# 1 Esercitazione 6

## 1.1 Esercizio 1

Si supponga di volere modellare il comportamento di una semplice lampadina. Si consideri il tempo scandito in modo discreto (di secondo in secondo) e che i problemi che possono presentarsi siano i seguenti:

1. La lampadina può fulminarsi e smette di funzionare con probabilità 0.05.
2. La lampadina può risultare troppo calda, per cui ha difficoltà ad accendersi. La probabilità che la lampadina si possa surriscaldare troppo vale 0.15 e che in tale situazione abbia probabilità 0.35 di accendersi.

Si supponga inoltre che il sistema (perfetto) di rilevazione degli errori che si intende utilizzare per verificare il corretto funzionamento della lampadina indichi l'assenza di errori (good) o la presenza di errori (bad). Modellare il problema mediante una catena di markov nascosta.

*Per problemi di traduzione il testo è un po' ambiguo ma con "lampadina si possa surriscaldare troppo vale 0.15" si intende che la probabilità di diventare o rimanere surriscaldata è sempre 0.15*

- Quali sono gli stati?

$$\Omega = OK,\ HOT,\ KO$$

- Quali sono le possibili osservazioni?

$$\Sigma = good,\ bad$$

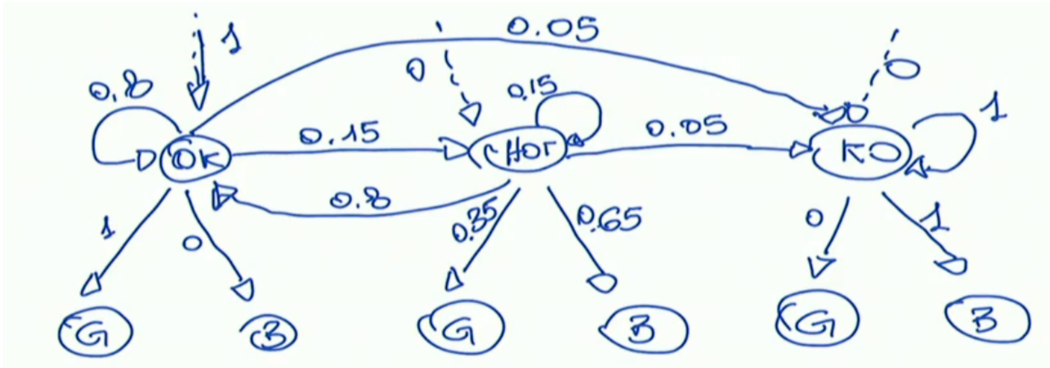
- Quali sono le distribuzioni di probabilità di cui abbiamo bisogno?

1. Distribuzione iniziale di probabilità:
$$\pi = (0, 0, 1)^T$$
Assumiamo che inizialmente la lampadina sia sempre funzionante
2. Matrice di transizione $A$
$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} OK & HOT & KO \end{array} \\ \begin{array}{c} OK \\ HOT \\ KO \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
3. Matrice di emissione delle osservazioni.

La matrice di emissioni delle osservazioni mi dice per ogni stato quali osservazioni posso emettere.

$$E = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Good & Bad \end{array} \\ \begin{array}{c} OK \\ HOT \\ KO \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.35 & 0.65 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Qual è la rappresentazione grafica dell' HMM?



## 1.2 Esercizio 2

Dato un HMM caratterizzato da:

- Un insieme di stati $S = \{S_1, ..., S_k\}$
- Un insieme di osservazioni $O = \{O_1, ..., O_m\}$

Quanti parametri sono necessari per definire un HMM?
I parametri necessari sono:

$$k + k^2 + km$$

- $k$ rappresenta ciò che prima abbiamo chiamato $\pi$, ovvero il **vettore delle probabilità iniziali**.
  Sarà un vettore $\pi = [1, ..., k]$
- $k^2$ rappresenta la matrice di transizione fra gli stati, quella che prima abbiamo chiamato $A$.
- $km$ è una matrice che rappresenta le possibili osservazioni che uno stato può produrre, quella che priam abbiamo chiamato $E$.

