



# Fizika u video igrama

Miloš Beočanin, MSc

<https://github.com/mbeocanin>



# Sadržaj

1. *Game engine*
2. *Physics Engine*
  - model
  - kinematika
  - ograničeno kretanje
3. Demo
4. Pitanja

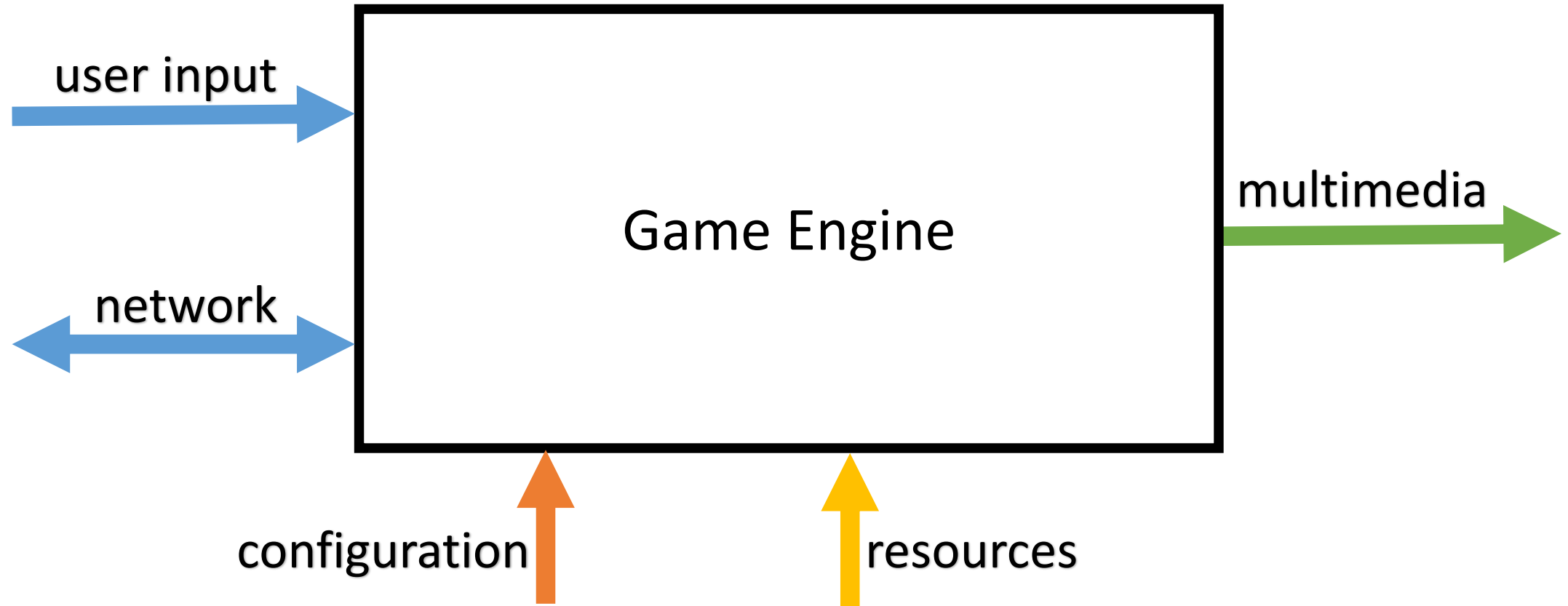


# Literatura

- *Game Physics – Second Edition, David Eberly*
- Erin Catto (<https://box2d.org/publications/>)

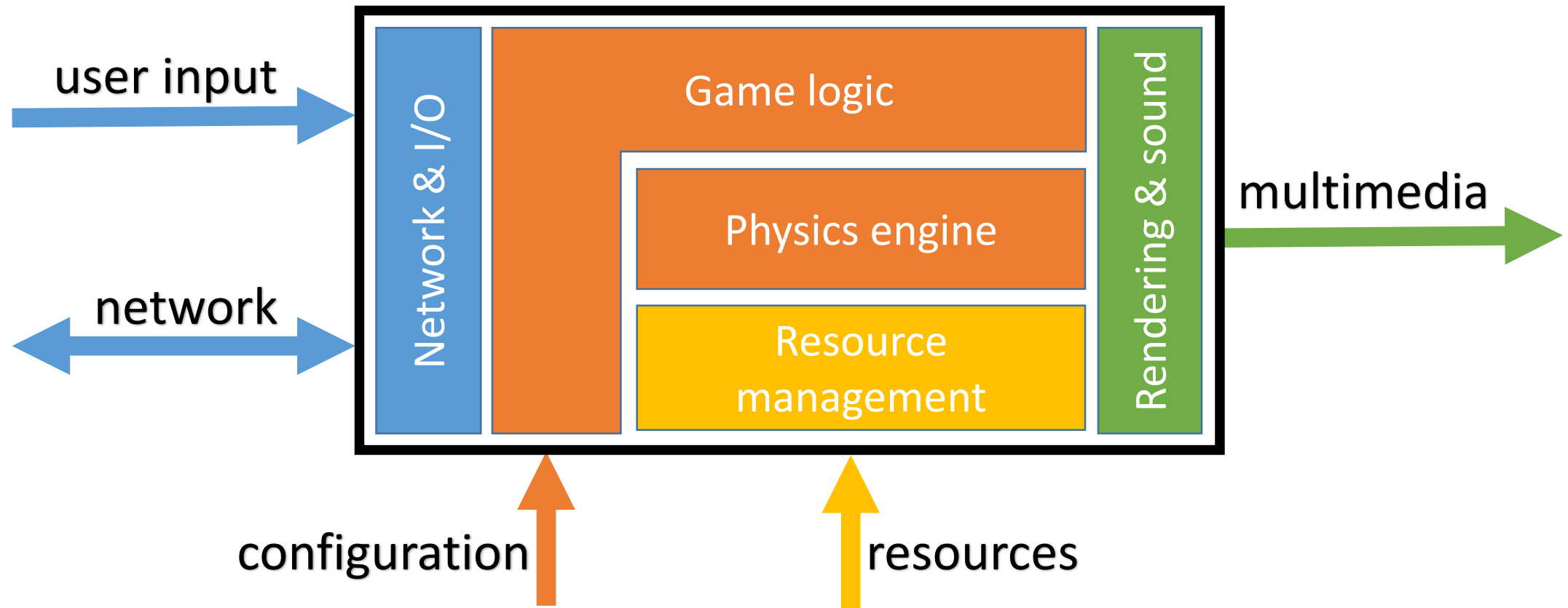


# Game Engine





# Game Engine





# Physics Engine

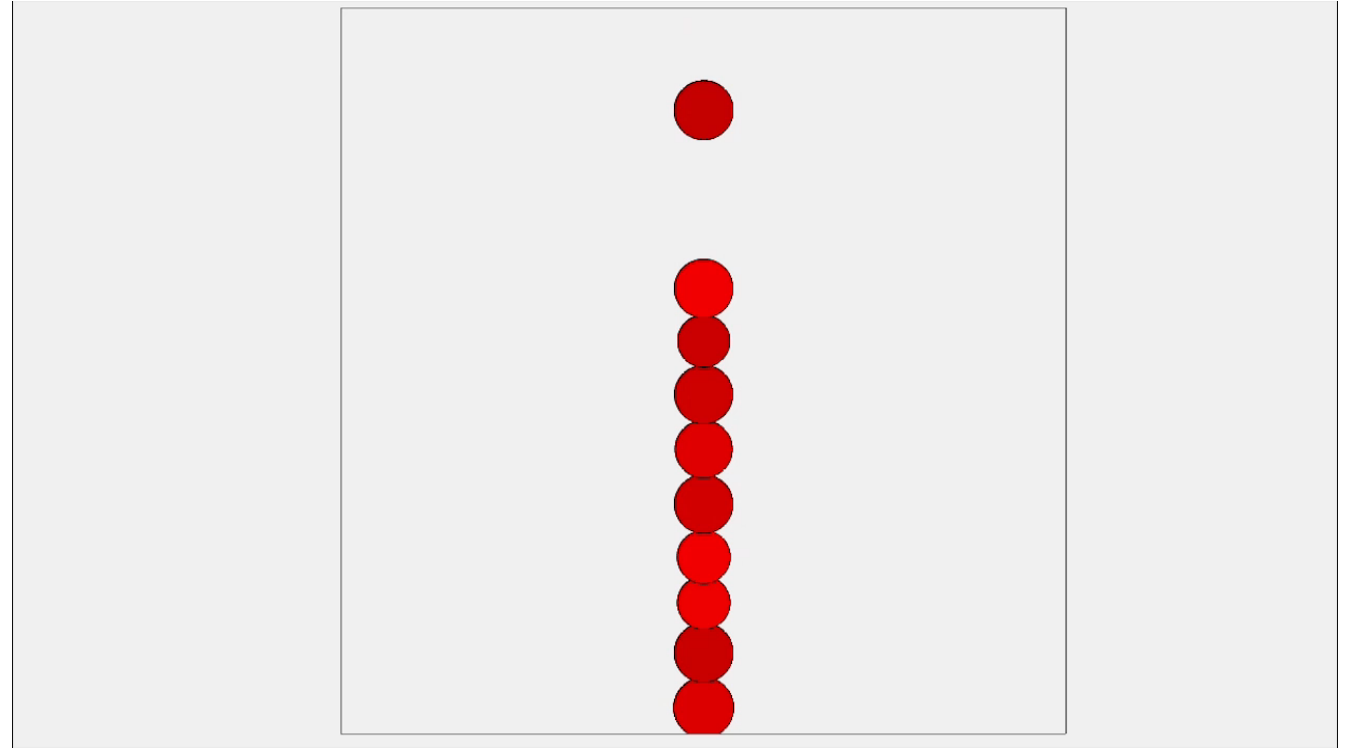
Oblasti:

1. Fizika (mehanika)
2. Teorija sistema (automatika)
3. Numerika
4. Grafika
5. Optimizacija



# Physics Engine

1. Model
  - I. Opis prostora
  - II. Opis tela
2. Kinematika (*kinematics*)
  1. Njutnovi zakoni kretanja
  2. Integracija
  3. Spoljašnje sile
3. Ograničeno kretanje (*constrained motion*):
  - I. Otkrivanje sudara (*collision detection*)
  - II. Modelovanje ograničenja (*constraint modeling*)
  - III. Rešavanje ograničenja (*constraint solving*)





# Model

Kako opisati **stanje** fizičkog sistema u datom trenutku?

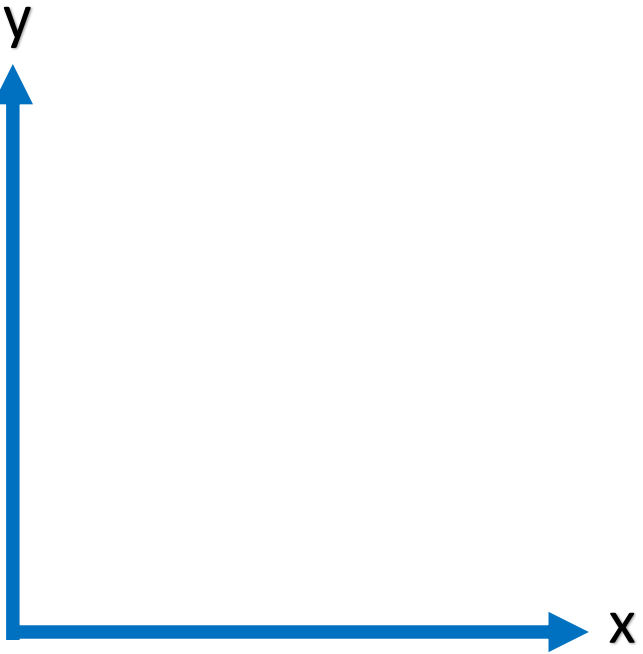




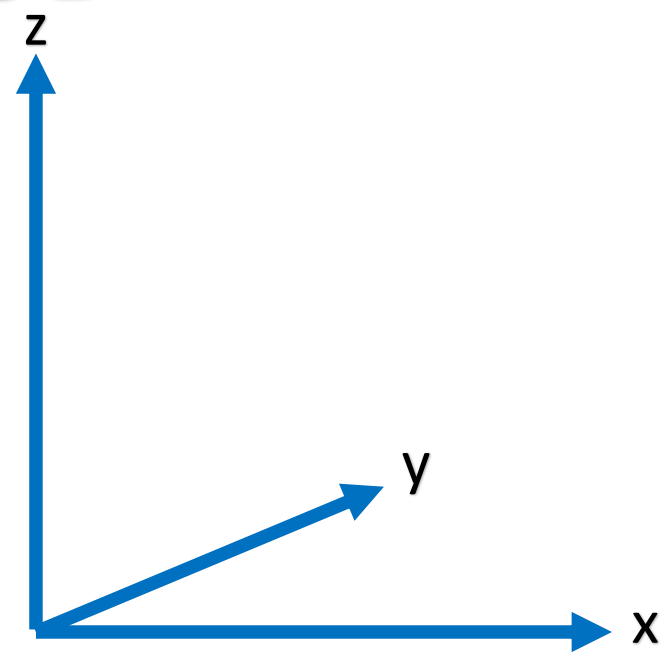
# Model

## 1. Opis prostora

2D



3D



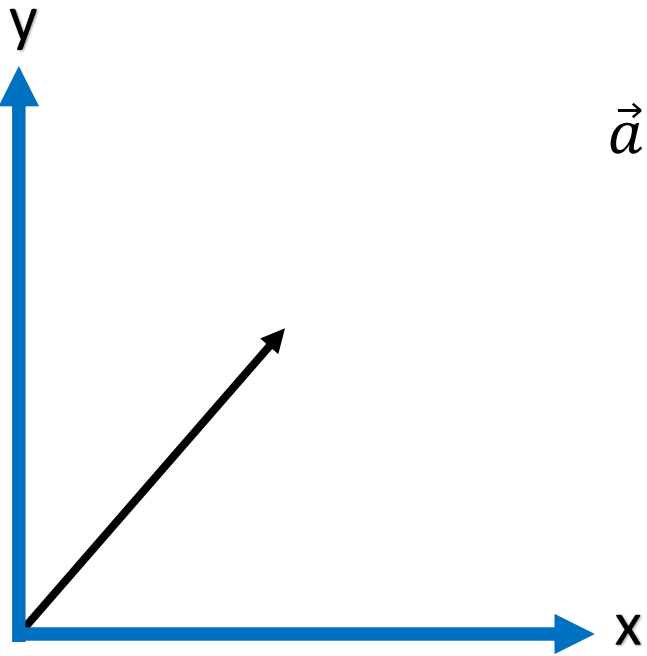


# Model

## 1. Opis prostora

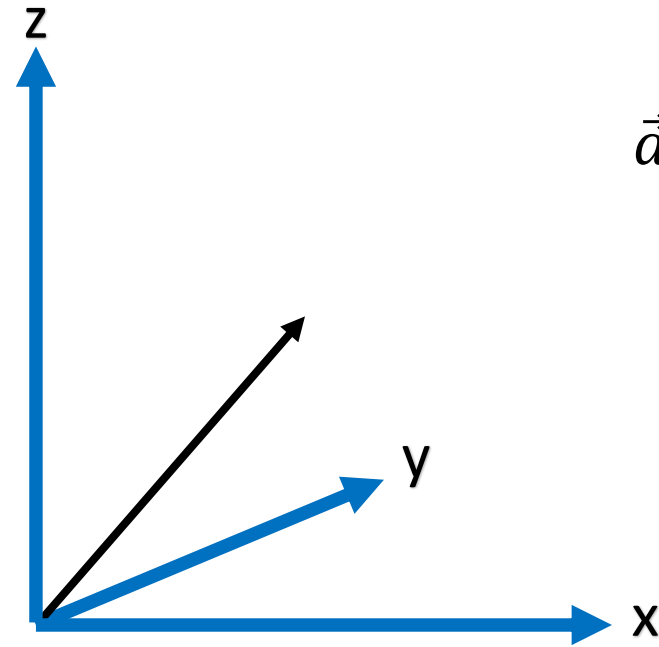
- vektori

2D



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3D



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



# Model

## 1. Opis prostora

- vektori
- + uopštavaju problem (ista rešenja važe za 2D i 3D)
- + uprošćavaju zapis (istovremeno se zapisuju operacije po svim dimenzijama)
- + brže izvršavanje (istovremeno se obavljaju operacije po svim dimenzijama)
- + pogodni za savremeni hardver
- + većina grafičkih API-a obezbeđuje model vektora sa potrebnim operacijama
- zahtevaju poznavanje vektorske algebra (treba se navići)

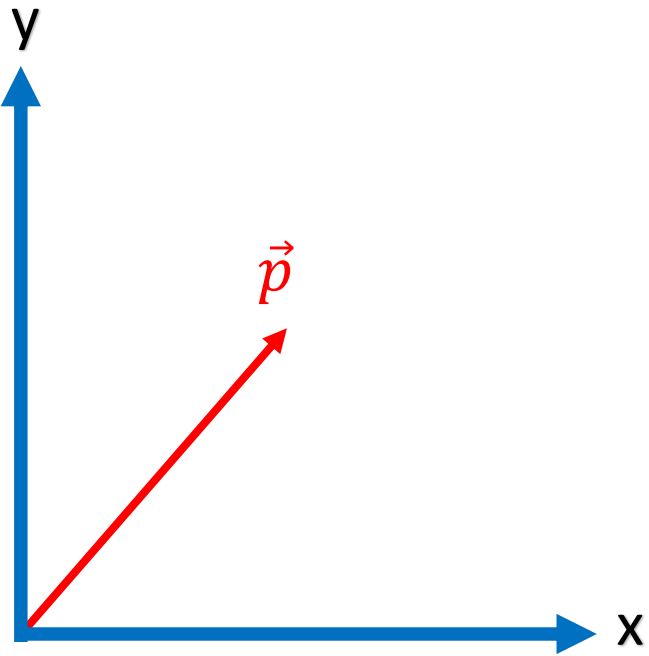


# Model

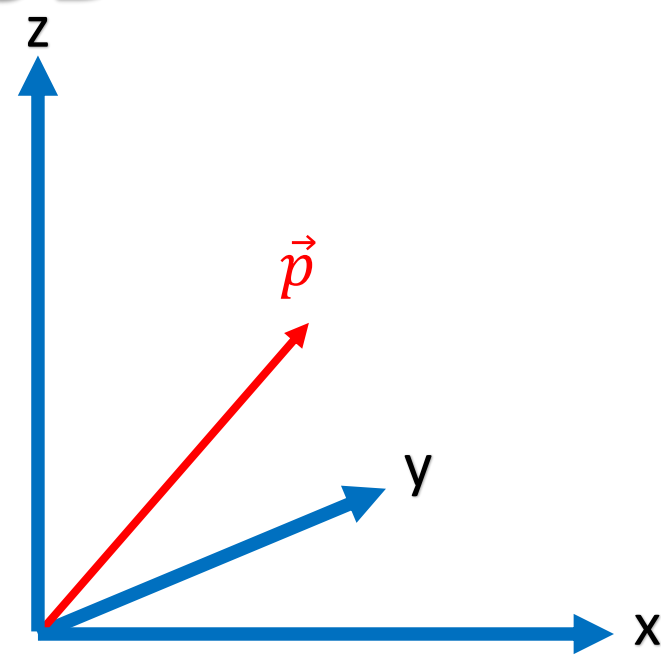
## 2. Opis tela

### I. položaj

2D



3D





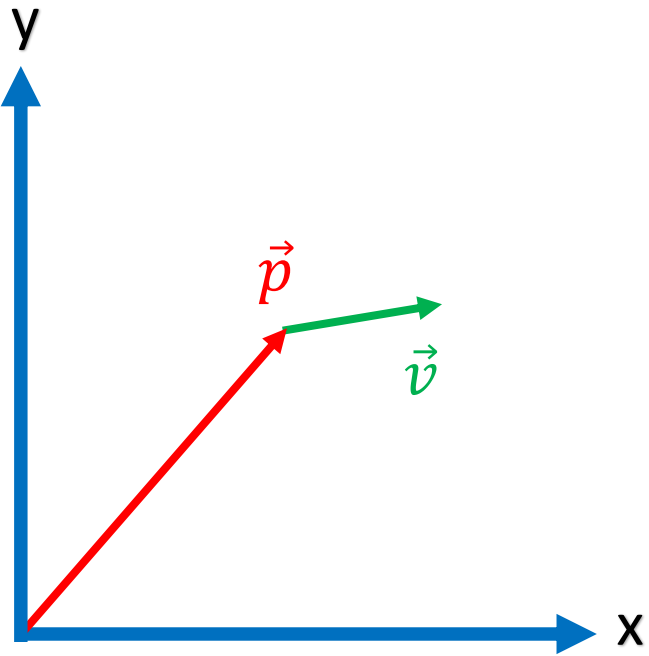
# Model

## 2. Opis tela

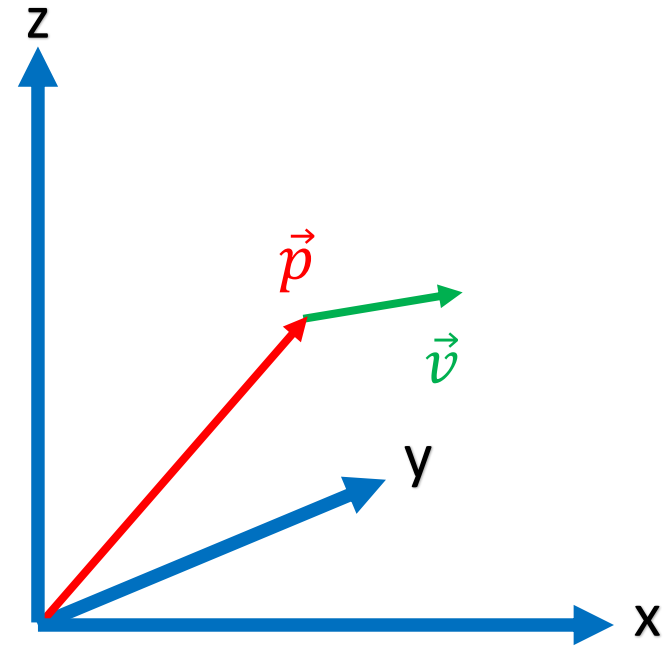
I. položaj

II. trenutna brzina

2D



3D



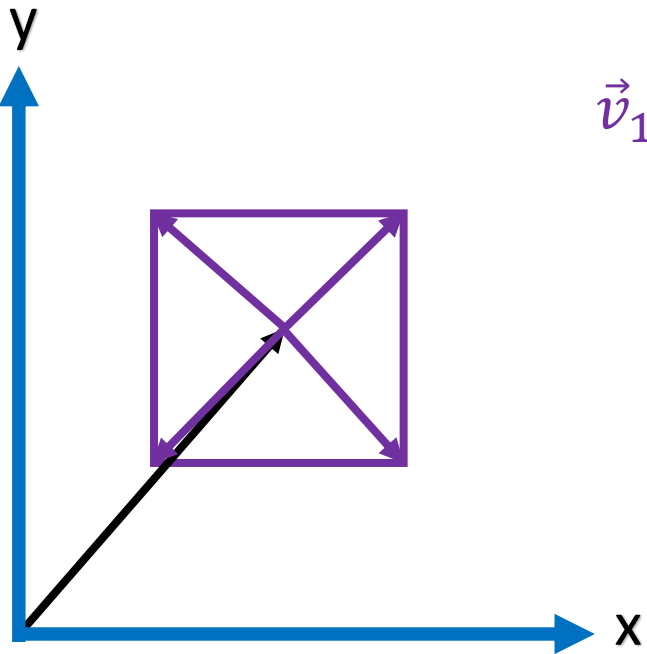


# Model

## 2. Opis tela

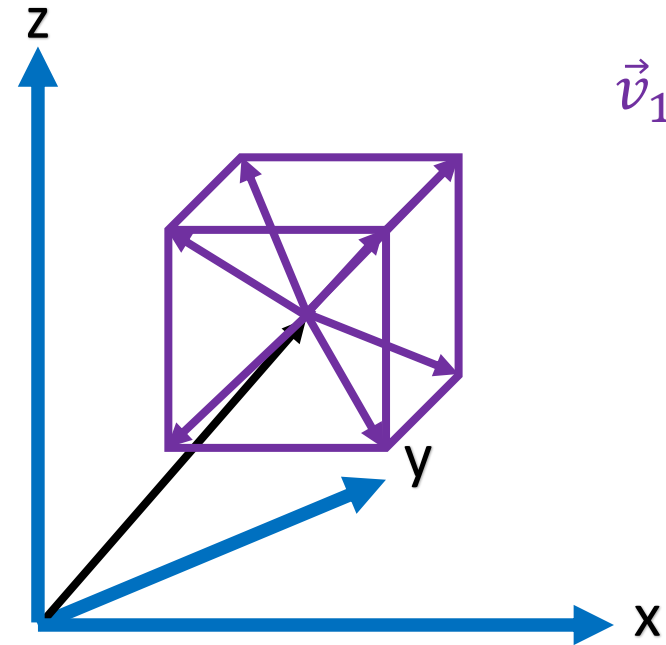
### IV. geometrija

2D



$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$

3D



$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$

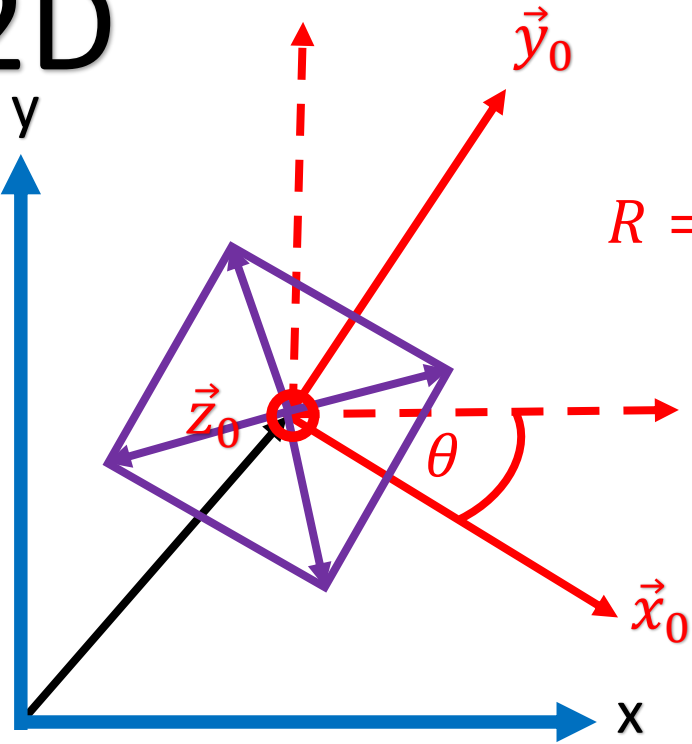


# Model

## 2. Opis tela

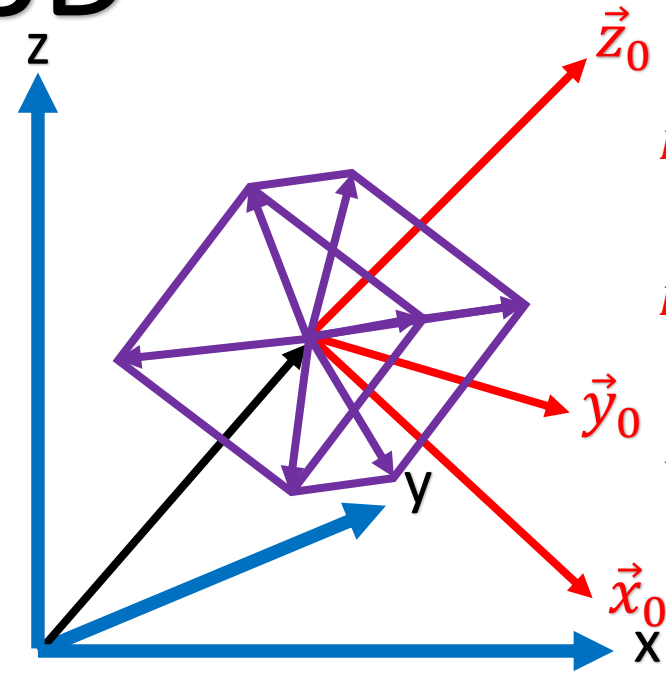
V. orijentacija

### 2D



$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

### 3D



$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix}$$
$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix}$$
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_x R_y R_z$$

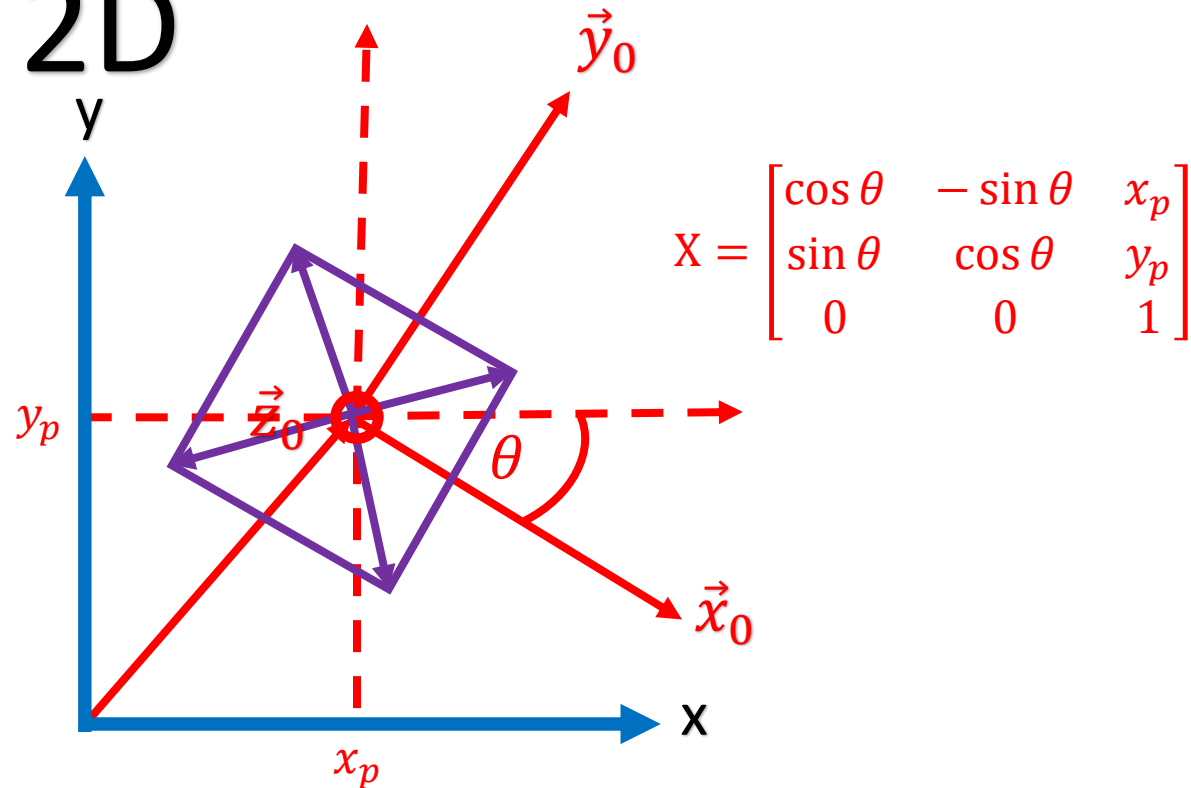


# Model

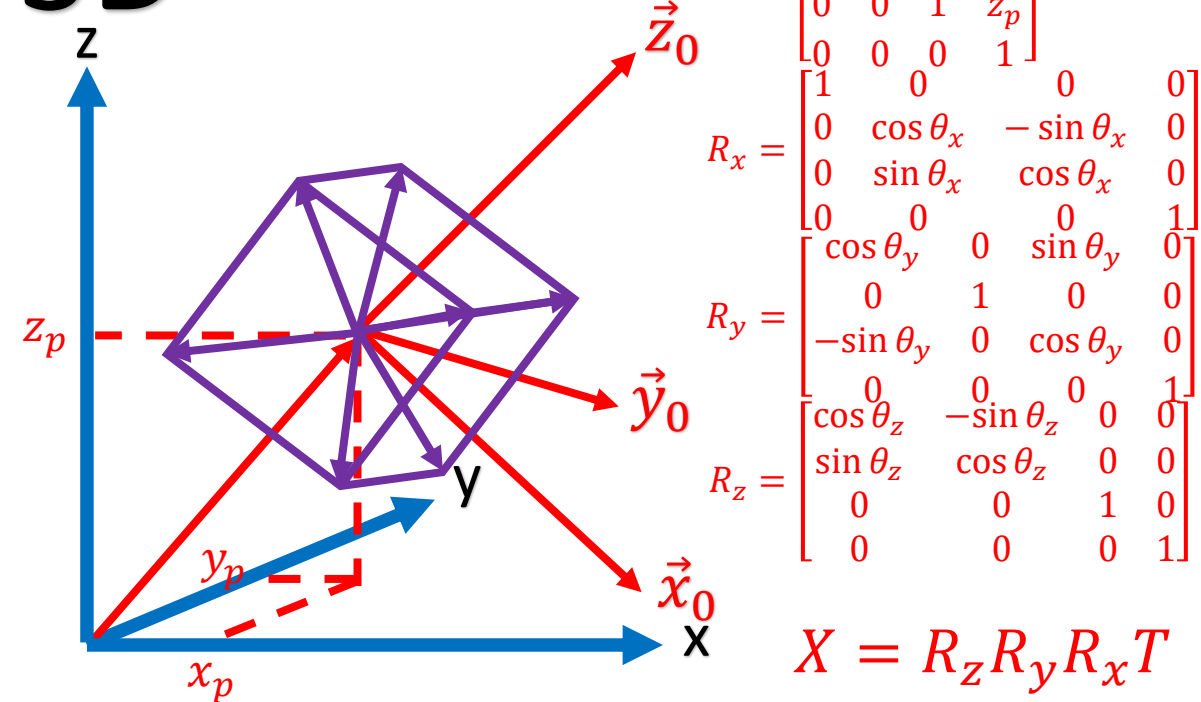
## 2. Opis tela

- transformacija tela: pozicija + orijentacija (homogene koordinate)

### 2D



### 3D





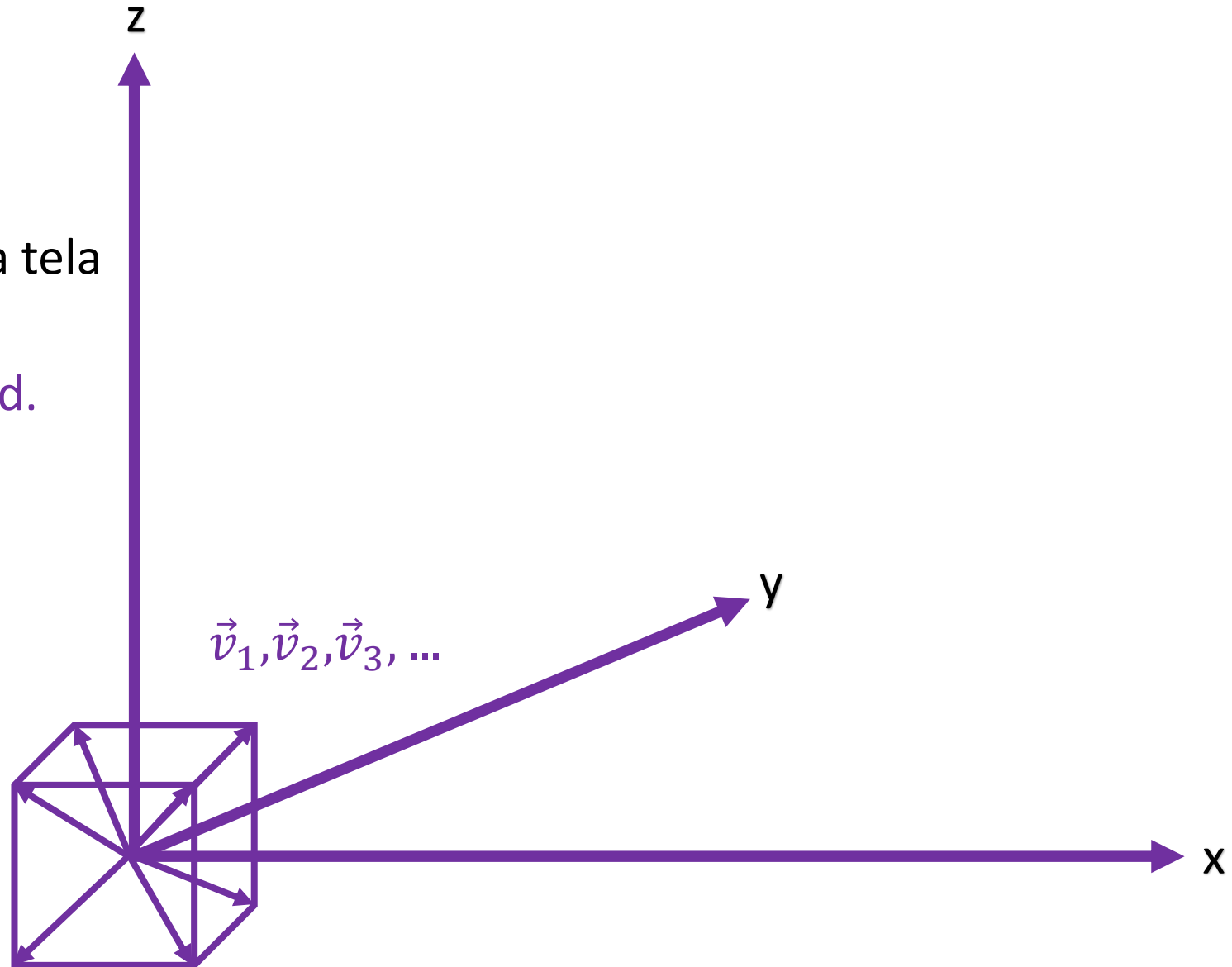


# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela

### I. lokalni koord. sistem



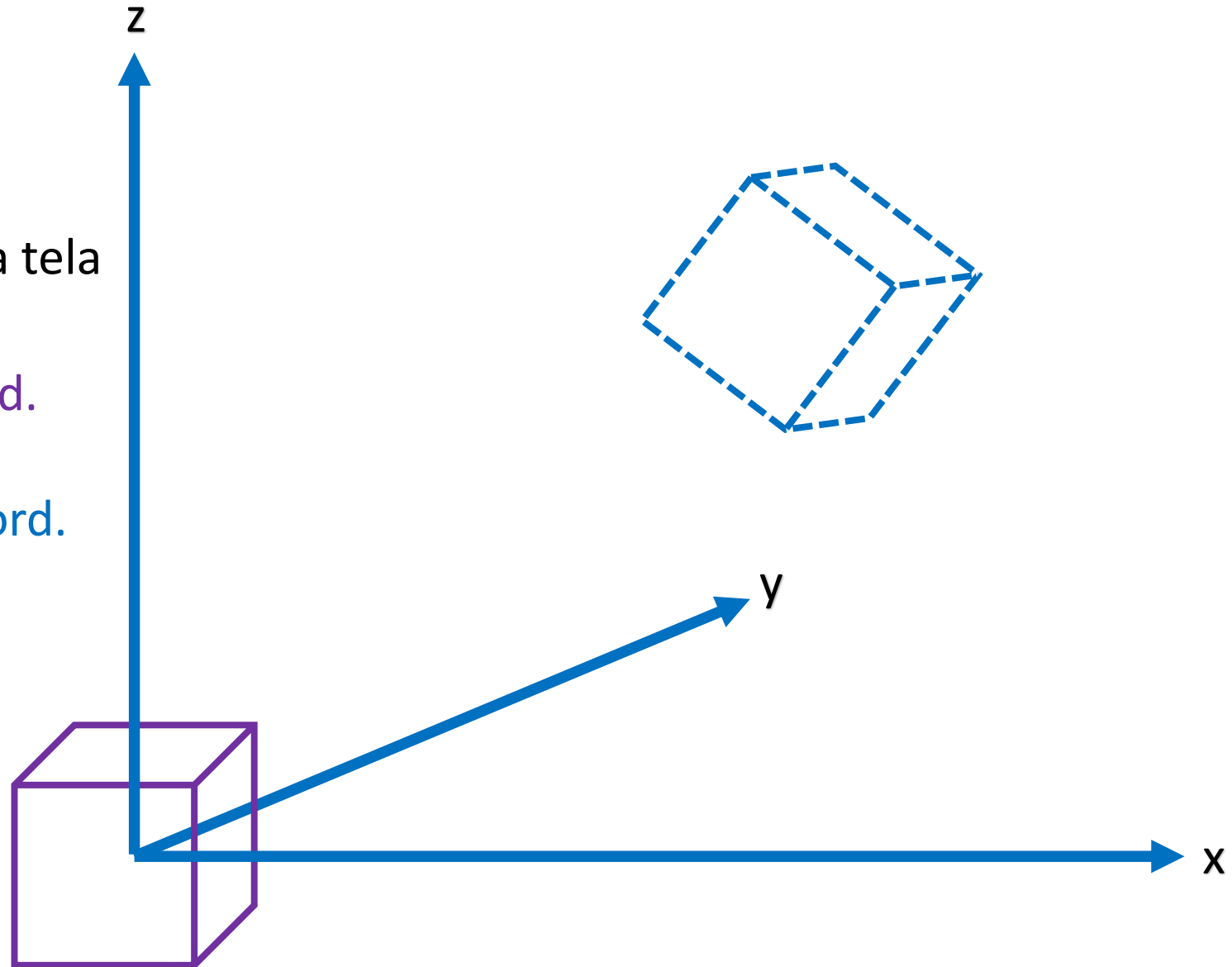


# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela

- I. lokalni koord. sistem
- II. globalni koord. sistem





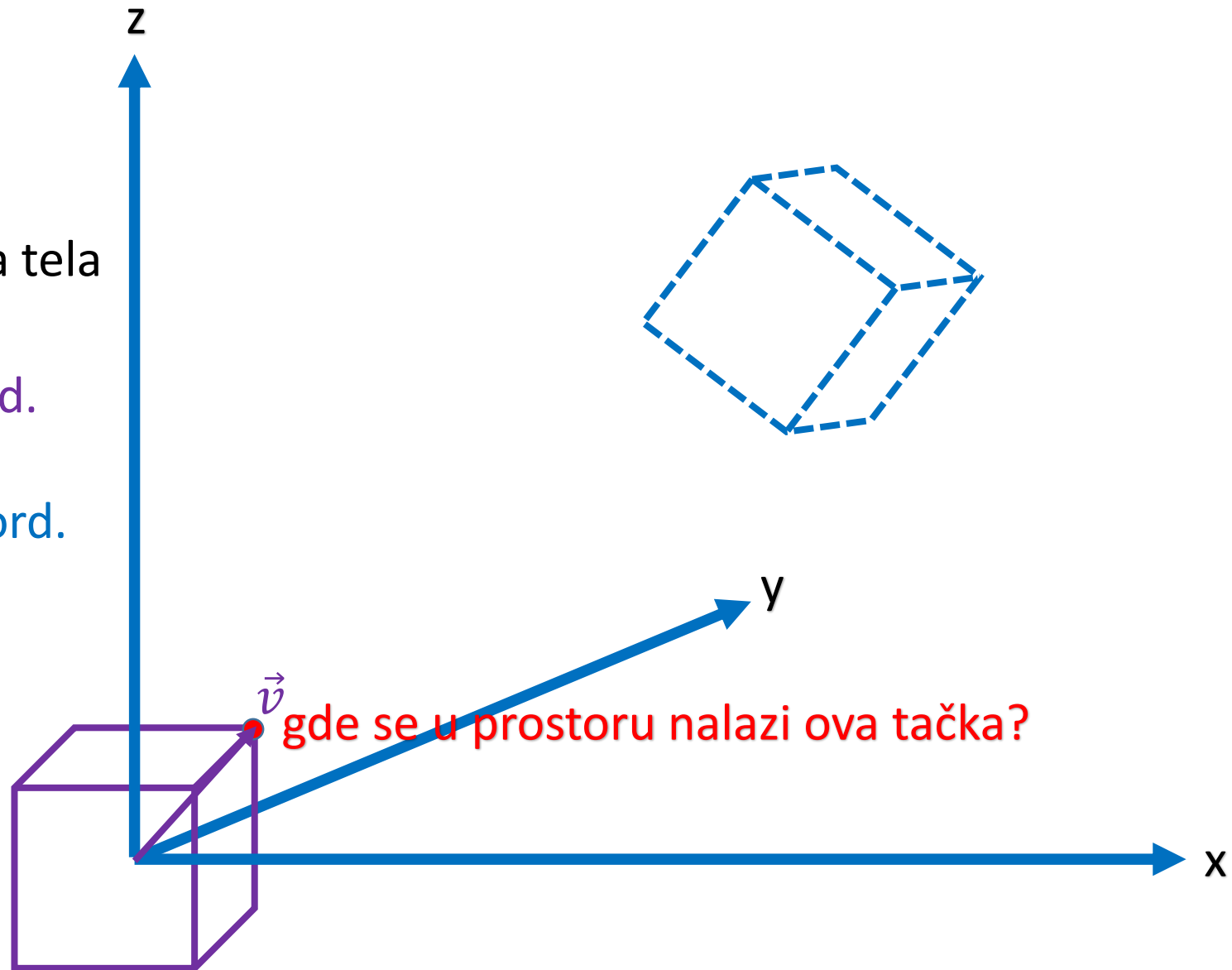
# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem



