SORBONNE UNIVERSITÉ

COMPLEX: 4I900

Rapport du projet : test primalité

Binôme
Mounib BENIMAM
Guillaume MAGNIADAS

chargé de Td
Florette MARTINEZ

December 9, 2020

Abstract

En 1801, C. F. Gauss écrivait dans *Disquisitiones Arithmeticae que distinguer nombres premiers et nombres composés, et décomposer ces derniers en facteurs premiers, est un des problèmes les plus importants et les plus utiles en arithmétique.* Le but de ce projet est de présenter certaines méthodes utilisées pour tester la primalité d'un nombre entier.

Le problème de primalité est le suivant :
Entrée : un entier $N \in \mathbb{N}^\star$
Question : N est-il premier ?

Nous allons implanter un test de primalité naiif déterministe dont la complexité est exponentielle. Ensuite, nous allons implanter deux tests probabilistes de primalité efficaces mais qui se trompent de temps en temps lorsque N est premier. Ainsi, si le test probabiliste retourne premier alors l'entier est premier avec une certaine probabilité. En revanche, si N est composé alors le test probabiliste retourne toujours composé.

1 Arithmitique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie nous allons poser les fonctions de base pour ce qui suit

1.1 Calcule PGCD

nous cherchons le dernier reste non nul

Listing 1: Implémentation de l'algorithme d'euclide

```python
def my_gcd(a, b):
    """
    int*int -> int
    """
    a, b = max(a, b), min(a, b)
    while b != 0:
        tempo = b
        b = a % b
        a = tempo
    return a
```

si nous voulons uniquement le PGCD, l'algorithme simplifié d'euclide est plus rapide et suffisant. mais pour avoir les coefficients de Bezout cela necessiet une implementation complète de l'algorithme d'euclide dit etendu.

Listing 2: Implémentation de l'algorithme d'Euclide étendu.

```python
def my_gcd_etendu(a, b):
    """
    int*int-> int*int*int
    """
    a, b = max(a, b), min(a, b)
    u = np.array([a, 1, 0])
    v = np.array([b, 0, 1])

    while(v[0] != 0):
        q = u[0]//v[0]
        temp = v
        v = u - q*v
        u = temp
    return tuple(map(int, u))
```

Une des opérations les plus importantes en l'arithmétique modulaire est l'inverse $a^{-1} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $aa^{-1} \equiv 1[n]$, un tel élèment existe ssi a, n sont premier entre eux :

$$\forall n \forall a, \quad PGCD(a, n) = 1 \iff \exists b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, ab \equiv 1[n] \tag{1}$$

et particulierement si n est premier un inverse existe toujours et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est alors un corps.

$$\forall n, \forall (a < n), \quad estPremier(n) \implies (PGCD(n, a) = 1). \tag{2}$$

Listing 3: Implementation de l'inverse modulaire

```
def my_inverse(a, N):
    """int*int->int
    retourner inverse de a modulo N
    """
    # tester tout les nombres
    for b in range(N):
        if(((a*b) % N) == 1):
            return b
    # si on trouve pas d'inverse
    print(f"{a} n'a pas d'inverse modulo {N}")
```

Listing 4: Implementation de l'inverse modulaire Bézout

```
def my_inverse_bezout(a, N):
    """ inverse en utilisant euclide_etendu"""
    u0, u1, u2 = my_gcd_etendu(a, N)
    if(u0 == 1):
        return u2 if a<N else u1
    # si on trouve pas d'inverse
    print(f"{a} n'a pas d'inverse modulo {N}")
```

