = 0.2$ ,  $P(B = T) = 0.2$  e che  $P(C = T) = 0.8$

Sappiamo inoltre che:

A	B	$P(D = T \mid A, B)$
T	T	0.1
T	F	0.5
F	T	0.6
F	F	0.9

e che

C	B	$P(E = T \mid C, B)$
T	T	0.3
T	F	0.8
F	T	0.4
F	F	0.2

- Qual è la probabilità che tutte le variabili siano false?

$$P(A = F, B = F, C = F, D = F, E = F) =$$

$$= P(A = F) \cdot P(B = F) \cdot P(C = F) \cdot P(D = F \mid A = F, B = F) \cdot P(E = F \mid B = F, C = F)$$

$$= 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.8 = 0.064$$

- Qual è la probabilità di A, avendo la conoscenza che tutte le altre variabili sono vere?

Formalmente la richiesta è

$$P(A \mid B = T, C = T, D = T, E = T)$$

che corrisponde all'unione di

$$P(A = T \mid B = T, C = T, D = T, E = T)$$

e

$$P(A = F \mid B = T, C = T, D = T, E = T)$$

[https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1002302/mod\\_resource/content/2/Esercitazione%202.pdf](https://elearning.unimib.it/pluginfile.php/1002302/mod_resource/content/2/Esercitazione%202.pdf)