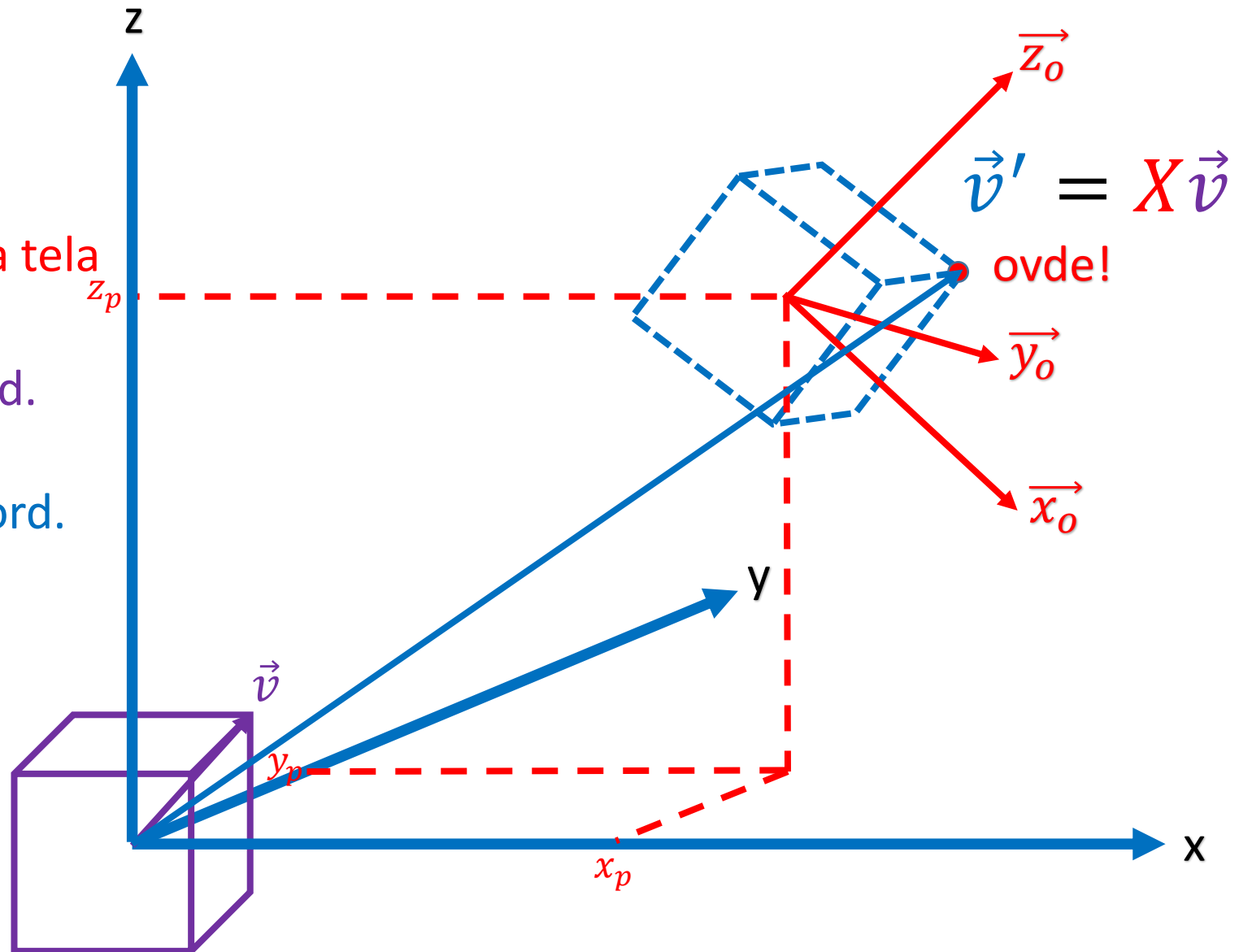


# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela

- lokalni koord. sistem
- globalni koord. sistem



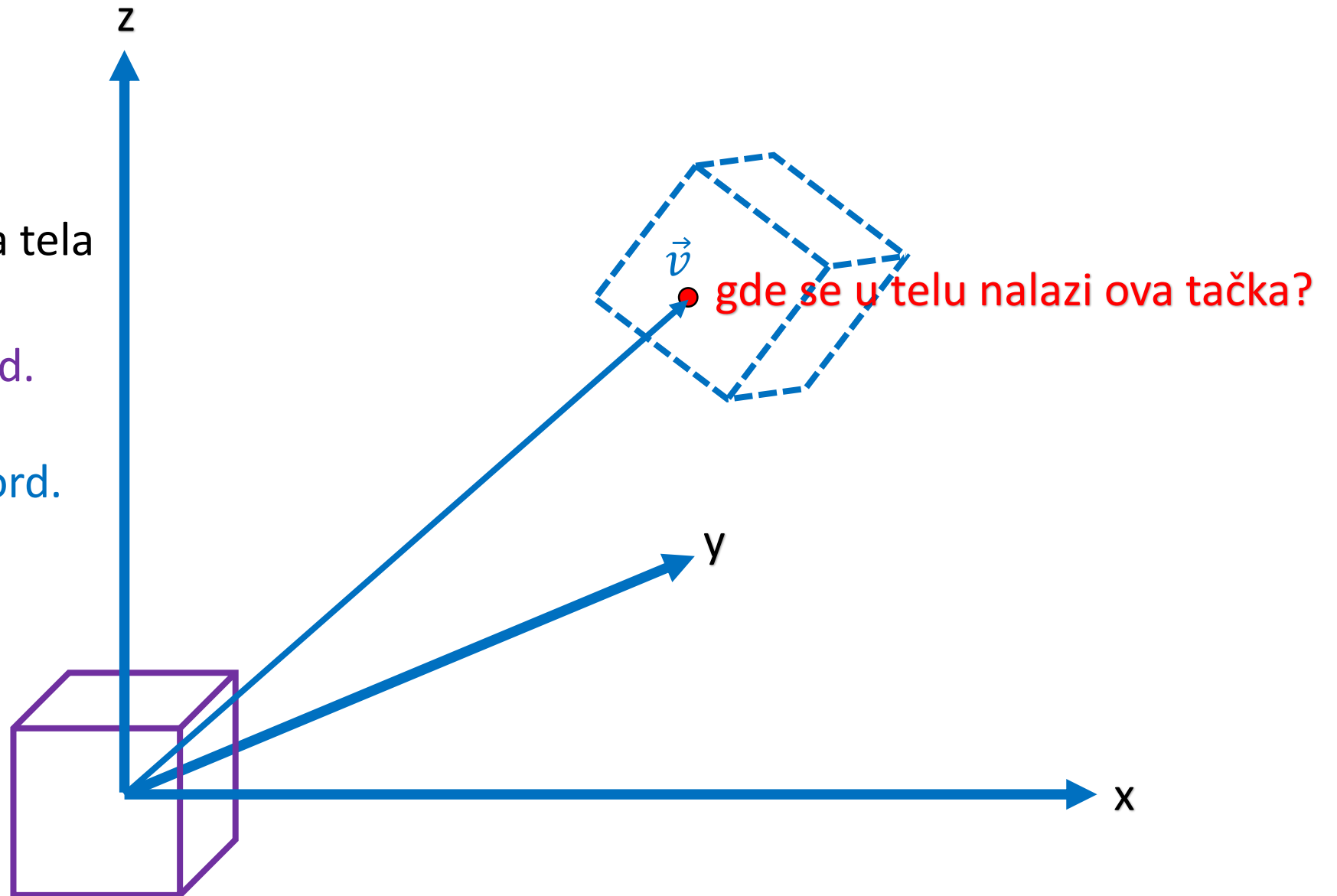


# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela

- lokalni koord. sistem
- globalni koord. sistem



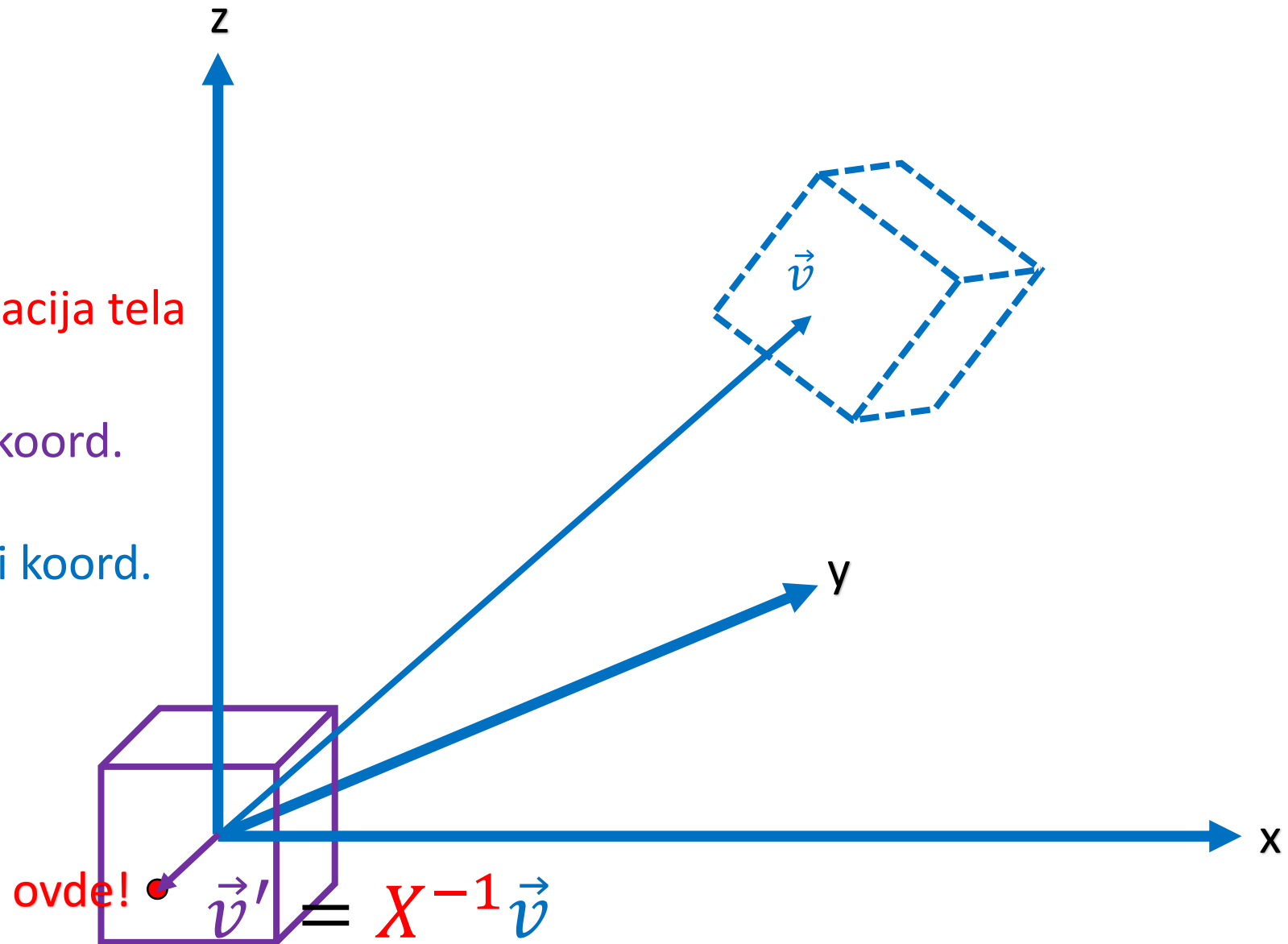


# Model

## 2. Opis tela

- (inverzna)  
transformacija tela

- I. lokalni koord.  
sistem
- II. globalni koord.  
sistem





# Model

## 2. Opis tela

- transformacija tela
- + geometrija tela se modeluje jednom u lokalnom koord. sistemu i više se ne menja
- + pri kretanju se menjaju samo položaj i orijentacija tela, a ne cela geometrija (mnogo manje zahtevno za procesor)
- + za prikaz se grafičkom API-u prosleđuje originalna geometrija tela i matrica transformacije, a grafički hardver obavlja sve potrebne proračune
- + većina grafičkih API-a obezbeđuje model matrice transformacije sa potrebnim operacijama
- za proračune koji obuhvataju geometriju više tela (npr. otkrivanje sudara), potrebno je transformisati tačke u isti prostor (globalni ili lokalni istog tela); ove proračune u opštem slučaju obavlja procesor, ali je potreba za tim najčešće reda od prikaza



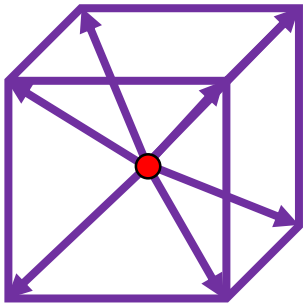
# Model

## 2. Opis tela

- geometrijski centar

$$\vec{C}_g = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{v}_i}{n}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$$







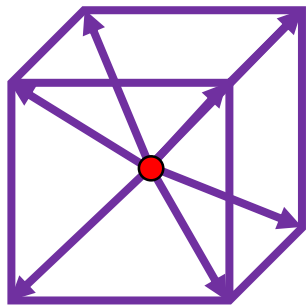
# Model

## 2. Opis tela

- geometrijski centar
- centar mase

$$\vec{C}_g = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{v}_i}{n}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$

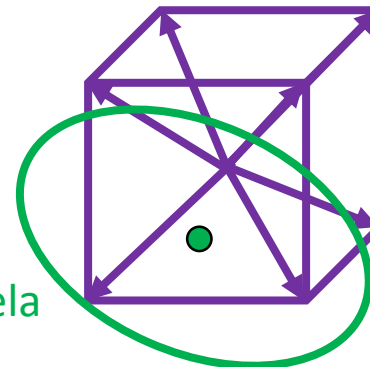


$$\vec{C}_m = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

za homogena tela:

$$\vec{C}_m = \vec{C}_g$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$   
 $m_1, m_2, m_3, \dots$



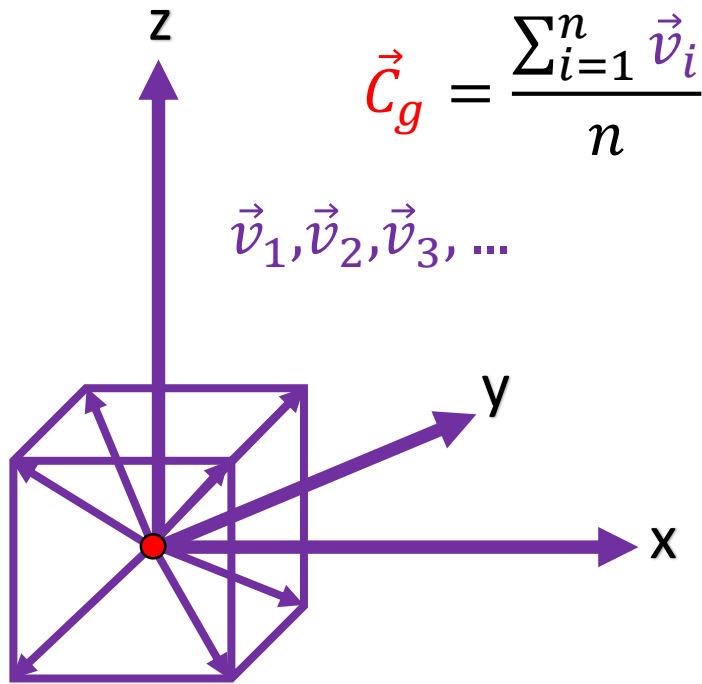
teža strana tela



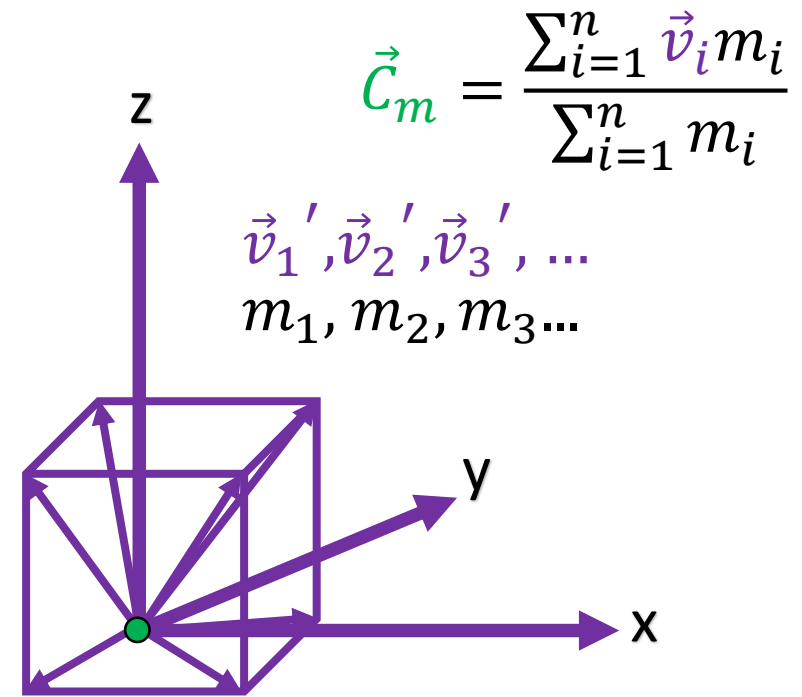
# Model

## 2. Opis tela

- geometrijski centar
- centar mase



$\vec{C}_g$  (ili  $\vec{C}_m$  ako postoji) treba da bude u koordinatnom početku lokalnog koord. sistema! (transformacije se vrše u odnosu na njega)



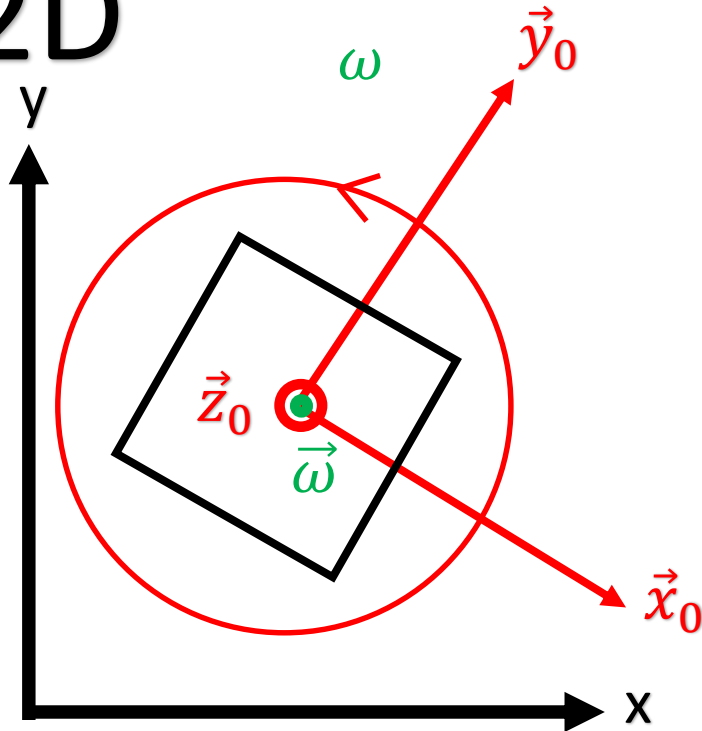


# Model

## 2. Opis tela

### VI. trenutna ugaona brzina

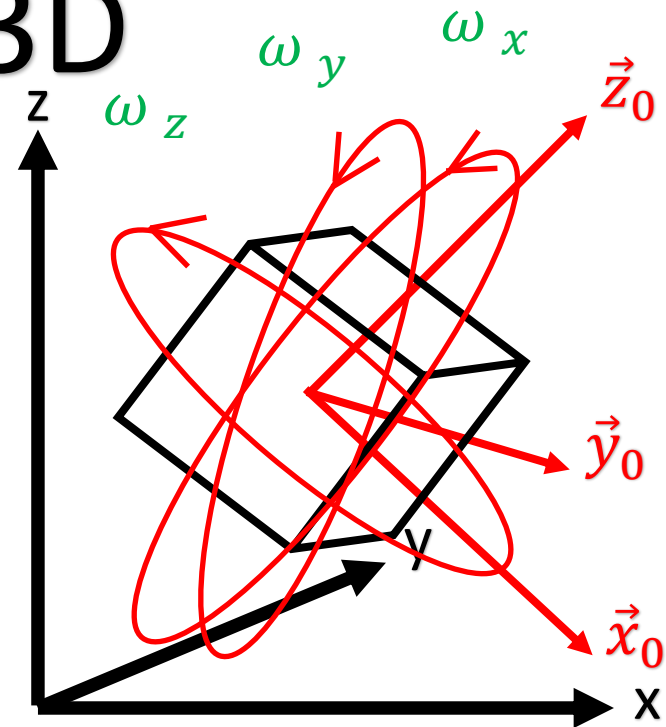
2D



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \omega$$

skalar!

3D



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

vektor!

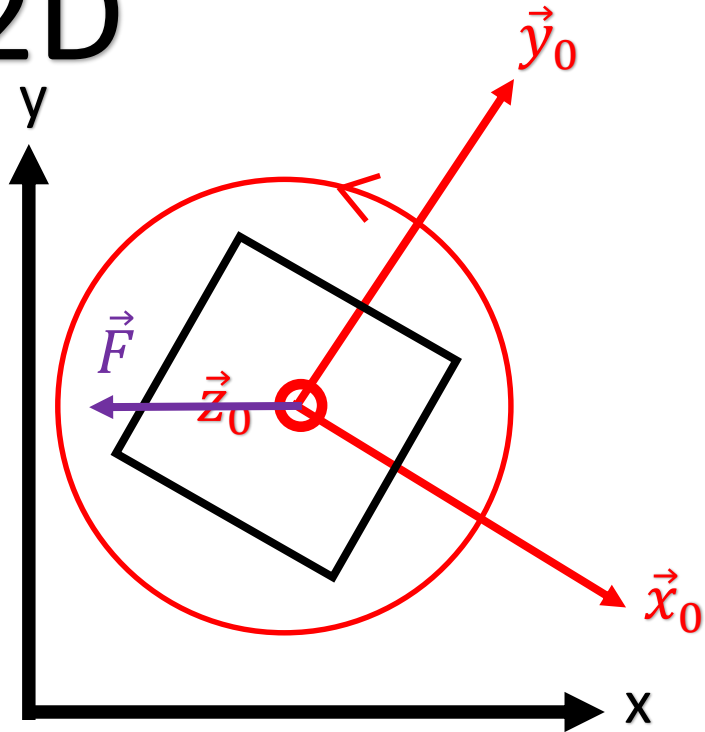


# Model

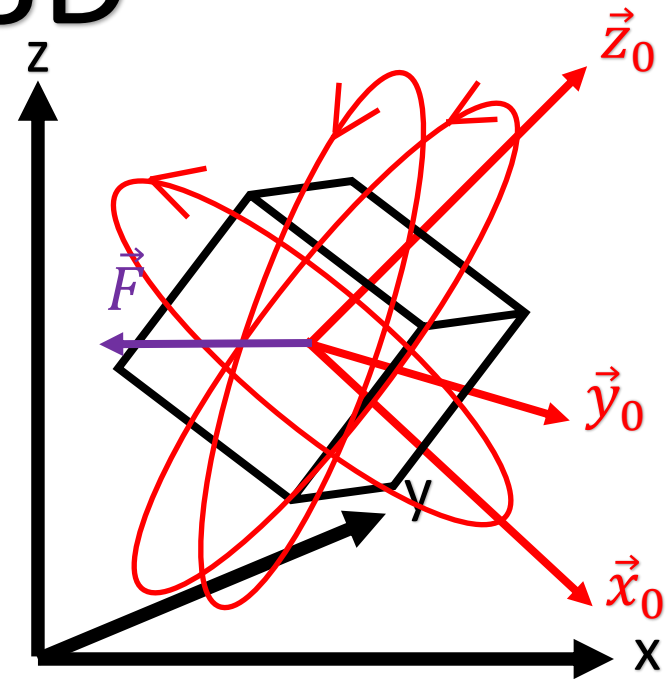
## 2. Opis tela

VIII. trenutna sila

2D



3D





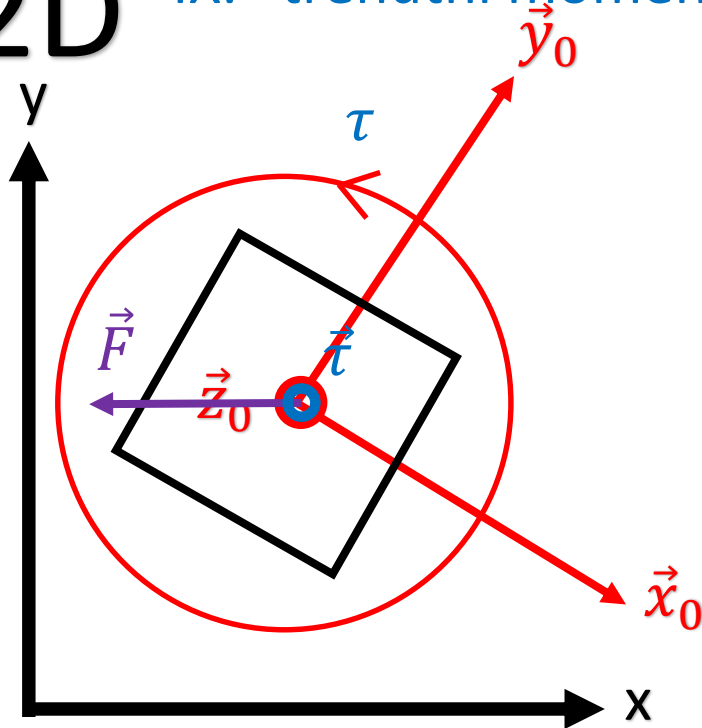
# Model

## 2. Opis tela

VIII. trenutna sila

IX. trenutni moment sile

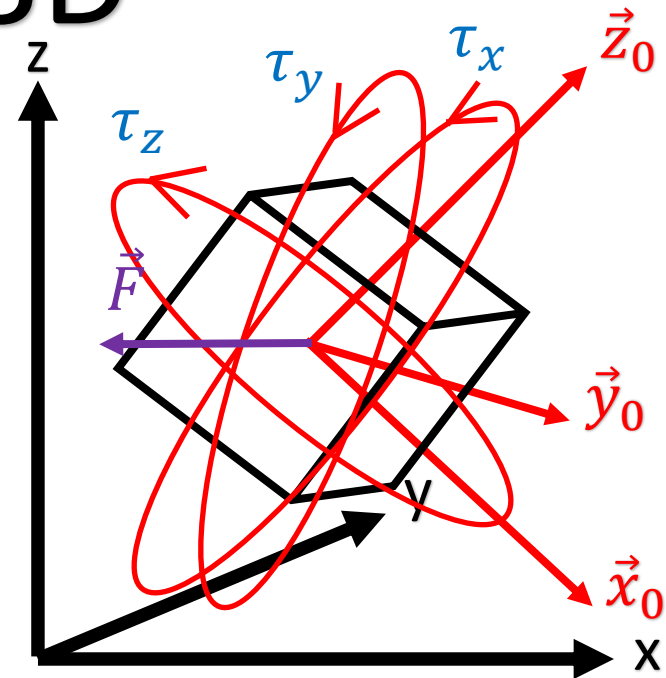
### 2D



$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} = \tau$$

skalar!

### 3D



$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

vektor!



# Model

## 2. Opis tela

X. masa

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje
2D/3D	
masa	
$m$	



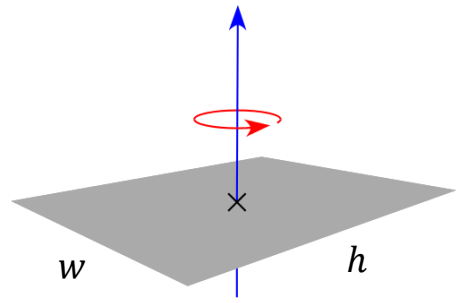
# Model

## 2. Opis tela

X. masa

XI. moment inercije

U tabeli su momenti inercije  
za rotaciju oko  $\vec{C}_g$



Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	2D	
masa	moment inercije (skalar)	
m	krug: $I = \frac{mr^2}{2}$	
	pravougaonik: $I = \frac{m}{12}(w^2 + h^2)$	
	⋮	



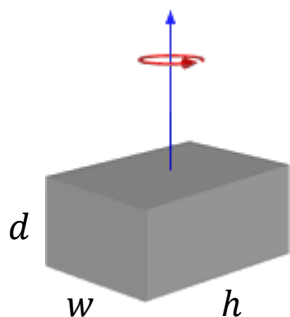
# Model

## 2. Opis tela

X. masa

XI. tenzor inercije

U tabeli su tenzori inercije za rotaciju oko  $\vec{C}_g$



Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	2D	3D
masa	moment inercije (skalar)	tenzor inercije (matrica)
$m$	krug: $I = \frac{mr^2}{2}$	sfera: $I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$
	pravougaonik: $I = \frac{m}{12}(w^2 + h^2)$	kvadar: $I = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(h^2 + d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(w^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$
	$\vdots$	$\vdots$





# Model

## 2. Opis tela

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	2D	3D
<b>geometrija:</b> $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ $[m]$	<b>geometrija:</b> $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ $[m]$	
<b>položaj:</b> $\vec{p}$ $[m]$	<b>ugao:</b> $\theta$ $[rad]$	<b>orijentacija:</b> $\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$ $[rad]$
<b>brzina:</b> $\vec{v}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$	<b>ugaona brzina:</b> $\omega$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$	<b>ugaona brzina:</b> $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$
<b>sila:</b> $\vec{F}$ $[N]$	<b>moment sile:</b> $\tau$ $[Nm]$	<b>moment sile:</b> $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$ $[Nm]$
<b>masa:</b> $m$ $[kg]$	<b>moment inercije:</b> $I$ $\left[\frac{kg}{m^2}\right]$	<b>tenzor inercije:</b> $I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$ $\left[\frac{kg}{m^2}\right]$



# Kinematika

Kako opisati **promene stanja** fizičkog sistema između dva uzastopna trenutka?



# Kinematika

Za poznate početne uslove kretanja:

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	2D	3D
početni položaj: $\vec{p}_0$	početni ugao: $\theta_0$	početna orijentacija: $\vec{\theta}_0$
početna brzina $\vec{v}_0$	početna ugaona brzina $\omega_0$	početna ugaona brzina: $\vec{\omega}_0$

Potrebno je naći:

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	2D	3D
položaj: $\vec{p}(t) = ?$	ugao: $\theta(t) = ?$	orijentacija: $\vec{\theta}(t) = ?$



# Kinematika

- analitičko rešenje (ako je  $\vec{F}$  konstantna):

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{\vec{F}}{m} t^2$$

- ne može se opisati složeno kretanje
- ne može se opisati interaktivno kretanje (uslovljeno reakcijom korisnika)

Vratimo se na početak! Odakle ova jednačina?

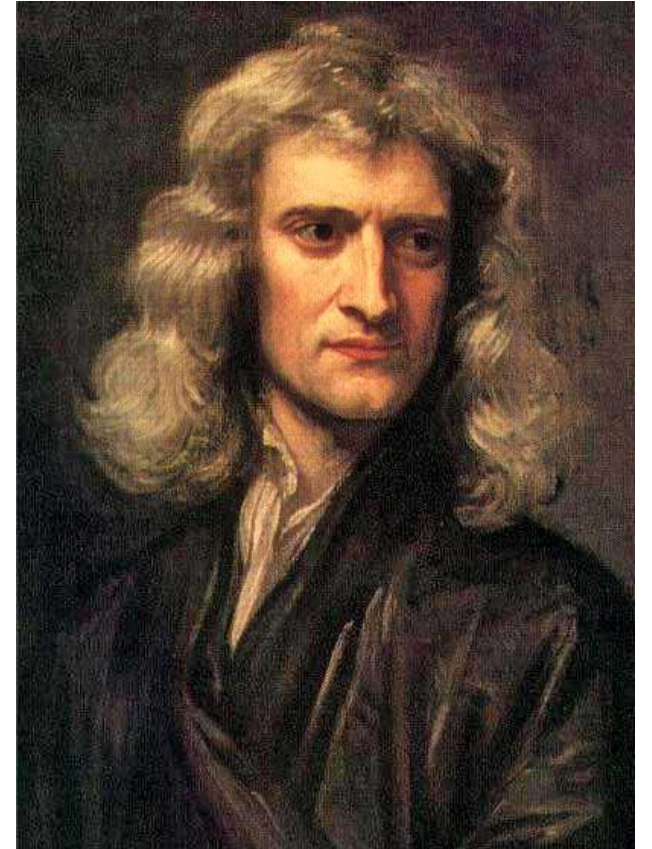


# Kinematika

- 2. Njutnov zakon kretanja:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\ \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} &= \frac{\vec{F}}{m}\end{aligned}$$

Diferencijalna jednačina 2. reda!

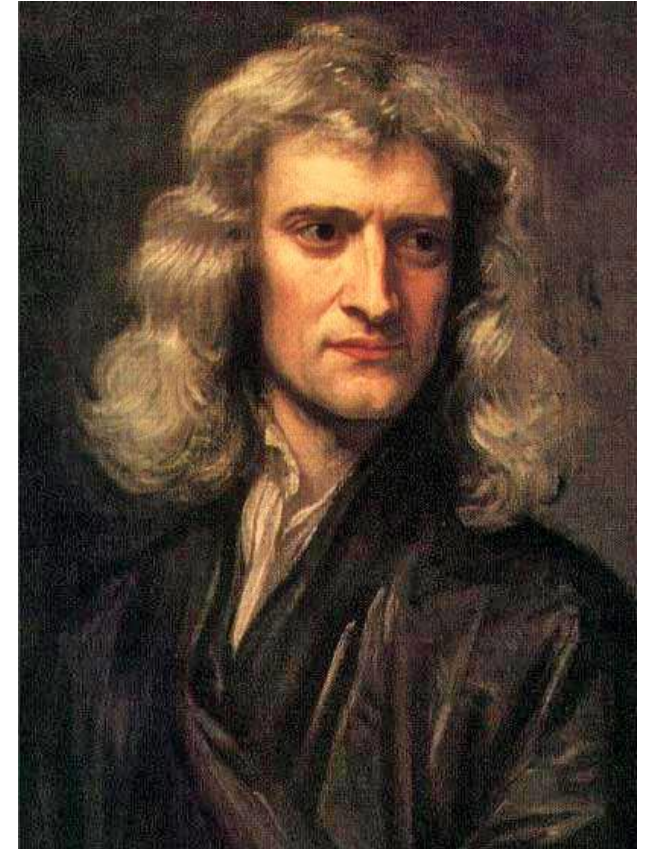




# Kinematika

- 2. Njutnov zakon kretanja:

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



Kako izgleda analitičko rešenje kada  $\vec{F}(t)$  nije konstantna?

Zavisi od  $\vec{F}(t)$ , a ona zavisi od interakcije!



# Kinematika

Funkcija se u svakom trenutku  $(t + \Delta t)$  može razviti u Tejlorov red:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

Preskočiti analitičko rešenje i umesto toga rešiti dif. jedn. numerički!



# Kinematika

- Ojlerov metod

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

$$f(t + \Delta t) \approx f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt}$$





# Kinematika

- Ojlerov metod

funkcija položaja:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$



# Kinematika

- Ojlerov metod

jednom diferencirane obe strane jednačine:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}(t + \Delta t)}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \Delta t \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}$$



# Kinematika

- Ojlerov metod

smena:  $\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



# Kinematika

- Ojlerov metod

iterativni zapis:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_{i-1}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$



# Kinematika

- Ojlerov metod

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_{i-1}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

- koristi **brzinu iz prošle iteracije** za izračunavanje položaja



# Kinematika

- simplektički (*Semi-implicit*) Ojlerov metod

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

- + prvo izračuna **brzinu za tekuću iteraciju**, a zatim je koristi za izračunavanje položaja
- + unapređena stabilnost metode za isti broj operacija!

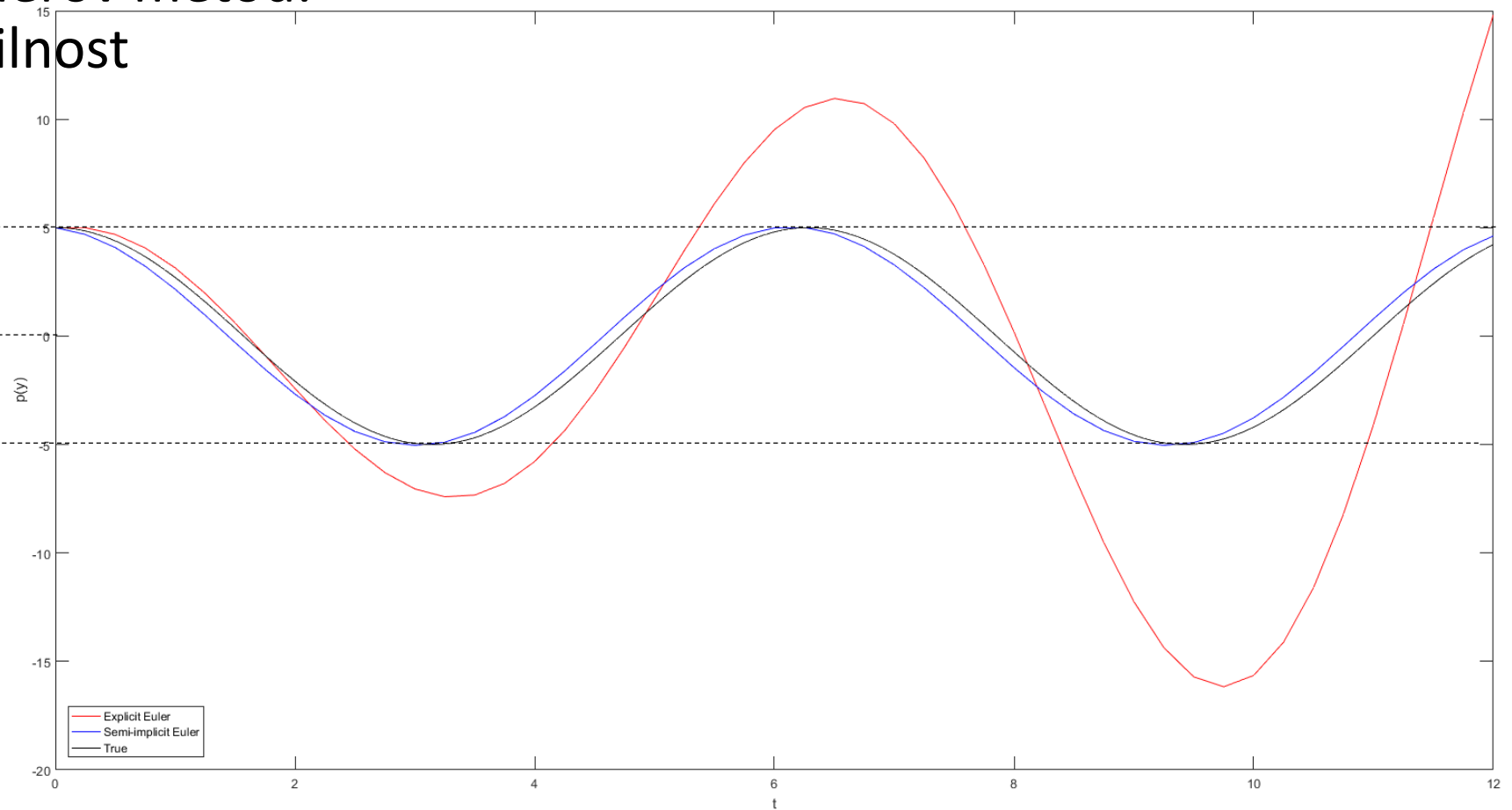
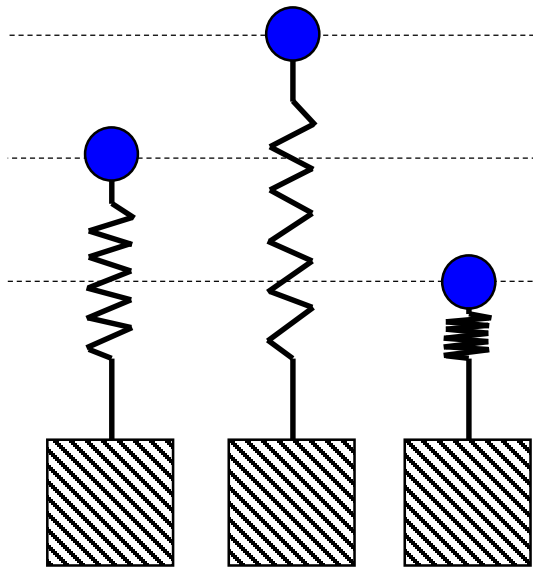


# Kinematika



Neptun

- simplektički Ojlerov metod:  
tačnost  $\neq$  stabilnost





# Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

<b>0</b>
$\vec{v}_0$
$\vec{p}_0$

<b>0</b>
$\vec{\omega}_0$
$\vec{\theta}_0$





# Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$



# Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

<b>0</b>	<b>0 + Δt</b>	<b>0 + 2Δt</b>
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$	$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta t \frac{\vec{F}_1}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$	$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta t \vec{v}_2$

<b>0</b>	<b>0 + Δt</b>	<b>0 + 2Δt</b>
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$	$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_1}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$	$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \Delta t \vec{\omega}_2$



# Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

<b>0</b>	<b>0 + Δt</b>	<b>0 + 2Δt</b>	<b>0 + iΔt</b>
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$	$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta t \frac{\vec{F}_1}{m}$	$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$	$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta t \vec{v}_2$	$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$

<b>0</b>	<b>0 + Δt</b>	<b>0 + 2Δt</b>	<b>0 + iΔt</b>
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$	$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_1}{I}$	$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{\tau}_{i-1}}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$	$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \Delta t \vec{\omega}_2$	$\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_{i-1} + \Delta t \vec{\omega}_i$



# Kinematika

- postupak (*pipeline*):

Primena sile

Integracija

Prikaz

Pauza



# Kinematika

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{\tau}_{i-1}}{I}$$

$$\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_{i-1} + \Delta t \vec{\omega}_i$$

Šta je poznato a šta nepoznato?



# Kinematika

- 1. Njutnov zakon:

ako su  $\vec{F}_{i-1} = 0$  i  $\vec{\tau}_{i-1} = 0$ :

a) ako su  $\vec{v}_{i-1} \neq 0$  i  $\vec{\omega}_{i-1} \neq 0$ :

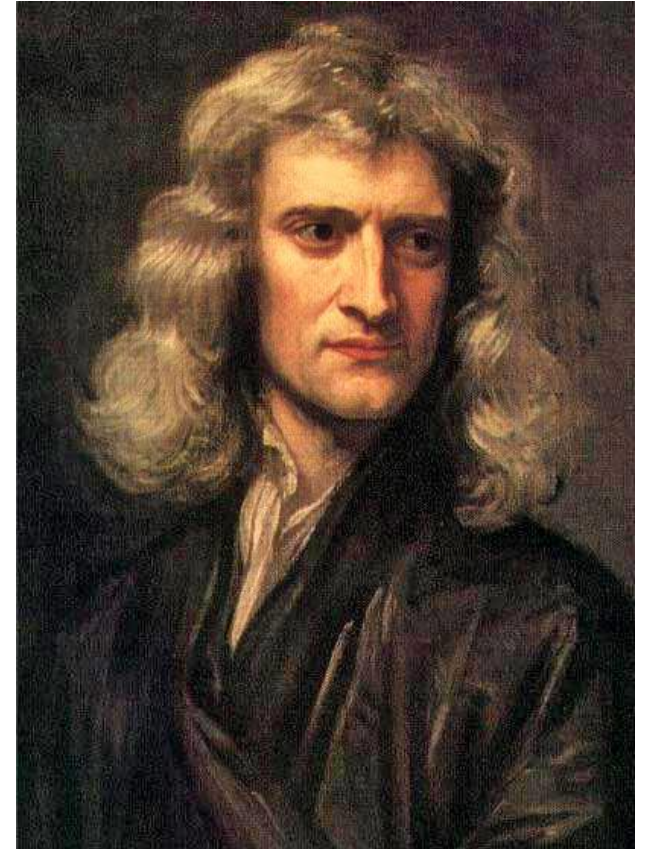
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{0}{m} = \vec{v}_{i-1} = \text{const.}$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{0}{I} = \vec{\omega}_{i-1} = \text{const.}$$

b) ako su  $\vec{v}_{i-1} = 0$  i  $\vec{\omega}_{i-1} = 0$ :

$$\vec{v}_i = 0 + \Delta t \frac{0}{m} = 0 = \text{const.}$$

$$\vec{\omega}_i = 0 + \Delta t \frac{0}{I} = 0 = \text{const.}$$





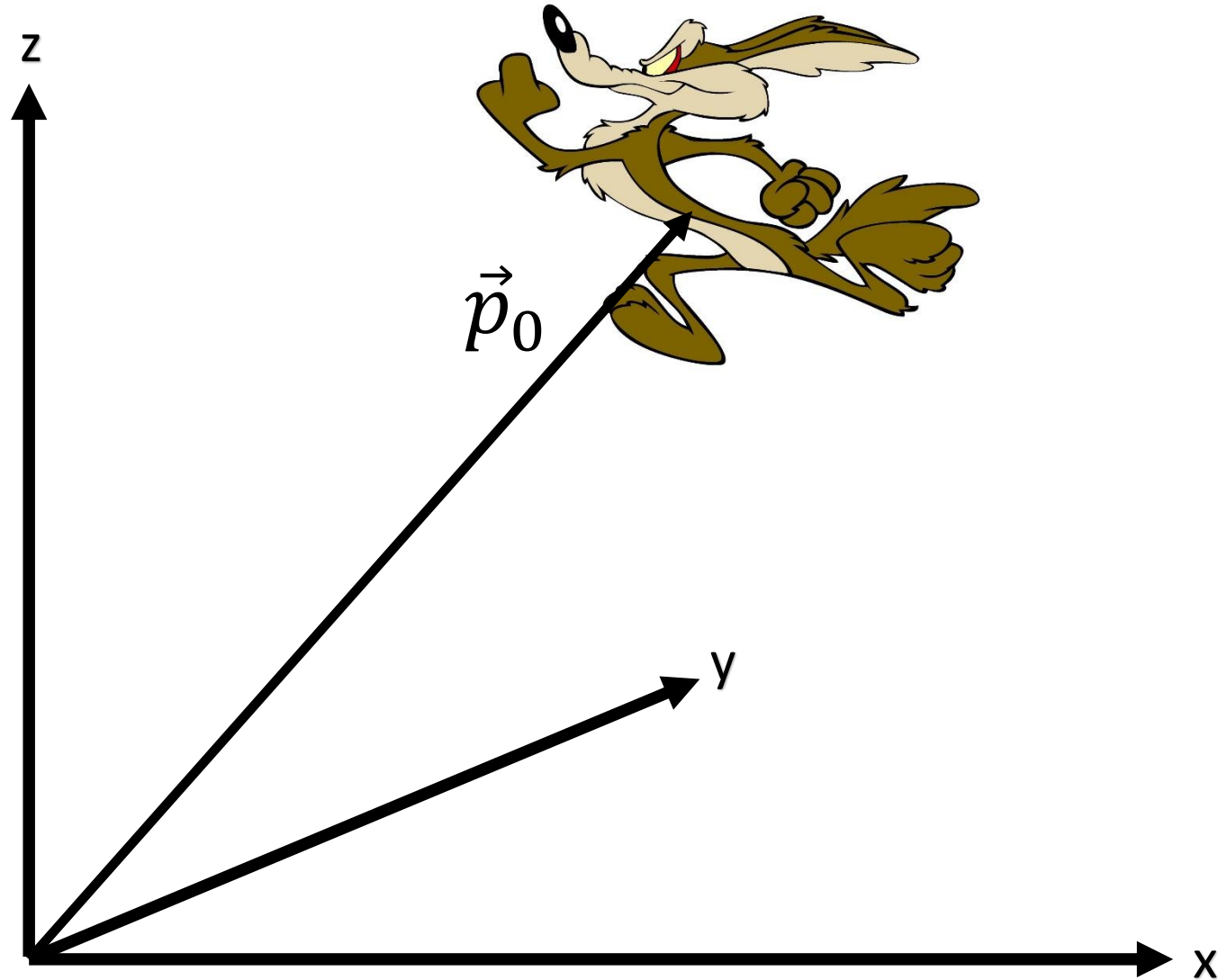
# Kinematika

$$\vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = 0$$





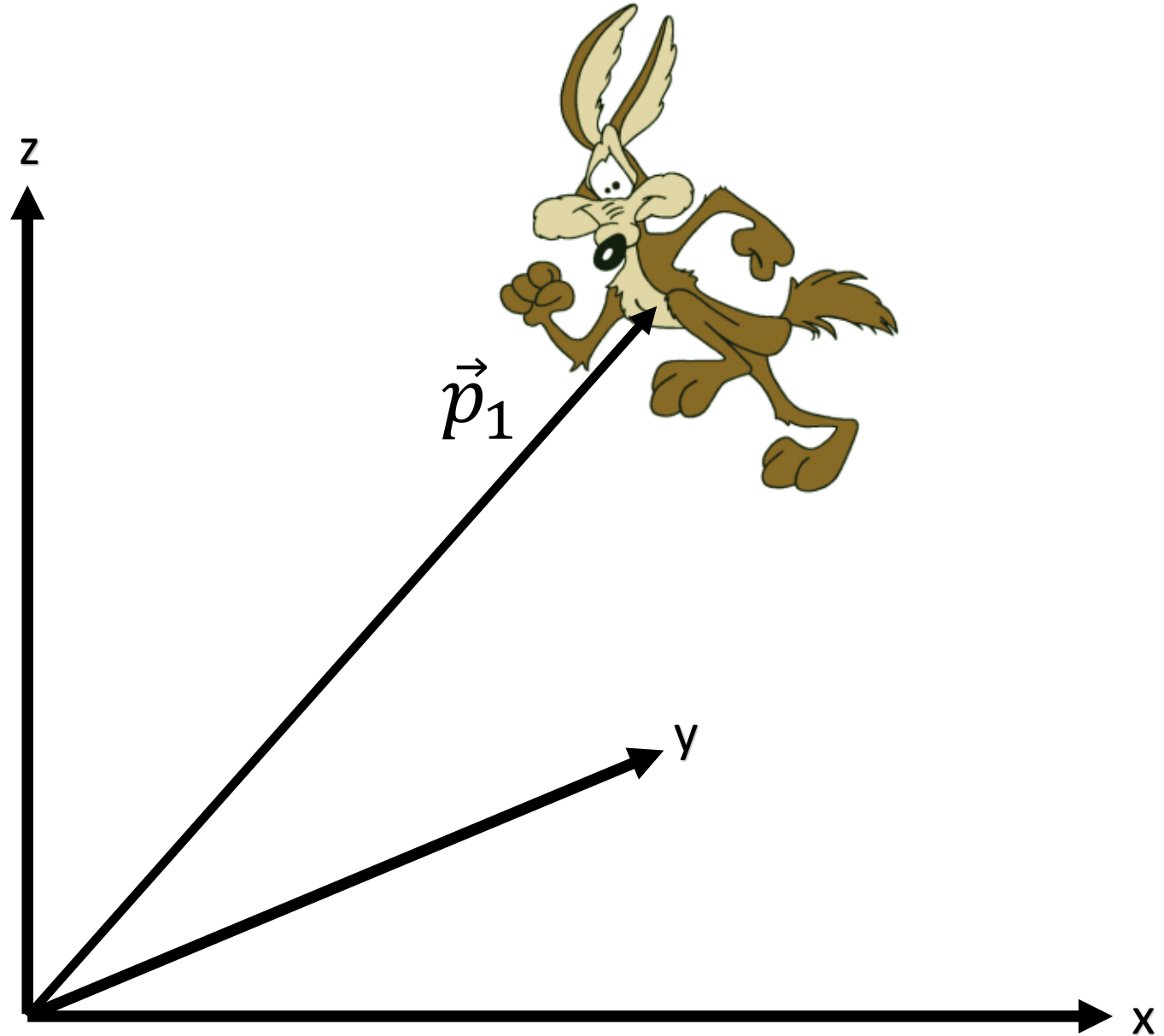
# Kinematika

$$\vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = \Delta t$$







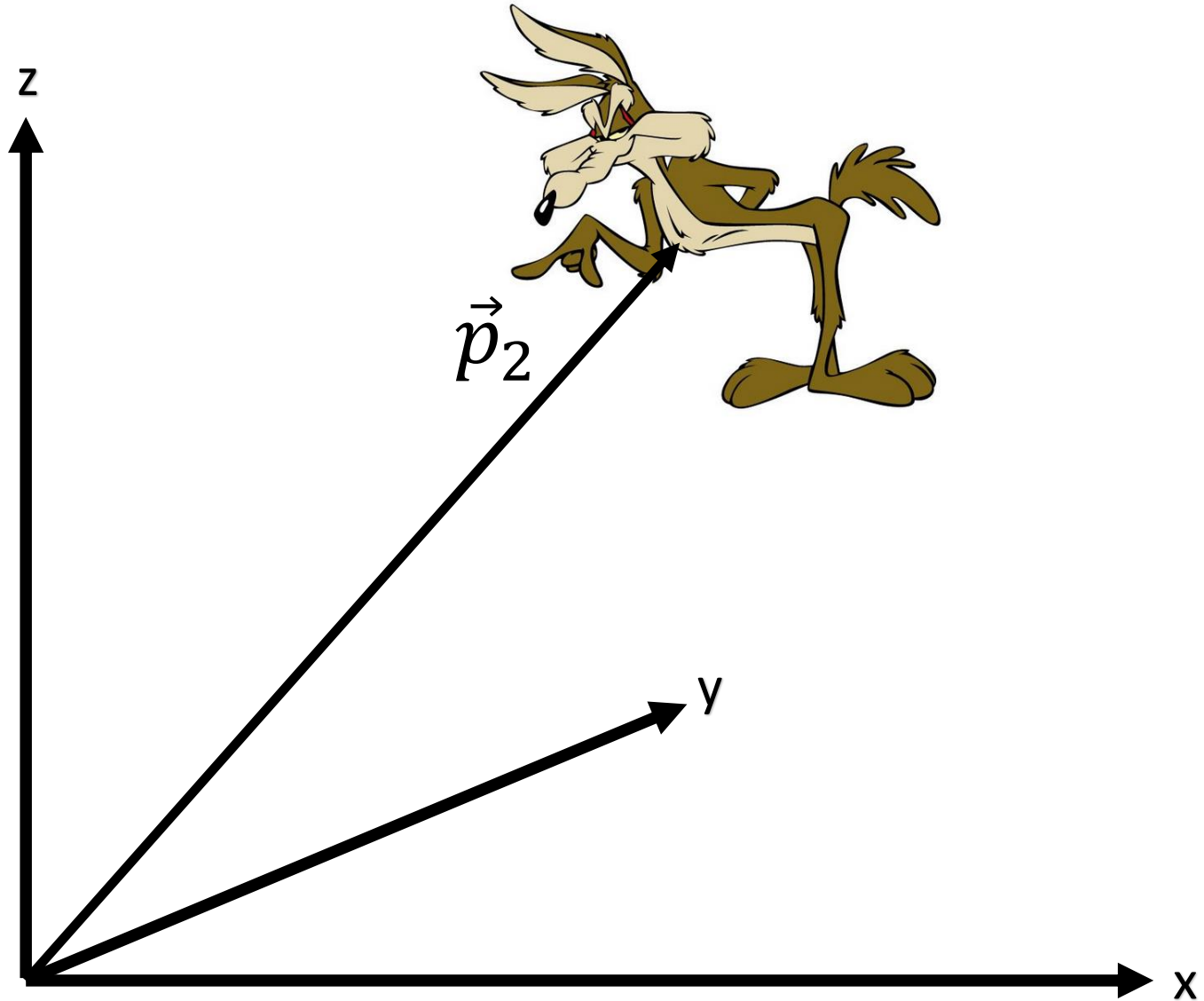
# Kinematika

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = 2\Delta t$$





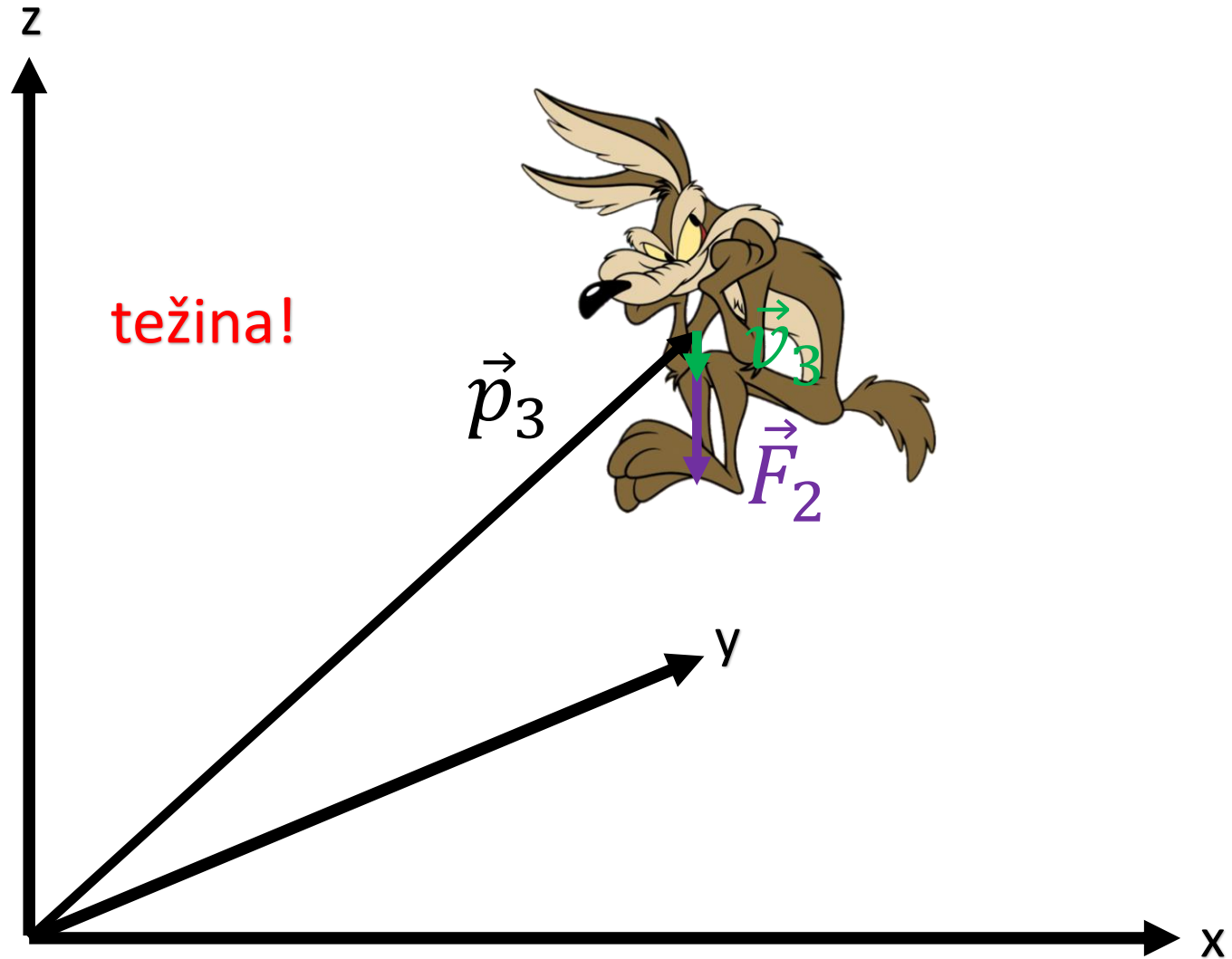
# Kinematika

$$\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -2.45 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 4.38 \end{bmatrix}$$