1.1.1 Comparaison en temps

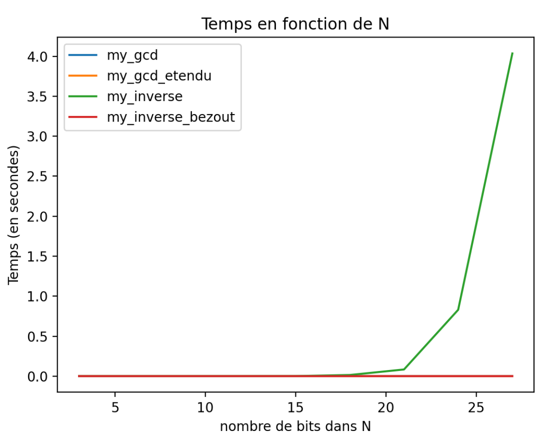


Figure 1: Comparaison entre les fonctions my_gcd, my_gcd_etendu et my_inverse

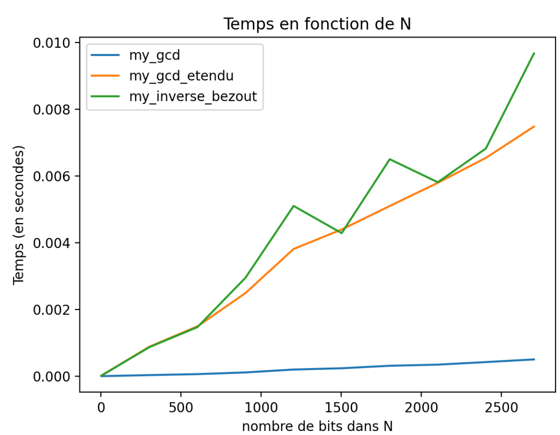


Figure 2: Comparaison entre les fonctions my_gcd, my_gcd_etendu et my_inverse

On peut observer sur ces courbes que la complexité de my_gcd et de my_gcd_etendu semble être polynomial au nombres de bits tendis que my_inverse exponentiel au nombre de bits.

1.2 my_expo_mod

Implementation de l'algorithme d'exponentiation binaire rapide, complexité en

Listing 5: my_expo_mod

```
def my_expo_mod(g, n, N):
    """
    int*int*int -> int
    return (g^n) % N
    """
    h = 1

    if n < 0:
        # puissance negative
        gcd, _, v = my_gcd_etendu(N, g)
        g = v
        n = -n

    l = n.bit_length()

    #Note: on met la range jusqu'a -1 pour que i prenne aussi la valeur 0.
    for i in range(l - 1, -1, -1):
        h = (h**2) % N

        if (n >> i) & 1 == 1:
            h = (h * g) % N

    return h
```

1.2.1 Temps d'exécution expérimenté

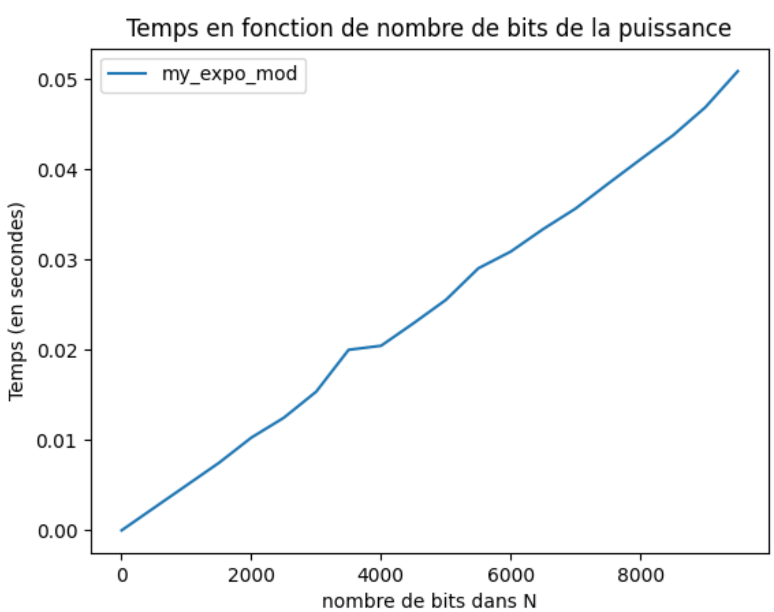


Figure 3

Avec cette courbe, on peut en déduire que my_exp_mod croit de manière lineaire au nombre de bits dans N. (donc logaritmiquement par rapport à N)

2 Nombres pseudo-premier de Carmichael

2.1 Méthode déterministe test primalité

Ce teste sera une référence pour valider nos tests probabiliste

Listing 6: Implementation test primalité naïf

```
def first_test(N):
    """
    int -> boolean
    """
    for i in range(2, int(np.sqrt(N))+1):
        if(N%i == 0): return False
    return True
```

2.1.1 Complexité

Cet algorithme a une complexité en $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ avec n le nombre testé.