L'unione di questi parametri ci consente di specificare un HMM

## 1.3 Esercizio 3

Consideriamo questo HMM:

Vettore delle probabilità iniziali

$$P = [0.5; 0.5];$$

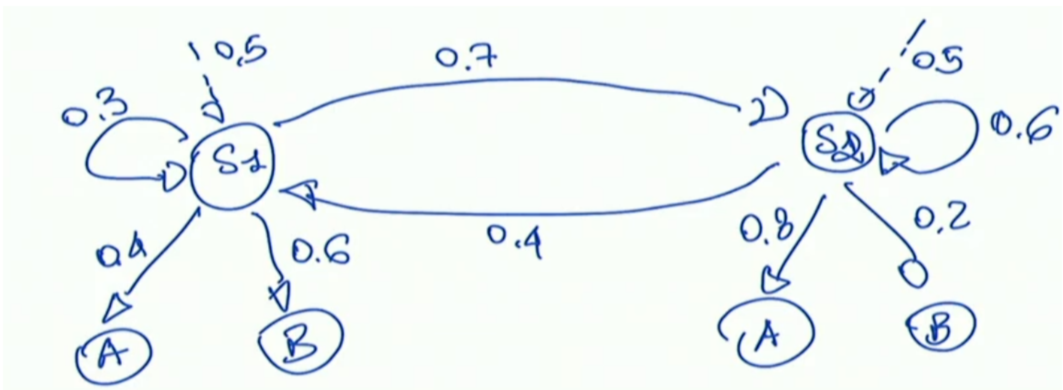
Matrice di transizione $T$

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrice di emissione delle osservazioni $O$

$$O = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Disegnare il modello probabilistico




- Calcolare la probabilità della sequenza di stati

$$S = \{S_1, S_1, S_2, S_1, S_2\}$$

Avremo che la probabilità di una sequenza di stati è:

$$P(S|\theta) = \prod_{t=1}^{|S|} T_{t,t+1}$$

Ovvero

$$P(S_1, S_1, S_2, S_1, S_2) = P(S_1) \cdot P(S_1|S_1) \cdot P(S_2|S_1) \cdot P(S_1|S_2) \cdot P(S_2|S_1)$$

Sostituendo $P(S_1)$ prendendolo dal vettore delle probabilità iniziali e gli altri valori prendendoli dalla matrice di transizione otteniamo:

$$= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.7 = 0.0294$$

- Calcolare la probabilità della sequenza di osservazioni

$$E = \{A, A, B, A, A\}$$

data la sequenza degli stati

$$S = \{S_1, S_1, S_2, S_1, S_2\}$$

La richiesta è quella di calcolare della sequenza di osservazioni $E$ non solo dati i parametri iniziali ma anche data una sequenza di stati $S$.

$$P(E|\theta, S) = \prod_{i=1}^{|E|} P(e_t|s_i, \theta)$$

Ovvero:

$$= P(A|S1) \cdot P(A|S1) \cdot P(B|S2) \cdot P(A|S1) \cdot P(A|S2)$$

$$= 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.8 = 0.01024$$

- Calcolare la joint likelihood della sequenza di osservazioni

$$E = \{A, A, B, A, A\}$$

e la sequenza degli stati

$$S = \{S_1, S_1, S_2, S_1, S_2\}$$

La richiesta è quella di trovare

$$P(E, S|\theta) = P(E|S, \theta) \cdot P(S|\theta) =$$

$$= 0.01024 \cdot 0.0294 = 0.000301056$$

## 1.4 Esercizio 4

Si consideri il seguente HMM che modella la probabilità di avere una annata molto calda/fredda, osservando la chioma degli alberi. Il modello HMM è caratterizzato dalle seguenti distribuzione di probabilità discrete:

$$\pi = [0.5, 0.5]$$

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & C \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$O = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} S & L \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Effettuare il task di filtraggio utilizzando le osservazioni $S, S, L$

Il task di filtraggio è composto da due sottopassi: il passaggio di predizione, dove faccio evolvere il modello da un tempo $t$ al tempo successivo e poi ho la fase di aggiornamento dove vado a considerare l'osservazione per aggiornare la predizione.

Predizione da $t_0$ a $t_1$:

$$P(S_1|S_0) = \sum_{s_i \in S_0} P(S_1|s_i) \cdot P(s_i)$$

Dove $P(S_1)$ indica la distribuzione probabilità dello stato del sistema al passo 1

$$= (0.5 \cdot < 0.7; 0.3 >) + (0.5 \cdot < 0.4; 0.6 >)$$

Le due espressioni significano:

1. inizialmente sei nello stato $HOT$ con probabilità 0.5, fai "un salto in avanti" con probabilità 0.7 di rimanere in $HOT$ e con probabilità 0.3 di andare in $COLD$.