$$t = 3\Delta t$$





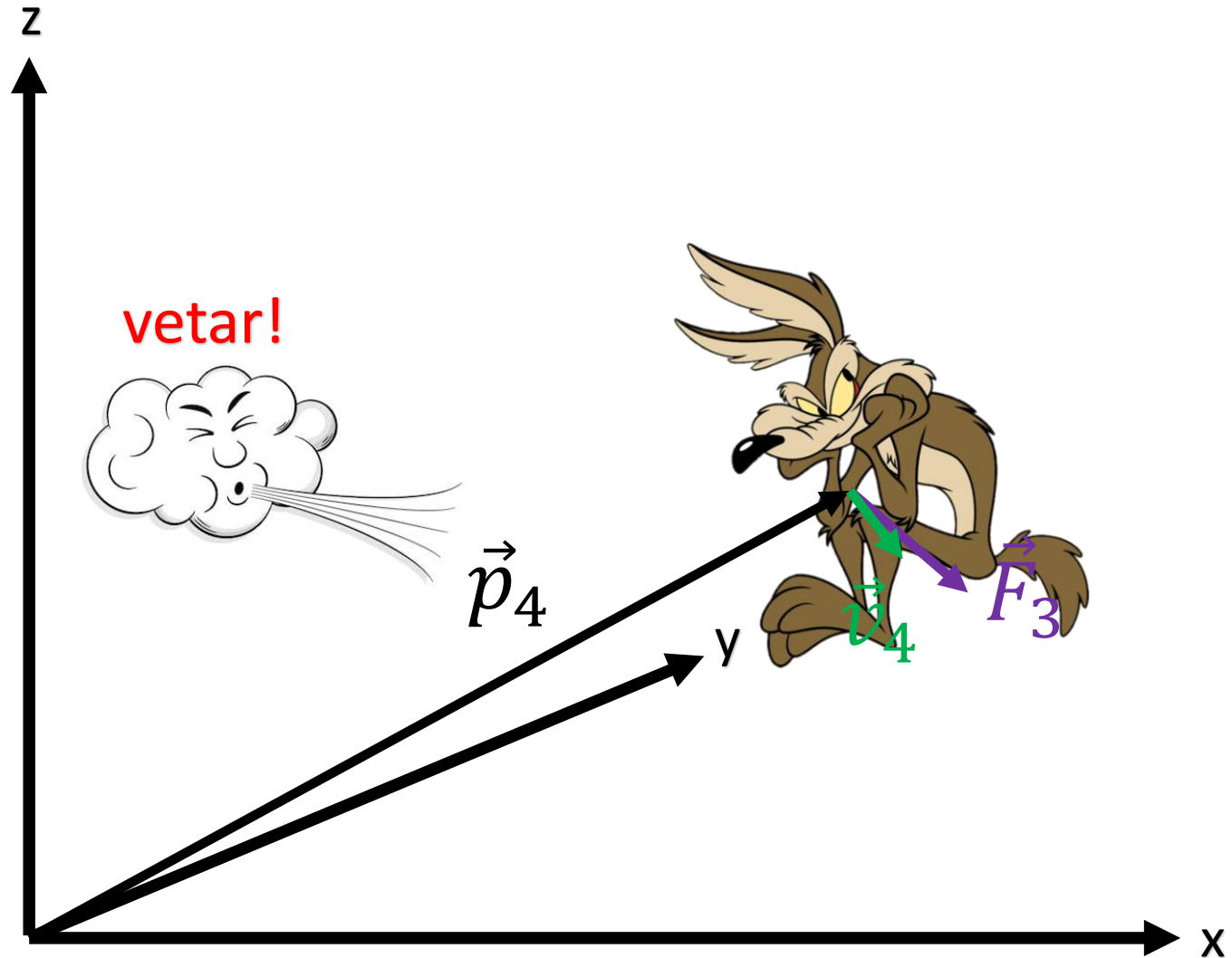
# Kinematika

$$\vec{F}_3 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -4.90 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_4 = \begin{bmatrix} 6.11 \\ 5.00 \\ 3.15 \end{bmatrix}$$

$$t = 4\Delta t$$





# Kinematika

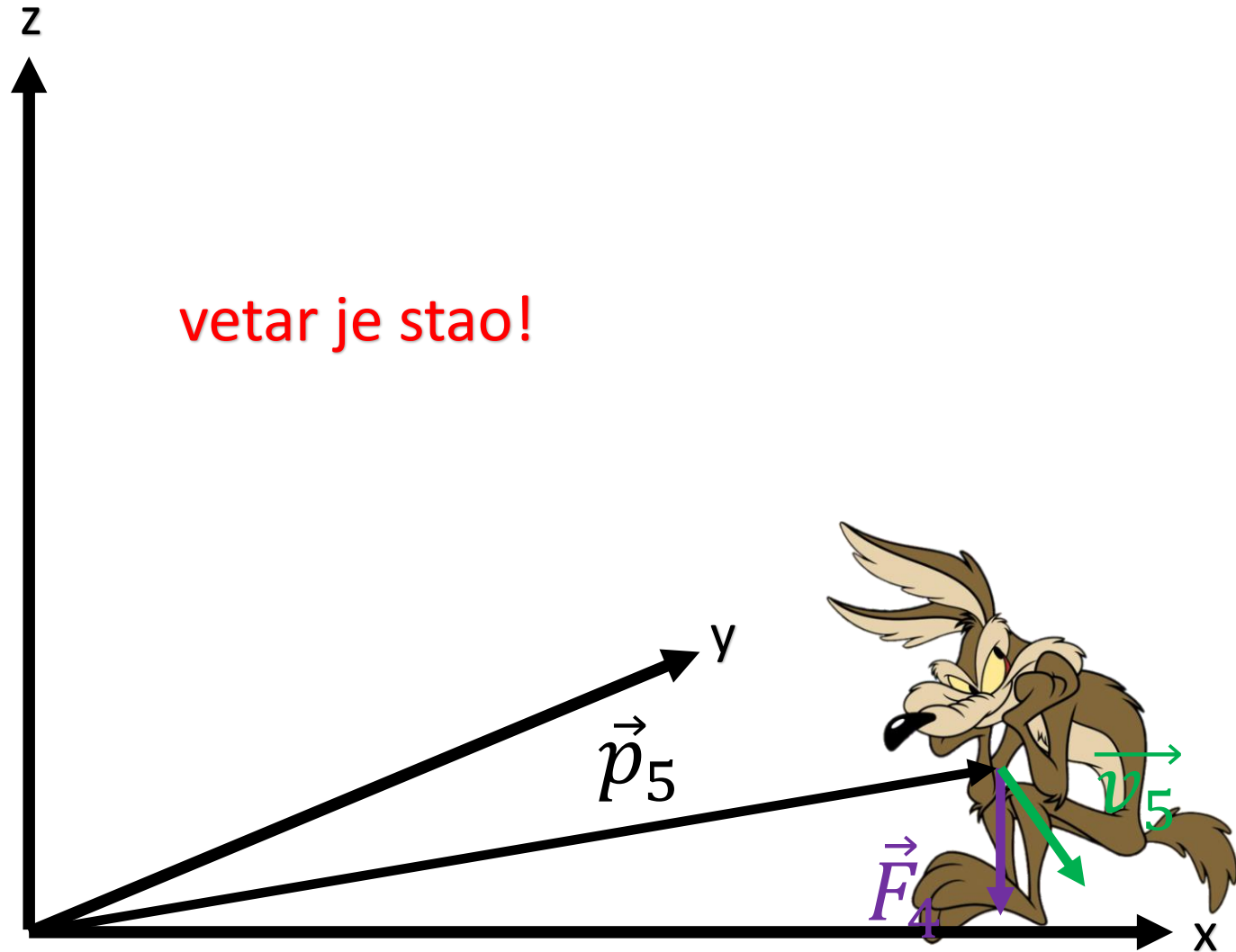
$$\vec{F}_4 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -9.81 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_5 = \begin{bmatrix} 7.22 \\ 5.00 \\ 1.31 \end{bmatrix}$$

$$t = 5\Delta t$$

vetar je stao!





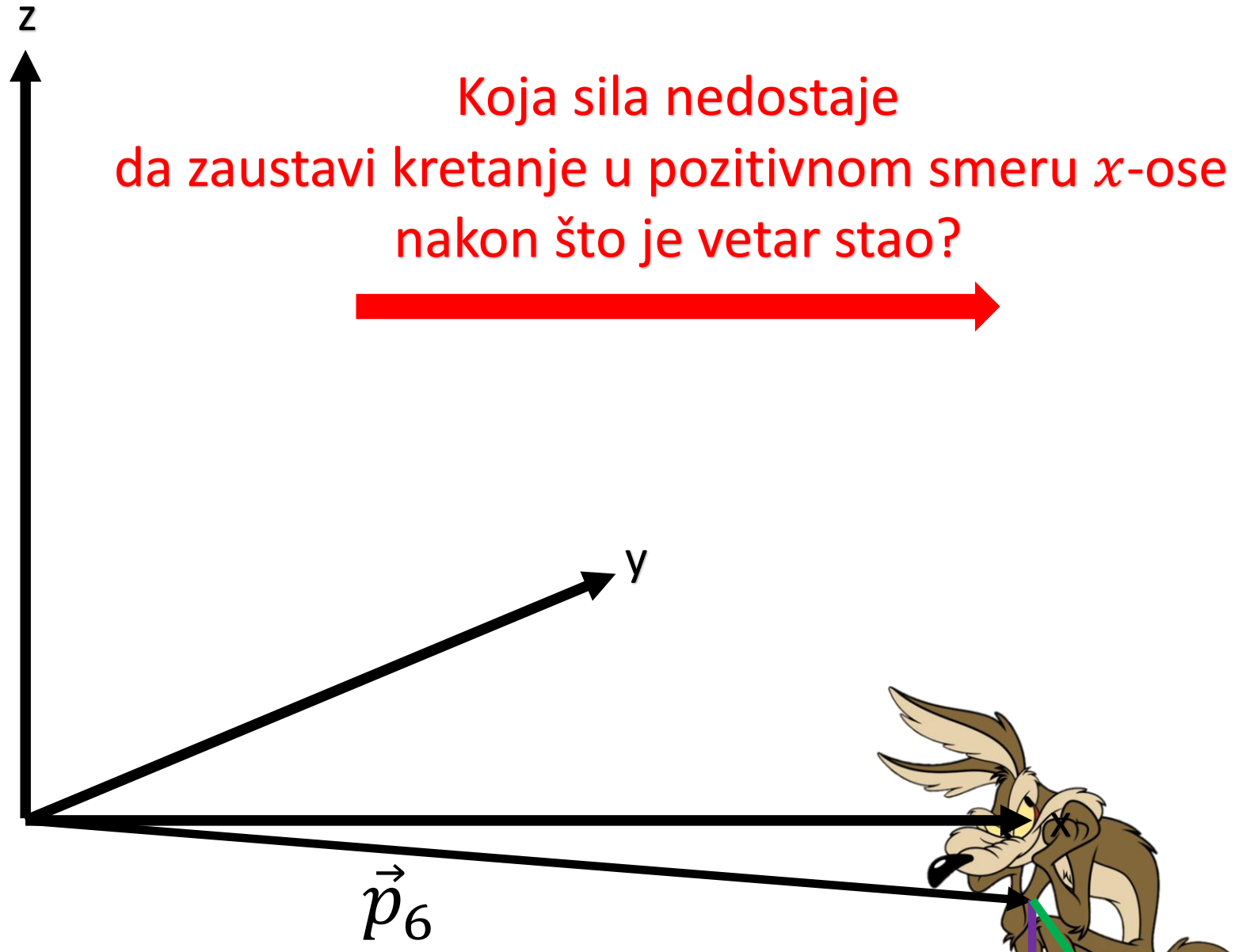
# Kinematika

$$\vec{F}_5 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_6 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -7.35 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_6 = \begin{bmatrix} 8.33 \\ 5.00 \\ -1.14 \end{bmatrix}$$

$$t = 6\Delta t$$





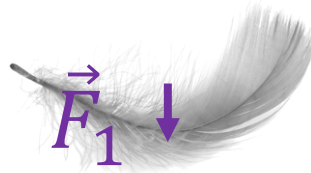
# Kinematika

vakum:

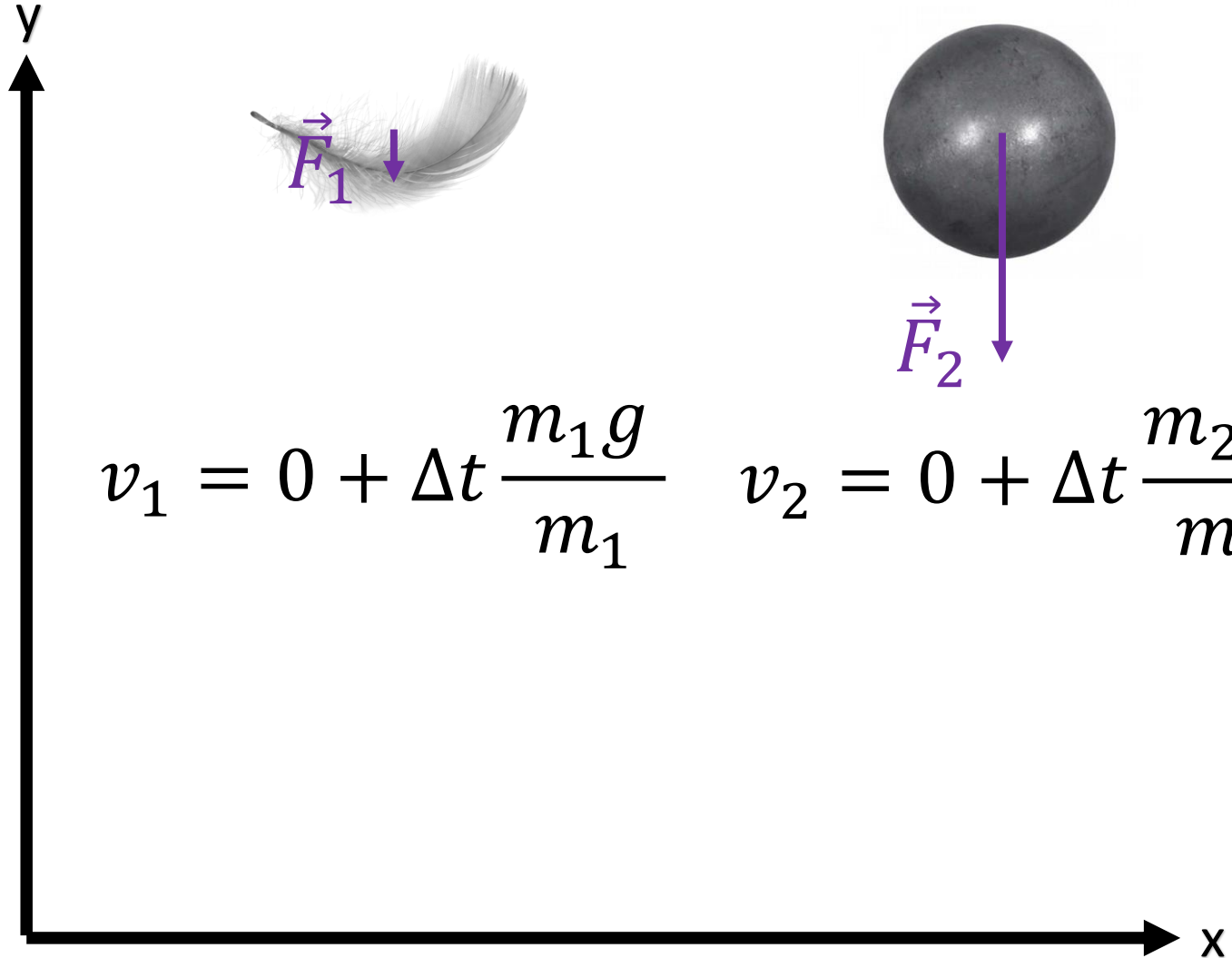
$$\vec{F} = \vec{F}_{weight}$$

(samo težina tela)

$$m_1 \ll m_2$$



$$v_1 = 0 + \Delta t \frac{m_1 g}{m_1} \quad v_2 = 0 + \Delta t \frac{m_2 g}{m_2}$$



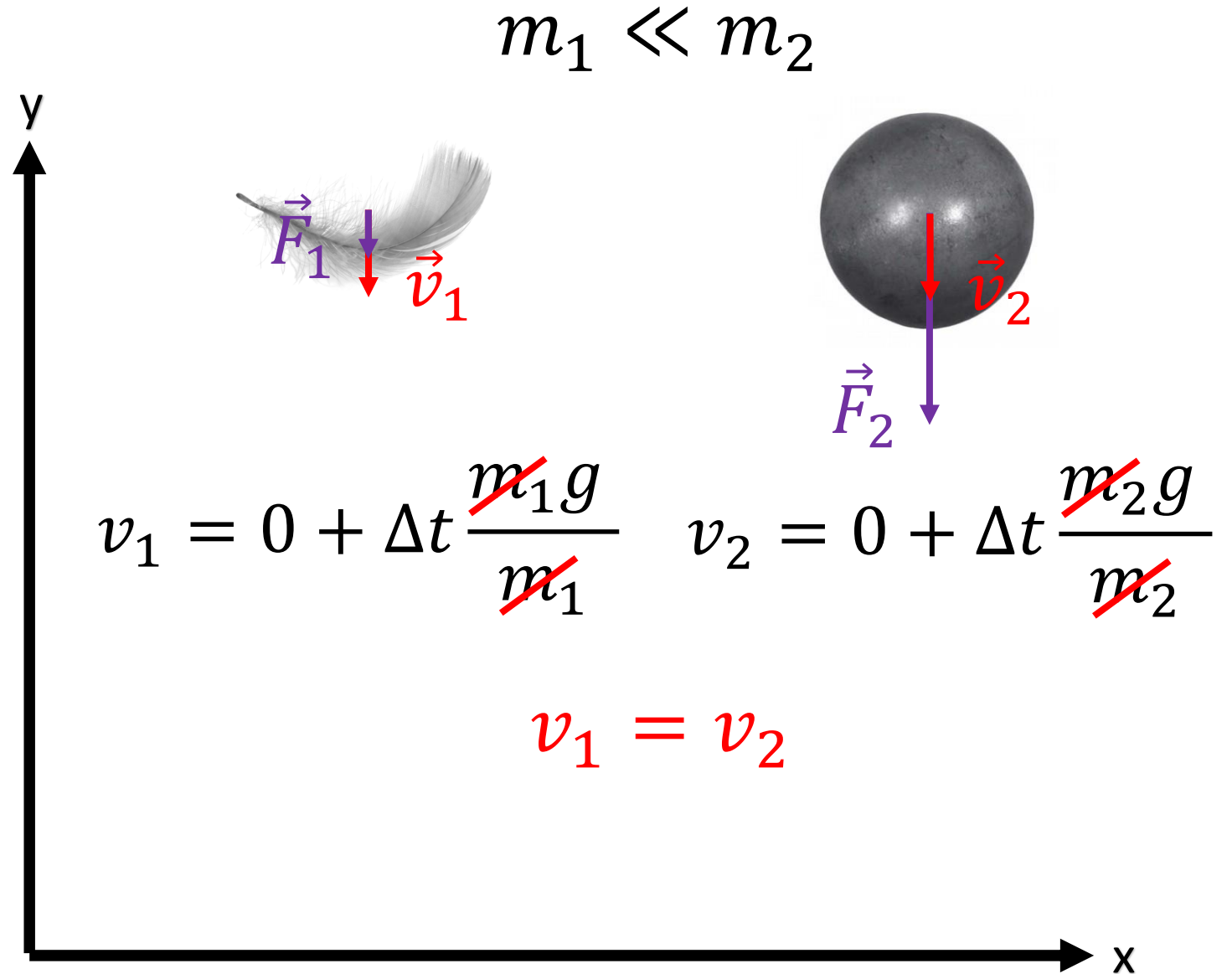


# Kinematika

vakum:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight}$$

(samo težina tela)



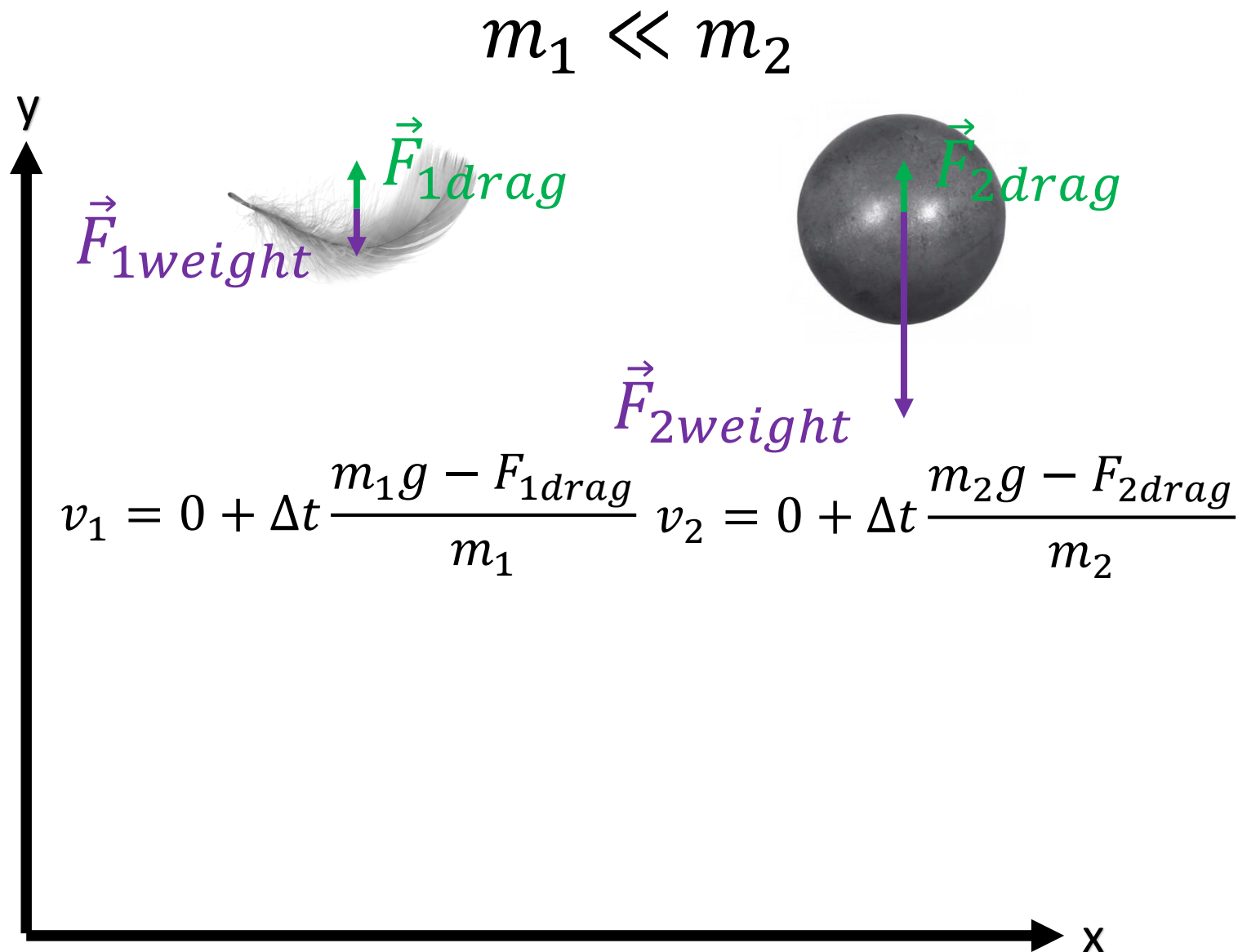


# Kinematika

fluid:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight} + \vec{F}_{drag}$$

(težina tela + otpor fluida)





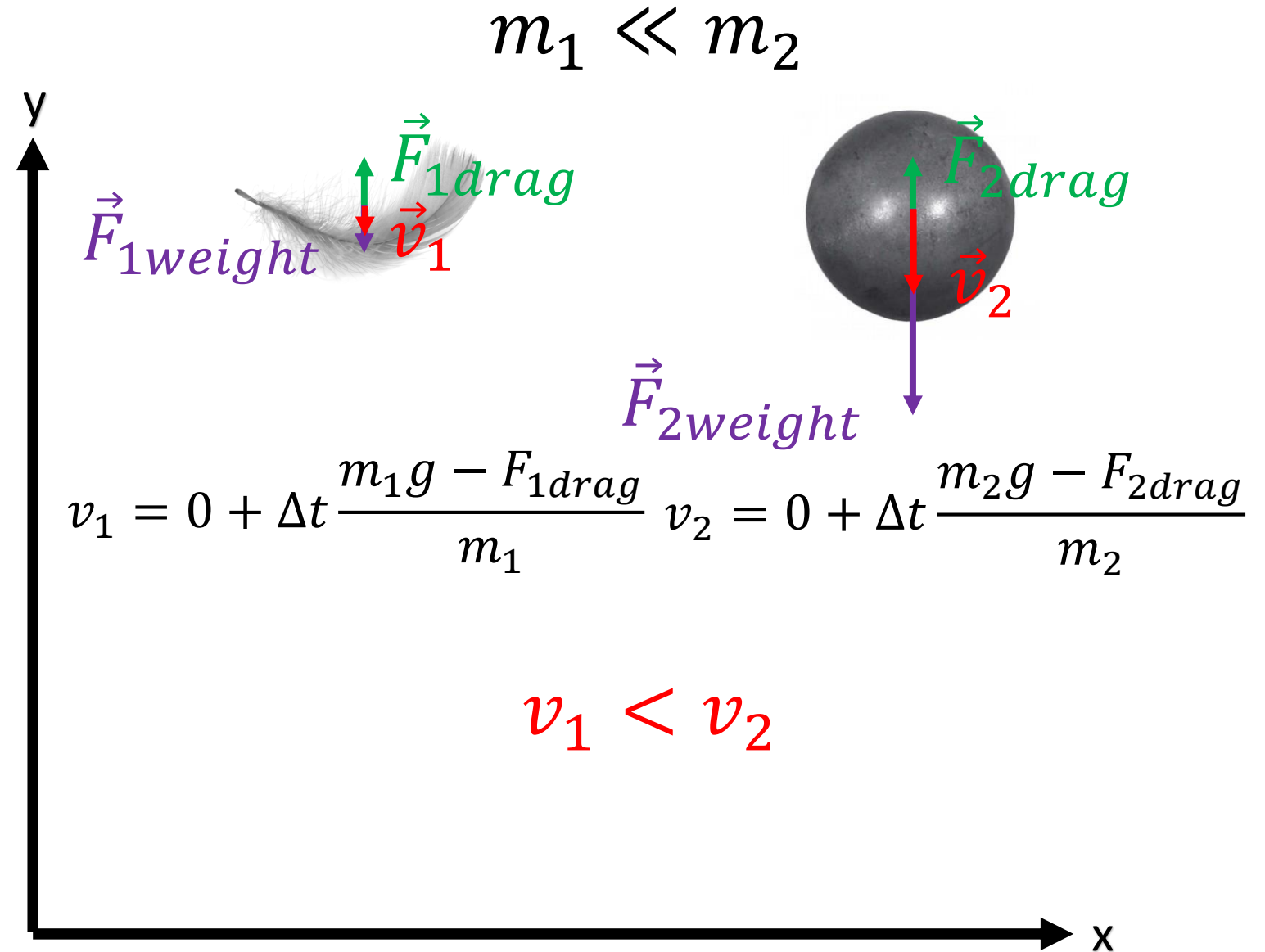


# Kinematika

fluid:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight} + \vec{F}_{drag}$$

(težina tela + otpor fluida)





# Kinematika

Dve osnovne vrste tela:

1. Materijalne tačke, tj. čestice (*particles*)
2. Čvrsta tela (*rigid bodies*)

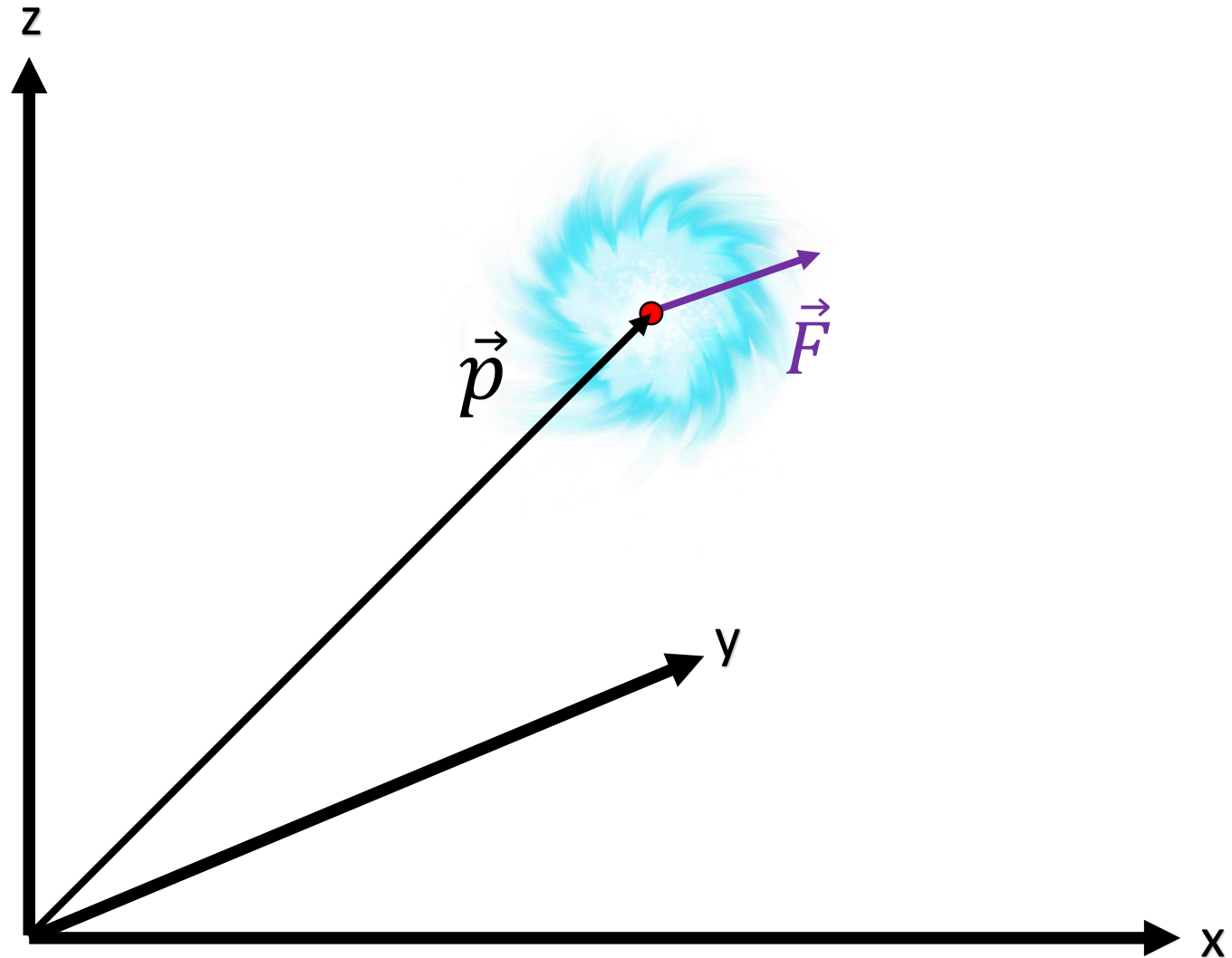
Složene vrste tela (na neki način kombinacije osnovnih vrsta):

1. Meka tela (*soft bodies*)
2. Fluidi
3. Tkanina
4. *Ragdolls*
5. itd.



# Kinematika

- materijalna tačka (*particle*):
- + nema definisanu orijentaciju ni rotaciju
- + sve spoljašnje sile deluju na  $\vec{C}_g$

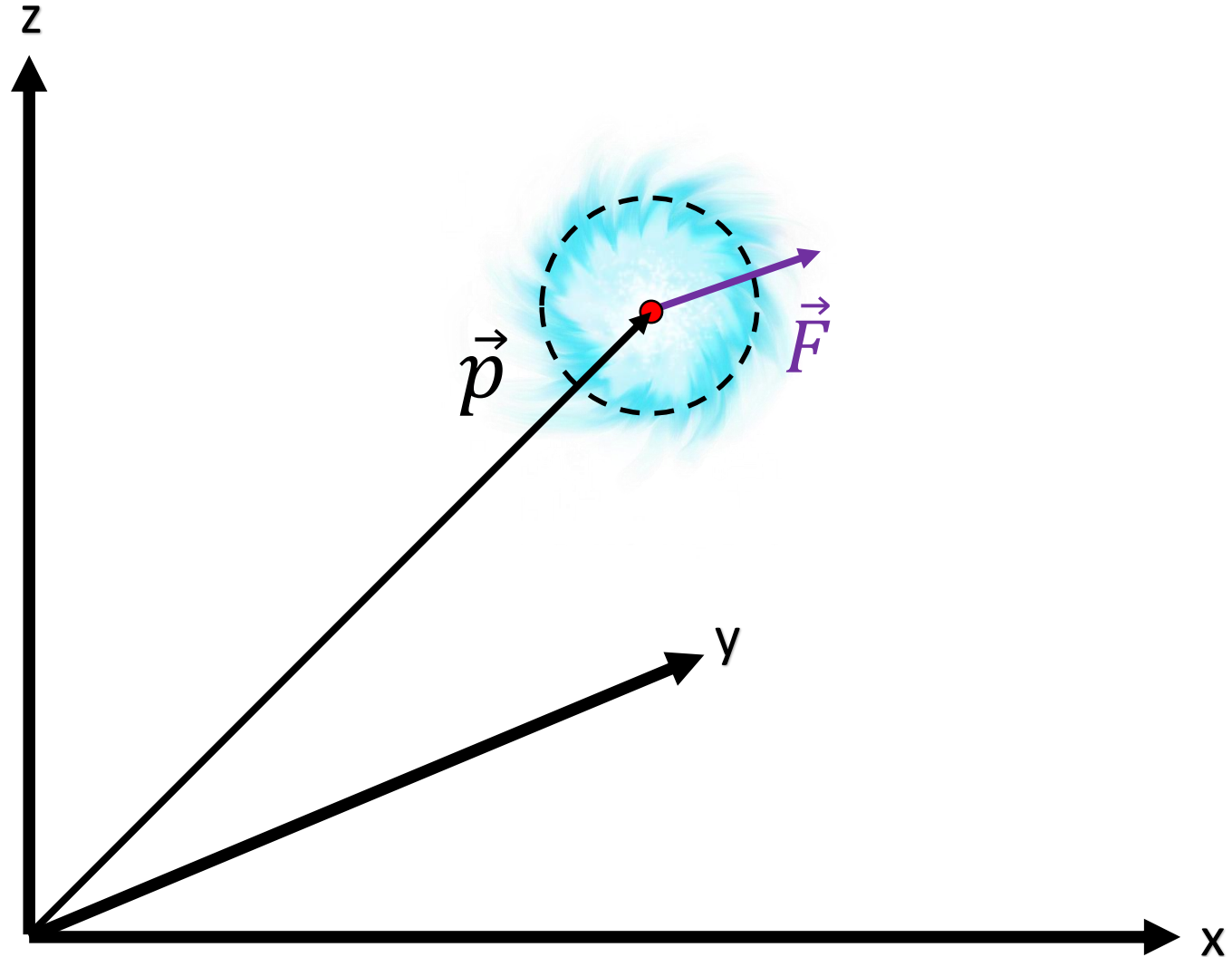




# Kinematika

- materijalna tačka (*particle*):
  - + nema definisanu orijentaciju ni rotaciju
  - + sve spoljašnje sile deluju na  $\vec{C}_g$

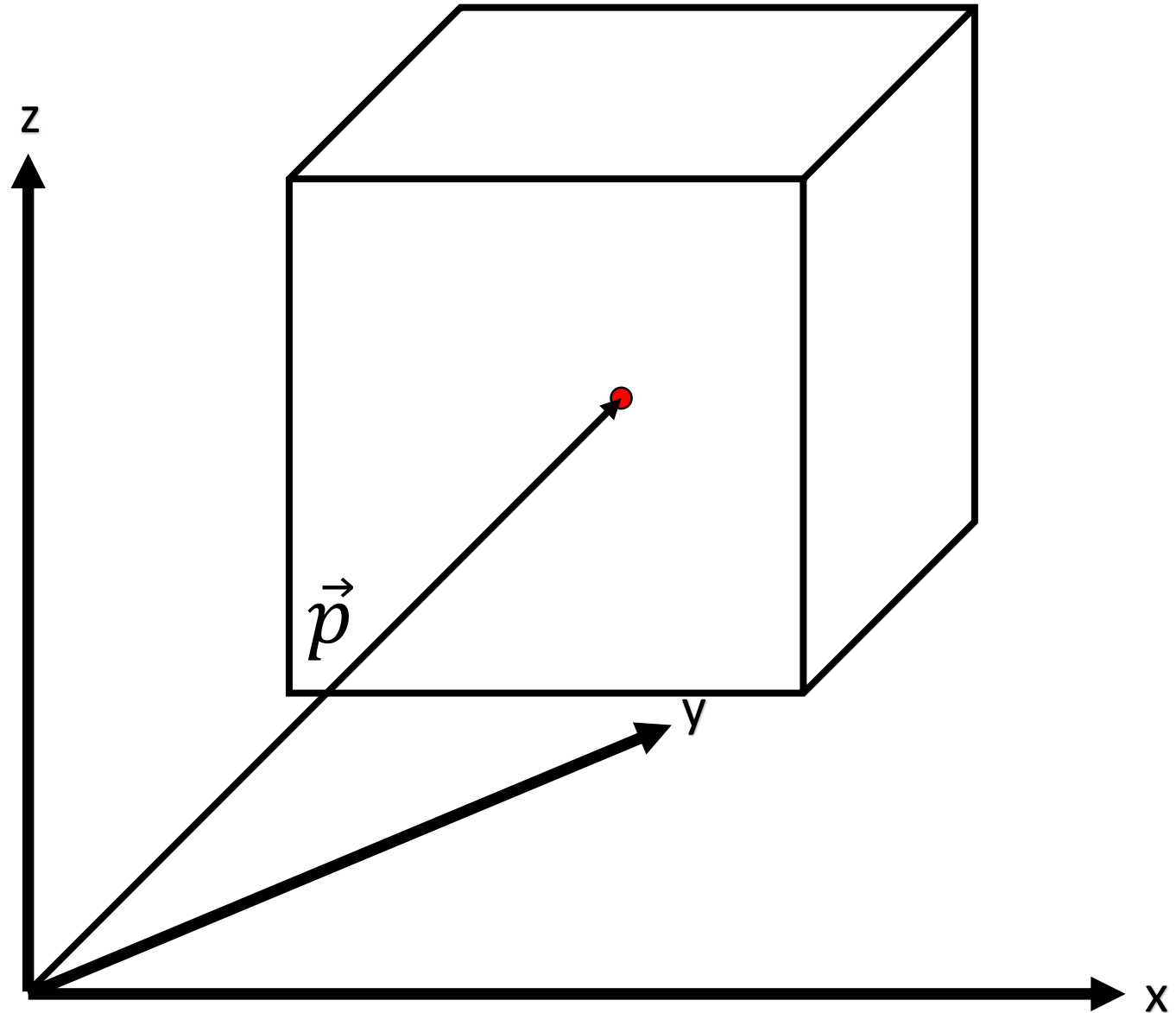
(za otkrivanje sudara telo mora imati nekakvu geometriju, a najčešće je simetrično)





# Kinematika

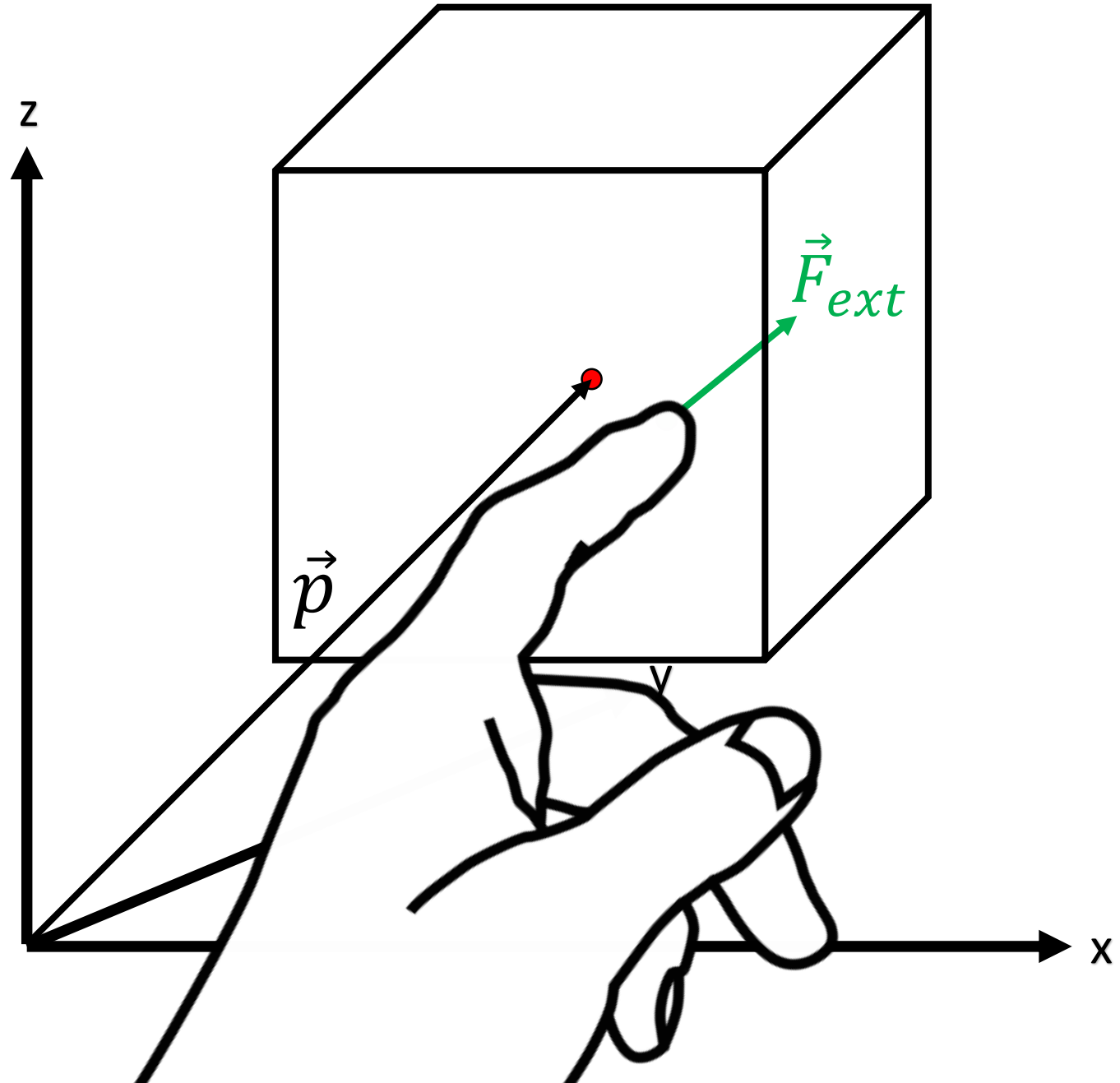
- čvrsto telo (*rigid body*):
- ima definisanu  
orijentaciju i rotaciju