2.1.2 Temps d'exécution expérimenté

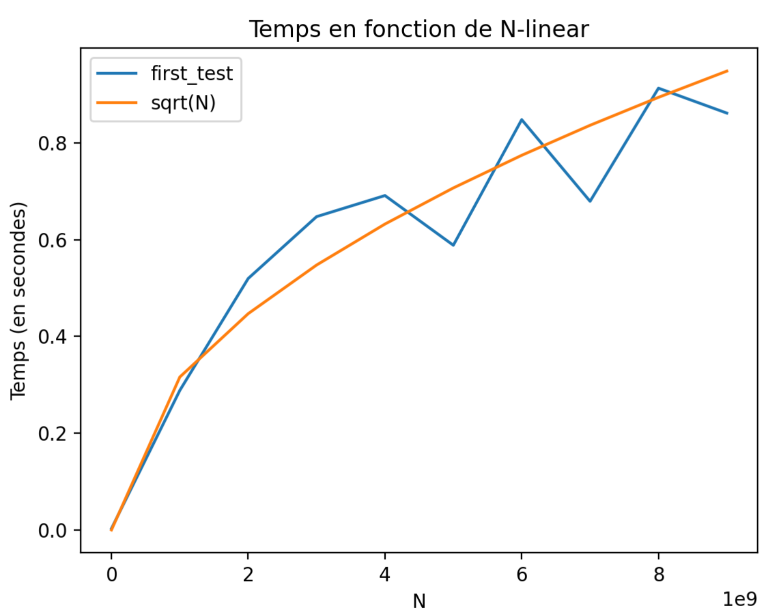


Figure 4

On voit bien sur la figure que la complexité expérimenté semble tendre vers la complexité $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ où $n = 2^t$, la complexité est donc exponentielle en nombre de bits du nombre n, $\mathcal{O}(2^{t/2})$

2.1.3 Nombre premier compté

Cette fonctions permet de compter 9592 nombres premier jusqu'a 10^5.

2.2 isCarmichael

Un nombre n est de carmichael, si n est un nombre composé, $\forall b < n, PGCD(b,n) = 1 \implies b^{n-1} \equiv 1[n]$

Listing 7: Implementation test Carmichael

```
def isCarmichael(n):
    n_divisors = 0
    for i in range(2, n):
        # (i premier avec n => i**(n-1) = 1[n])
        gcd = my_gcd(i, n)
        if (gcd == 1) and (my_expo_mod(i, n-1, n) != 1):
            return False

        if n%i == 0:
            n_divisors += 1

    if n_divisors == 0:
        # n est premier
        return False

    return True
```

une implementation plus rapide est possible en utilisant le critère de korselt, conaissant les facteurs premiers du nombre, si n n'est pas divisible par un carré de premier, et quelque soit le facteur p de n, $(p-1) \equiv 0[n-1]$

Listing 8: Implementation test Carmichael$_korselt$

```
def isCarmichael_facteurs(n, facteurs):
    """
    int*list->boolean
    tester si n est un nombre de carmichael, etant donn  ses facteurs
    """
    for facteur in facteurs:
        # pas facteur premier carr
        if(n%(facteur**2) == 0):
            return False
        if((n-1)%(facteur-1) != 0):
            return False
    # pass le test
    return True
```

Note: une fonction gen_carmichael est aussi disponible, qui utilise cette fonction et boucle sur tout les entiers jusqu'à une limite et liste tout les nombres de Carmichael jusqu'à cette dernière.

2.2.1 le nombre de nombres premiers inferieur à 10^5

En utilisant notre methode deterministe, on trouve : 9592 nombres premiers, ce qui fait un ratio de $\frac{9592}{10^5}$, soit 9.59%

2.2.2 Nombres de Carmichael listé

Voici la liste des nombres de Carmichael trouvé jusqu'à 10^5 avec cette fonction : 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973 et 75361.

2.2.3 Plus grand nombre trouvé

Avec cette méthode, le plus grand nombre de Carmichael trouvé en approximativement 5 minutes est 1909001. (Note: une fonction experience_carmichael_t a été créé pour cette expérience.)

3 Methodes probabiliste

3.1 gen_carmichael3

Listing 9: gen_carmichael3

```
def gen_carmichael3(N=1e5, n_facteur_max=5):
    """
    int->int
    """
    premiers = [i for i in range(3, int(N), 2) if first_test(i)]
    nb_facteur = 3

    while True:
        acc = [premiers[np.random.randint(0, len(premiers)-1)]
                    for i in range(nb_facteur)]
        n = np.prod(acc, dtype=np.int64)

        if isCarmichael_facteurs(n, acc):
            return n
```

3.1.1 Plus grand nombre trouvé

Avec cette méthode, le plus grand nombre de Carmichael trouvé en approximativement 5 minutes est 3610008963601. (Ce résultat varie étant donné le coté aléatoire de gen_carmichael3) (Note: une fonction experience_carmichael3_t a été créé pour cette expérience.)