1. inizialmente sei nello stato $fpd$ con probabilità 0.5, fai "un salto in avanti" con probabilità 0.4 di andare in $HOT$ e con probabilità 0.6 di rimanere in $COLD$.

$$=< 0.35; 0.15 > + < 0.2; 0.3 >=< 0.55; 0.45 >$$

Effettuiamo il passaggio di aggiornamento sapendo che all'istante $t_1$ abbiamo osservato una chioma $S$:
Dobbiamo quindi calcolare:

$$P(S_1|s) = \alpha \cdot P(s|S_1) \cdot P(S_1)$$

In concreto $P(S_1|s)$ significa prendere la predizione ed aggiornarla rispetto a ciò chè è stato osservato

$P(s|S_1)$ è la distribuzione di probabilità di emettere l'osservazione small, indipendentemente dal fatto che $S_1$ sia $HOT$ oppure $COLD$: prendiamo quindi la colonna dell'osservazione $S$ dalla tabella $O$.

$$= \alpha \cdot < 0.4; 0.8 > \cdot < 0.55; 0.45 >=$$

$$= \alpha \cdot < 0.22; 0.36 >=< 0.379; 0.621 >$$

Concludiamo quindi che $S_1 =< 0.379; 0.621 >$.

- Effettuiamo la predizione da $t_1$ a $t_2$

Avremo che nella fase di predizione:

$$P(S_2|S_1) = \sum_{s_i \in S_1} P(S_2|s_i) \cdot P(s_i)$$

Ovvero

$$= (0.379 \cdot < 0.7; 0.3 >) + (0.621 \cdot < 0.4; 0.6 >) =$$

Dove 0.379 e 0.621 sono le nuove probabilità per $HOT$ e $COLD$ ottenute in precedenza.

$$=< 0.265; 0.1137 > + < 0.2484; 0.3726 >=< 0.5134; 0.4863 >$$

A questo punto sappiamo che all'istante due abbiamo osservato una chioma $S$, per cui andiamo ad aggiornare la stima di $S2$

$$P(S_2|s) = \alpha \cdot P(s|S2) \cdot P(S_2)$$

Ovvero

$$P(S_2) = \alpha \cdot < 0.4; 0.8 > \cdot < 0.5134; 0.4863 >$$

$$P(S_2) = \alpha \cdot < 0.20536; 0.38904 >$$

Normalizzando otteniamo che $\alpha = 0.5944$, da cui concludiamo che

$$P(S_2) =< 0.3454; 0.6545 >$$

- Effettuiamo la predizione da $t_2$ a $t_3$

Sappiamo che:

$$P(S_3|S_2) = \sum_{s_i \in S_2} P(S_3|s_i) \cdot P(s_i)$$

Ovvero:

$$(0.3454 \cdot < 0.7; 0.3 >) + (0.6545 \cdot < 0.4; 0.6 >) =$$

$$< 0.24178; 0.10362 > + < 0.2618; 0.3927 >=< 0.50; 0.50 >$$

A questo punto sapendo che all'istante tre abbiamo osservato una chioma $l$, per cui andiamo ad aggiornare la stima di $S_3$

$$P(S_3|l) = \alpha \cdot P(l|S_3) \cdot P(S_3)$$

$$= \alpha \cdot < 0.6; 0.2 > \cdot < 0.5; 0.5 >=$$

$$= \alpha \cdot < 0.6; 0.2 > \cdot < 0.5; 0.5 >=$$

$$= \alpha \cdot < 0.3; 0.1 >$$

Normalizziamo utilizzando $\alpha = 2.5$ e otteniamo che $S_3 =< 0.75; 0.25 >$

- Tenendo in considerazioni il filtrato a 3 step, quale è la probabilità che il 5° anno sia "hot"?

A questo punto non avendo più osservazioni dobbiamo solo fare l'evoluzione temporale in avanti. Dobbiamo quindi moltiplicare per $T^2$, perché mancano gli ultimi due passi:

$$P(S_5|s, s, l) =< 0.75; 0.25 > \cdot T^2$$

$$=< 0.5878; 0.4122 >$$