# Kinematika

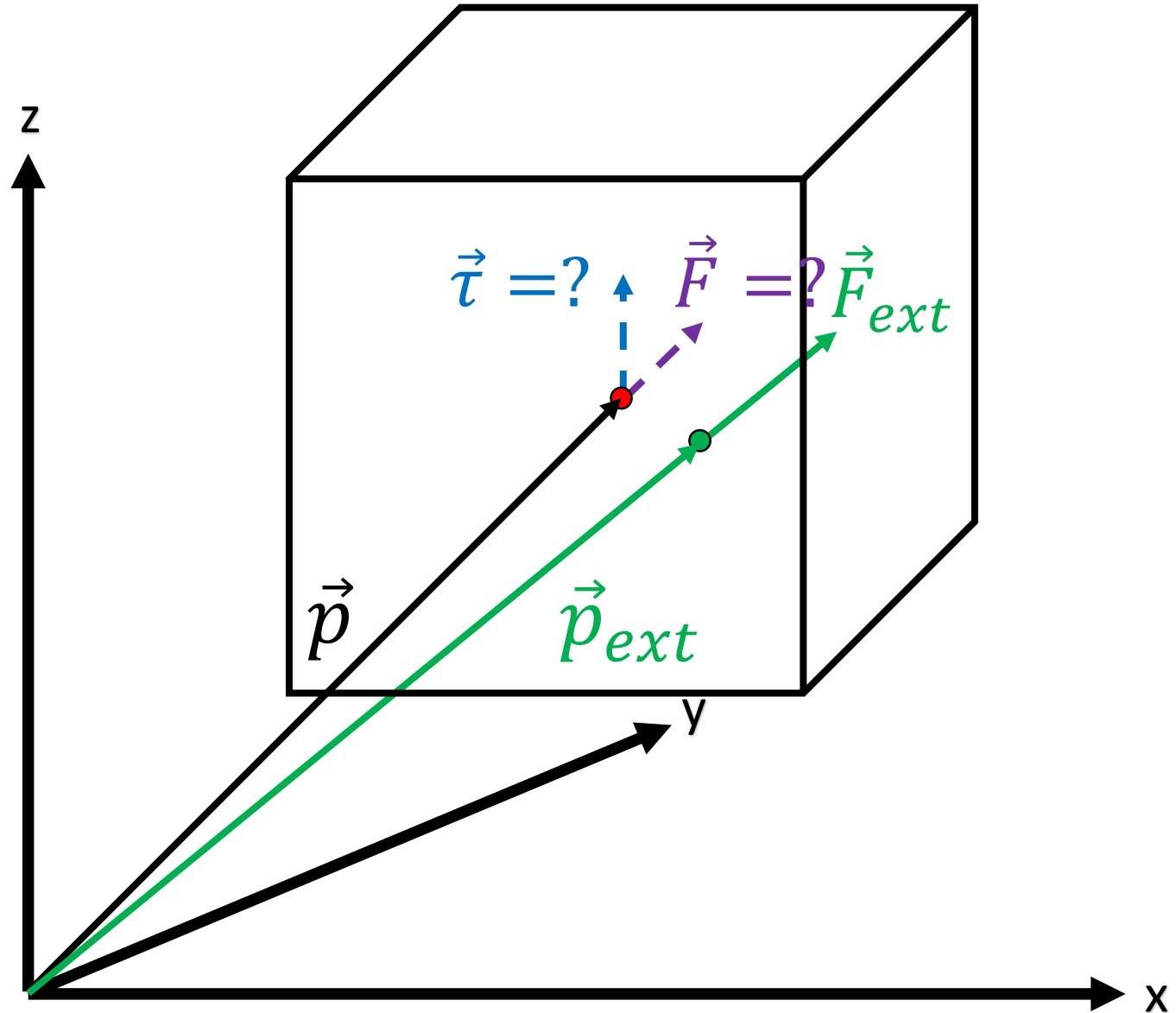
- čvrsto telo (*rigid body*):
- ima definisanu  
orientaciju i rotaciju





# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):
  - ima definisanu orijentaciju i rotaciju
  - potrebno je izračunati linearnu komponentu sile  $\vec{F}$  i moment sile  $\vec{\tau}$  na osnovu delovanja spoljašnje sile  $\vec{F}_{ext}$

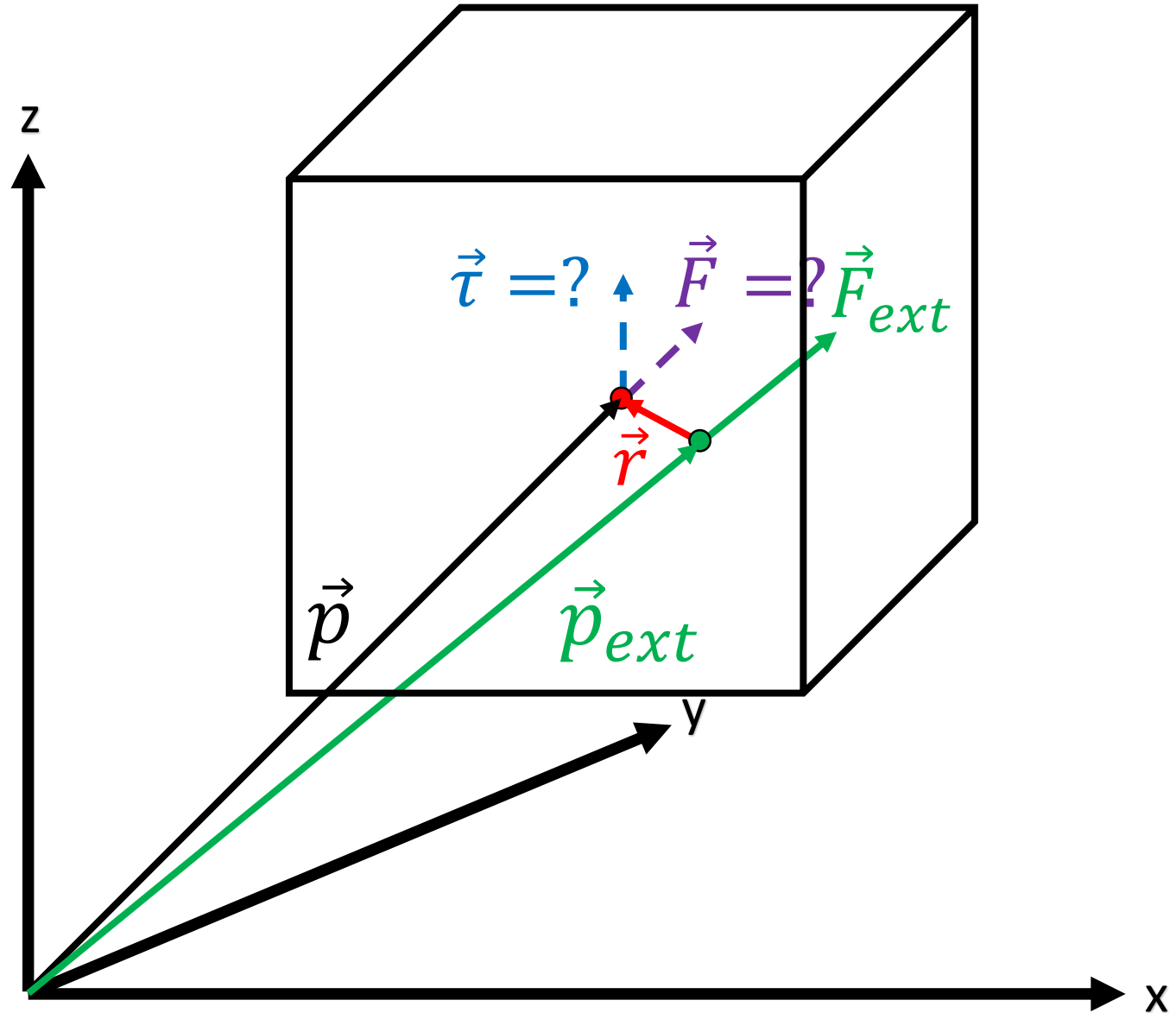




# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

1.  $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$





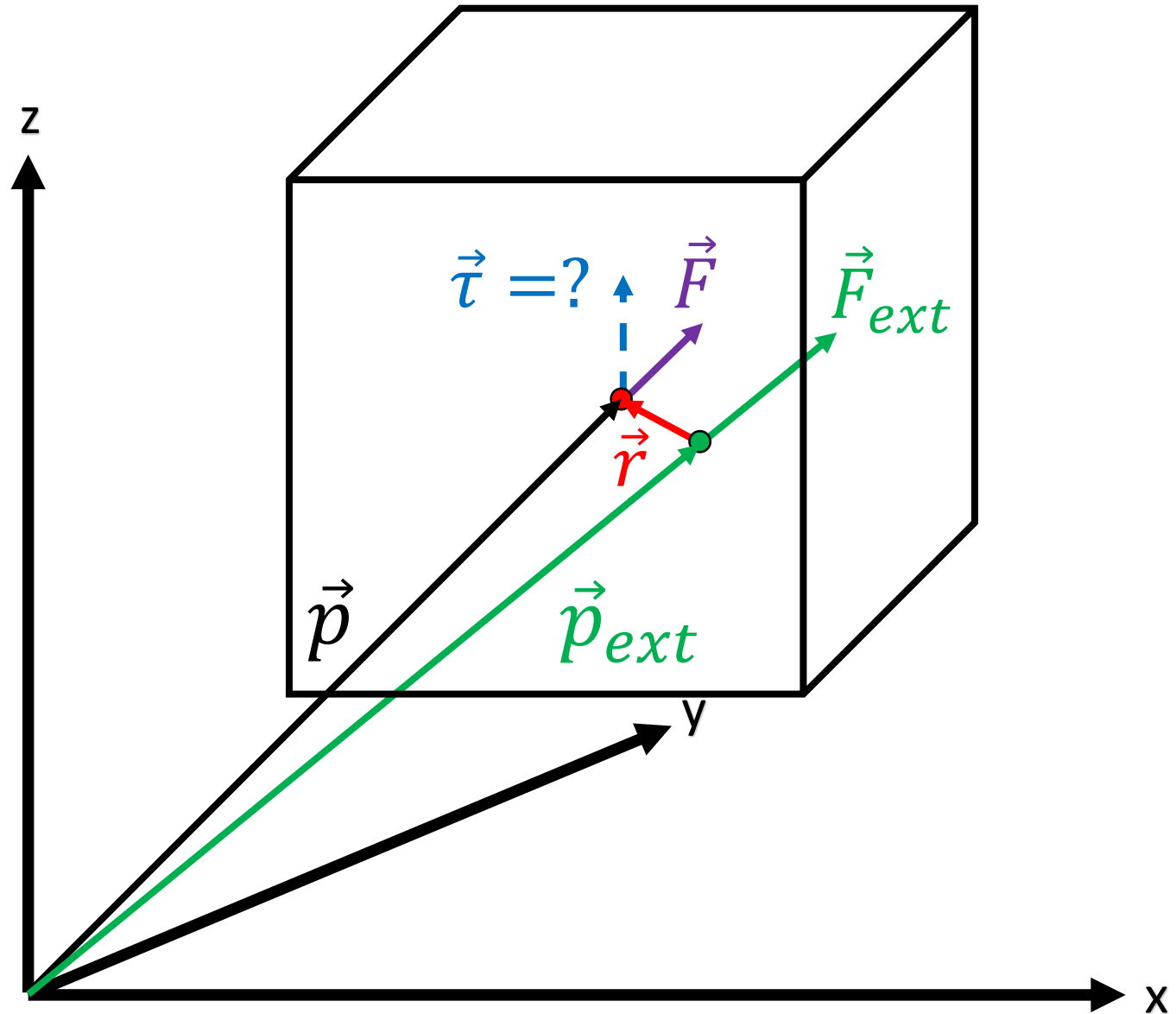


# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

- $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$

- $\vec{F} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{r} \frac{\vec{F}_{ext}}{|\vec{F}_{ext}|}$





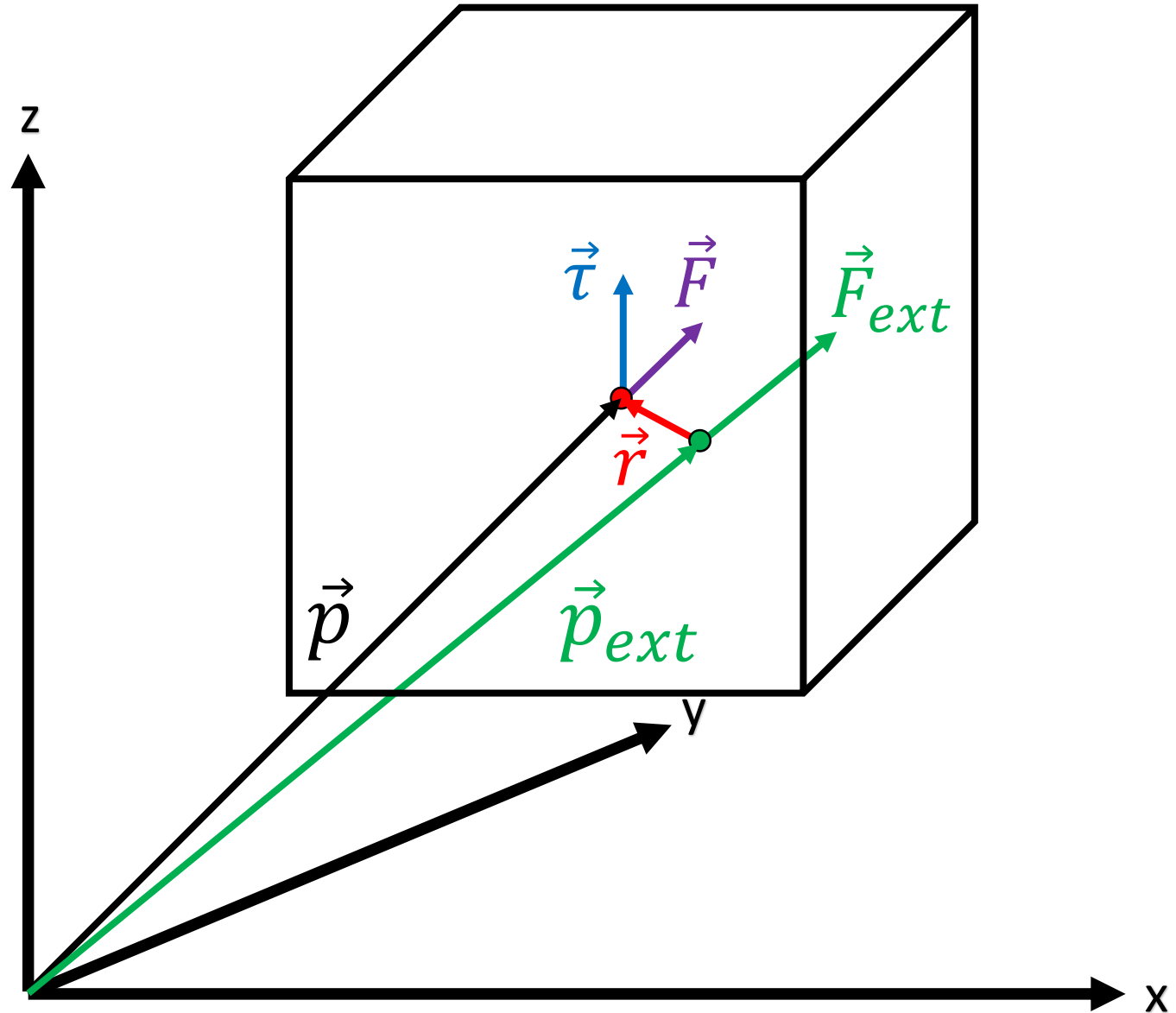
# Kinematika

• čvrsto telo (*rigid body*):

1.  $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$

2.  $\vec{F} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{r} \frac{\vec{F}_{ext}}{|\vec{F}_{ext}|}$

3.  $\vec{\tau} = \vec{F}_{ext} \times \vec{r}$

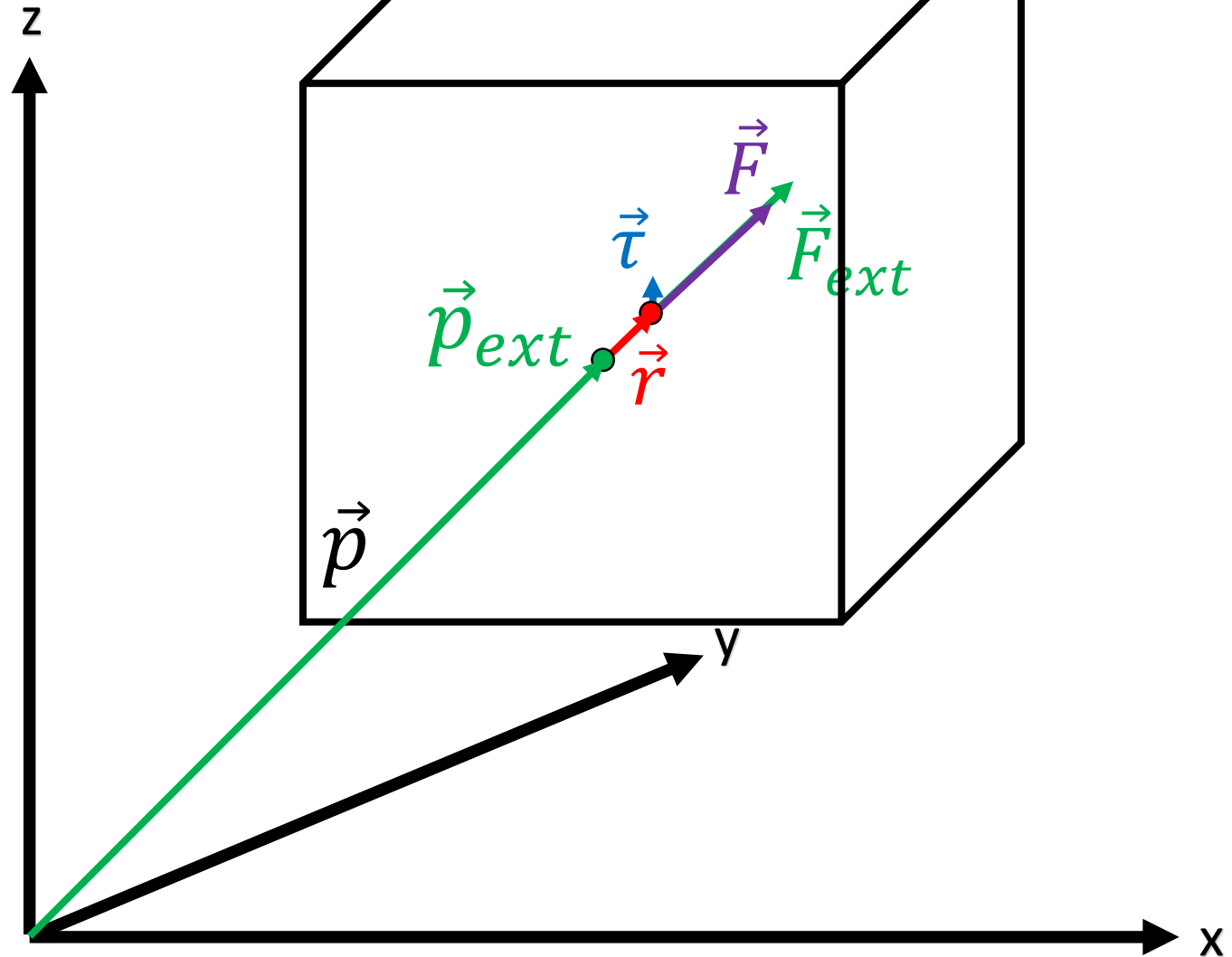




# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

što su više  $\vec{r}$  i  $\vec{F}_{ext}$   
paralelni, linearno  
kretanje postaje  
dominantnije

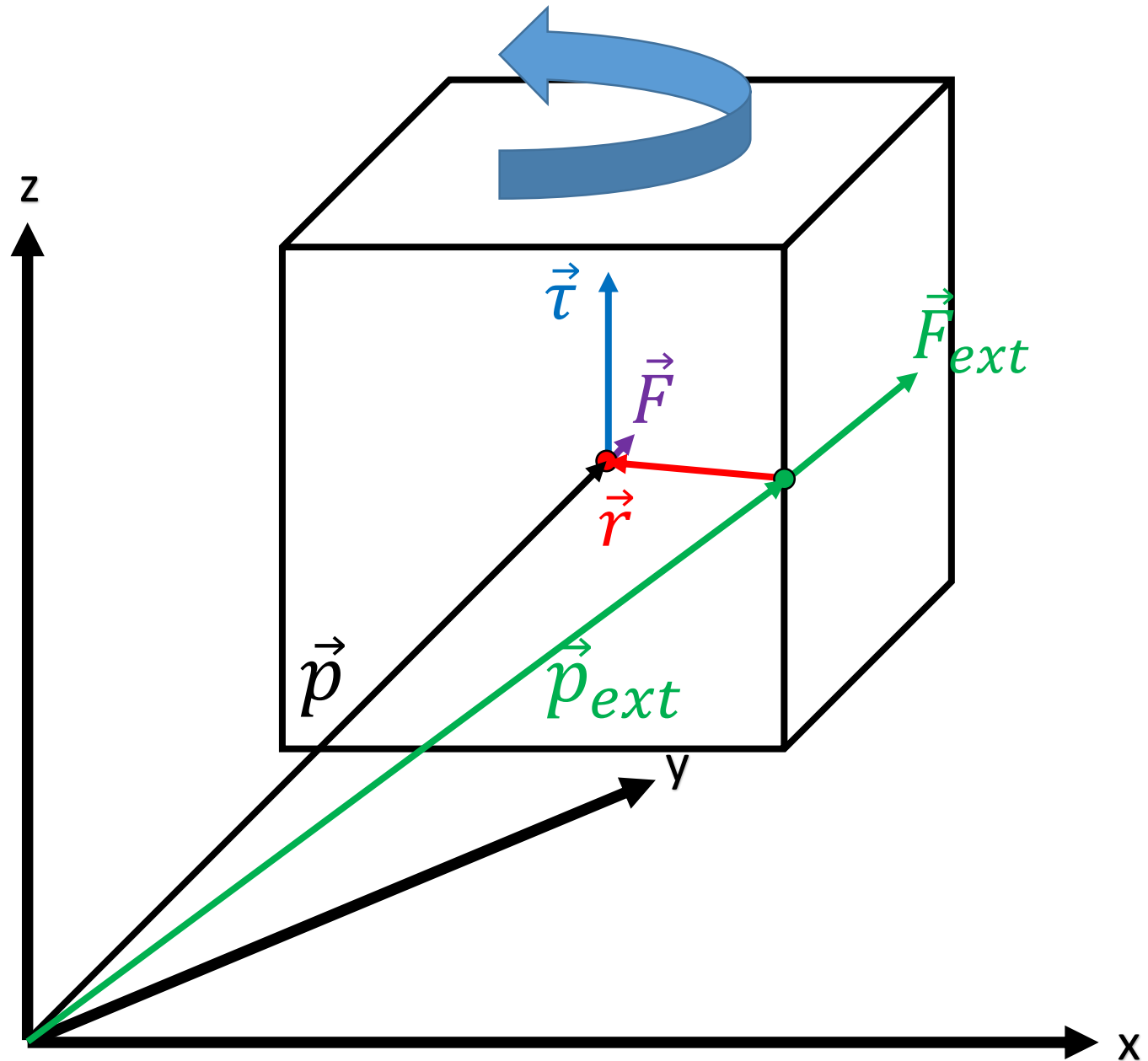




# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

što su više  $\vec{r}$  i  $\vec{F}_{ext}$   
normalni, rotaciono  
kretanje postaje  
dominantnije



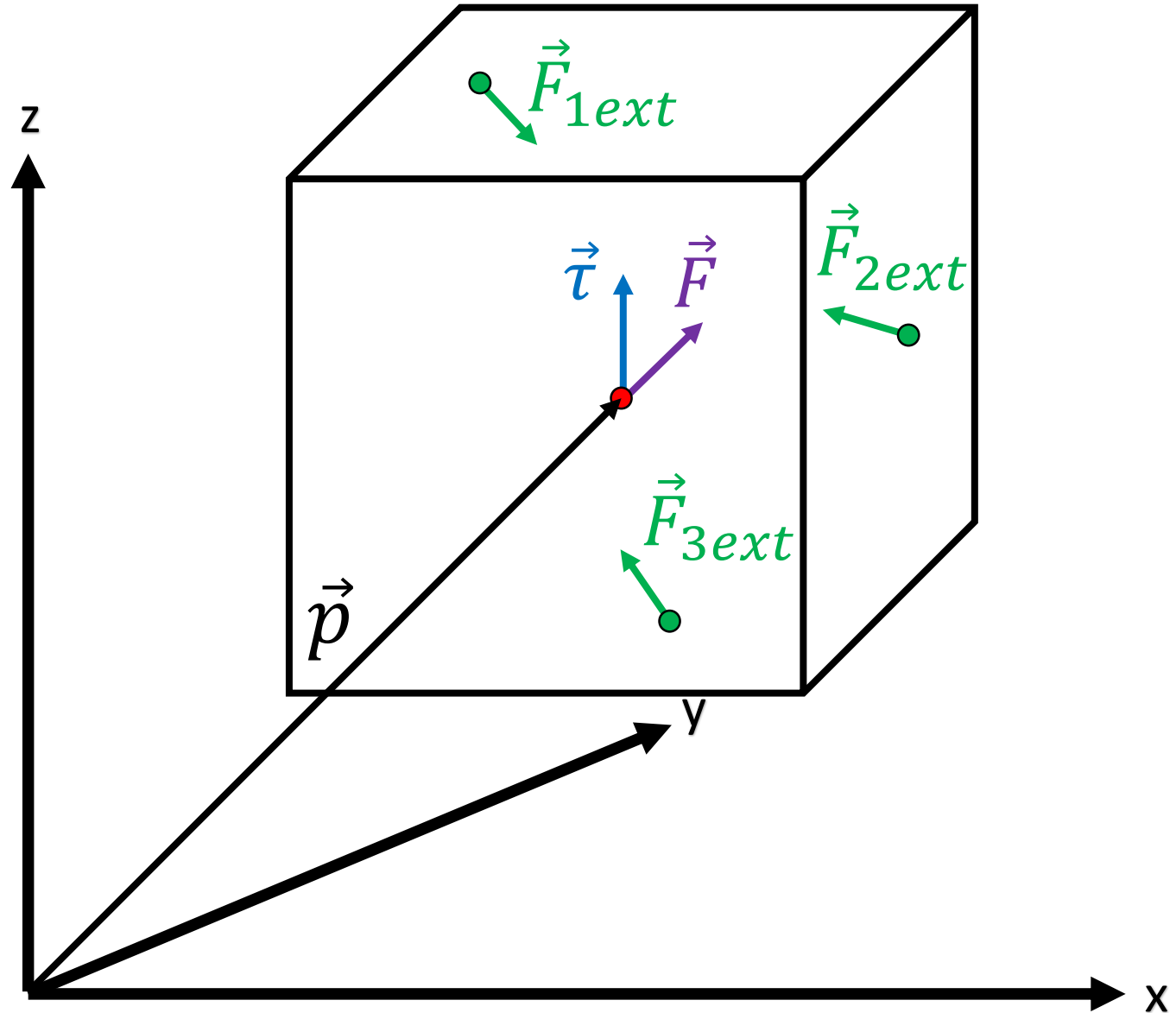


# Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \dots$$





# Kinematika

- skaliranje:

Ako je npr. potrebno da objekat za vreme:

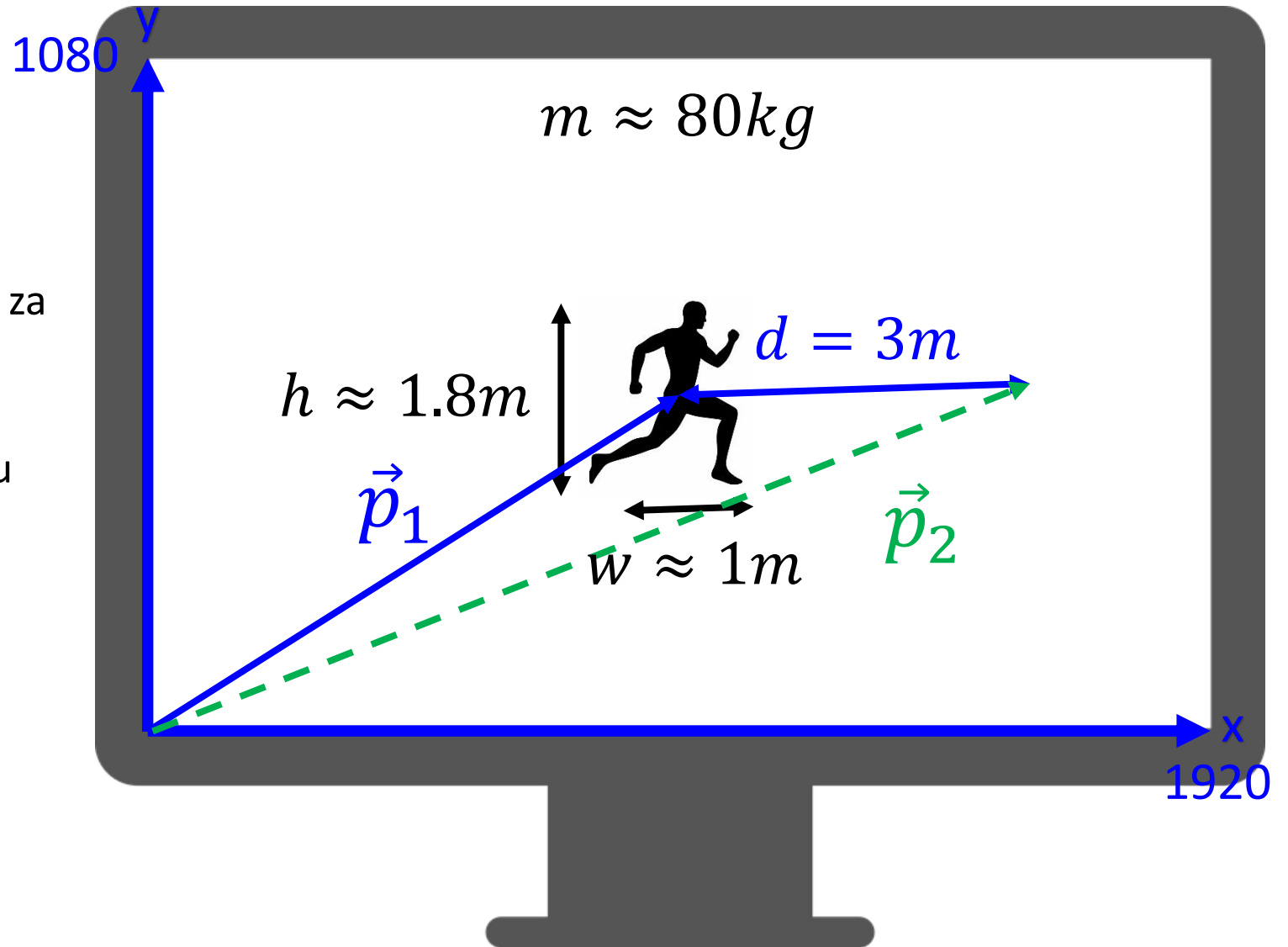
$$t = 1s$$

promeni položaj iz  $\vec{p}_1$  u  $\vec{p}_2$  koji su udaljeni:

$$d = 3m$$

brzina bi trebalo da bude:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$





# Kinematika

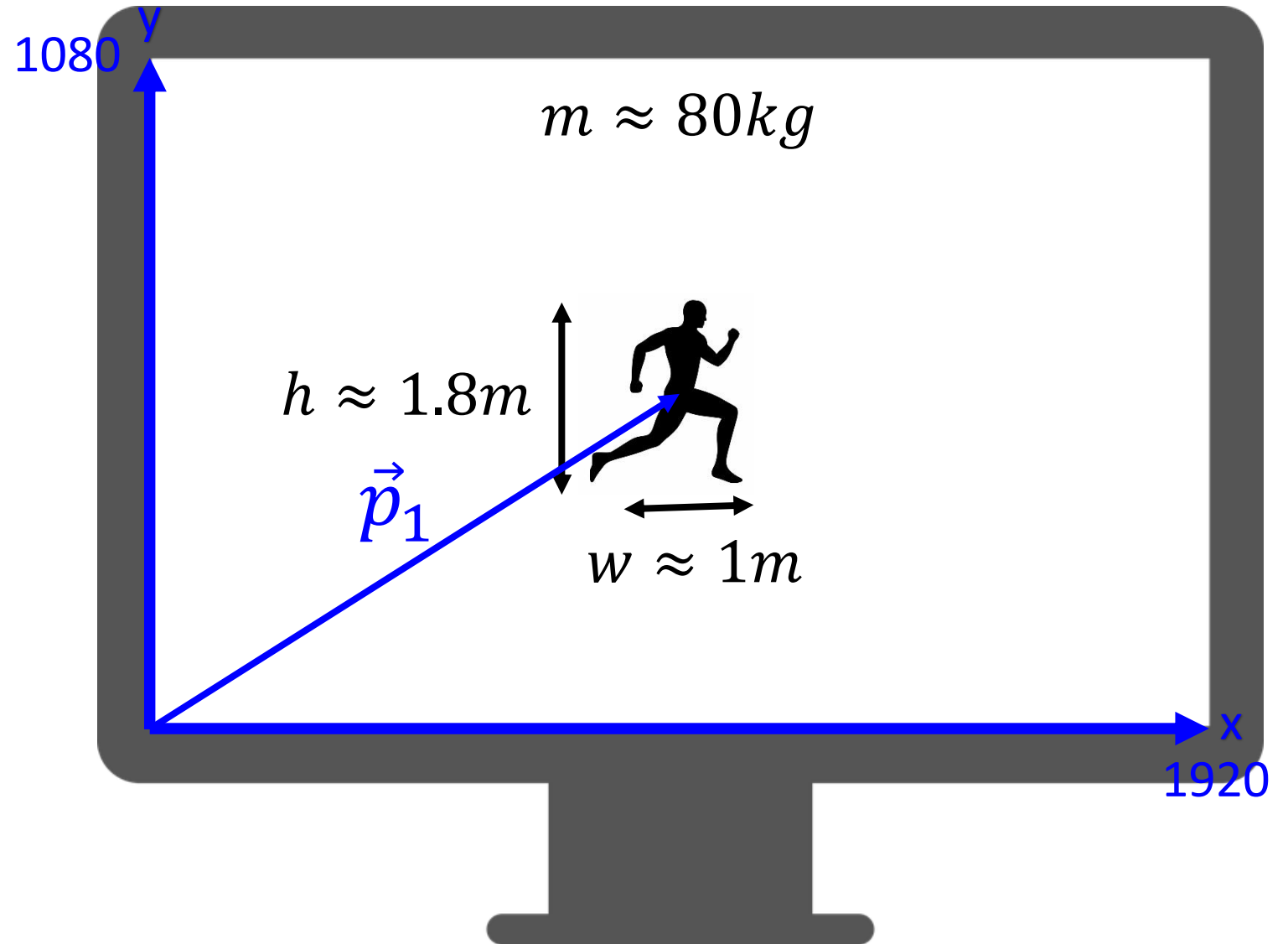
- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$





# Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

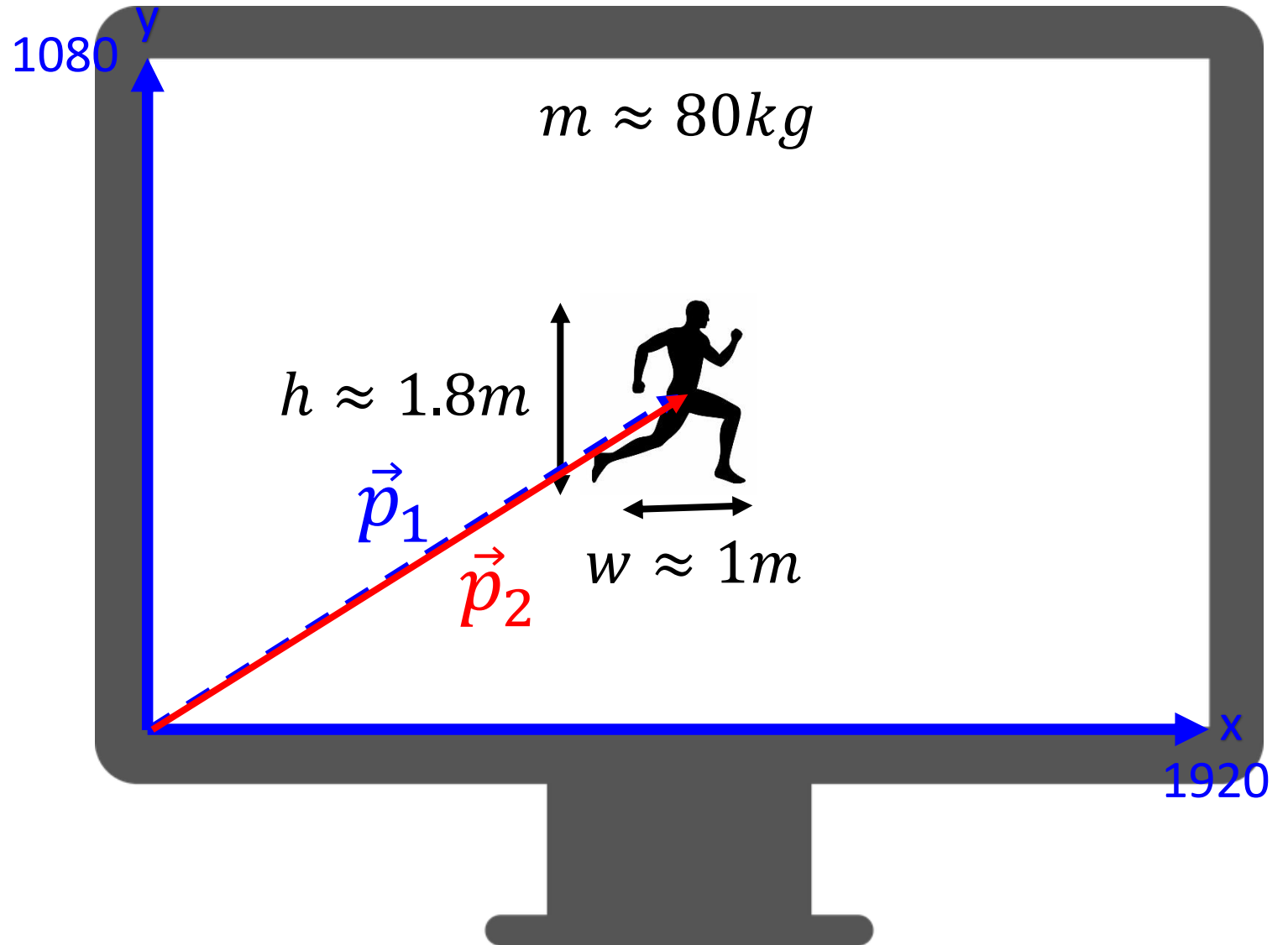
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 963 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Jako sporo?







# Kinematika

- skaliranje:

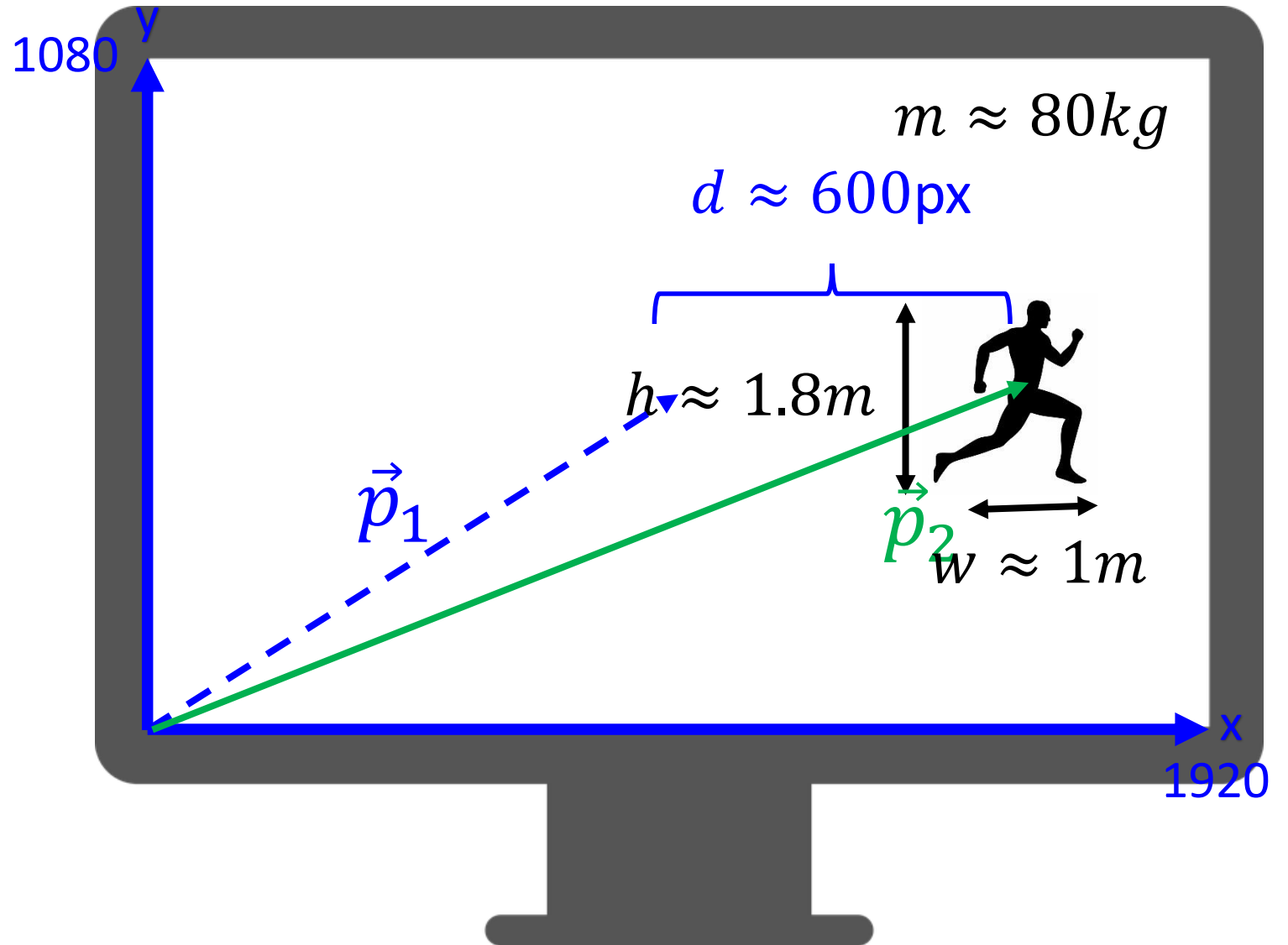
bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$
$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1560 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Rešenje?





# Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

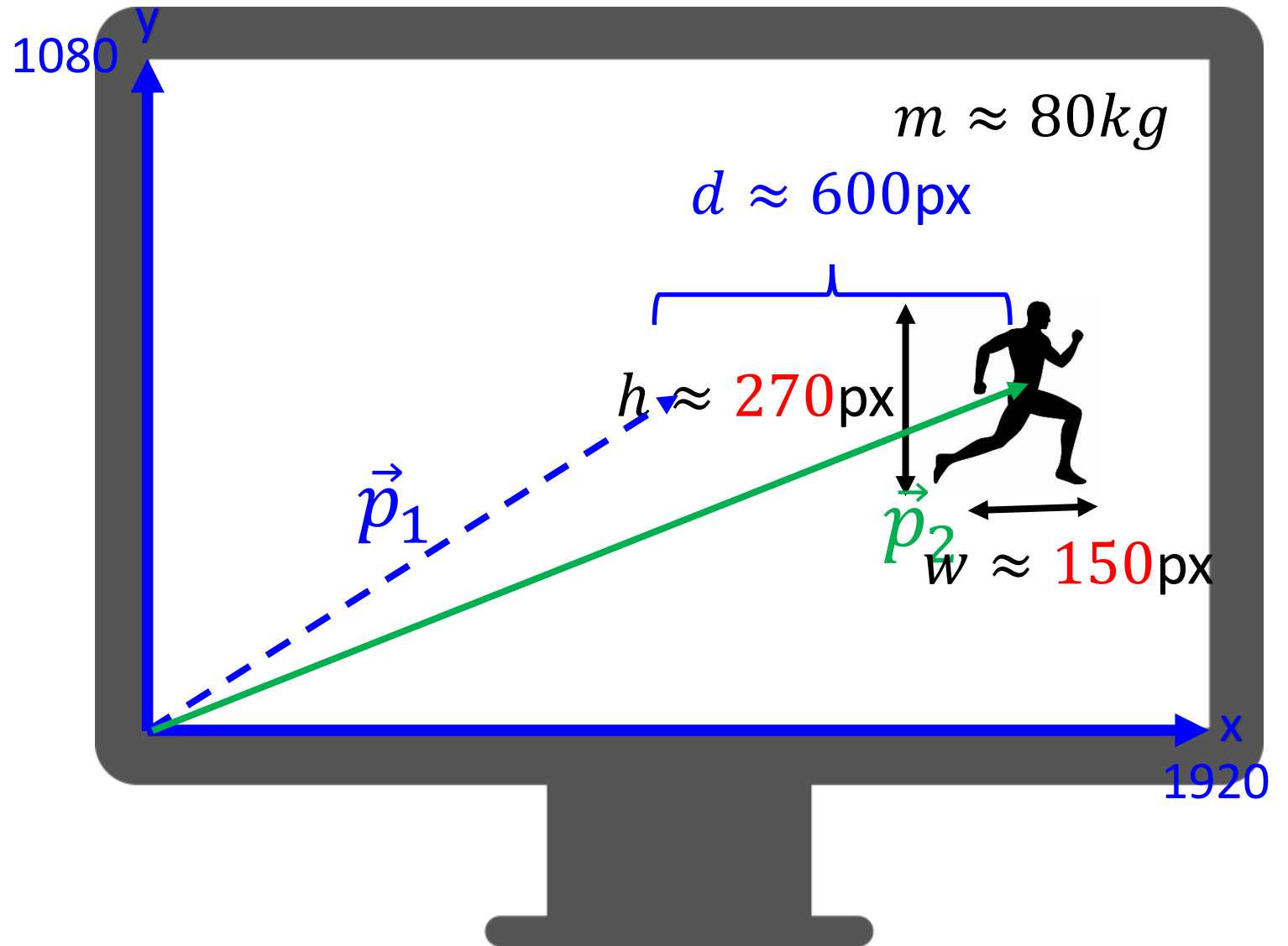
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1560 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Rešenje?





# Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} m$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$



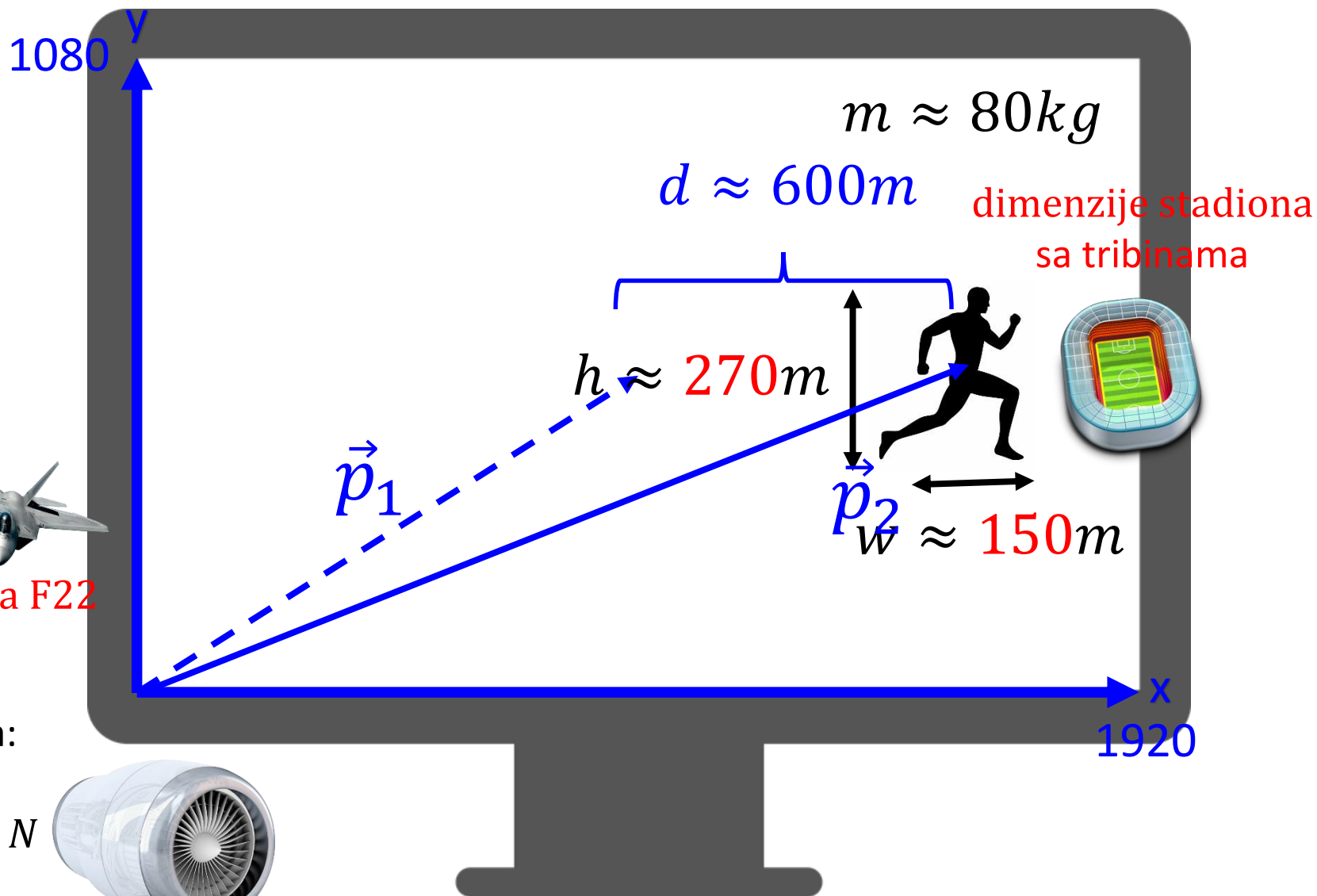
brzina F22

Da bi telo razvilo ovoliku brzinu tokom samo 1s, potrebna je sila:

$$F = 80kg \frac{\begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}}{1s} = \begin{bmatrix} 48000 \\ 0 \end{bmatrix} N$$



potisak mlaznog motora





# Kinematika

- skaliranje:

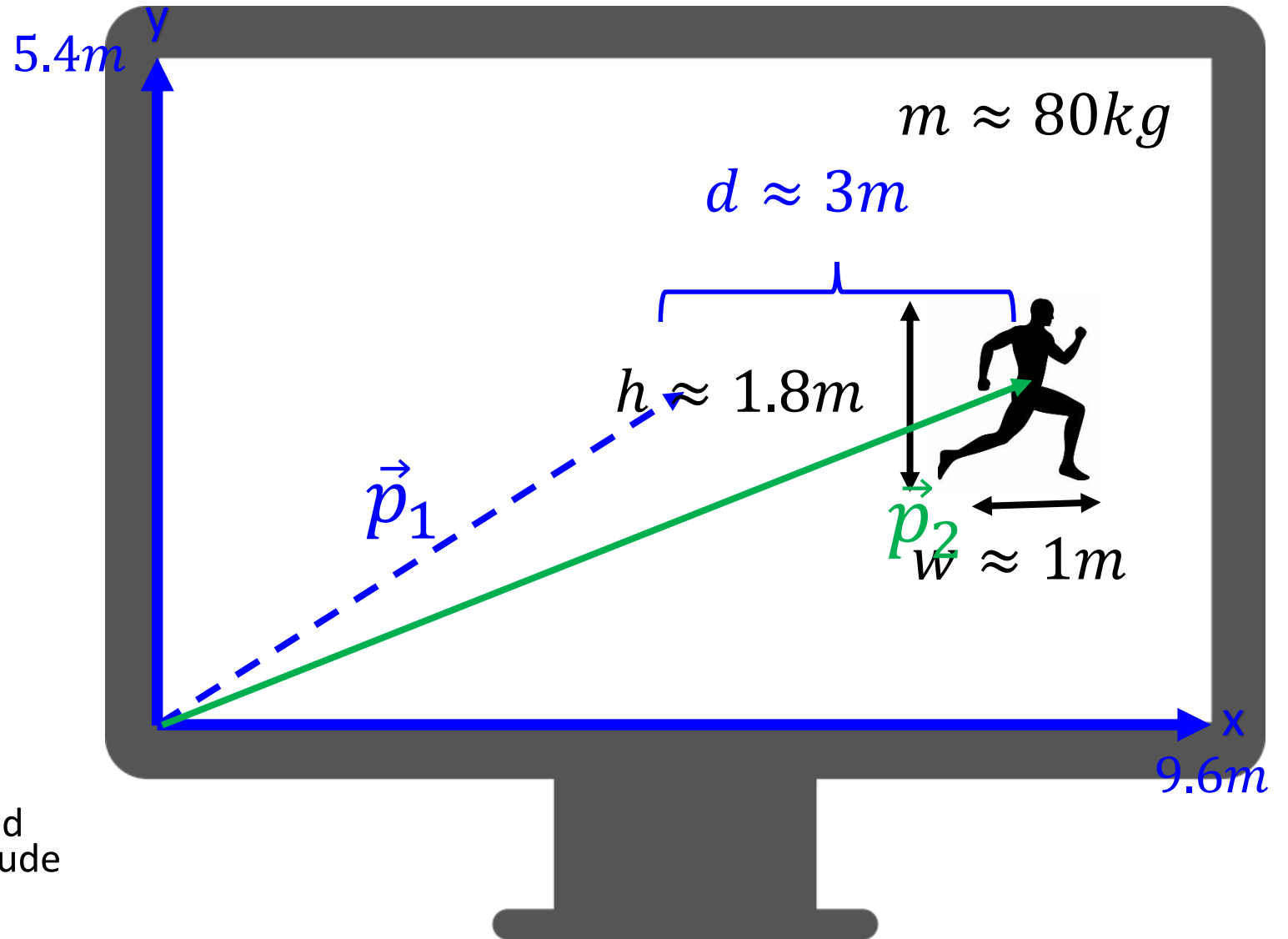
sa skaliranjem:

$$1m = 200px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 2.8 \end{bmatrix} m$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$t = 1s$$
$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 7.8 \\ 2.8 \end{bmatrix} m$$

Odnos se određuje u zavisnosti od primene, a poželjno je da je da bude dinamički izmenljiv (zoom).





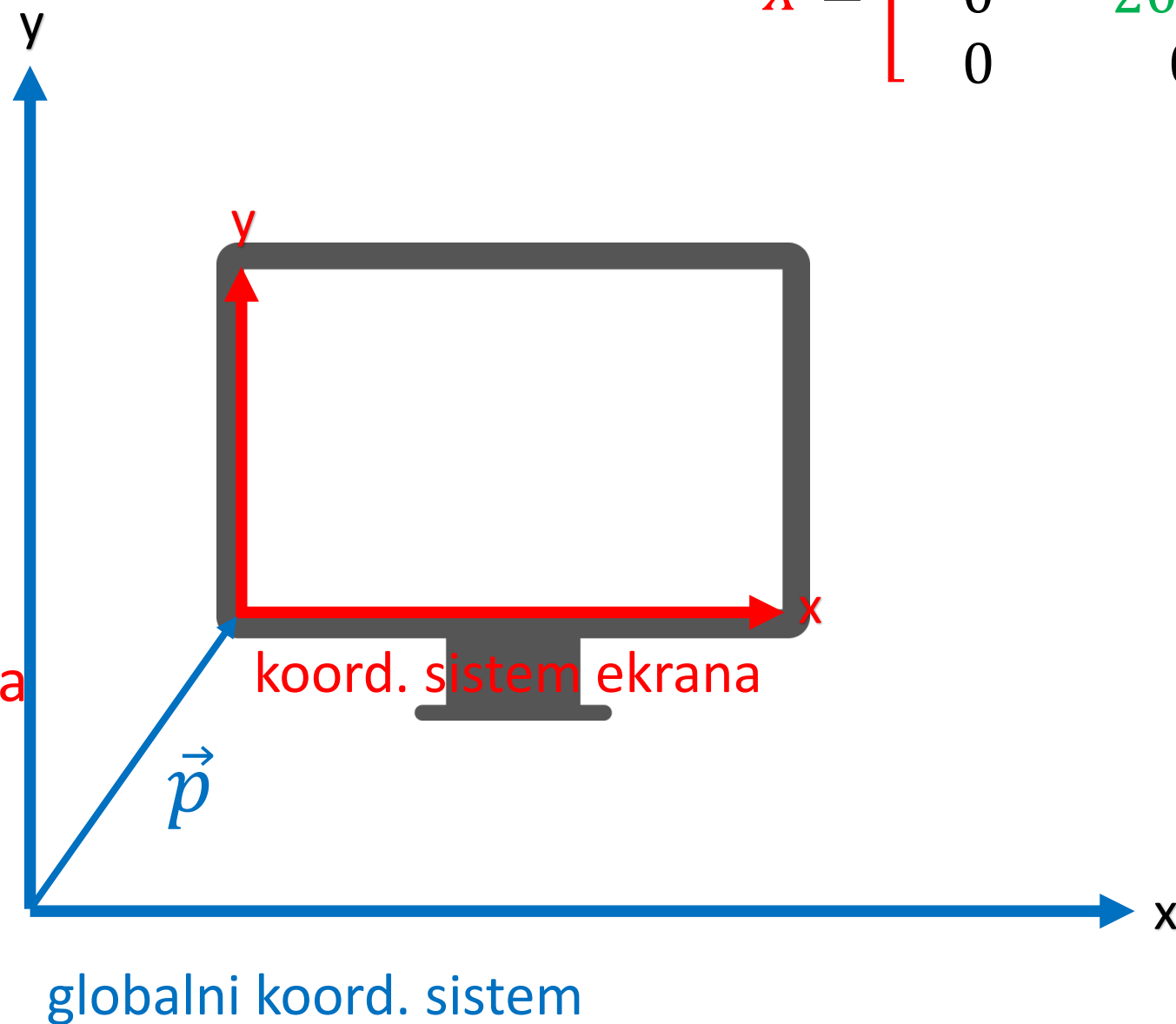
# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 200.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 200.0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Što je faktor skaliranja  
manji, više stane na  
ekran i obrnuto!





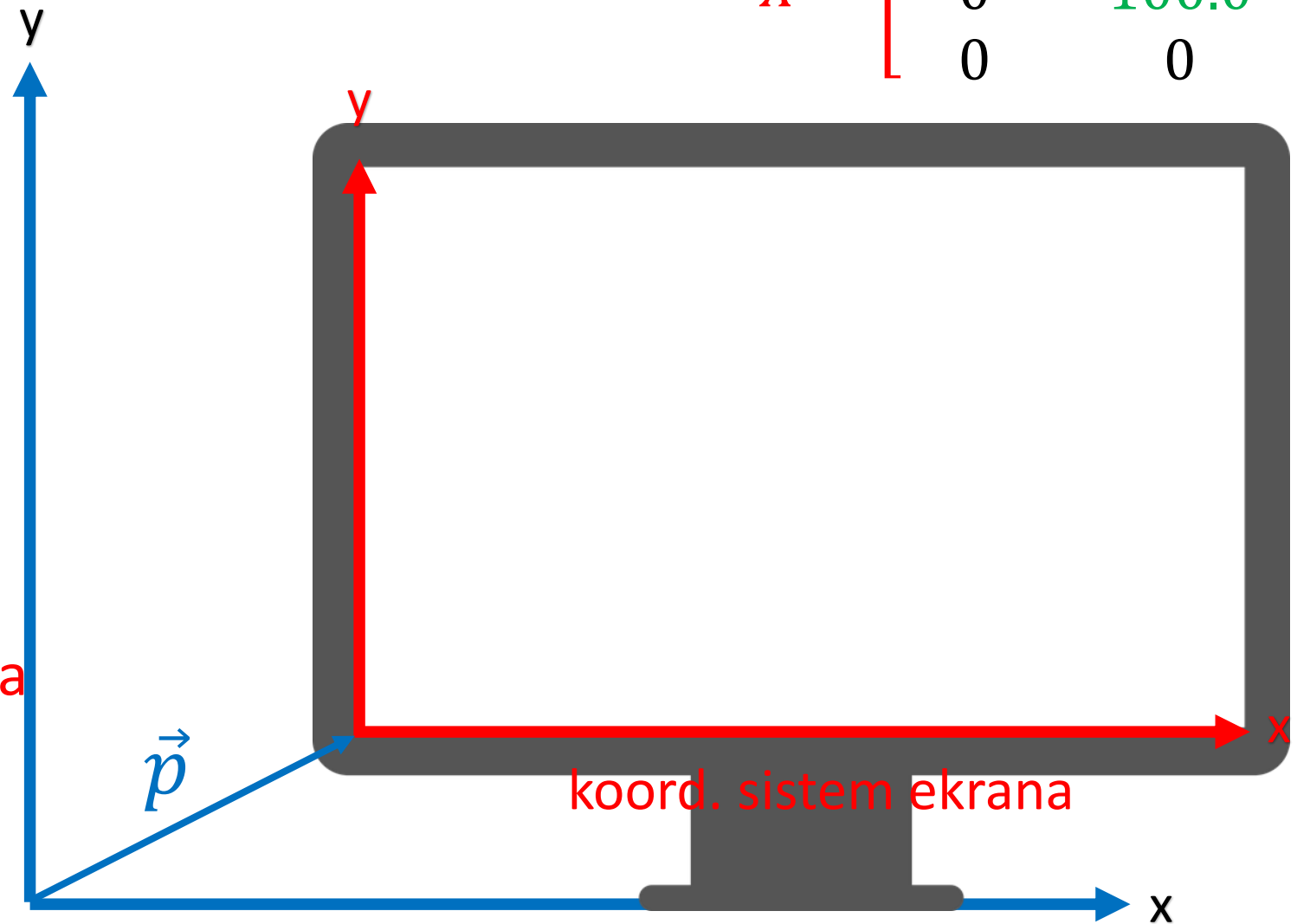
# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Što je faktor skaliranja  
manji, više stane na  
ekran i obrnuto!

$$X = \begin{bmatrix} 100.0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 100.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

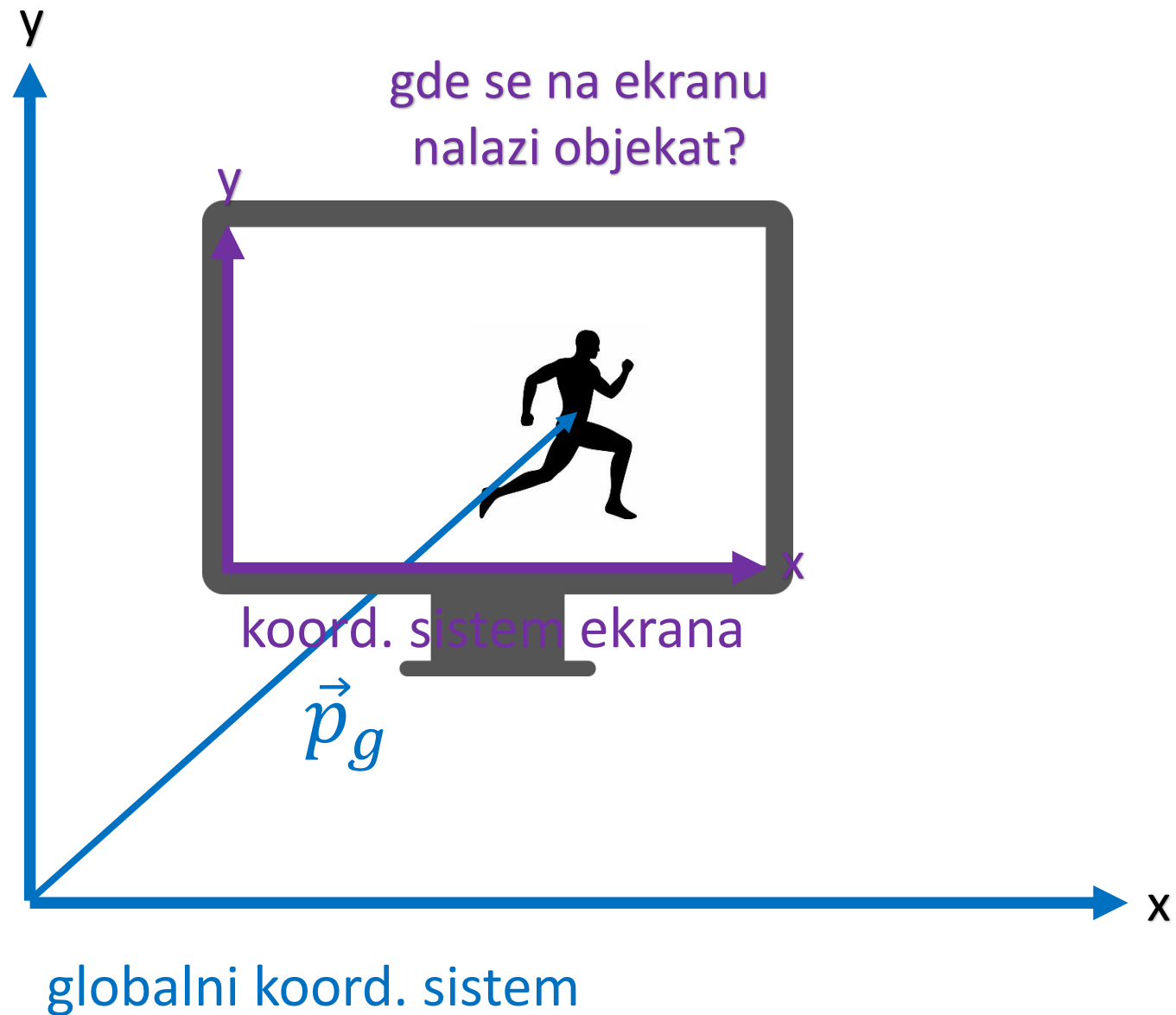




# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

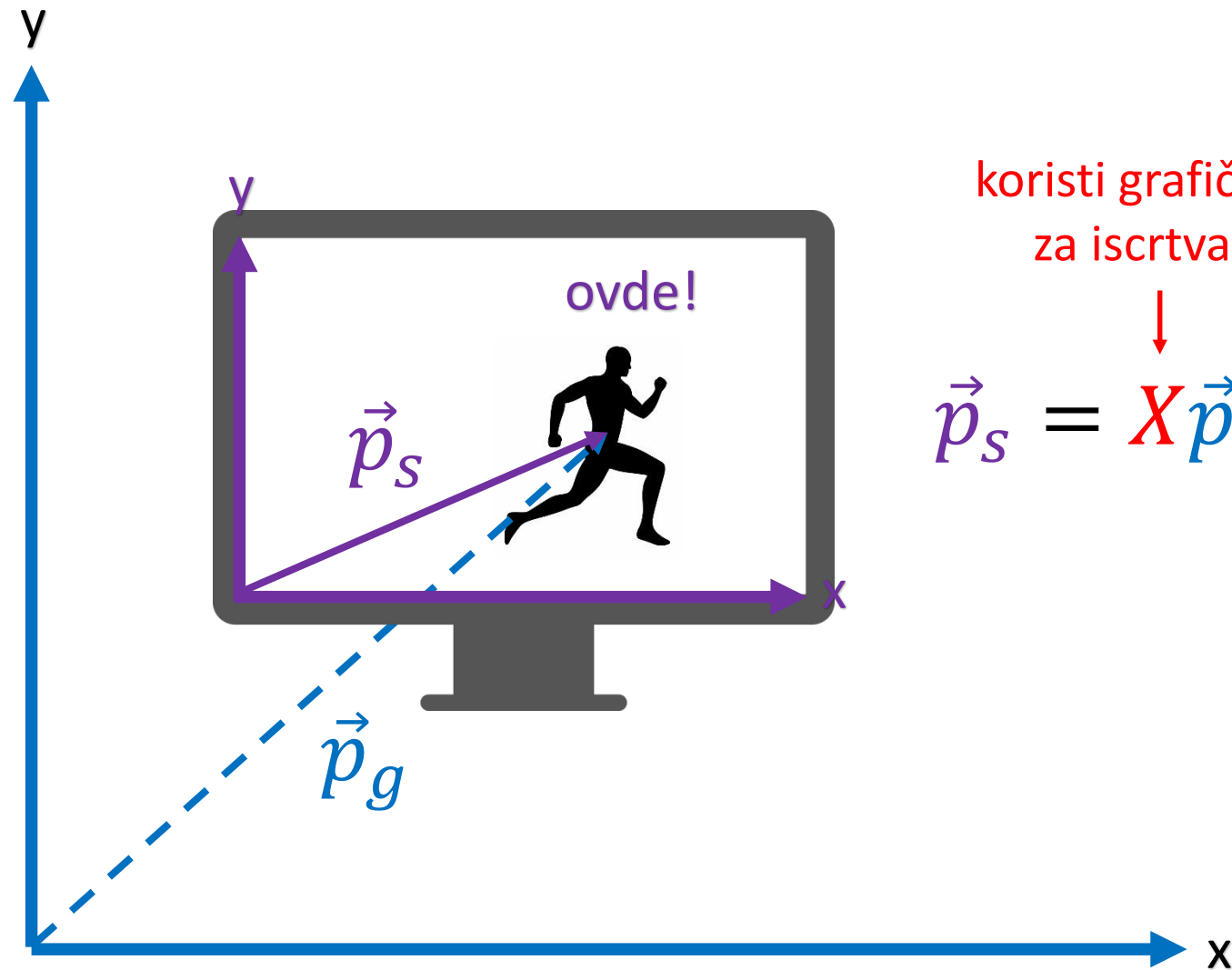




# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



globalni koord. sistem

koristi grafički API  
za iscrtvanje

$$\vec{p}_s = X \vec{p}_g$$

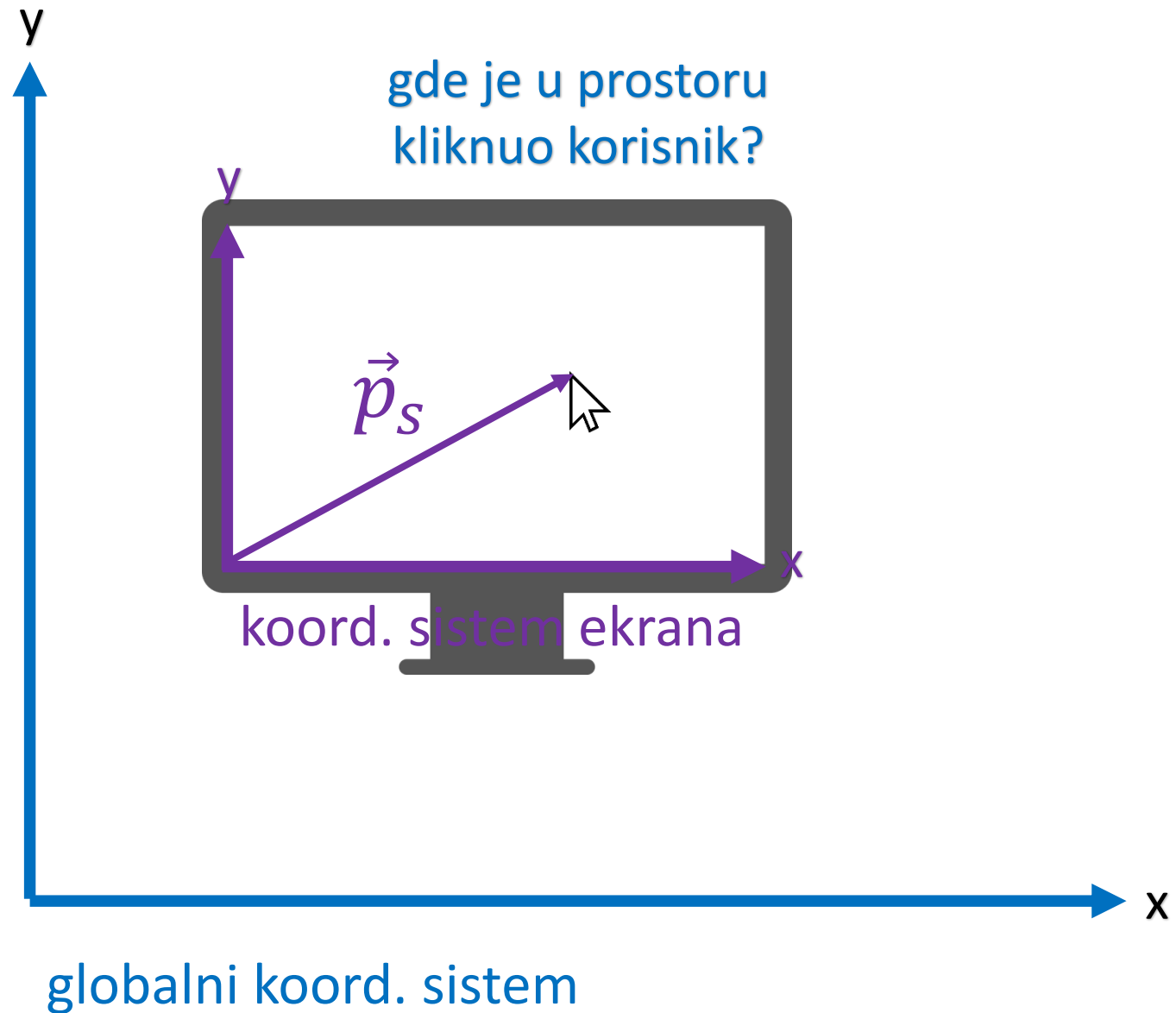




# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

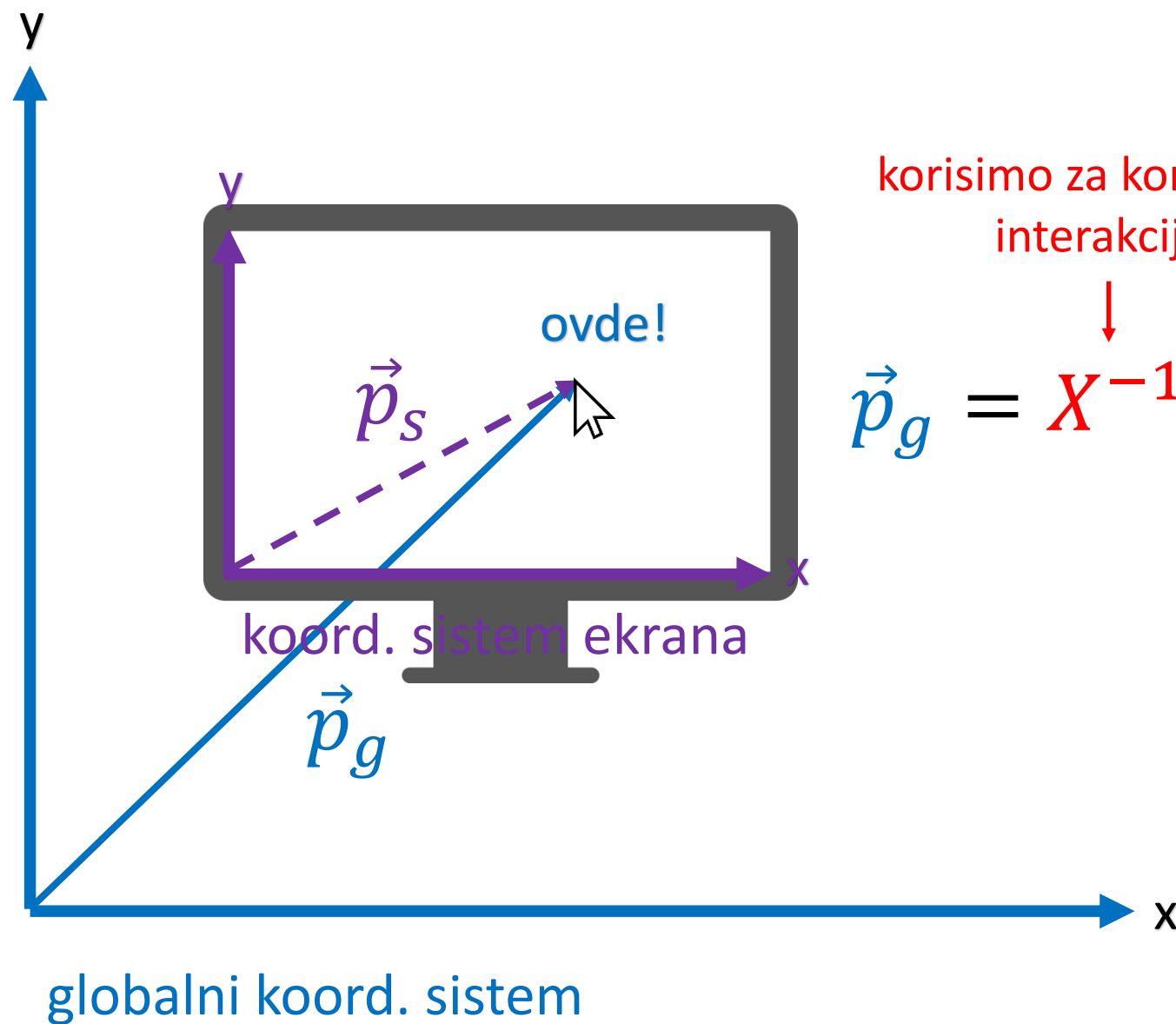




# Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



korisimo za korisničku  
interakciju

$$\vec{p}_g = X^{-1} \vec{p}_s$$



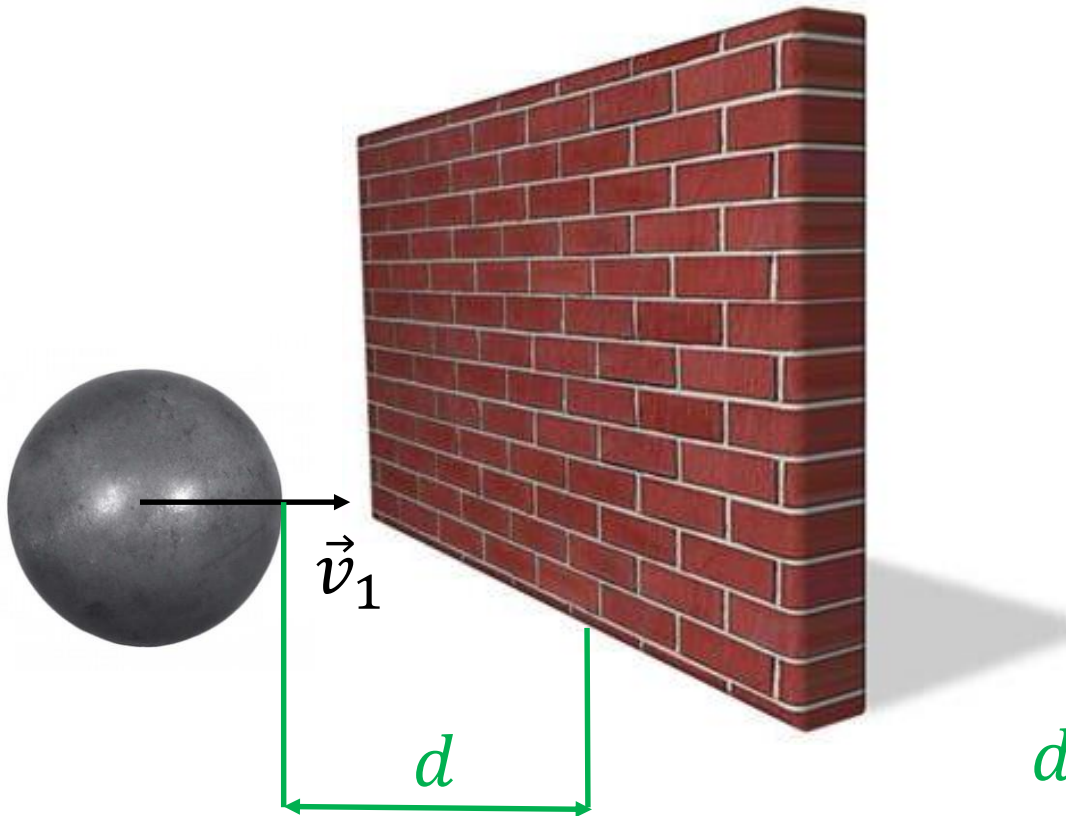
# Ograničeno kretanje

Kako **sprečiti slobodno kretanje/rotaciju tela** u određenim uslovima?

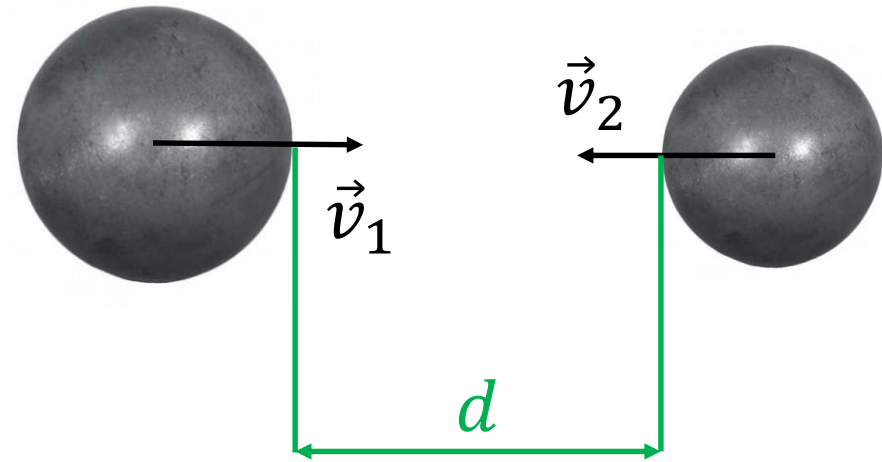


# Ograničeno kretanje

- kontaktna ograničenja: **dozvoljeno** stanje



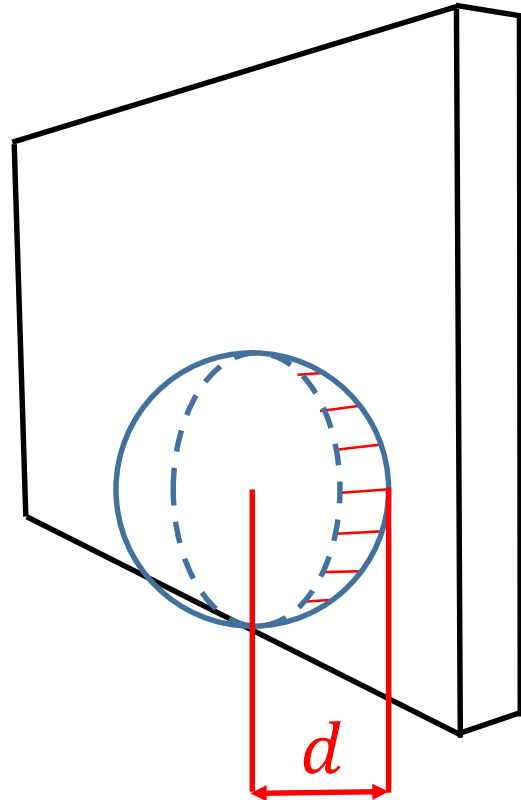
$$d \geq 0$$



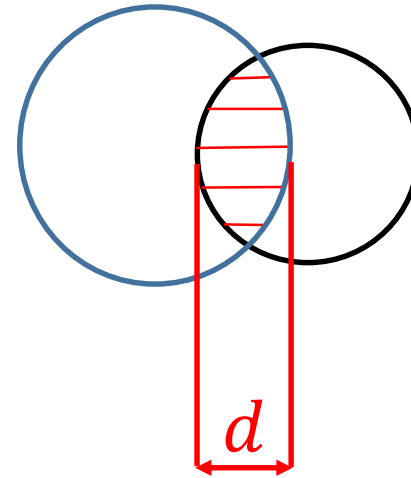


# Ograničeno kretanje

- kontaktna ograničenja: **nedozvoljeno** stanje



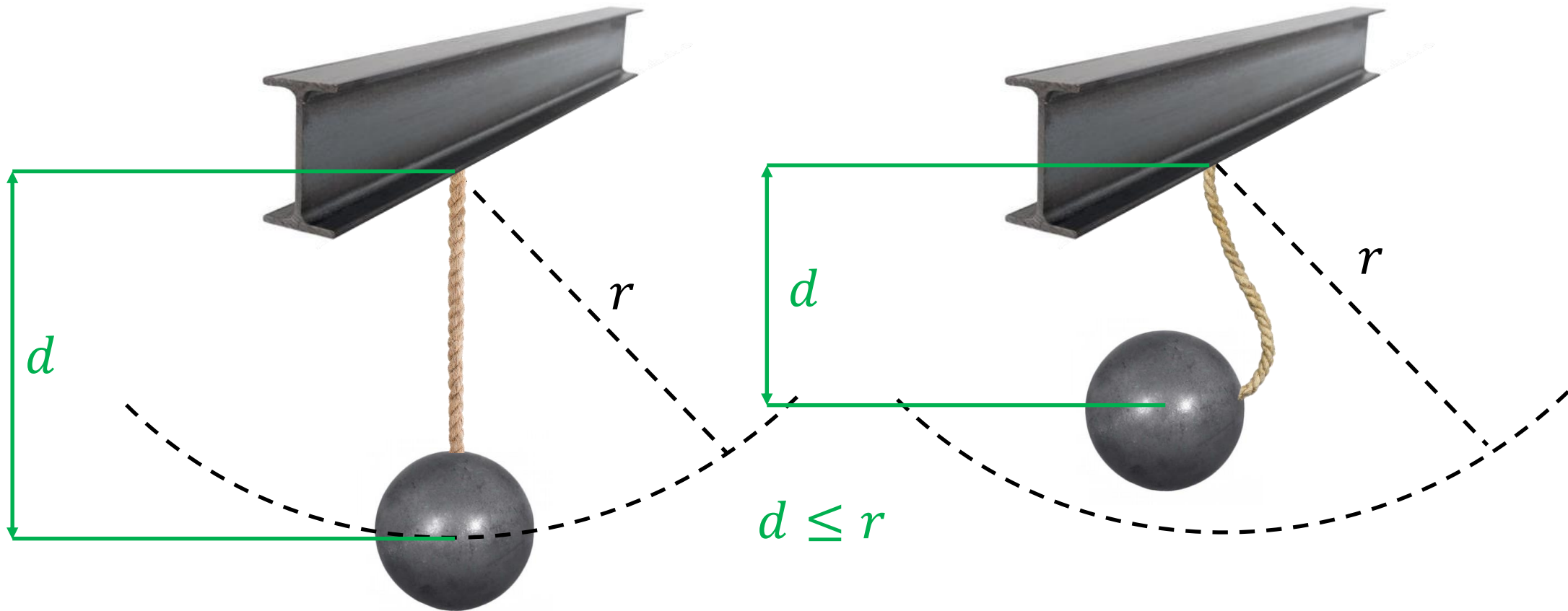
$$d < 0$$





# Ograničeno kretanje

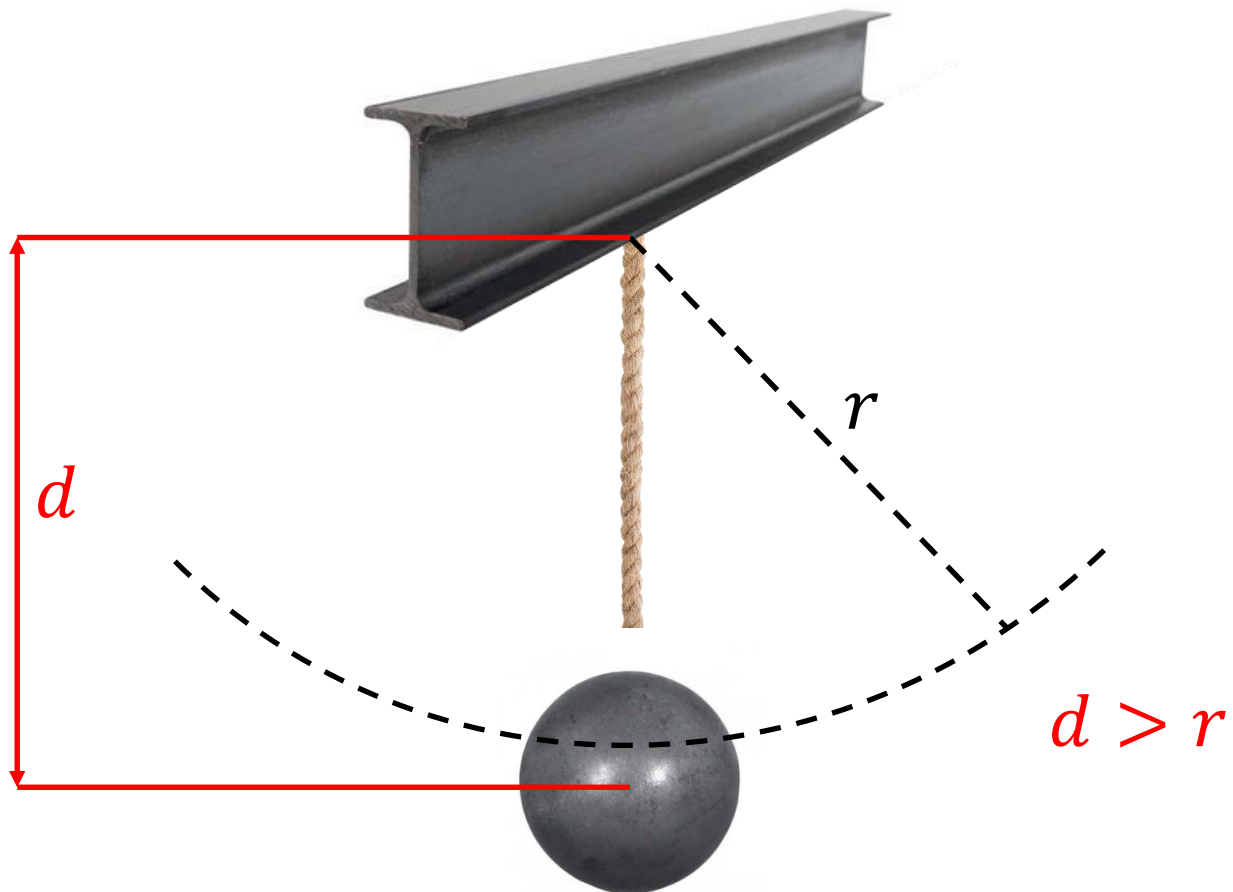
- klatna: **dozvoljeno** stanje





# Ograničeno kretanje

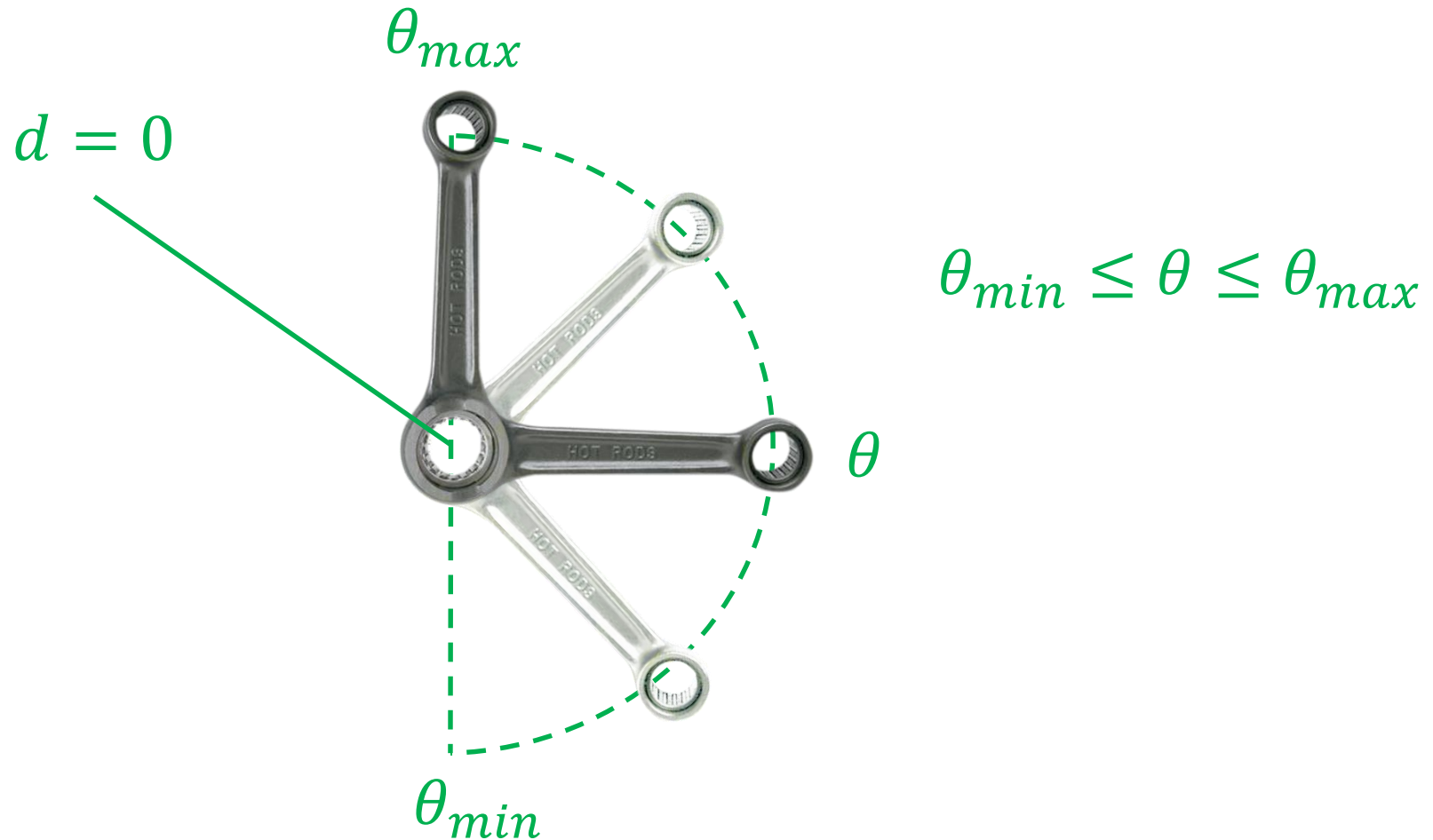
- klatna: **nedozvoljeno** stanje





# Ograničeno kretanje

- zglobovi (*joints*): **dozvoljeno** stanje

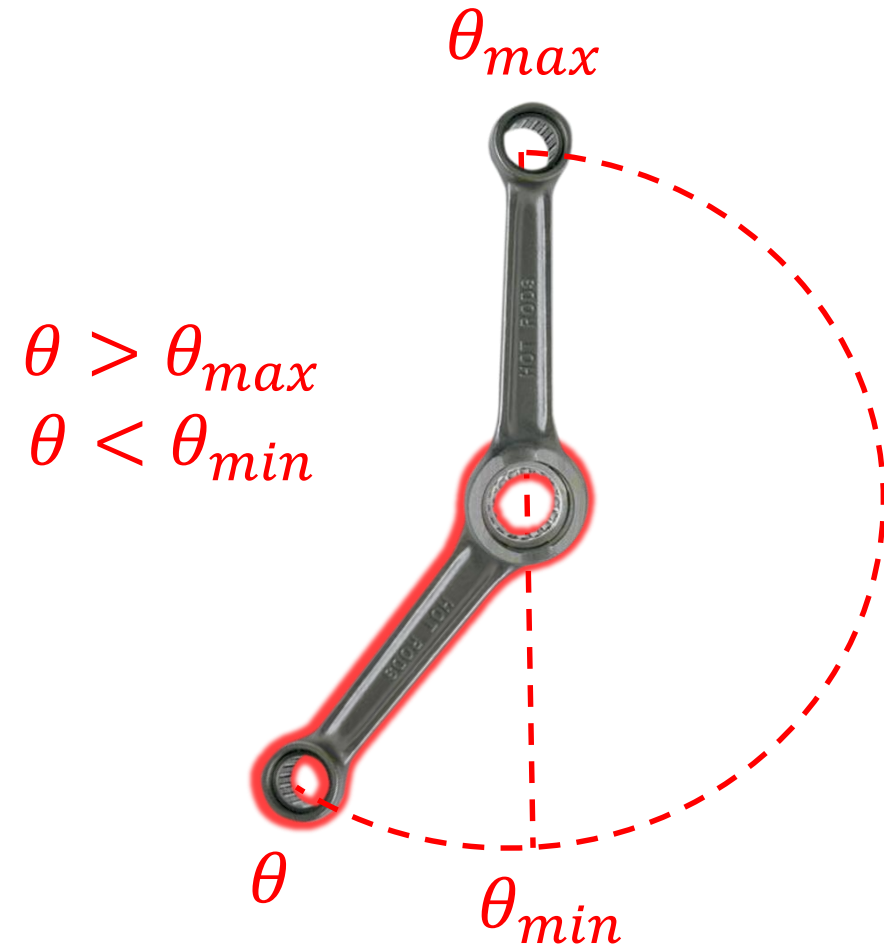
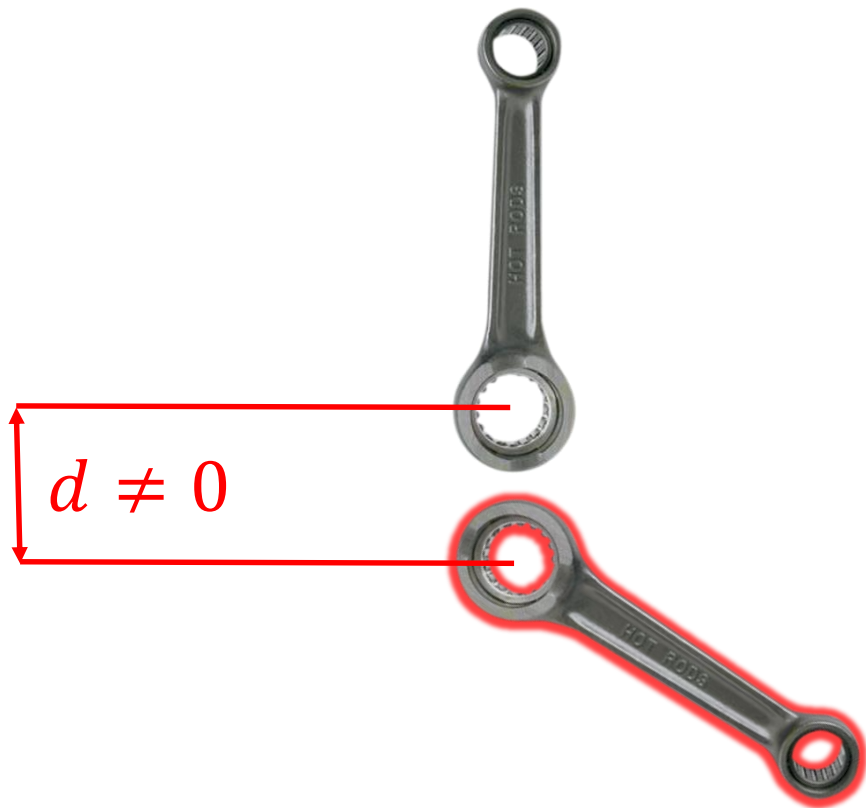






# Ograničeno kretanje

- zglobovi (*joints*): **nedozvoljeno** stanje





# Ograničeno kretanje

- opruge
- fluidi
- tkanina
- *ragdolls*
- itd.