3.2 Test_fermat

le test de fermat n'emmet pas de faux positifs, donc si test_fermat retourne false, on est sure à 100% qu'il s'agit d'un nombre composé, mais on ne peux savoir si elle retourne vrai et n sera donc possible premier avec une certaine probabilité.

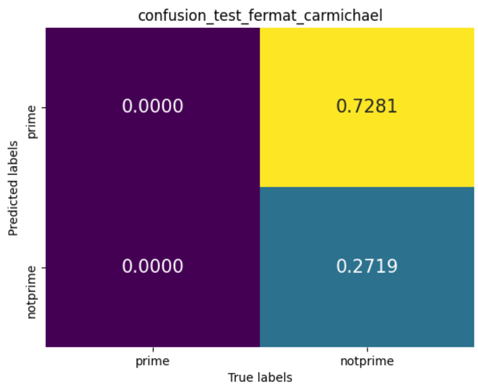
Cette fonction prend n un entier impair,et retourne vrai si premier possible ou faux si composé de manière certaine.

Listing 10: test_fermat

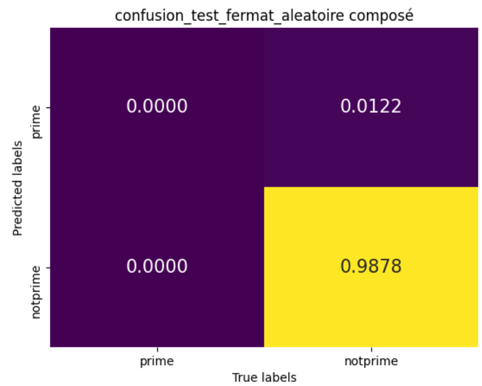
```
def test_fermat(n, a=None):
    """
    n un entier impair
    Retourne vrai si premier possible
    faux si compos
    """
    if a == None:
        a = random.randrange(2, n)
    return my_expo_mod(a, n-1, n) == 1
```

3.2.1 Taux d'erreurs

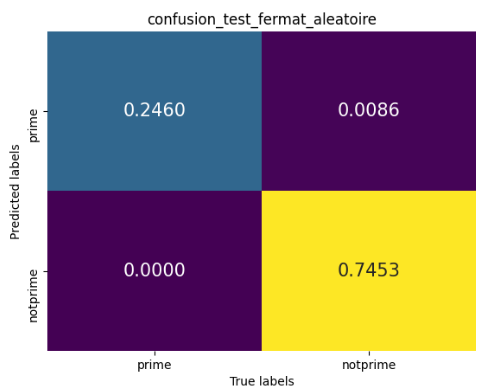
Note: Les pourcentage qui vont suivre sont fait sur $5 * 10^4$ valeurs de taille maximale 10^5 et les nombre tiré aléatoirement sont tous impaire.



(a) confusion fermat avec nombre de carmichael



(b) confusion fermat avec nombre aleatoire composé



(c) confusion fermat avec nombre aleatoire

Figure 5: Matrice de confusion test fermat

En tirant seulement des nombres de Carmichael, on obtient un taux d'erreur d'environ 72.81%.
En tirant seulement des nombres composé aléatoire, on obtient un taux d'erreur d'environ 1.22%.
En tirant des nombres aléatoires, on obtient un taux d'erreur d'environ 0.8%.

nous pouvons voir clairement que fermat n'emmet jamais des faux negatifs, et toutes nos erreur sont des faux positifs, de cette nature on ne peut utiliser un teste de fermat dans des cas concret pour assurer la primalité d'un nombre, par contre il pourrait servir dans une co-routine pour éliminer rapidement des nombres qui ne sont pas premier, et reduire l'espace de recherche pour utiliser d'autre testes plus precis.

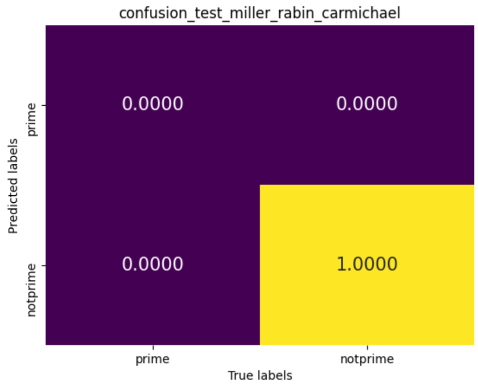
3.3 test_miller_rabin

Dans cette partie nous allons coder un algorithme plus robuste que le teste de fermat .