# Ograničeno kretanje

- postupak (*pipeline*):

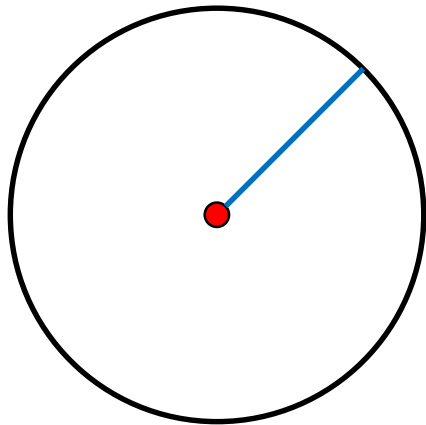




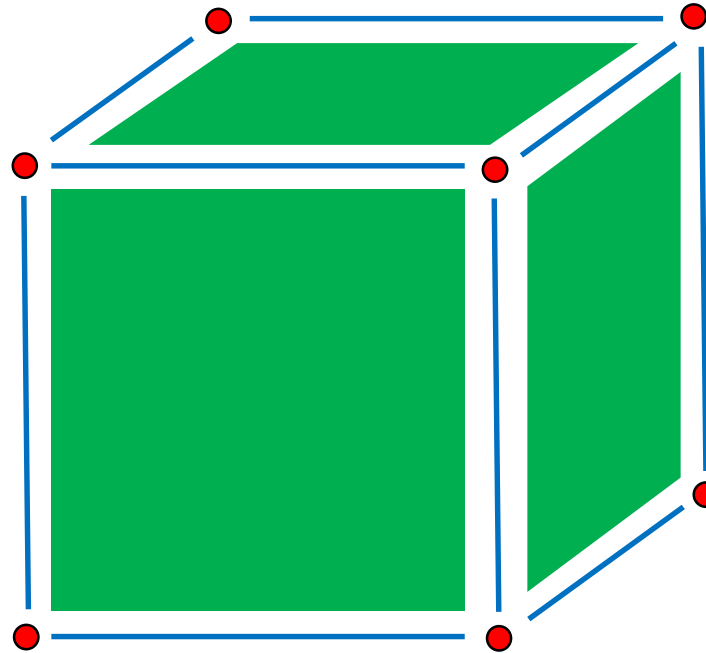
# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- karakteristična obeležja geometrije (*features*)



- centar
- poluprečnik



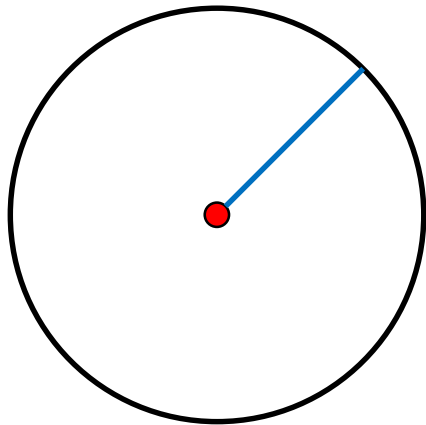
- temena (*vertices*)
- ivice (*edges*)
- stranice (*faces*)
- šta je spolja, a šta unutra?



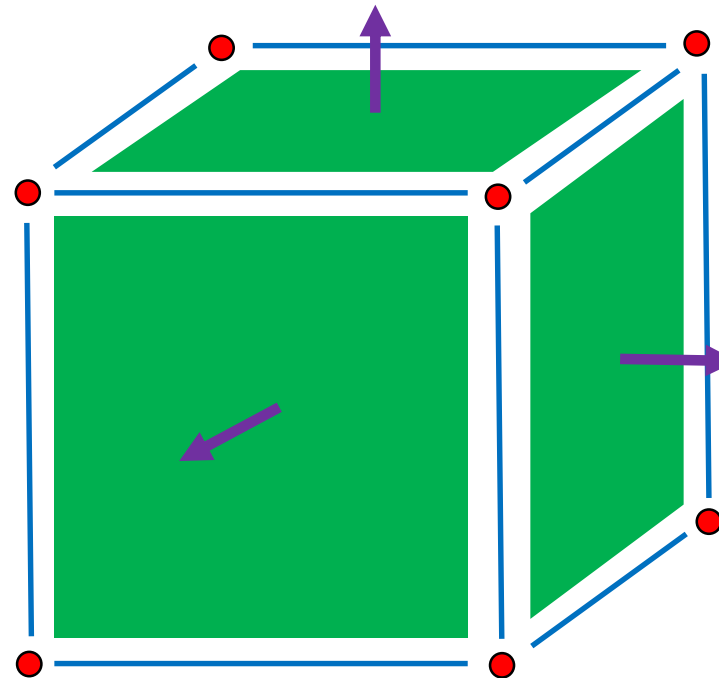
# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- karakteristična obeležja geometrije (*features*)



- centar
- poluprečnik



- temena (*vertices*)
- ivice (*edges*)
- stranice (*faces*)
- normale

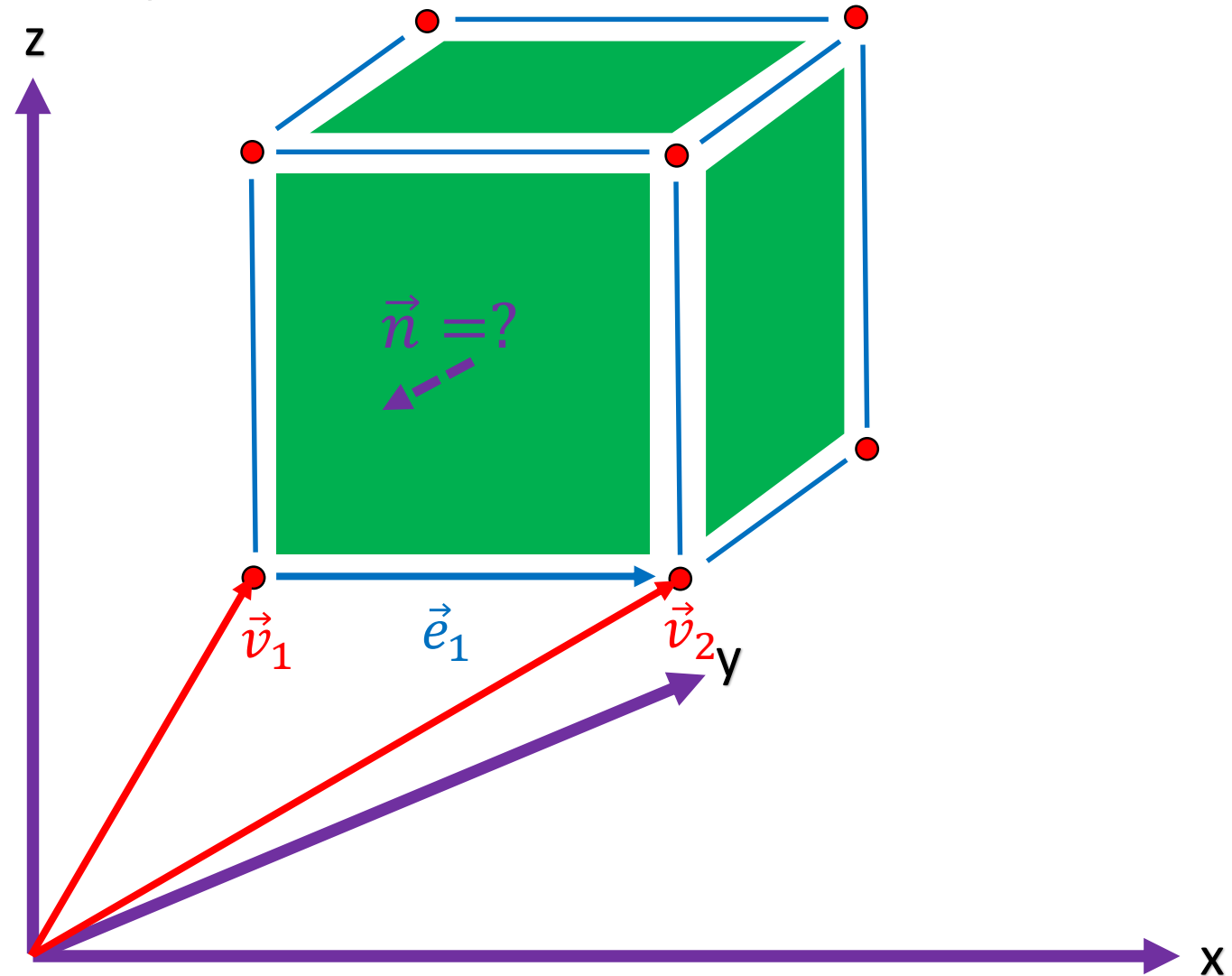


# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- normale (3D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$





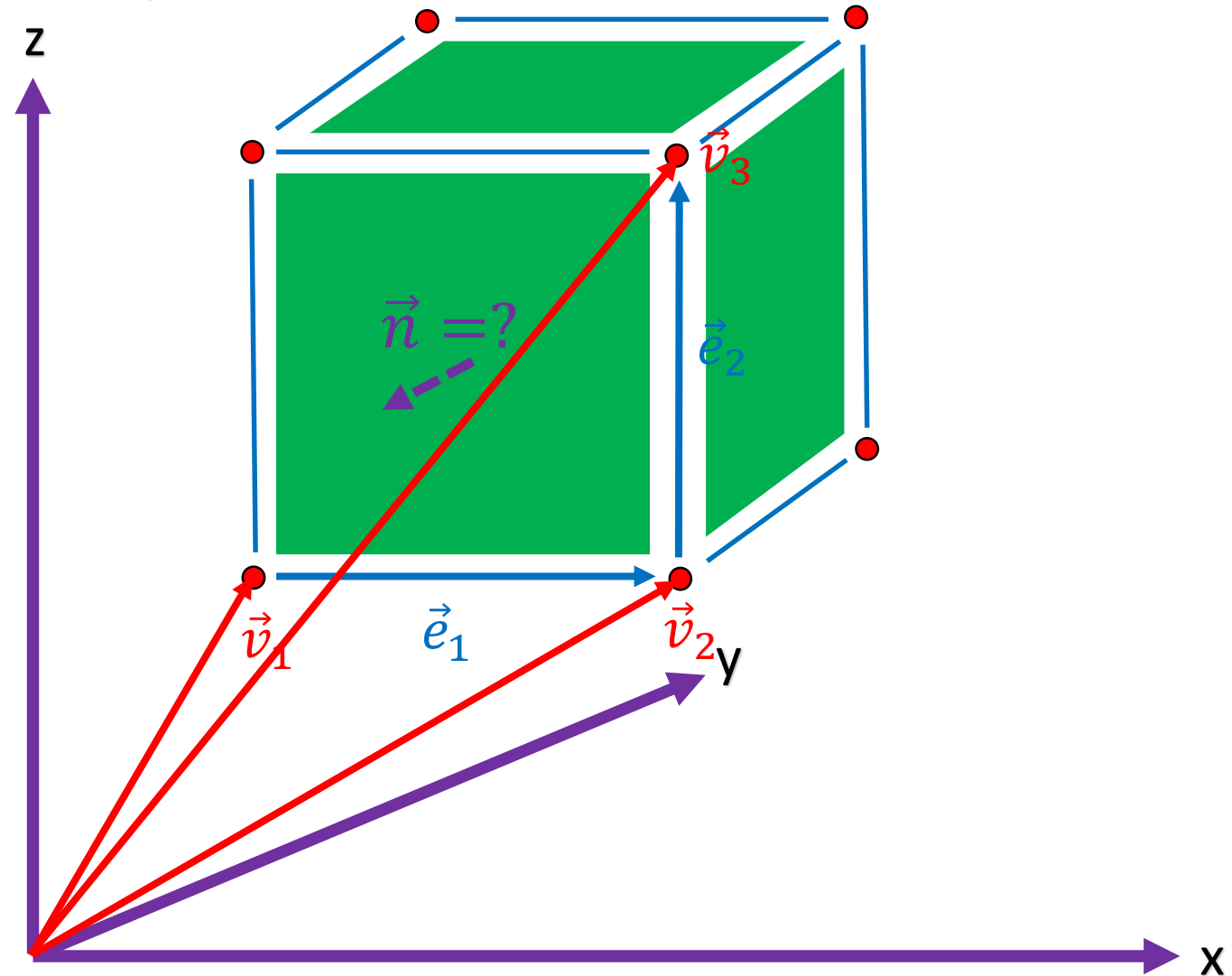
# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- normale (3D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$$





# Ograničeno kretanje

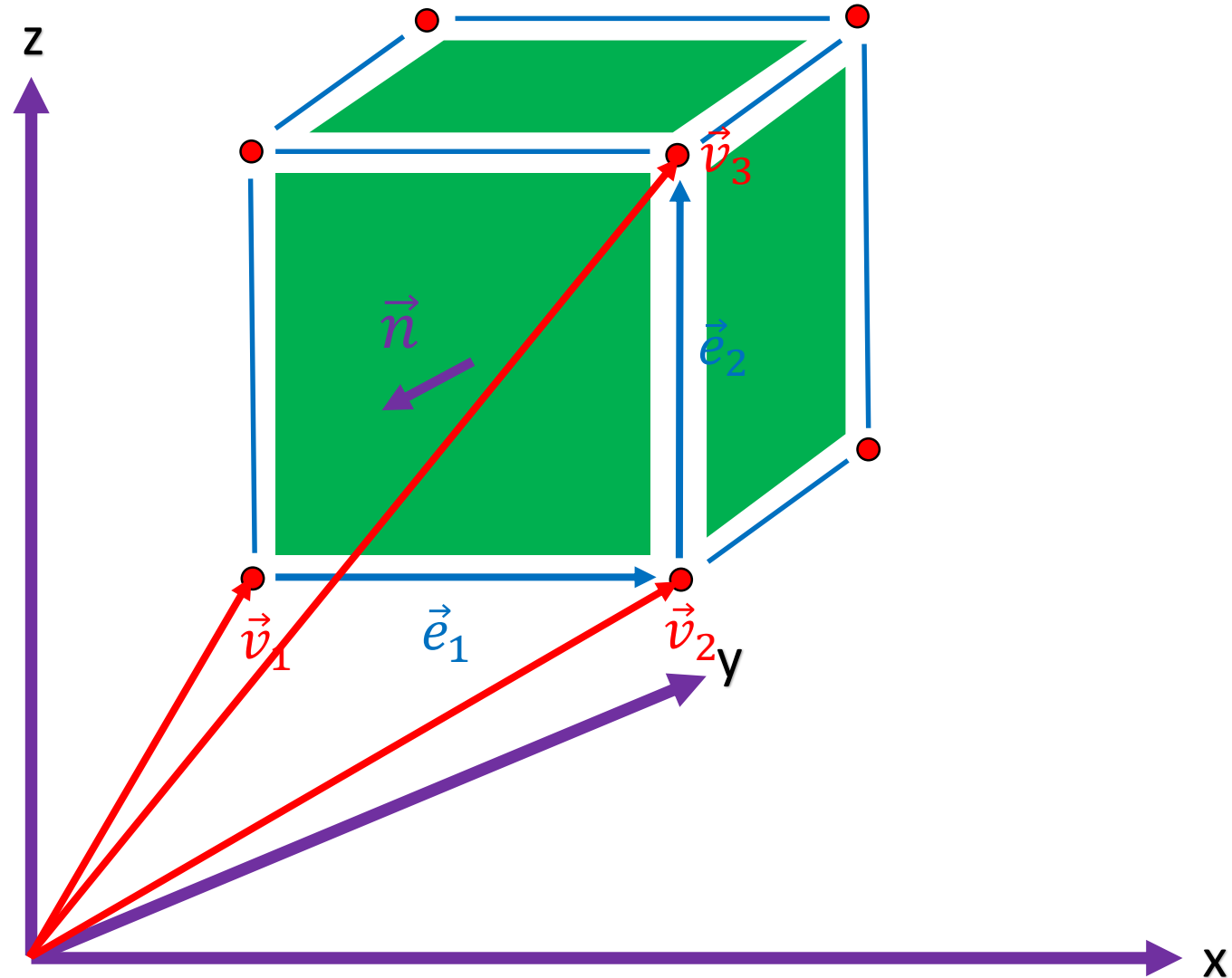
## 1. Otrkivanje sudara

- normale (3D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}{|\vec{e}_2 \times \vec{e}_1|}$$





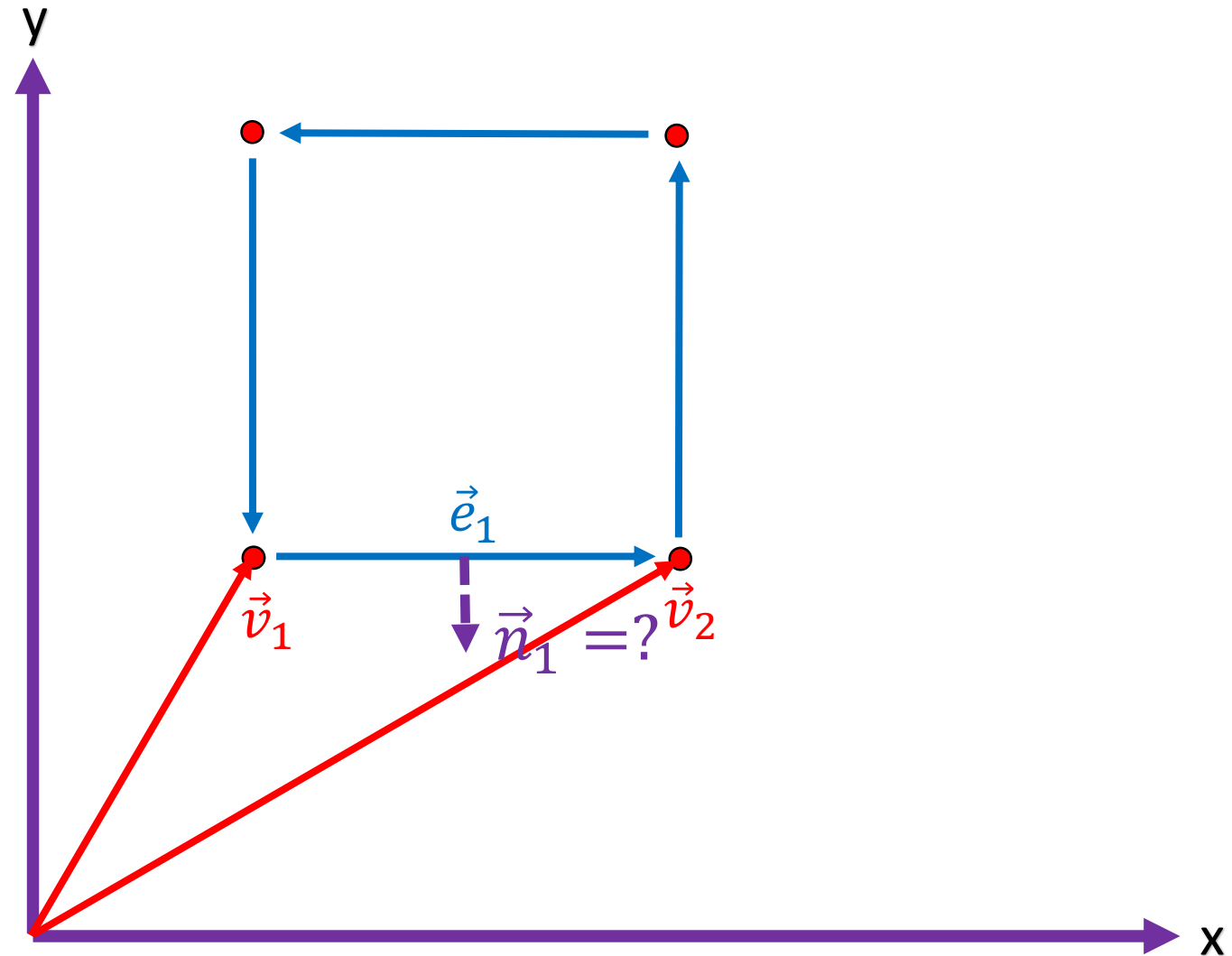


# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- normale (2D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$





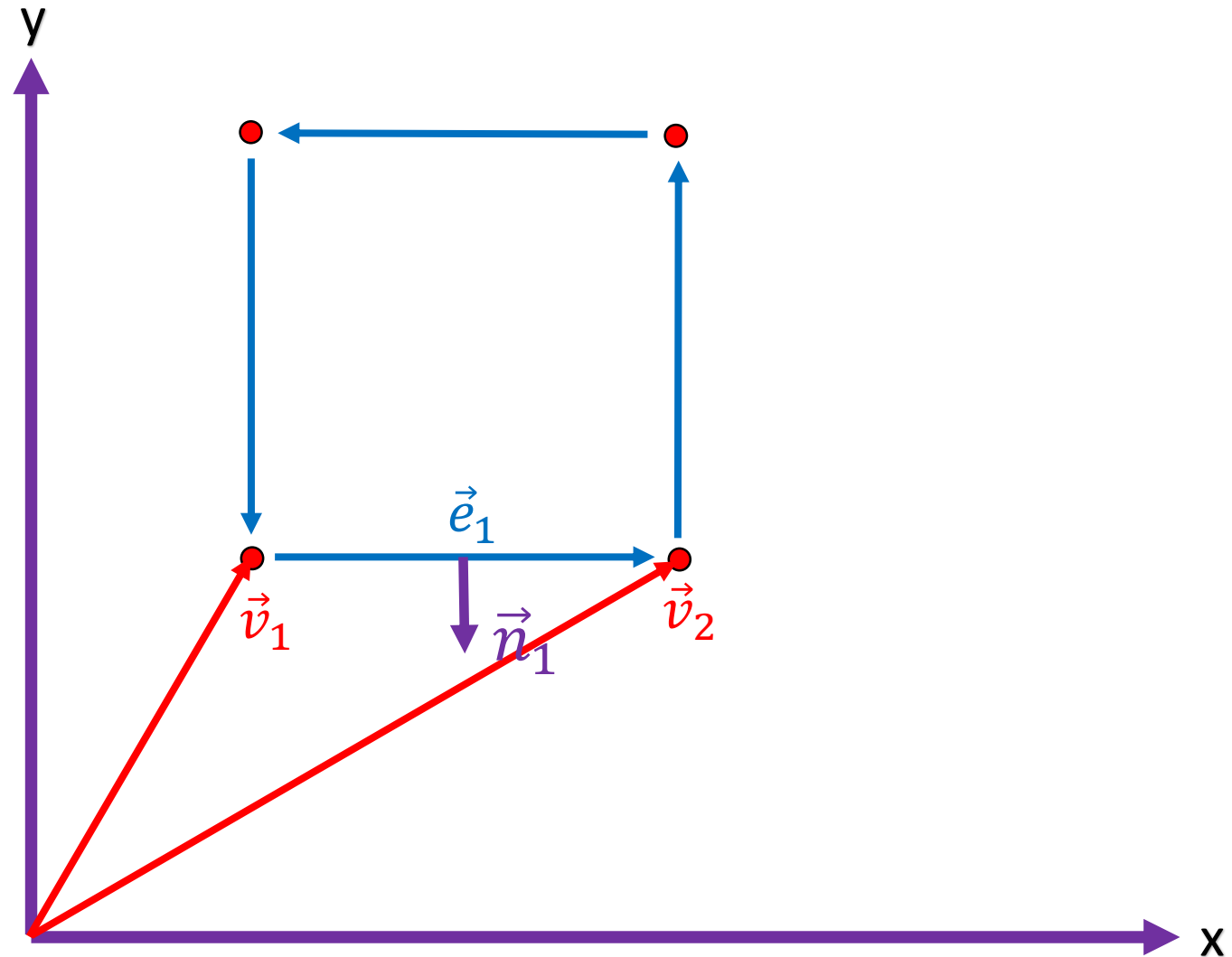
# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- normale (2D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$

$$\vec{n}_1 = \frac{(y_1, -x_1)}{|(y_1, -x_1)|}$$



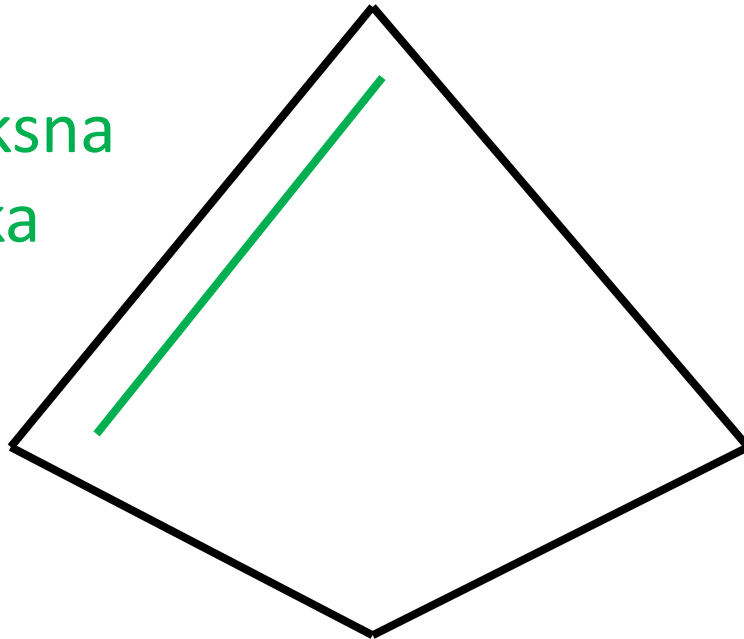


# Ograničeno kretanje

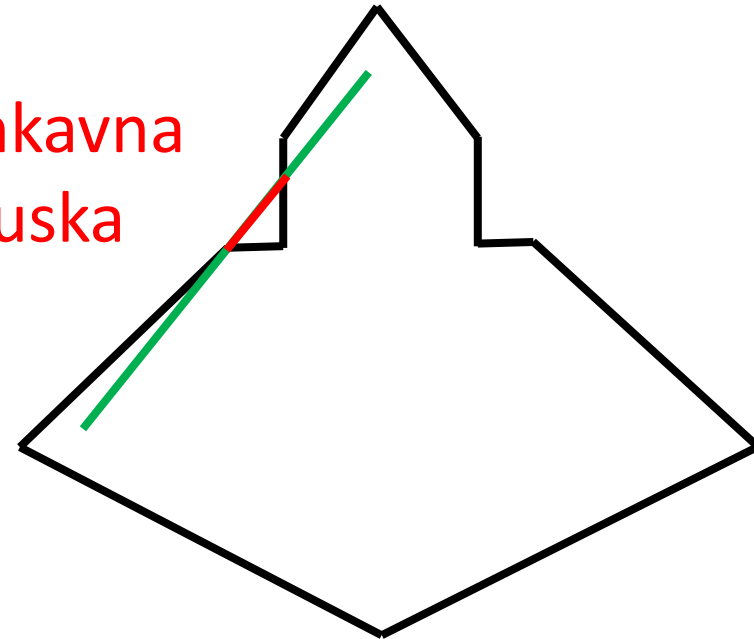
## 1. Otrkivanje sudara

- konveksna ljuska (*convex hull*):
  - a) poligon (2D)
  - b) poliedar (3D)

Konveksna  
ljuska



Konkavna  
ljuska

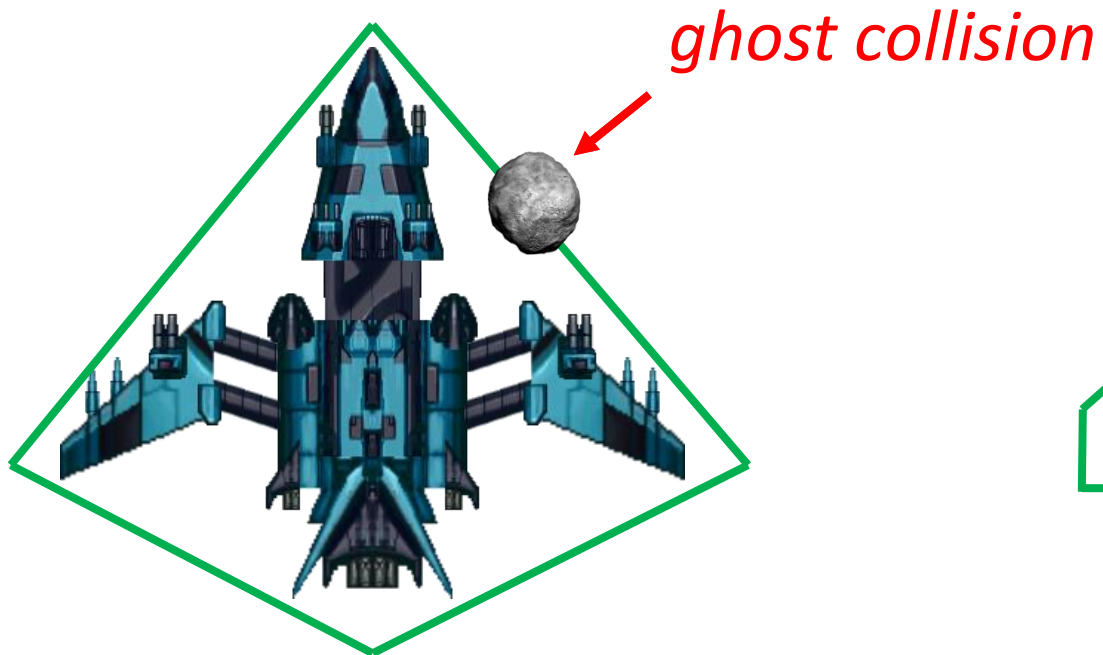




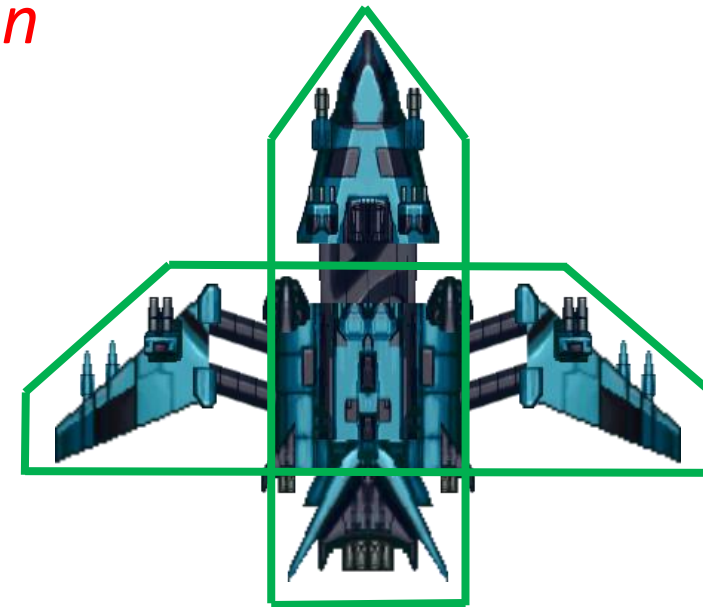
# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- konveksna ljuska (*convex hull*):



monolitna



kompozitna



# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

pristupi (algoritmi):

- SAT (*Separating Axis Test*), test razdvajajuće ose
- *Gilbert–Johnson–Keerthi distance* algoritam + *Expanding Polytope Algorithm*

- oslanjaju se na postojanje **konveksnih ljuski!**

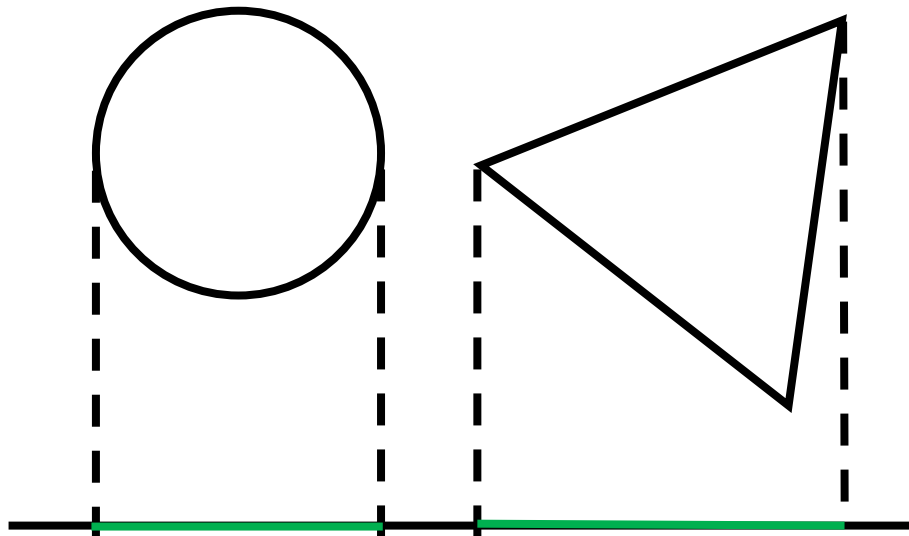


# Ograničeno kretanje

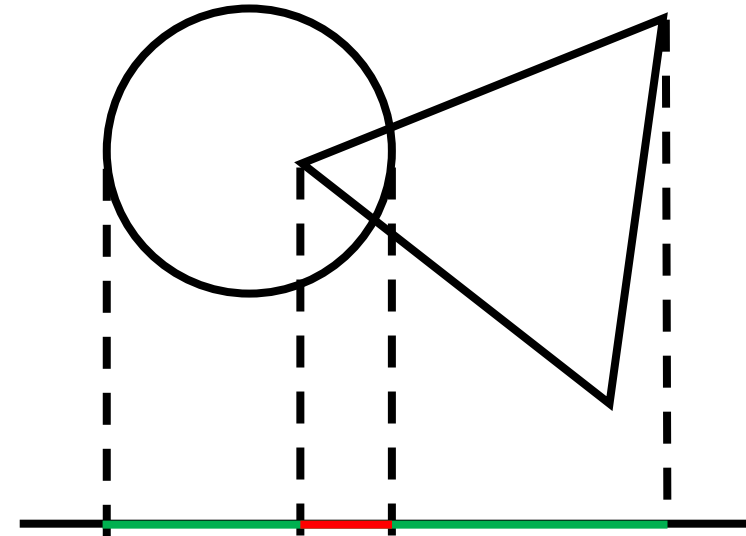
## 1. Otrkivanje sudara

- *Separating Axis Theorem*:

“Ako postoji prava, duž koje se projekcije tela ne preklapaju, tela se ne sudaraju, a ta prava je za njih razdvajajuća osa.”



razdvajajuća osa

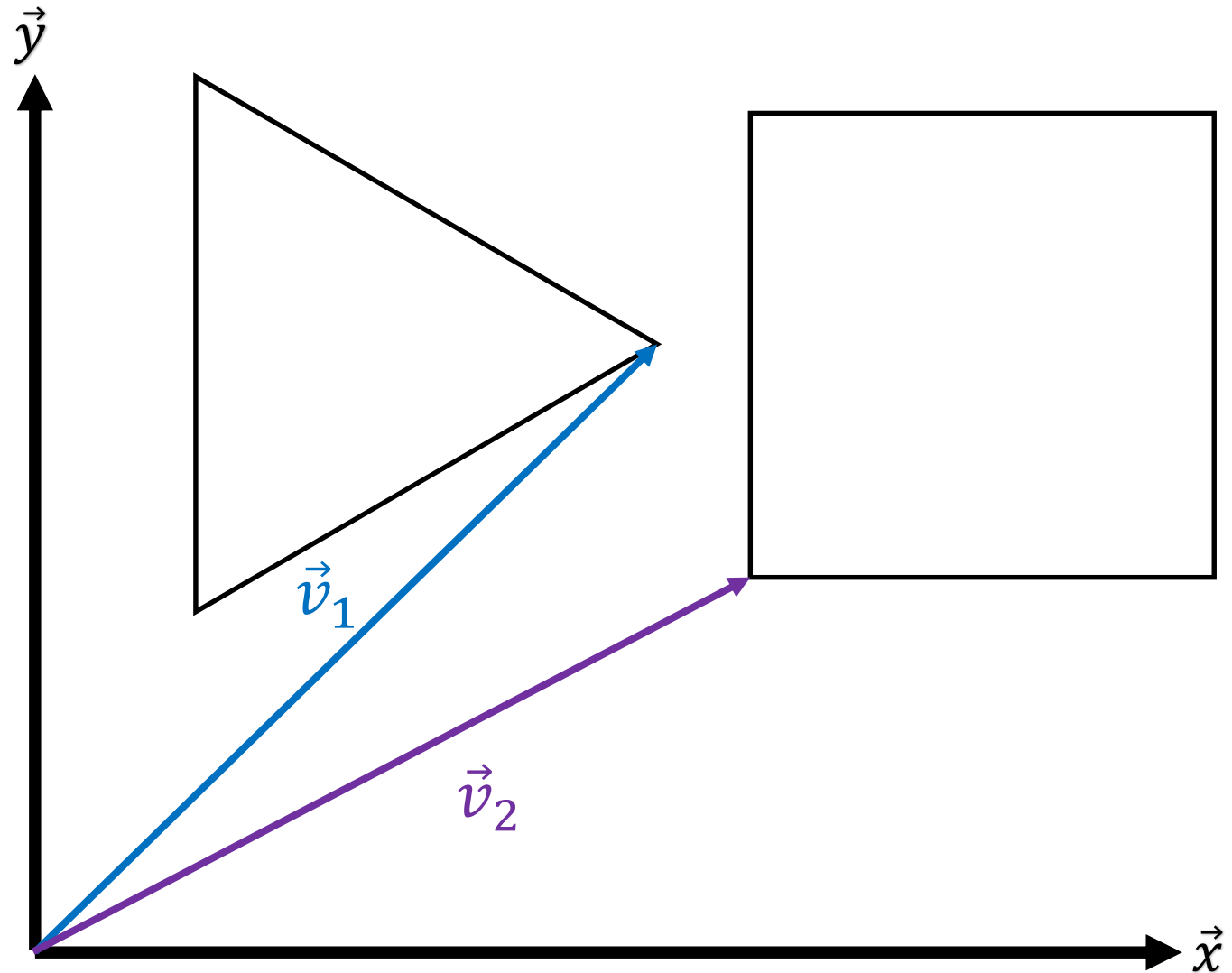


nije razdvajajuća osa (možda neka druga jeste)



# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:





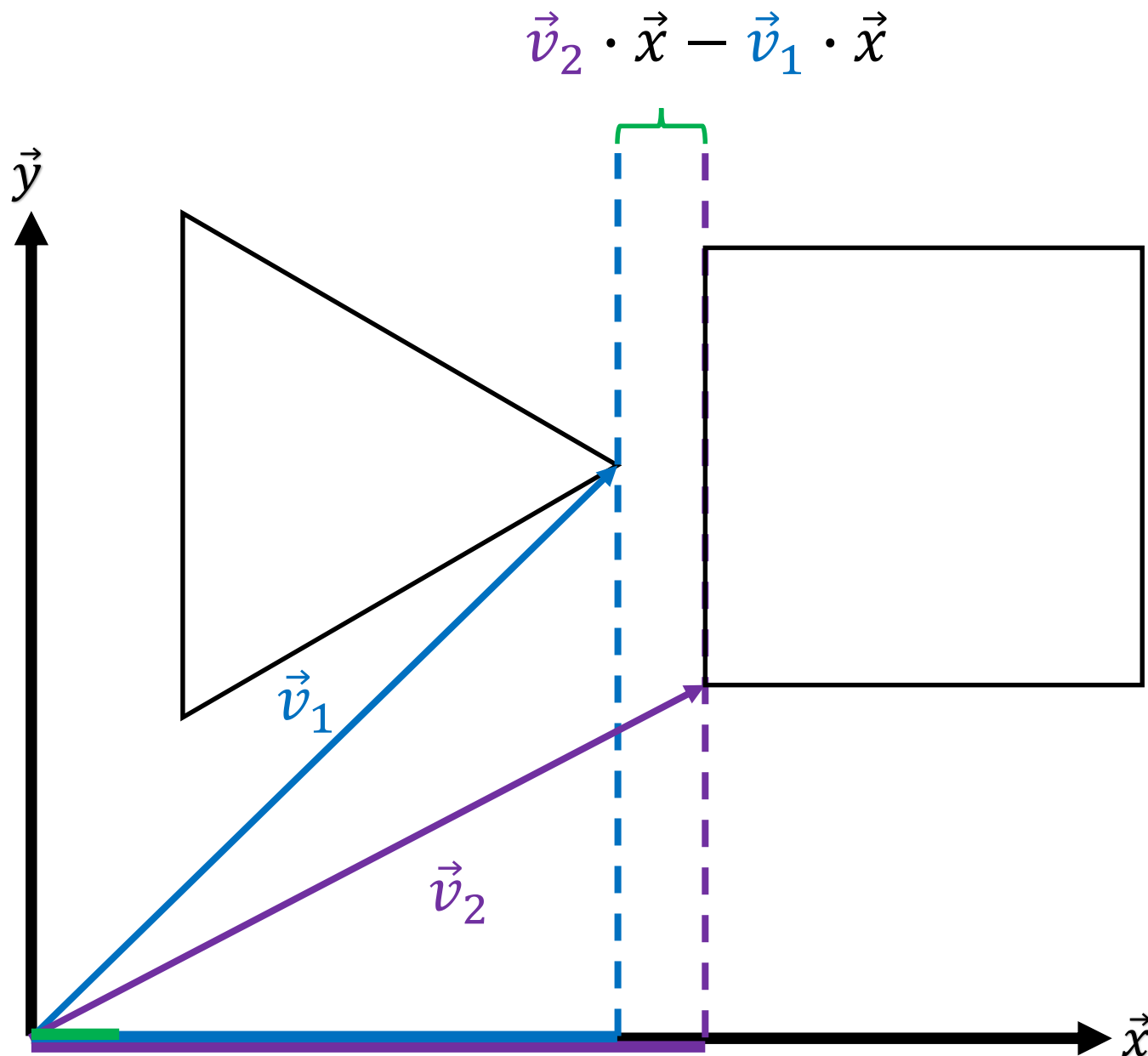
# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x} - \vec{v}_1 \cdot \vec{x} > 0$$

Ne postoji kontakt!







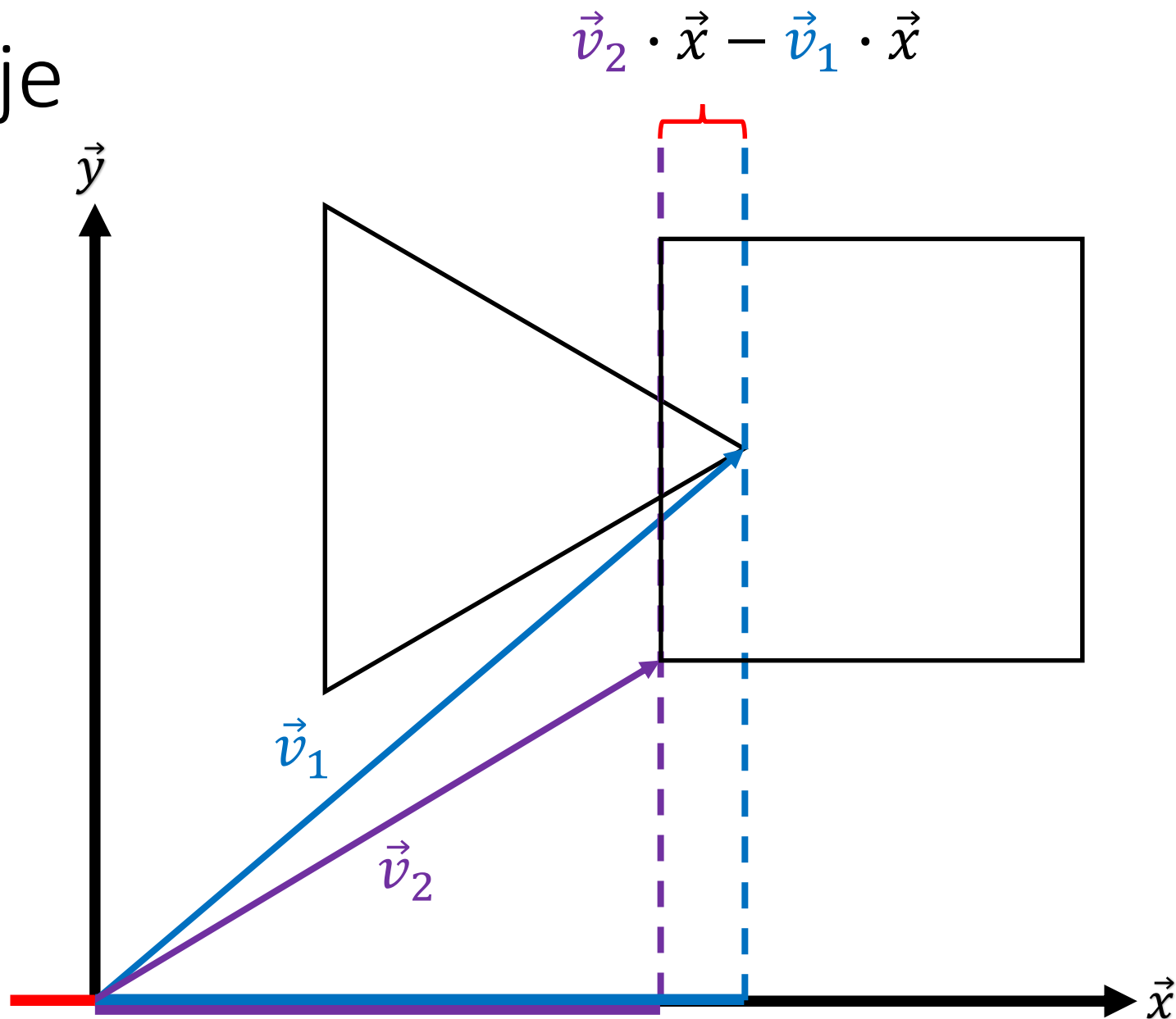
# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x} - \vec{v}_1 \cdot \vec{x} \leq 0$$

Postoji kontakt!