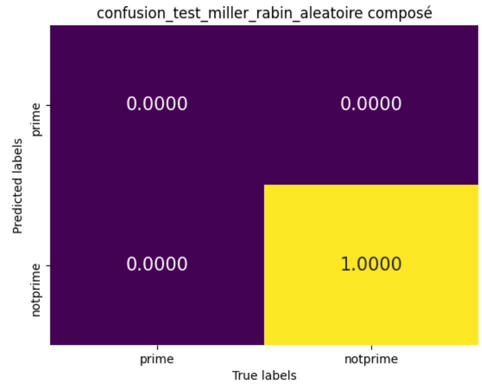
Listing 11: Implementation test_miller_rabin

```
def test_miller_rabin(n, T=10):
    """
    int*int->boolean
    n = 1 + 2**h * m
    """

    p_h = 1
    temp = n-1
    while(temp%2 == 0):
        temp = temp // 2
        p_h *= 2
    m = (n-1)//p_h

    inf = n-3
    for i in range(T):
        a = 2 + random.getrandbits(n.bit_length())%(n-3)
        b = my_expo_mod(a, m, n)

        if b==1 or b==(n-1):
            continue

        for j in range(1, p_h):
            if b!=(n-1) and my_expo_mod(b, 2, n)==1:
                return False
            elif  b==(n-1):
                break
            b = my_expo_mod(b, 2, n)

        if b != (n-1):
            return False

    return True
```

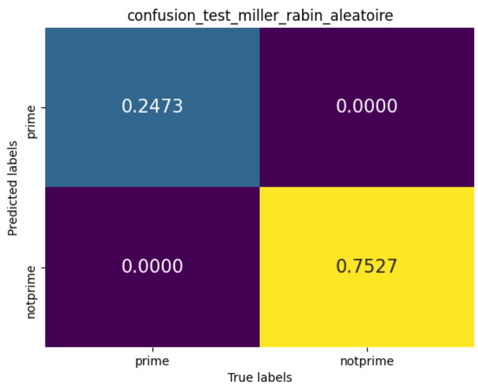
3.4 Taux d'erreur



(a) confusion miller rabin avec nombre de carmichael



(b) confusion miller rabin avec nombre aleatoire composé



(c) confusion miller rabin avec nombre aleatoire

Figure 6: Matrice de confusion test miller rabin

En tirant seulement des nombres de Carmichael, on obtient un taux d'erreur 0%.
En tirant seulement des nombres composé aléatoire, on obtient un taux d'erreur d'environ 0%.
En tirant des nombres aléatoires, on obtient un taux d'erreur d'environ 0%.

Pour avoir plus d'informations, nous testons l'effet du nombre d'experiences sur la probabilité d'erreur de miller rabin

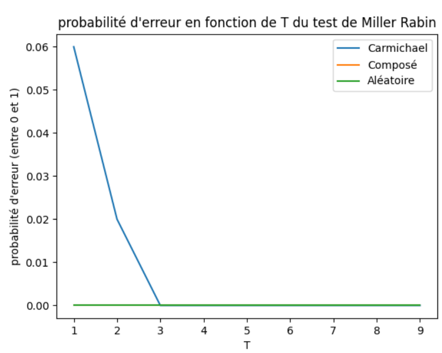


Figure 7: Effet de T(nbr d'experiences) sur probabilité erreur miller_rabin

3.5 RSA

3.5.1 gen_rsa

Listing 12: gen_rsa

```
def gen_rsa(t):
    """
    int: longeur en bits (doit  tre  sup rieur a 2)
    return: (e, n), (d, n)
    """

    inf = 1<<(t-1)

    while True:
        p = inf + random.getrandbits(t-1)
        if test_miller_rabin(p):
            break
    while True:
        q = inf + random.getrandbits(t-1)
        if test_miller_rabin(q) and q != p:
            break

    return p, q, p*q
```

3.6 Temps d'execution

gen_rsa est exponentiel en nombres de bits

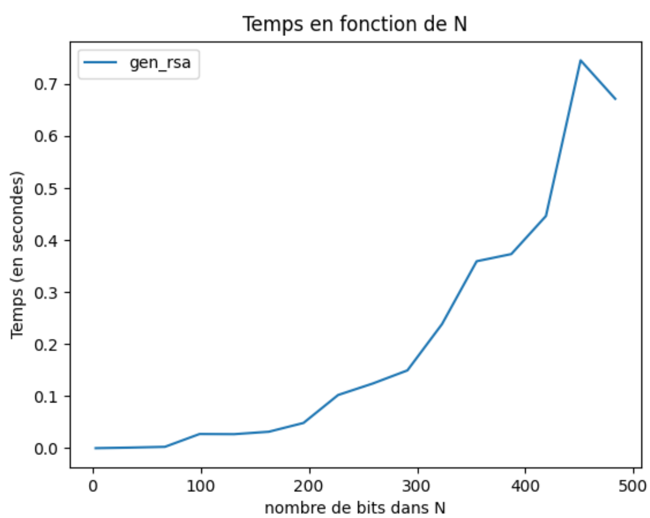


Figure 8: temps d'execution de gen_rsa par rapport à la taille des nombres en bits

3.6.1 BONUS:

Il aurait été dommage de conclure sans terminer le protocole RSA, nous avons donc aussi implémenté une fonction RSA, générant une paire de clef privée et public. Ces dernières sont utilisable dans les dernières fonctions, encode et decode pour encoder et décoder des messages.

On commence d'abords par générer 2 nombres premiers grands p, q , pour construire un nombre $n = p.q$ $\phi(n)$ est le nombre de nombres premier avec n (ce qui est dure a calculer directement), alors on chercherait plutôt à utiliser l'inverse n - nombre_pas_premier_avec_n, qui est beaucoup plus facile étant donné qu'on connaît les seuls diviseur de n (p et q), et donc un nombre pas premier avec n s'écrirait

$$\begin{aligned} \mathit{nombre\_pas\_premier\_avec\_n} &= \#(\{i.p \mid i \in [1 \ldots q]\} \cup \{i.q \mid i \in [1 \ldots p]\}) \\ &= (q-1) + (p-1) + 1 \\ &= (q-1) + p \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \phi(n) &= n - \mathit{nombre\_pas\_premier\_avec\_n} \\ &= p.q - ((q-1) + p) \\ &= p.q - (q-1) - p \\ &= p(q-1) - (q-1) \\ &= (q-1).(p-1) \end{aligned} \tag{4}$$

l'etape suivant consiste à trouve un nombre inversible modulo $\phi(n)$ e, d

$$d.e \equiv 1[\phi(n)]$$

ces deux nombre e, d, constitueront ,avec n, respectivement la clé_publique, et la clé_privé

Listing 13: RSA

```
def RSA(t):
    """
    return public_key, private_key
    """
    p, q, n = gen_rsa(t)

    # phi (nombre de nombres premier avec n, < n)
    phi = (p-1)*(q-1)

    while True:
        e = 2 + random.getrandbits(phi.bit_length())%(phi-3)
        gcd, _, d = my_gcd_etendu(phi, e)
        if(gcd == 1):
            break

    return (e, n), (d, n)
```

Pour encoder un message m il suffit de faire $s = m^e[n]$ et finallement pour décoder $m = s^d[n]$ cela marche en utilisant le petit theorem de fermat ameliotré:

$$a^{\phi(n)} \equiv 1[n]$$

$$s^d = (m^e)^d = m^{e.d} = m^{1+k.\phi(n)} = m^1.m^{\phi(n)=m[n]}$$

Listing 14: Encodage et décodage

```
def encode(m, public_key):
    """
    (e, n)
    """
    return [my_expo_mod(ord(c), *public_key) for c in m]

def decode(m, private_key):
    """
    (d, n)
    """
    return ''.join([chr(my_expo_mod(c, *private_key)) for c in m])
```

4 Conclusions

Pour conclure

A travers ces différents exercices, nous avons implémenté plusieurs algorithmes probabilistes dans le but de répondre au problème de la primalité. Au vu des résultat obtenue, nous nous somme rendu compte de l'intérêt et de la puissance des algorithme probabiliste, qui dans ce cas ci, permettent de répondre au problème de primalité avec des taux d'erreur très acceptable et des vitesses supérieur aux algorithmes déterministes classique. L'utilité de ce type d'algorithme est d'autant plus concrète une fois appliqué sur des problèmes plus concrets tel que le chiffrement RSA par exemple, nous obtenons une vitesse de chiffrement très convenable, chose qui n'aurait pas été possible en utilisant le test de primalité classique.