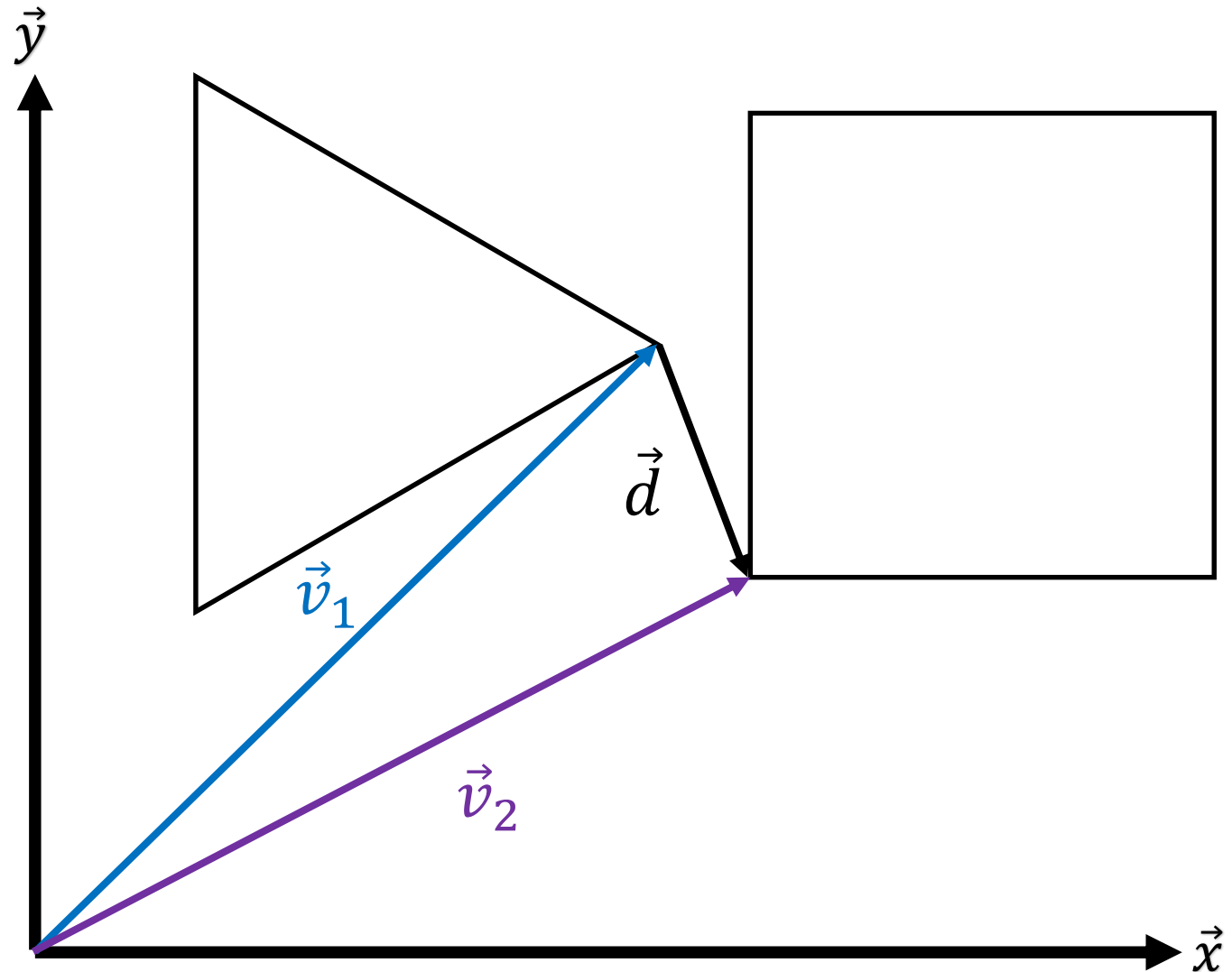


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Vektor rastojanja:

$$\vec{d} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



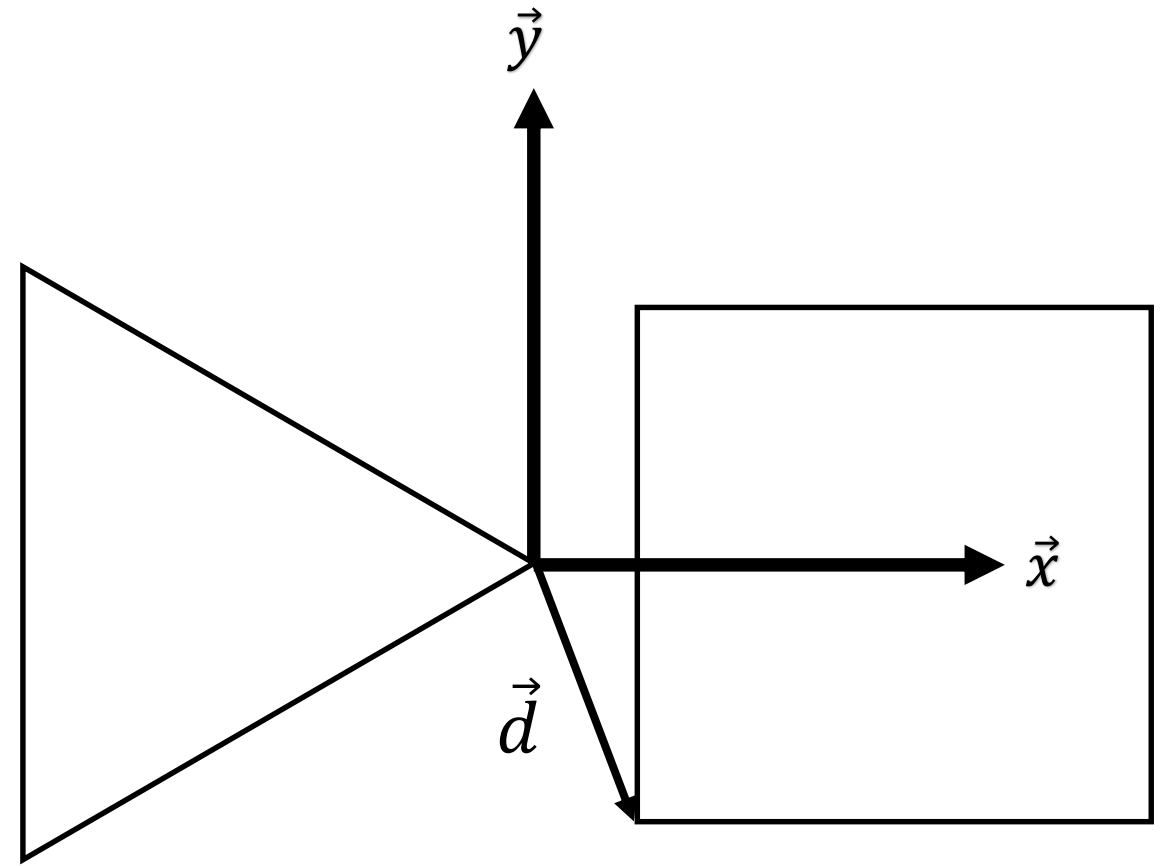


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Vektor rastojanja:

$$\vec{d} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$





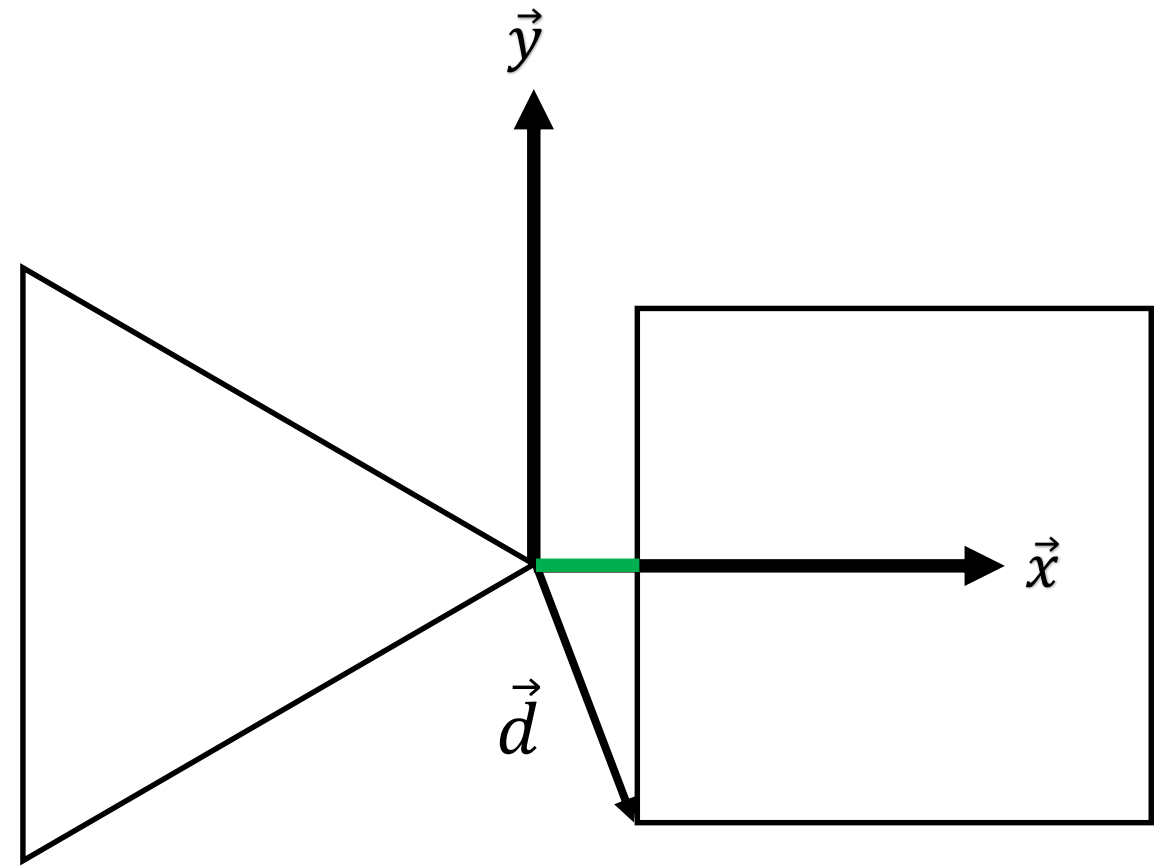
# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{d} \cdot \vec{x} > 0$$

Ne postoji kontakt!





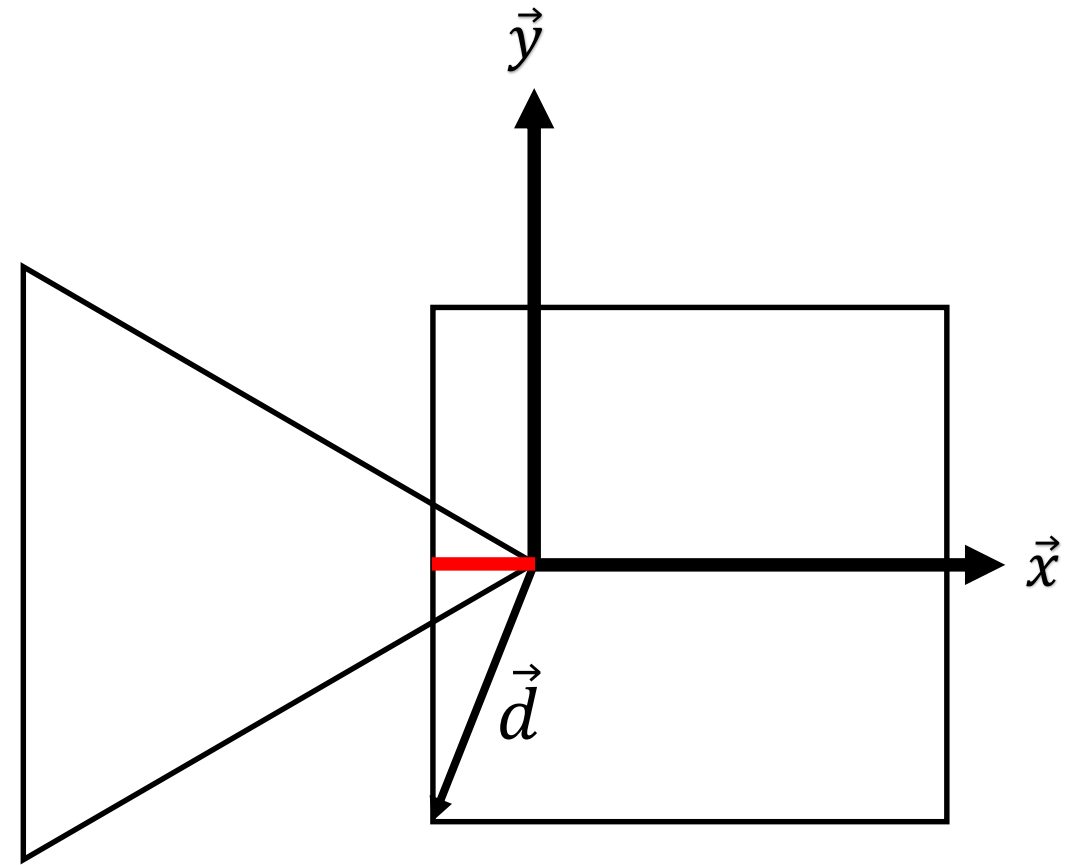
# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{d} \cdot \vec{x} \leq 0$$

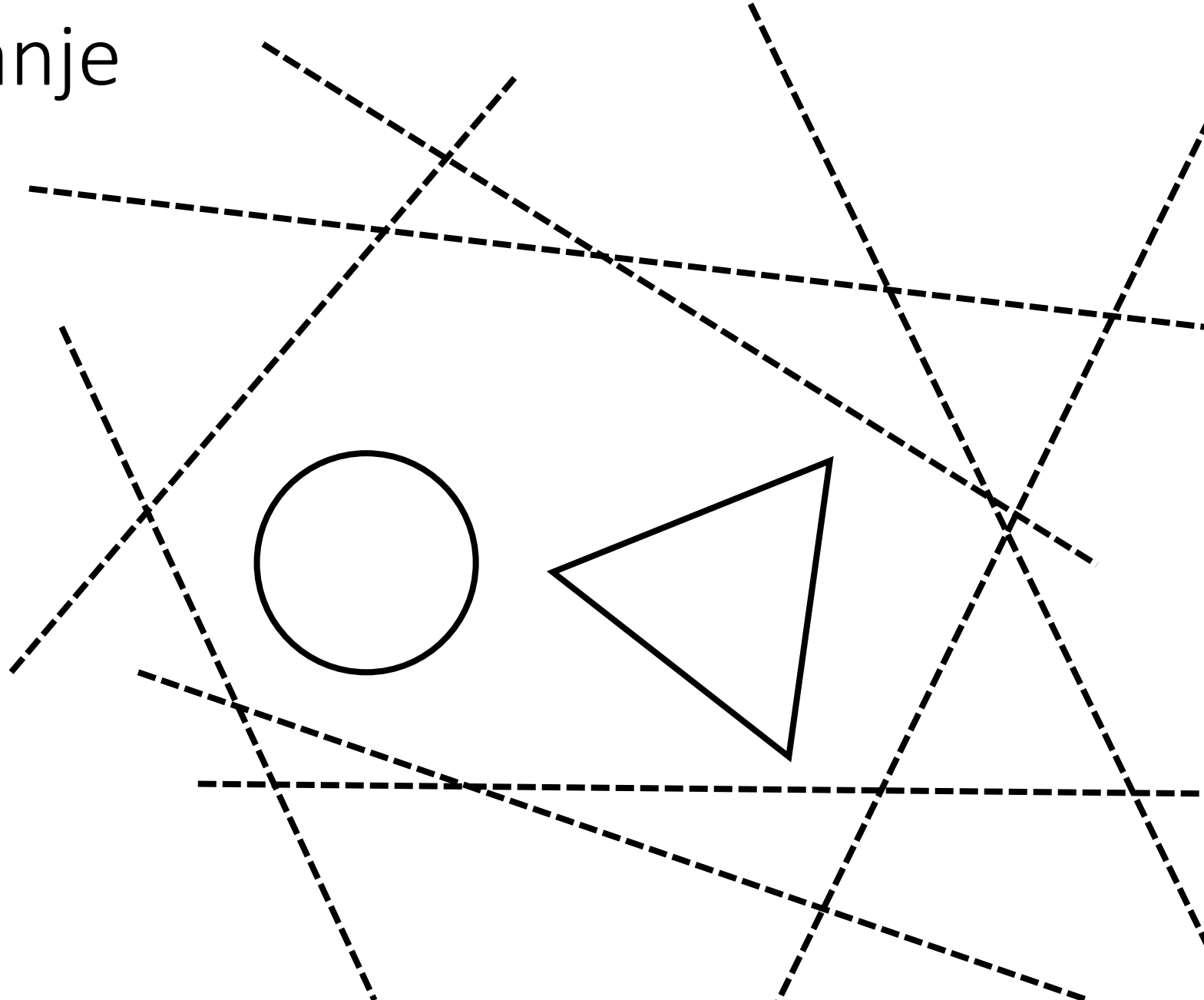
Postoji kontakt!





# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test:*



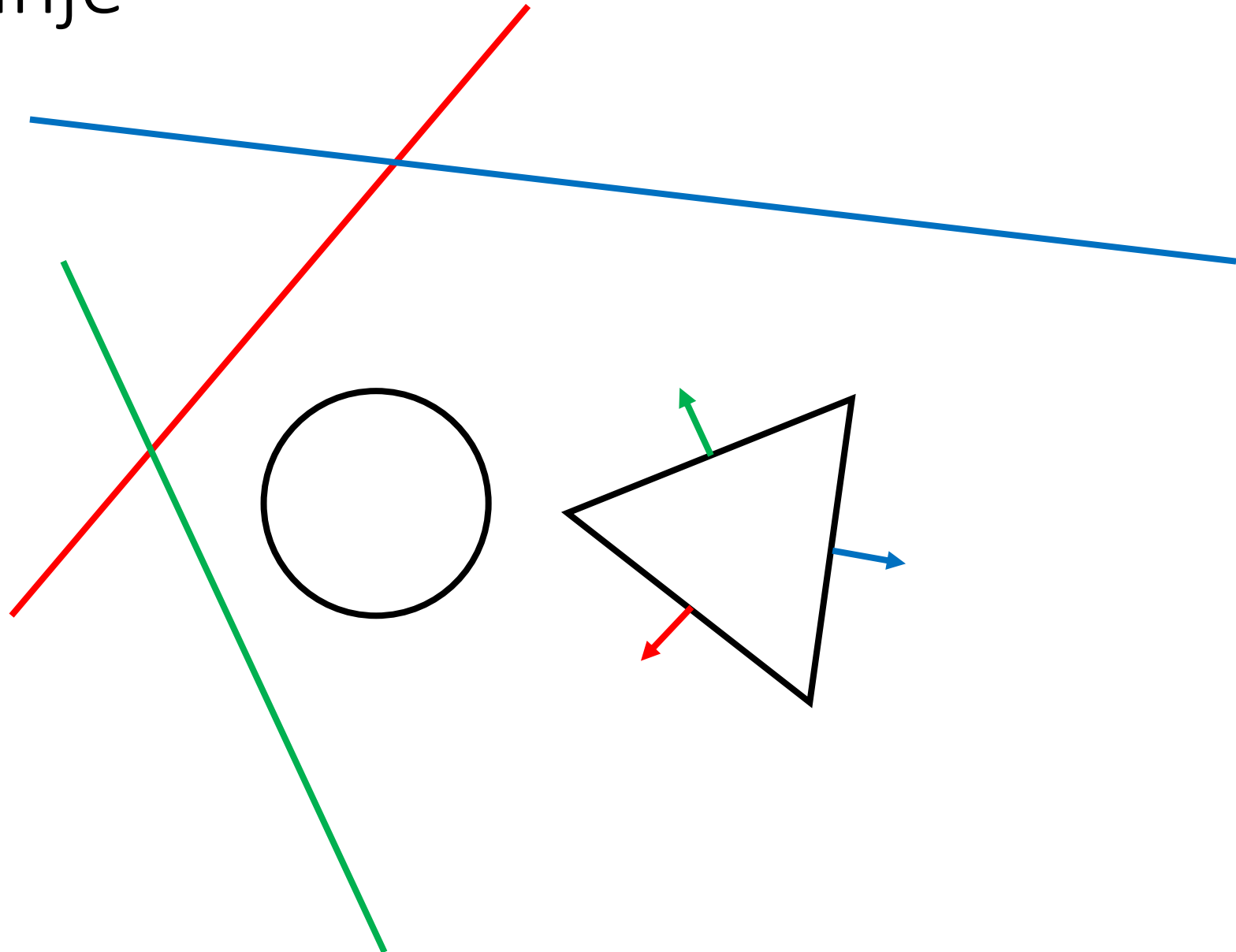
Koliko osa postoji?

Koliko osa treba ispitati?



# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test:*



U 2D prostoru dovoljno je  
ispitati **normale stranica**  
konveksne ljuske!

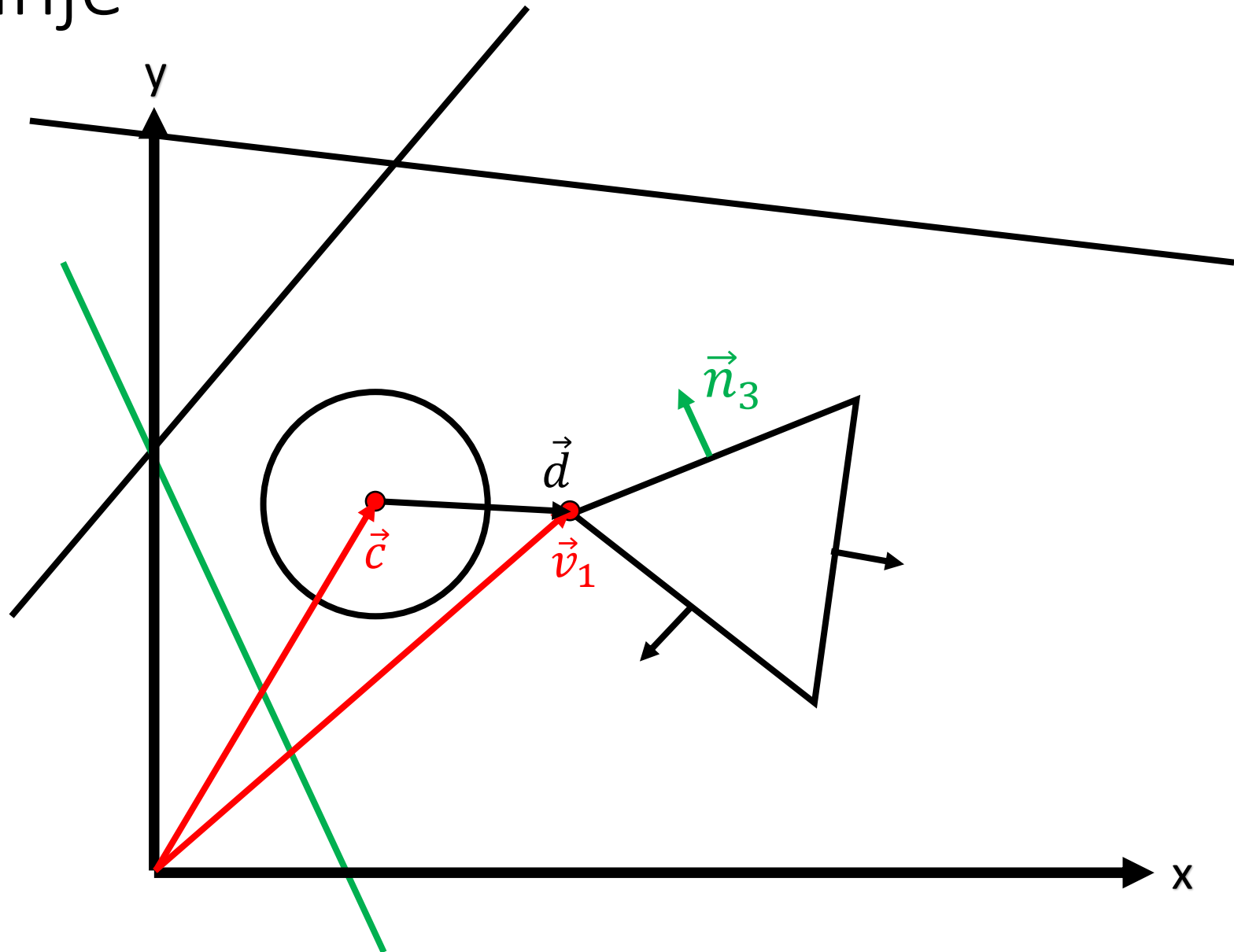


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

Dovesti geometriju tela u isti prostor!





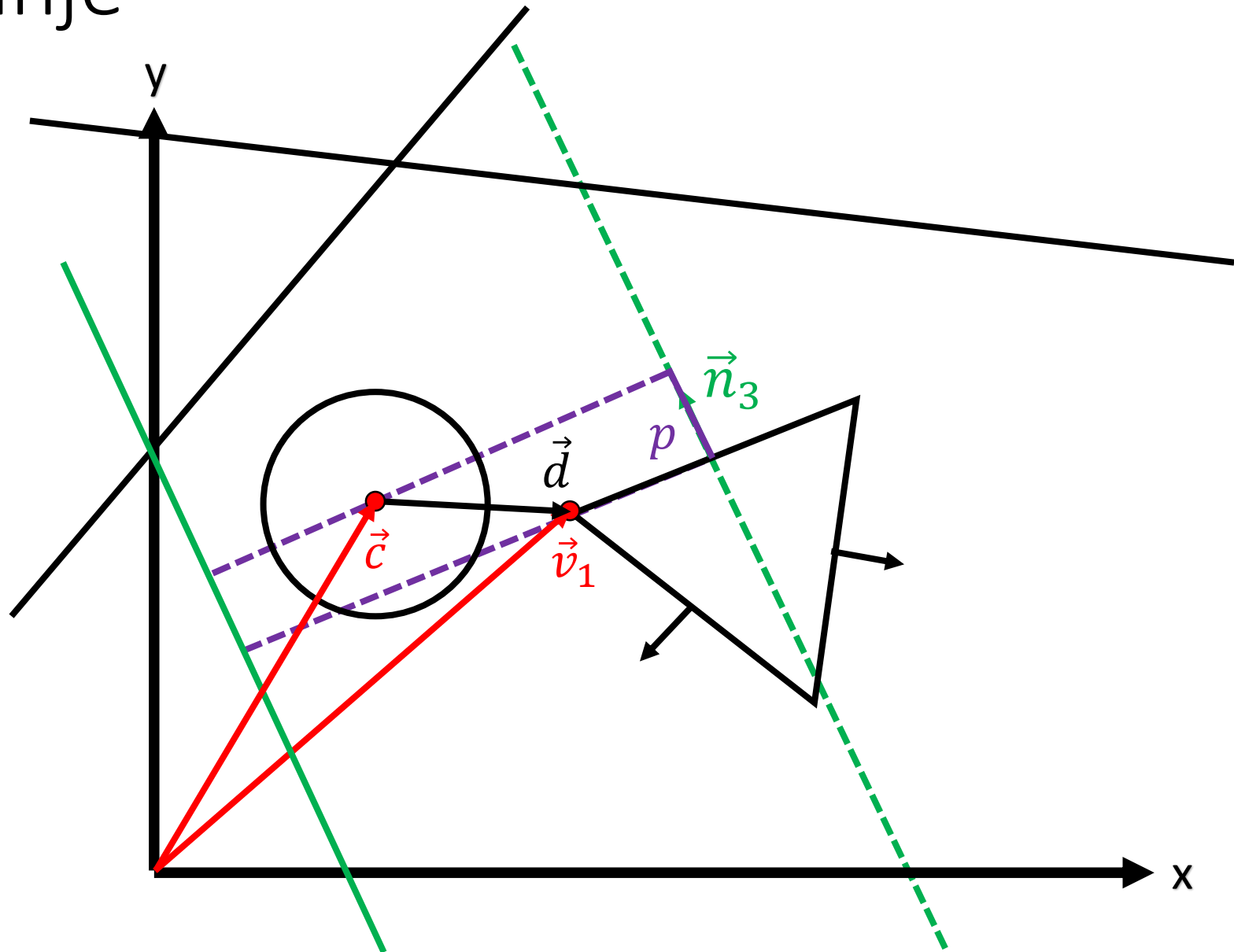


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_3 \cdot \vec{d}$$





# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

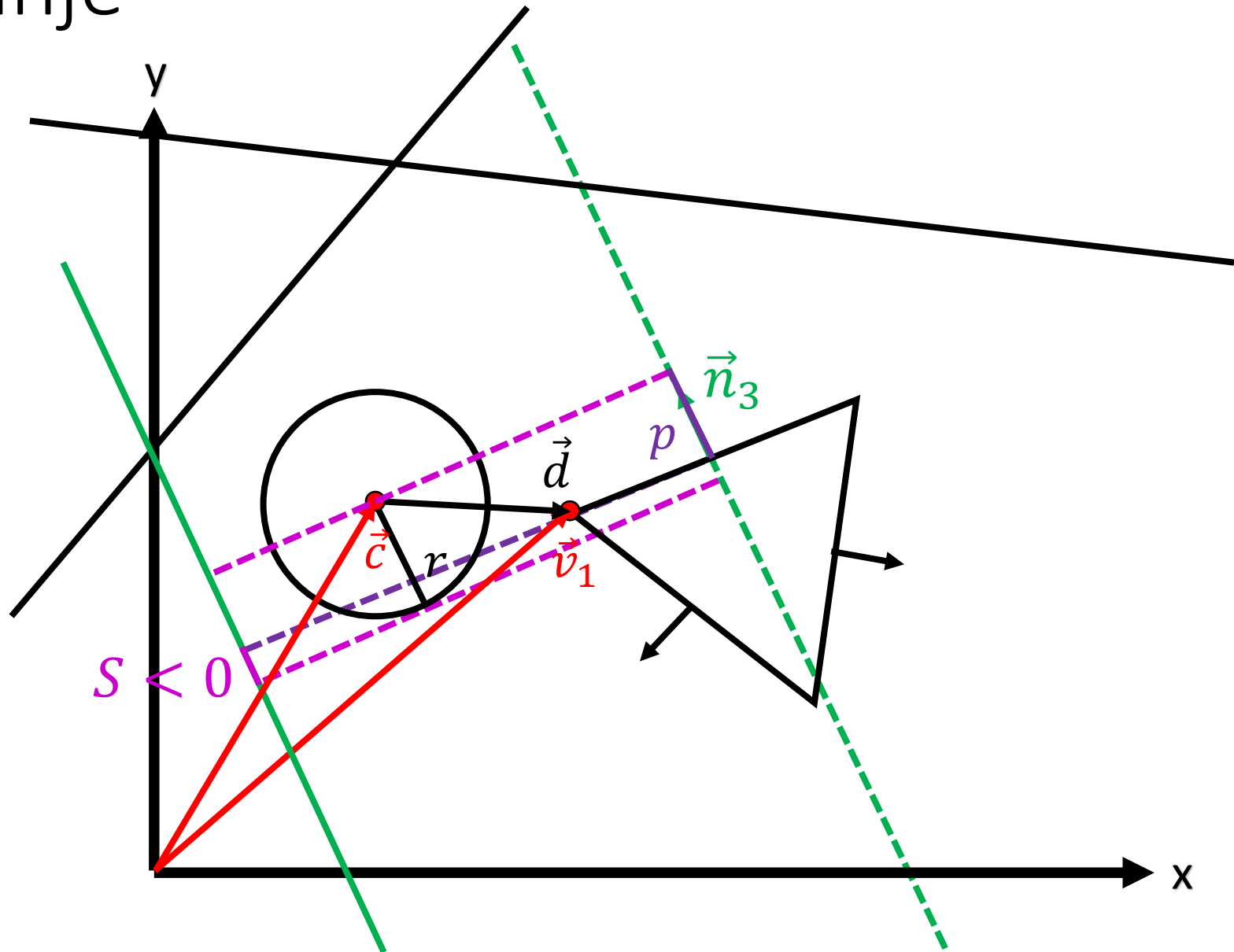
- *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_3 \cdot \vec{d}$$

$$s = p - r$$

Nije razdvajajuća osa!

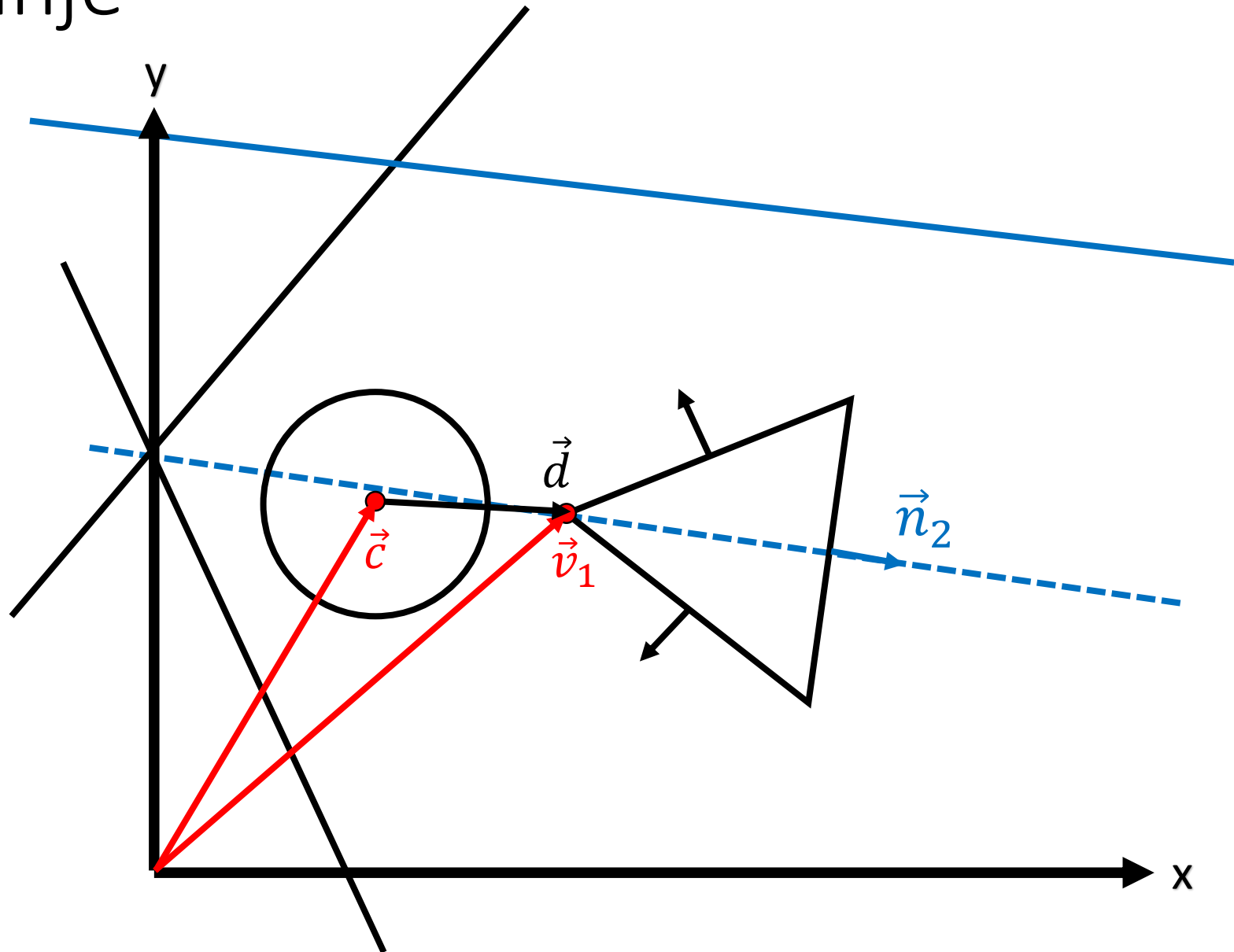




# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$



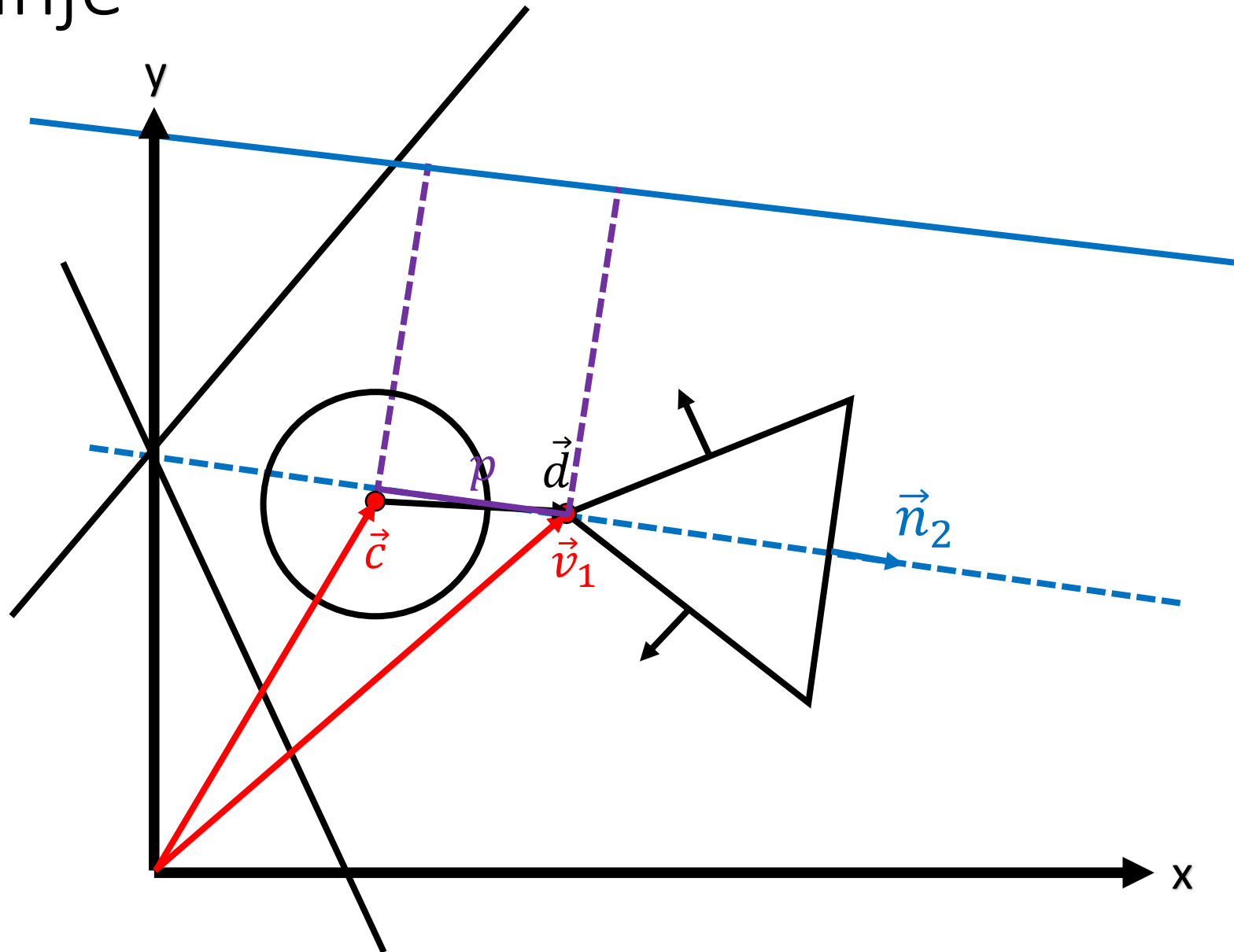


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_2 \cdot \vec{d}$$





## 1. Otrkivanje sudara

- *Separating Axis Test:*

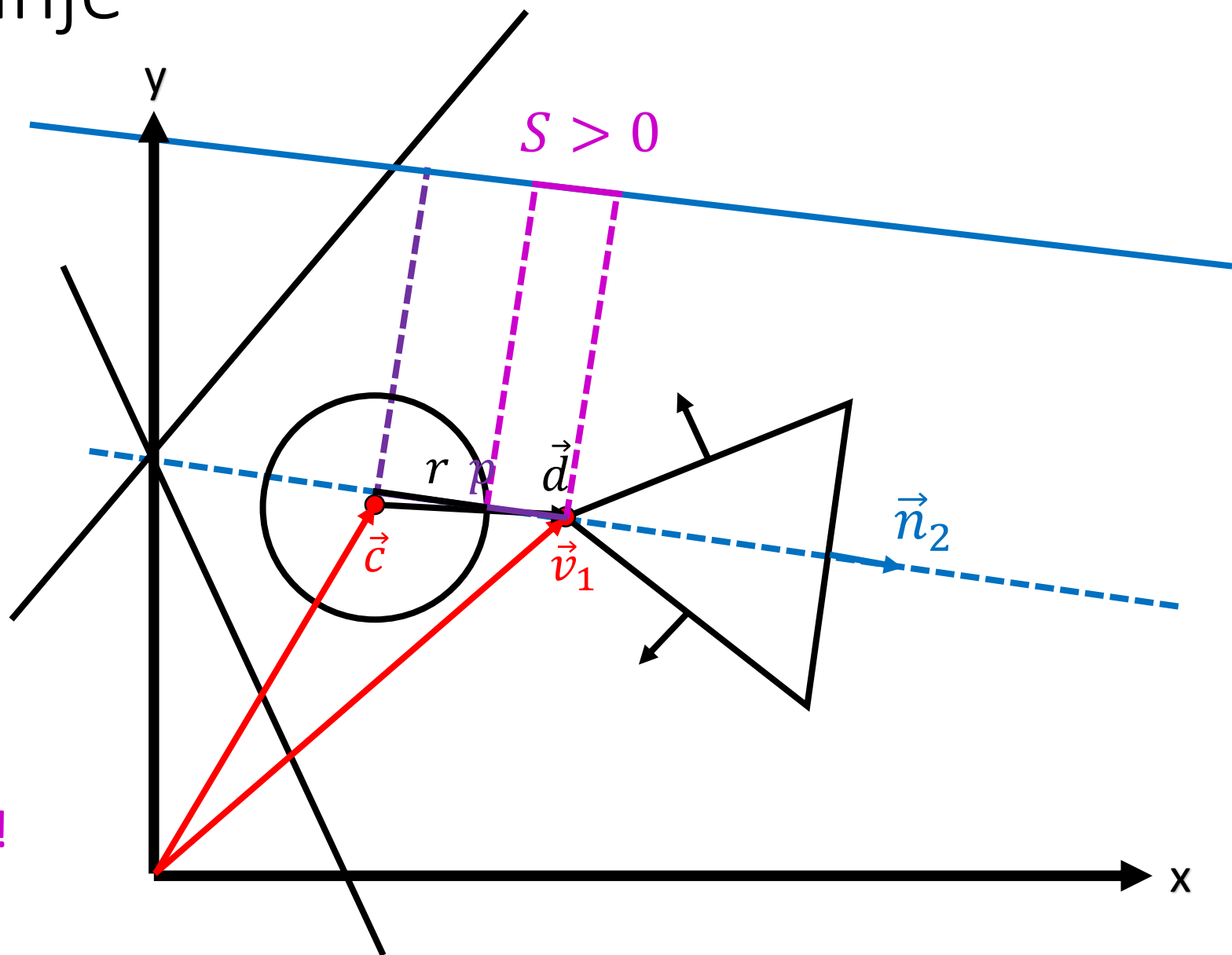
$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$\vec{p} = \vec{n}_2 \cdot \vec{d}$$

$$s = p - \mathbf{r}$$

# Jeste rozdvajajuća osa!

## Dalje provere nisu potrebne!



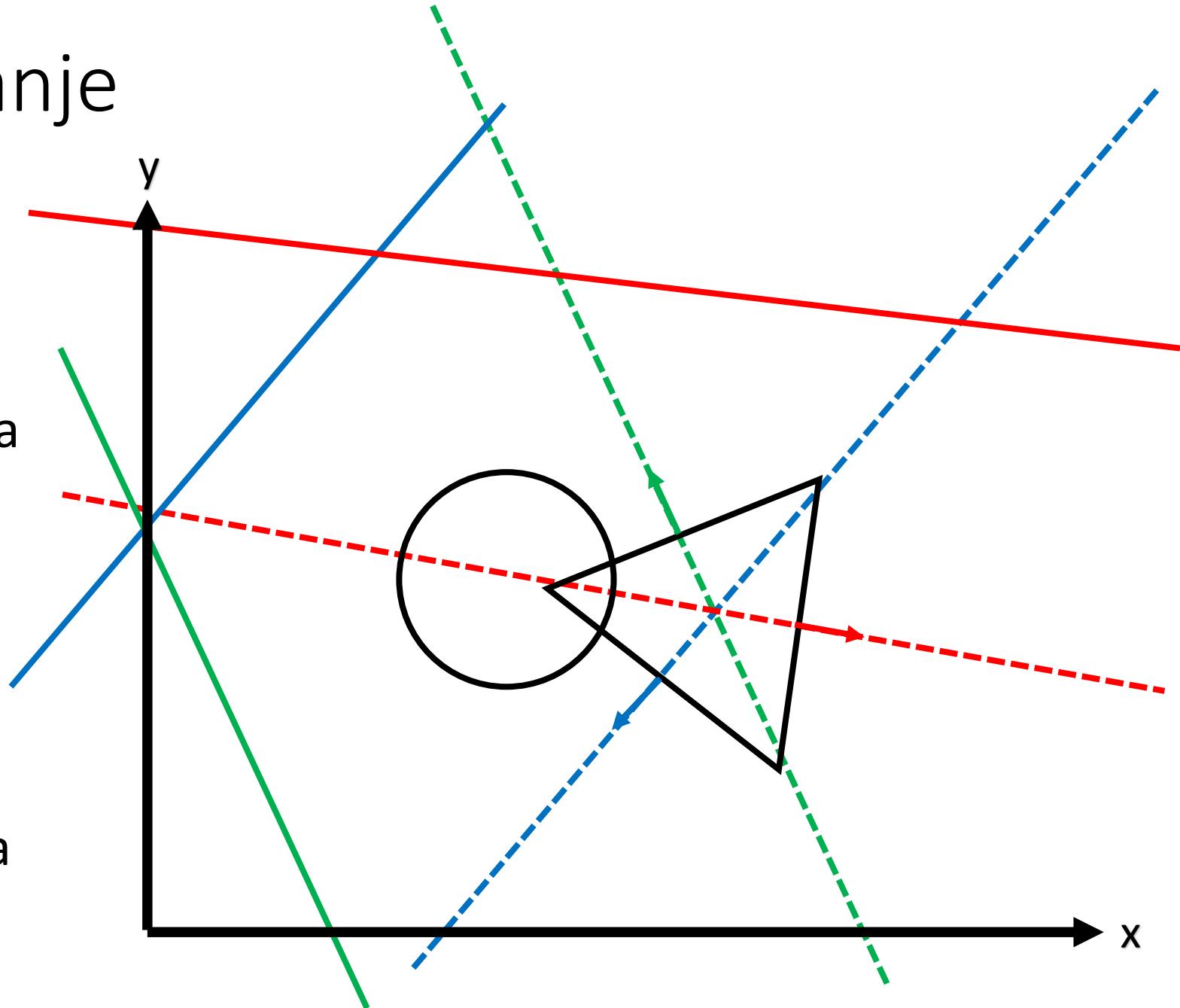


# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

Razdvajajuća osa se traži za sva temena jednog tela naspram svih temena drugih tela po svim normalama stranica oba tela.

Šta ako se razdvajajuća osa ne nađe?

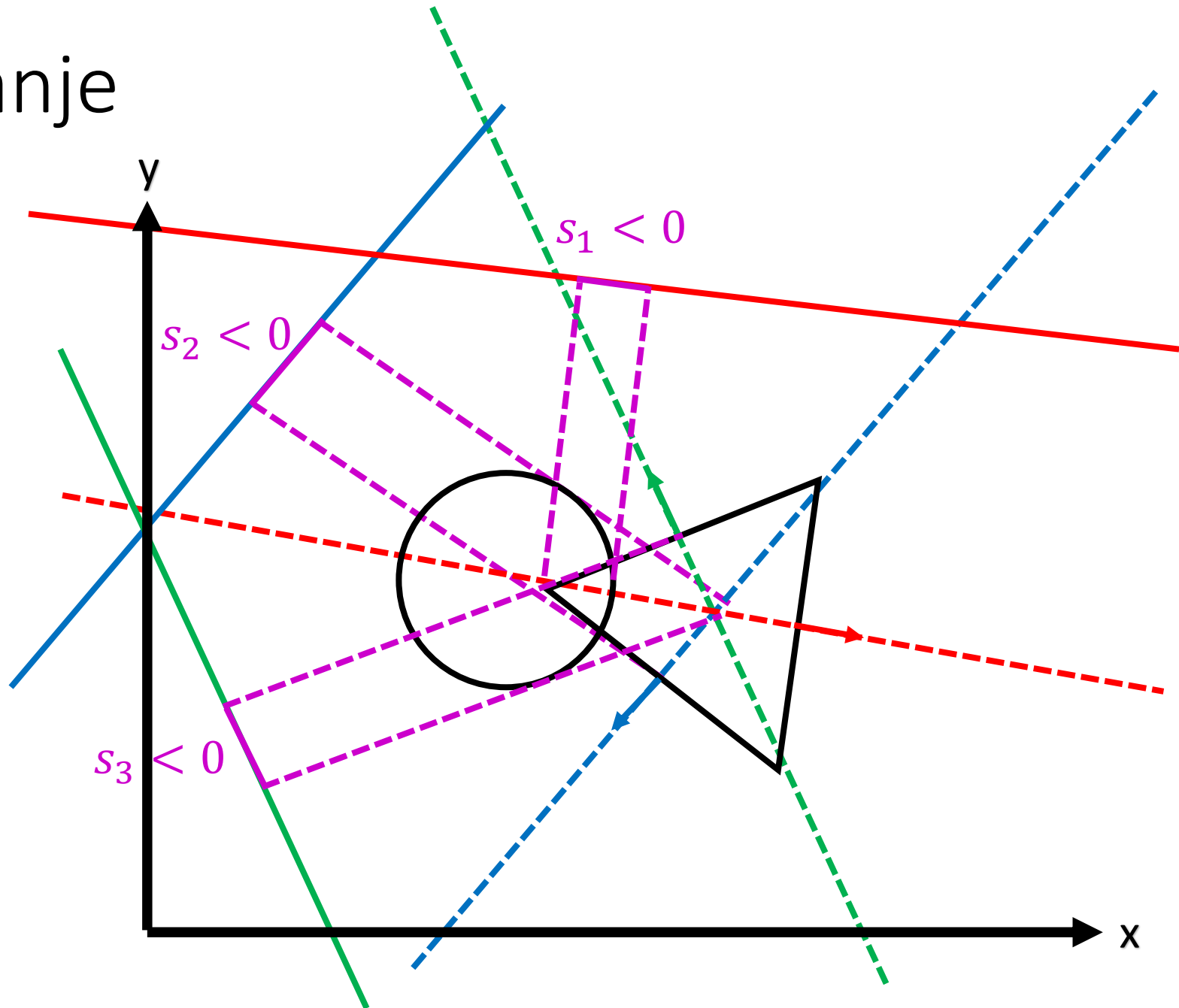




# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test*:

1. Uzima se najveće negativno rastojanje  $s$  (najmanje po apsolutnoj vrednosti).





# Ograničeno kretanje

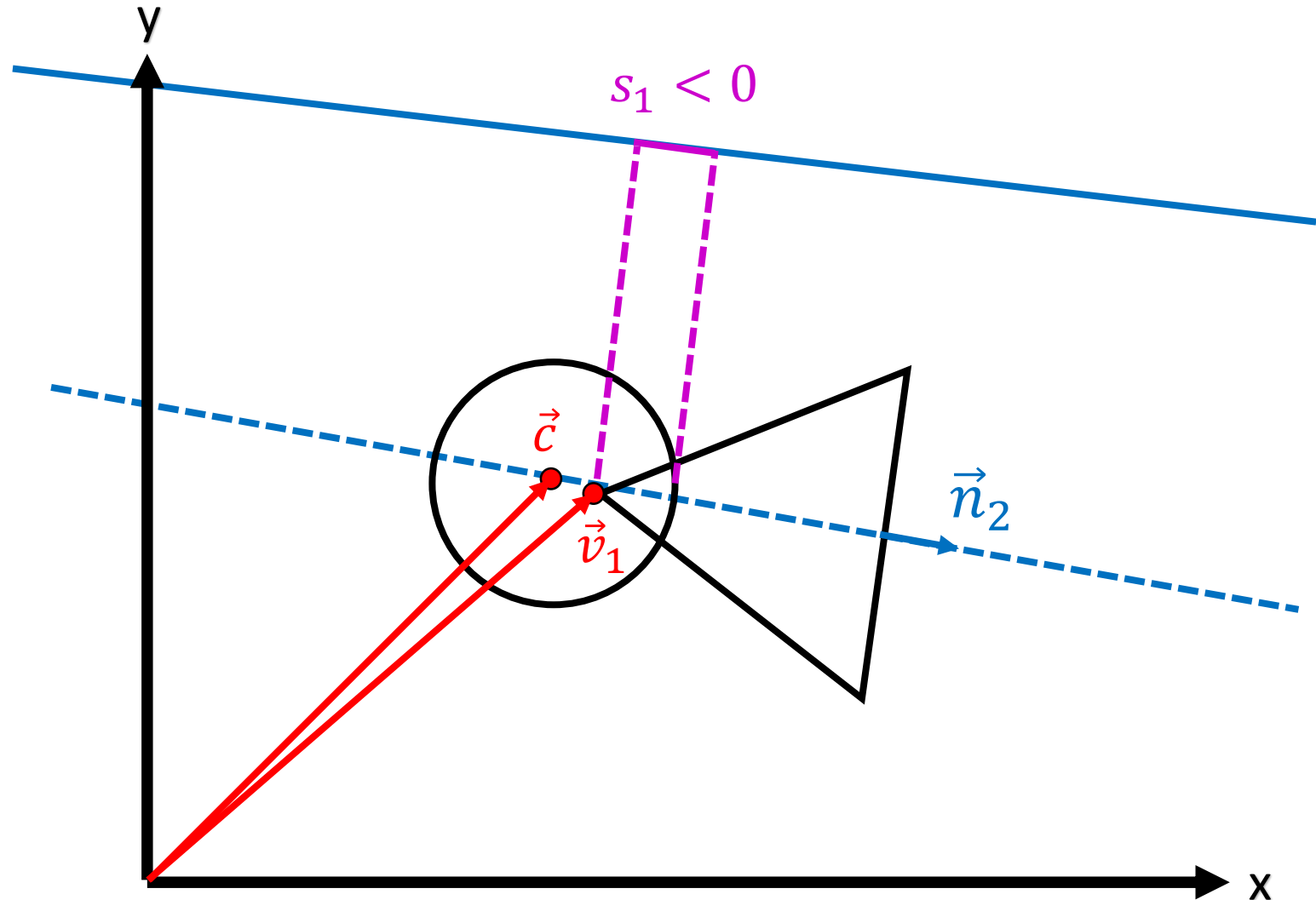
## 1. Otrkivanje sudara

- *Separating Axis Test:*

1. Uzima se najveće negativno rastojanje  $s$  (najmanje po apsolutnoj vrednosti).

## 2. Čuvaju se:

- normala sudara
- negativno rastojanje (upad)
- temena oba tela



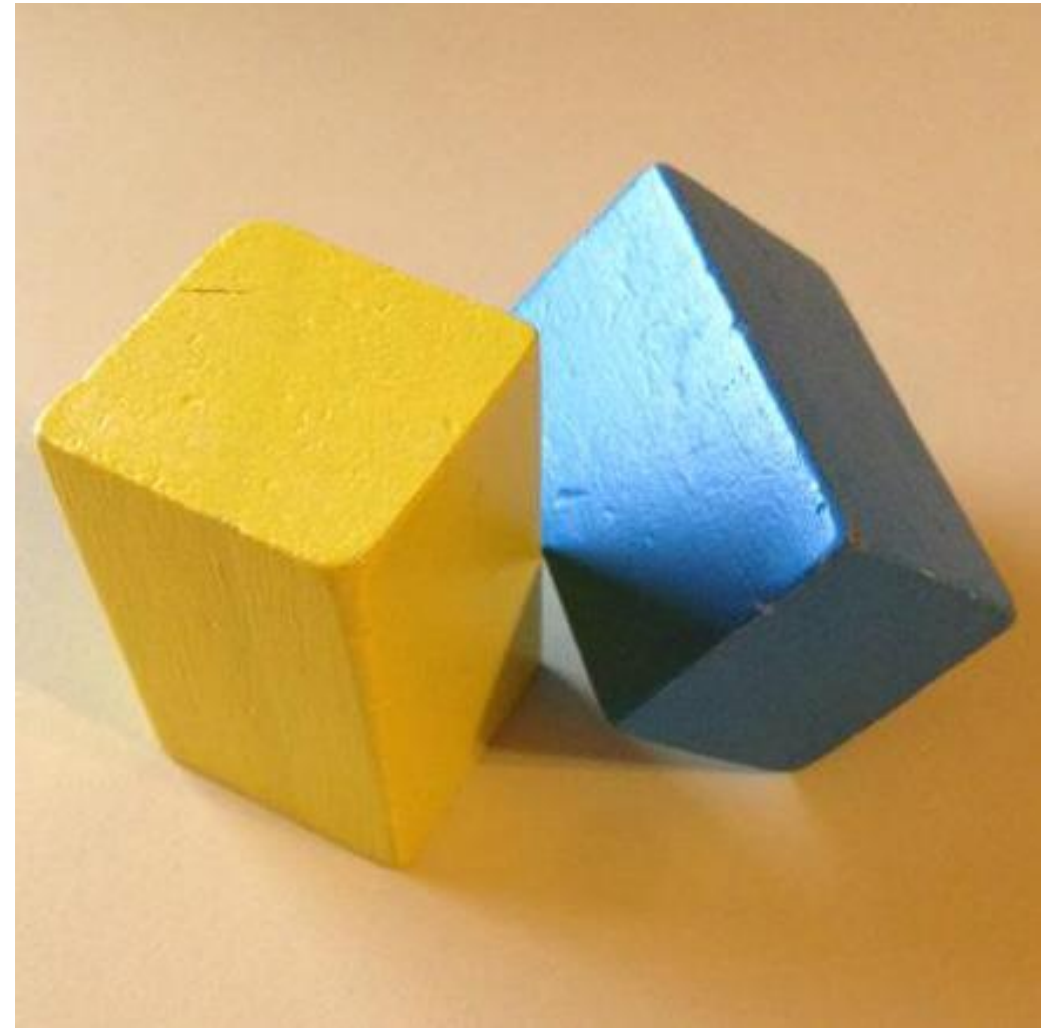




# Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
  - *Separating Axis Test:*

Za 3D prostor, potrebno je tražiti i razdvajajuću osu među vektorskim proizvodima svih normala stranica!





# Ograničeno kretanje

## 1. Otrkivanje sudara

- *Separating Axis Test:*

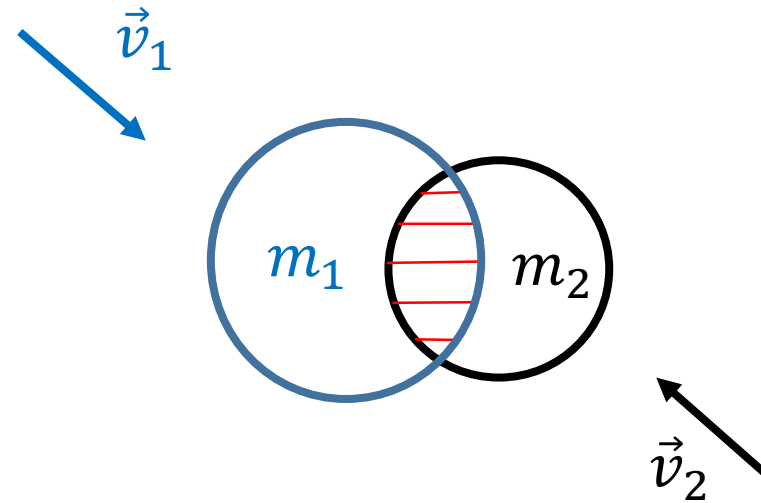
- + eksplicitan geometrijski pristup rešavanju
- + usput nalazi sve što je potrebno za opis sudara
- + čim se nađe razdvajajuća osa, pretraga se završava, a to se mnogo češće dešava od suprotnog slučaja (efikasnost).
- treba pokriti mnogo specijalnih slučajeva, naročito u 3D prostoru



# Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

**Pokušaj** #1 (bez rotacije u ovom primeru):



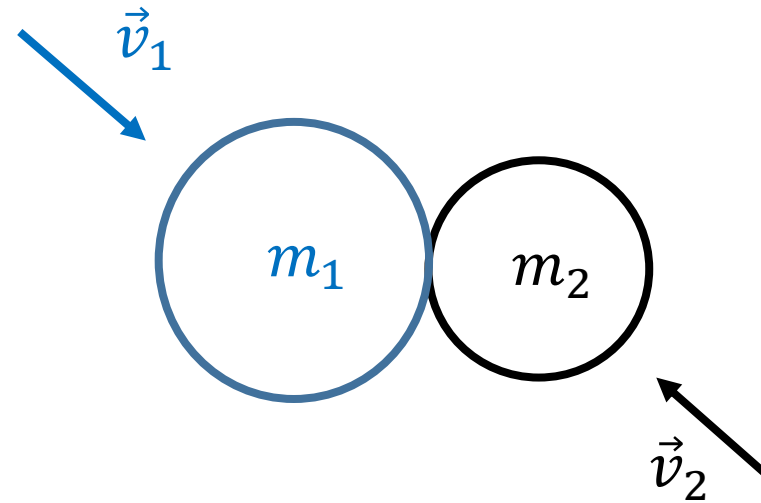


# Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

**Pokušaj** #1 (bez rotacije u ovom primeru):

1. korekcija pozicija





# Ograničeno kretanje

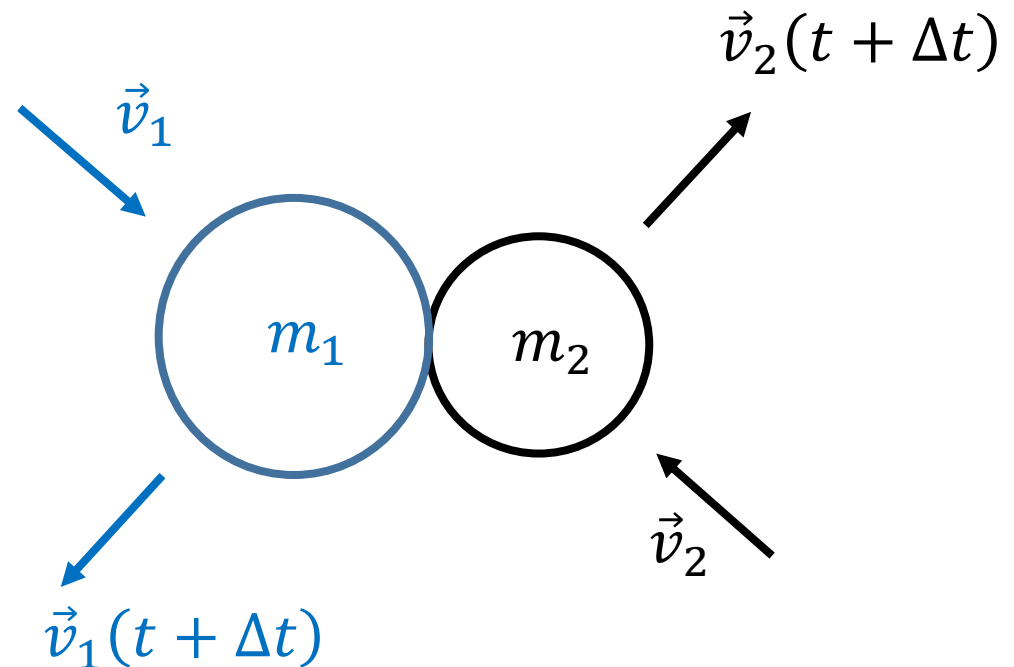
## Rešavanje ograničenja

**Pokušaj** #1 (bez rotacije u ovom primeru):

1. korekcija pozicija
2. izračunavanje brzina (zakon održanja impulsa)

$$\vec{v}_1(t + \Delta t) = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2(t + \Delta t) = \frac{\vec{v}_2(m_2 - m_1) + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$



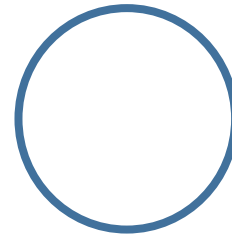
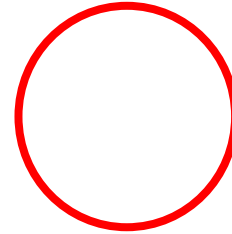
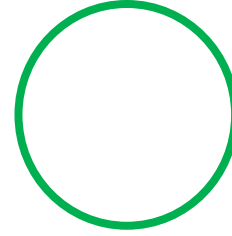


# Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



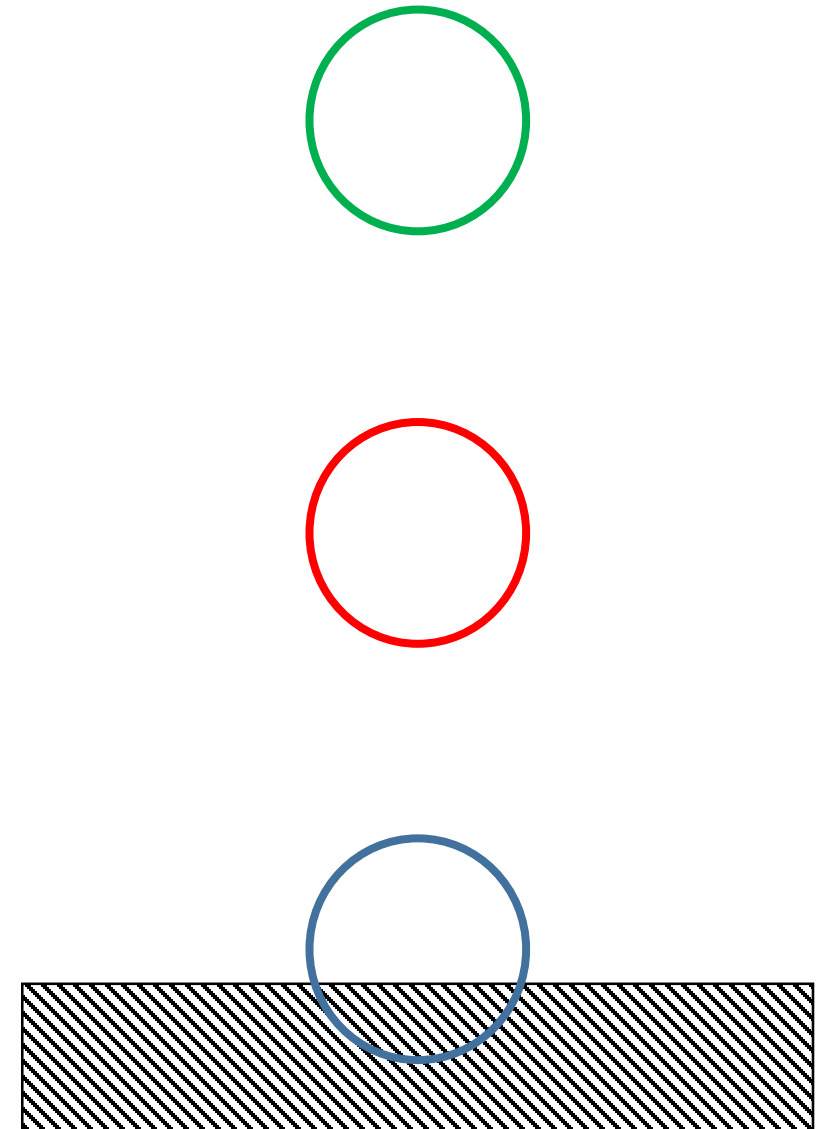


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



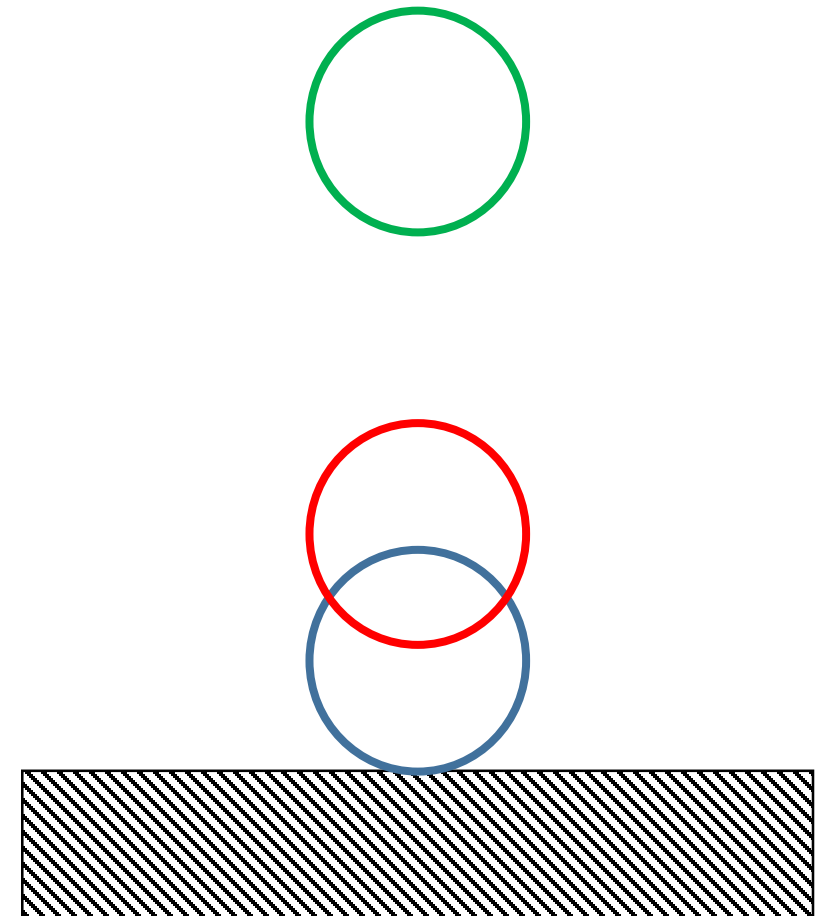


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```





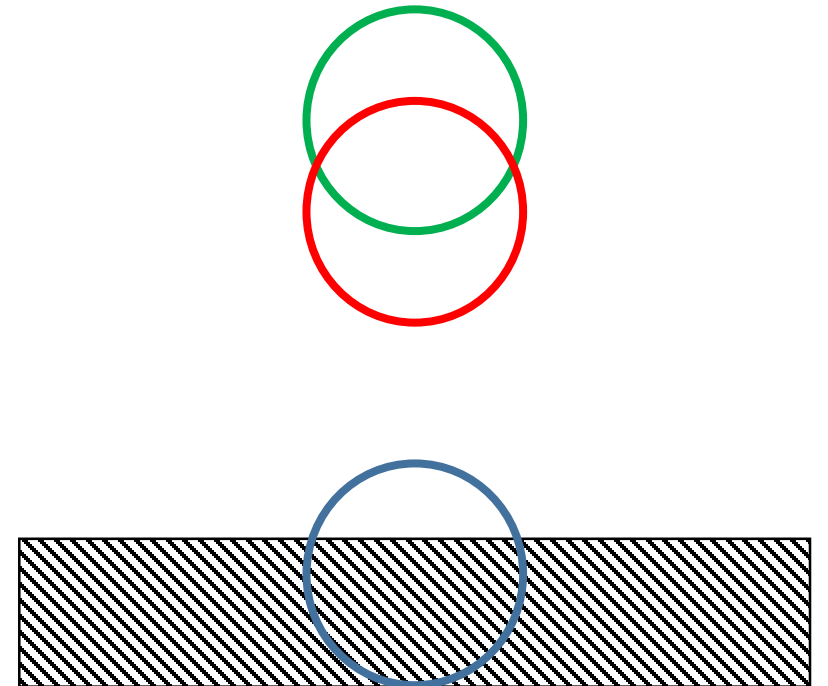


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



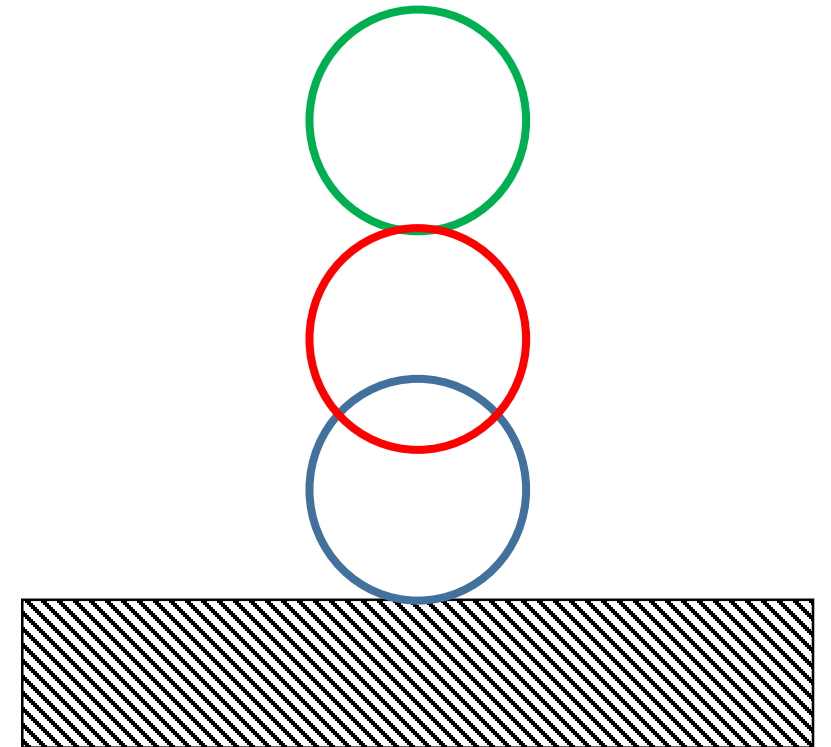


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



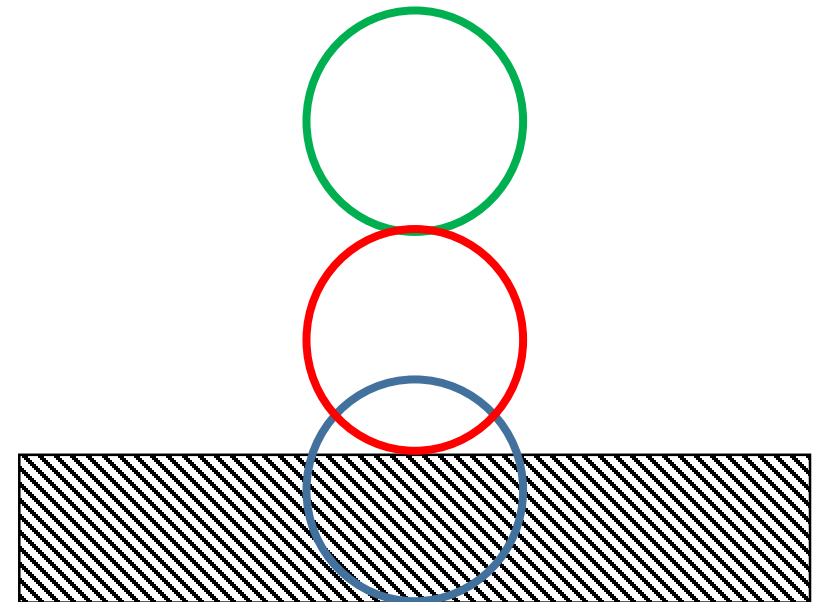


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



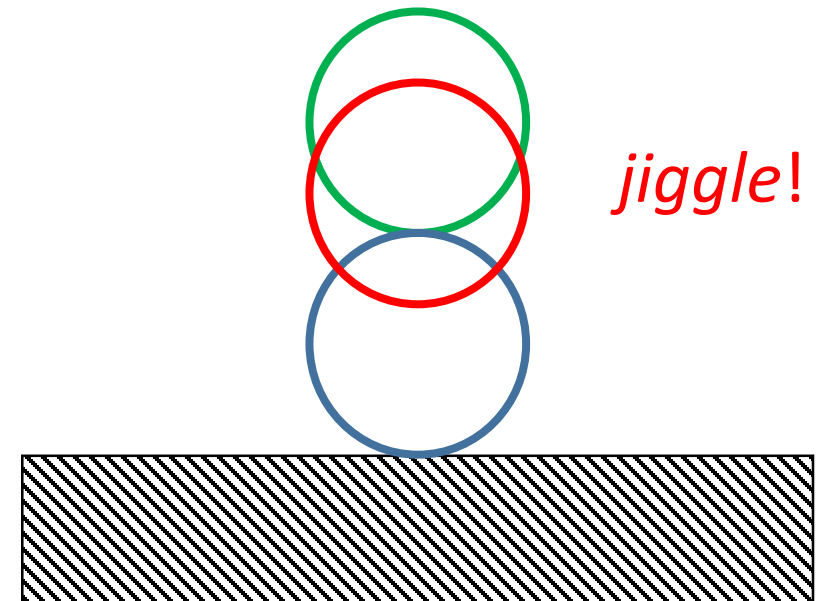


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #1:

- + jednostavan za implementaciju
- + dovoljan za sporadične pojave sudara
- rešava se svako ograničenje za sebe, pa ne može da reši složen sistem ograničenja
- rešavanje ograničenja se izvodi na nivou položaja (nultog izvoda) – neprecizna simulacija



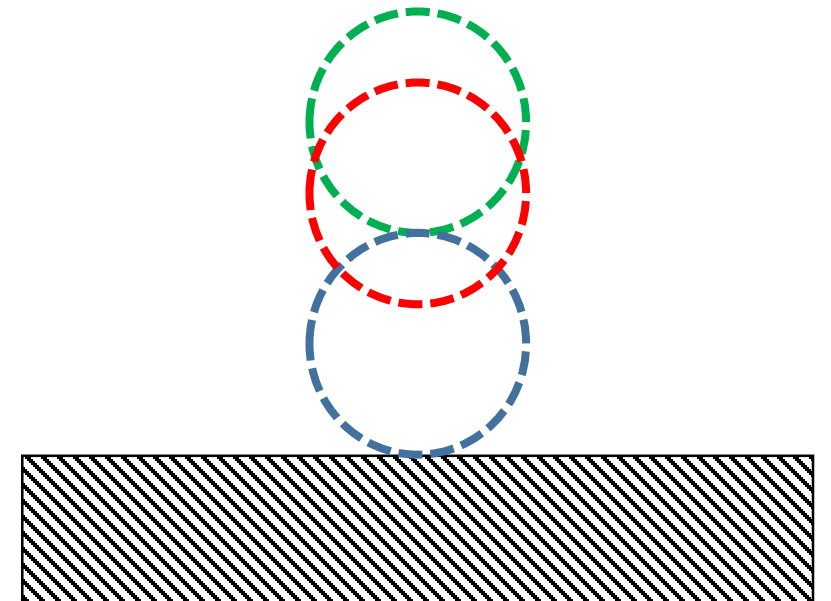


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



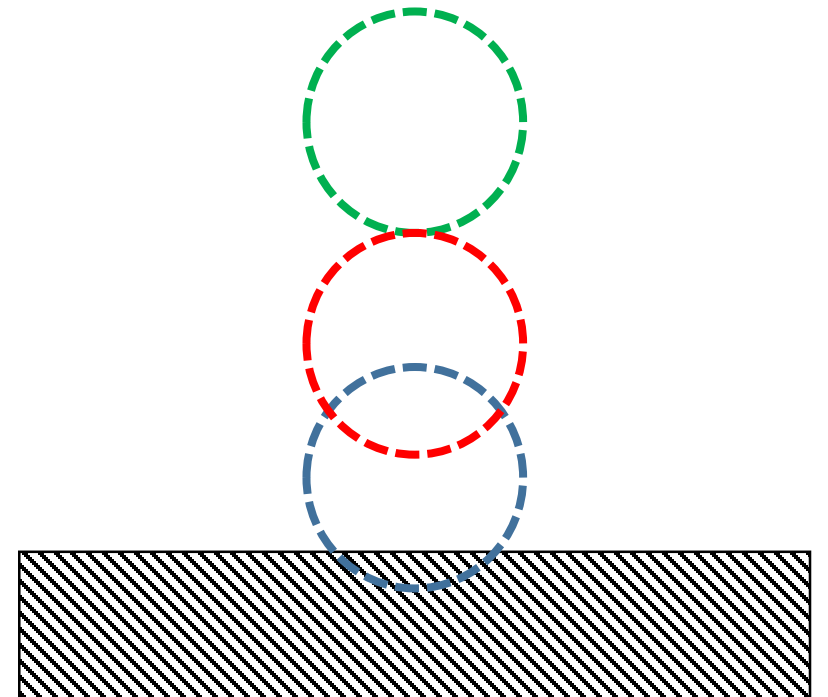


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



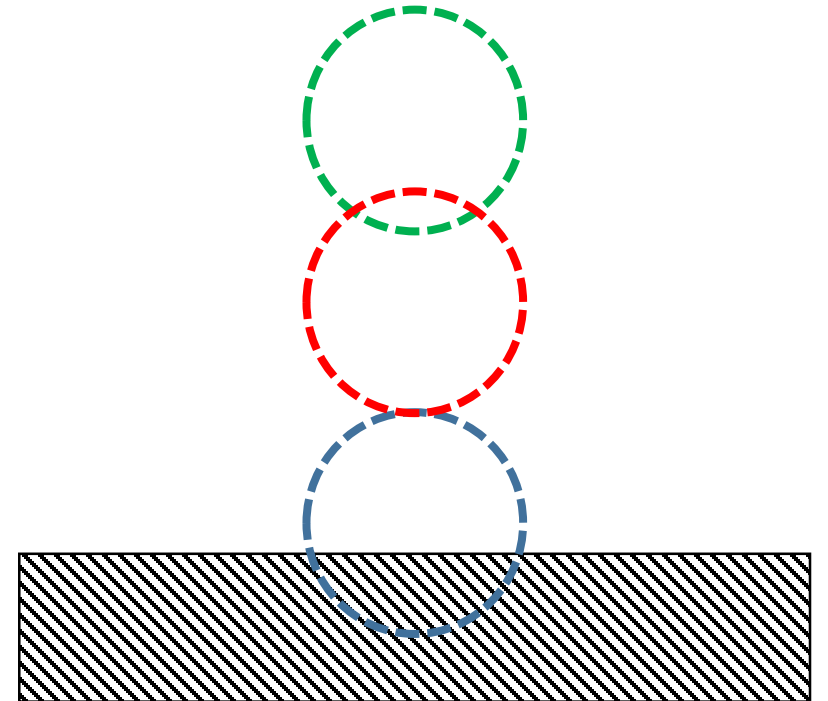


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



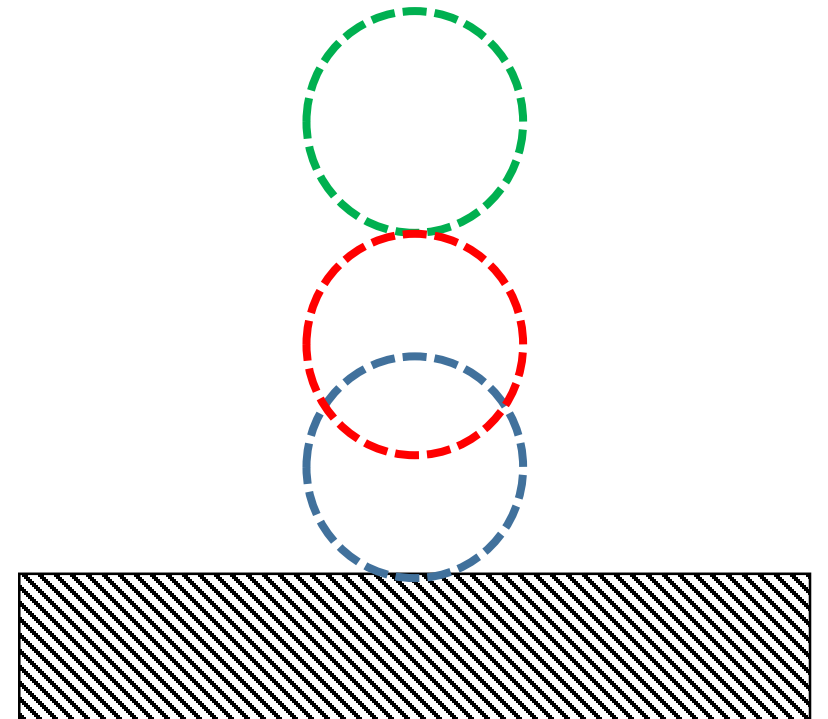


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```





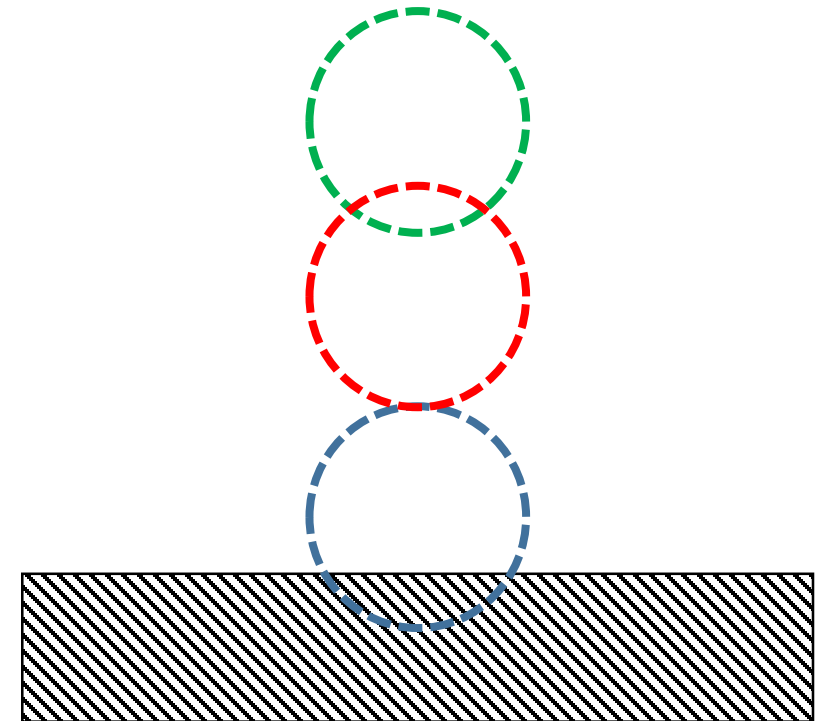


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



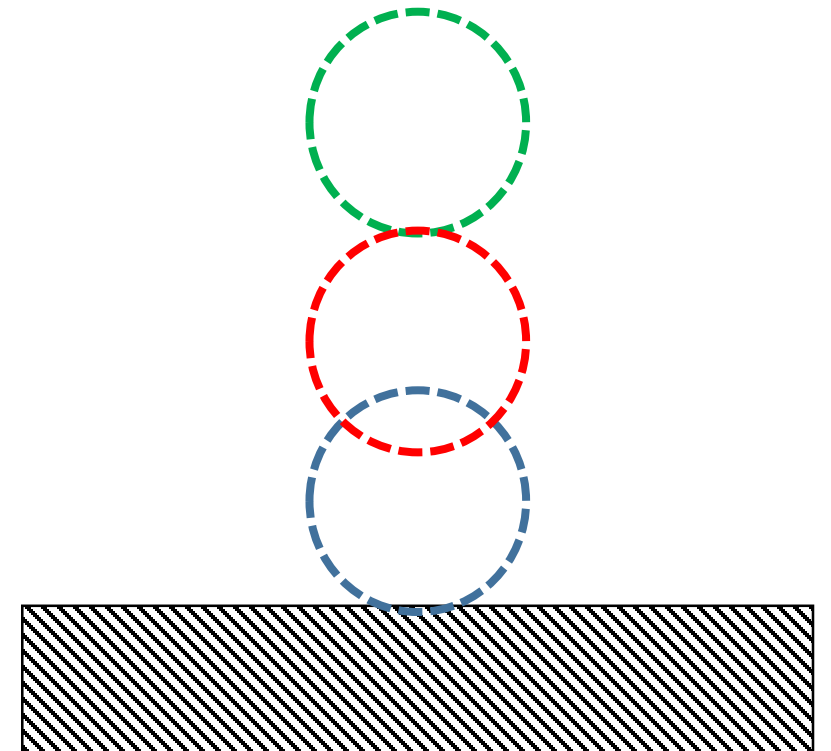


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



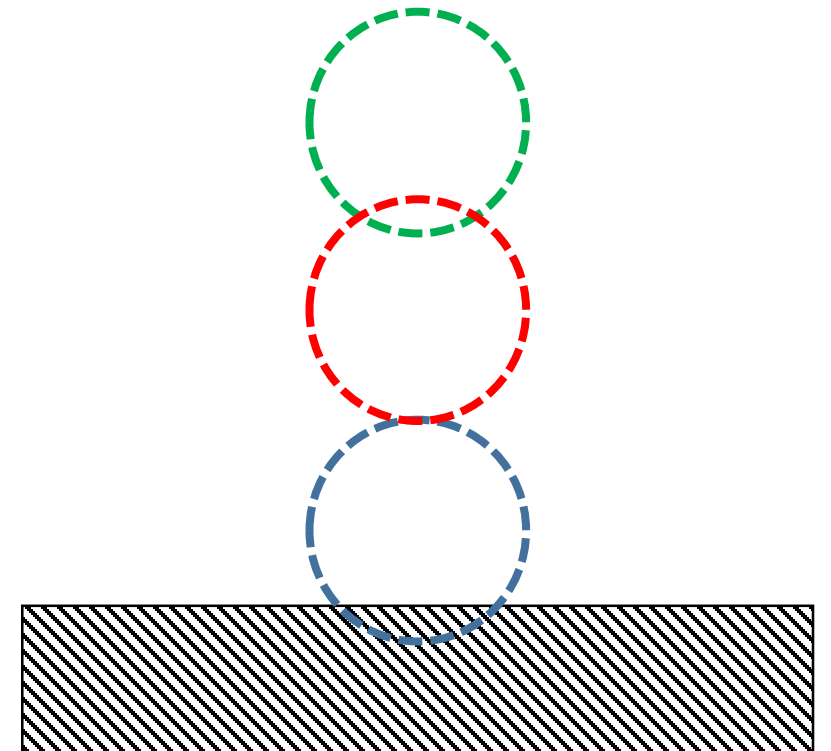


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



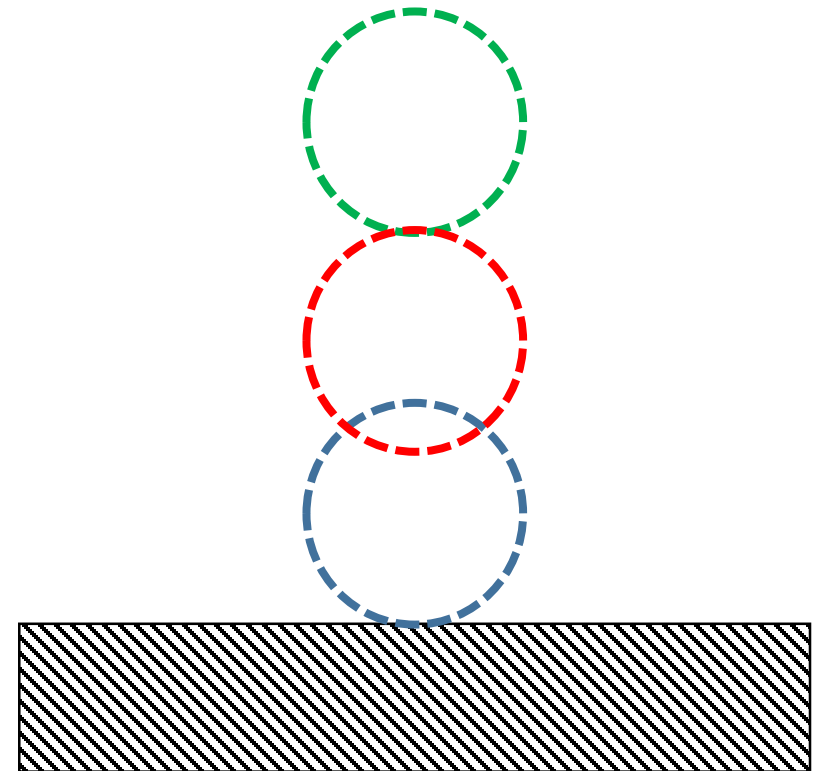


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



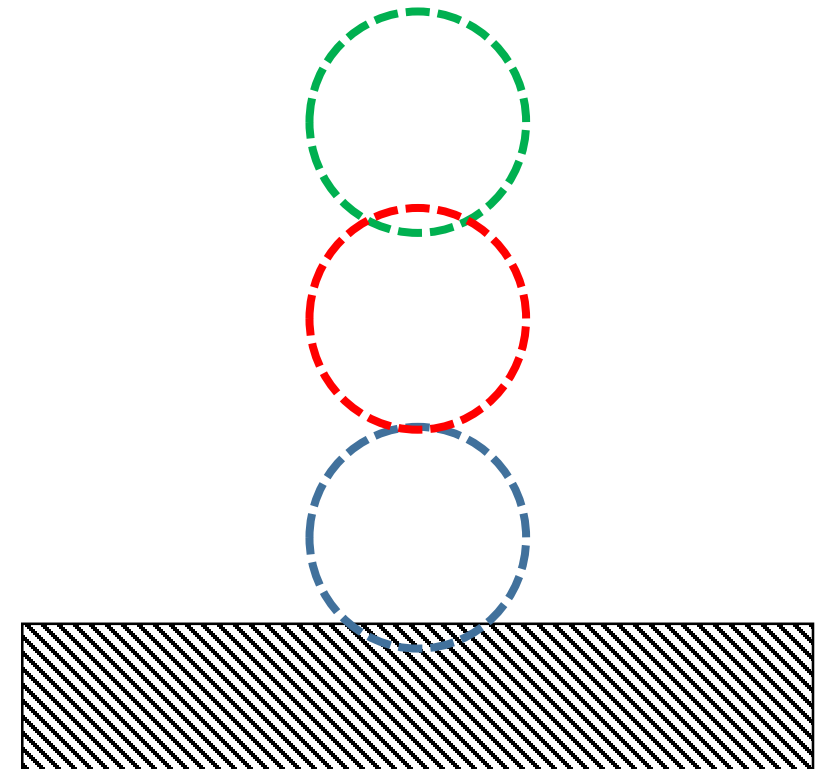


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



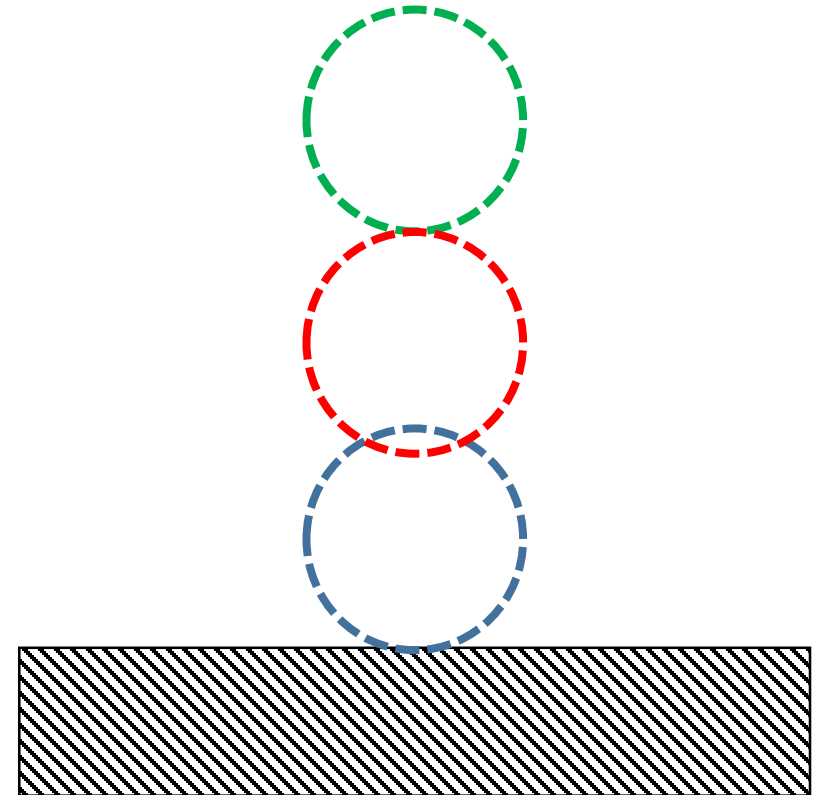


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



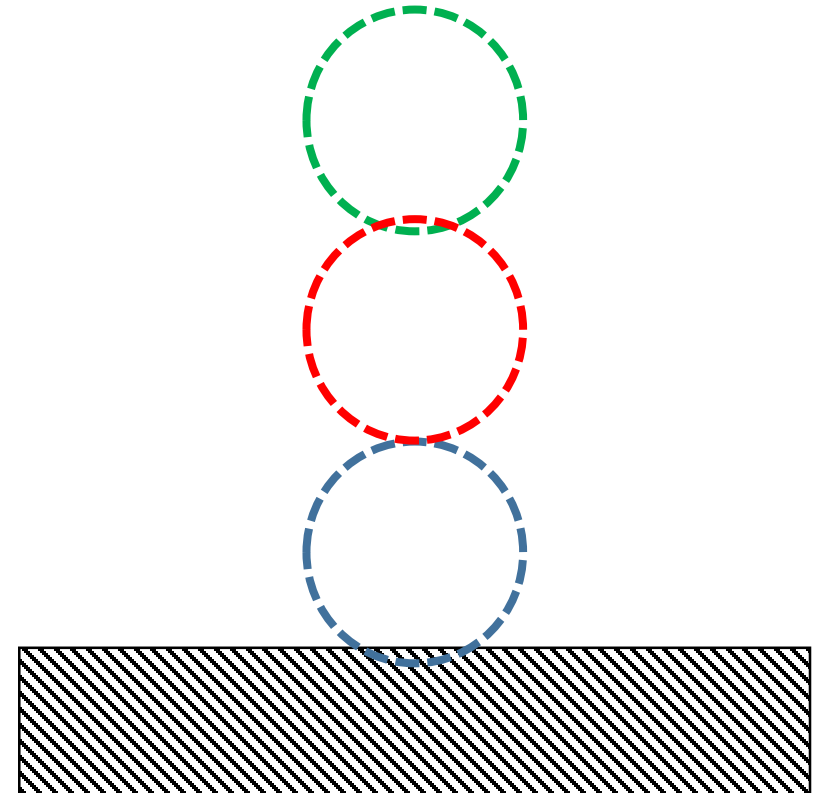


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```



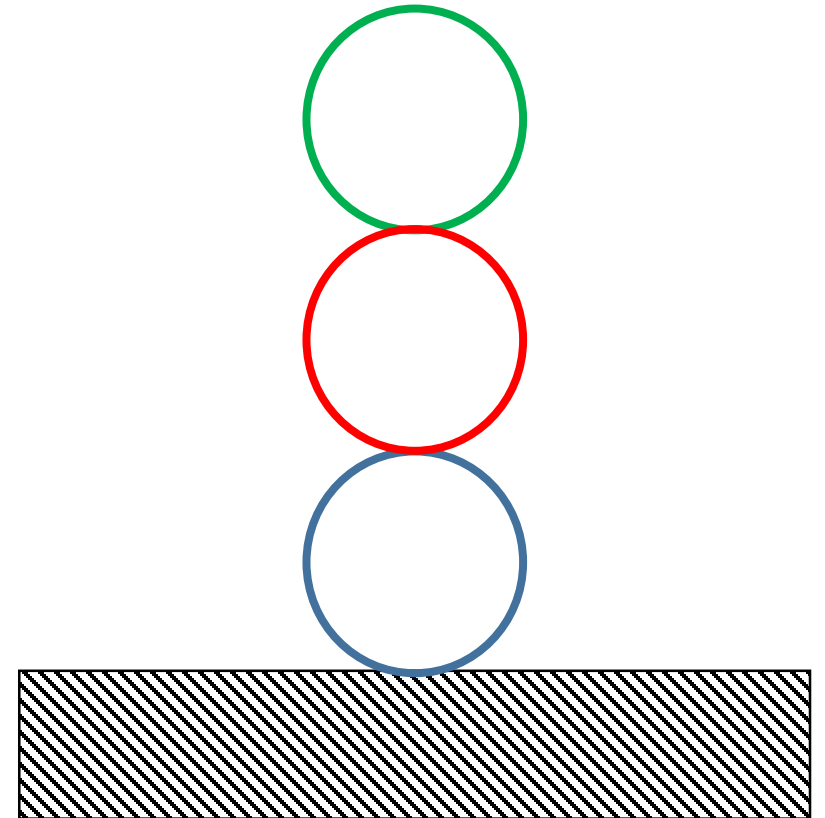


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Pokušaj #2:

- + jednostavan za implementaciju
- + rešava složenije sisteme ograničenja
- spor (i za malo veći broj ograničenja)
- rešavanje ograničenja se izvodi na nivou položaja (nultog izvoda) – neprecizna simulacija





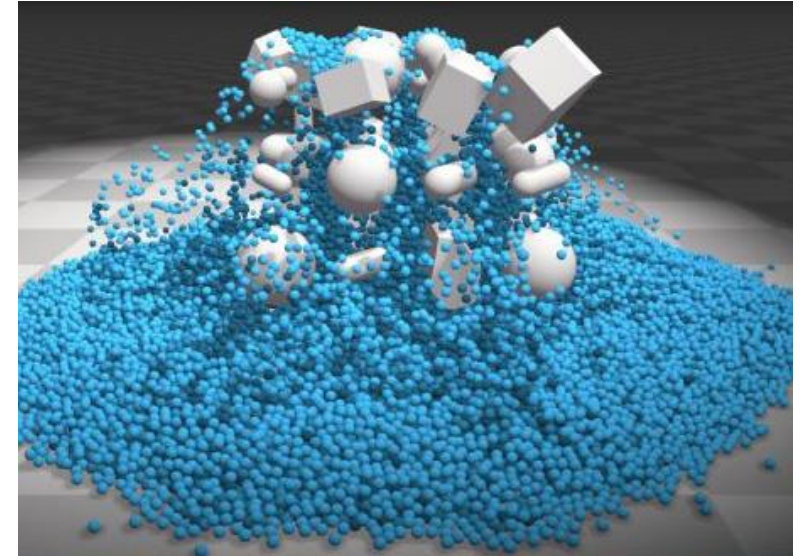


# Ograničeno kretanje

## Rešavanje ograničenja

### Ideja:

1. definisati apstraktni model ograničenja (tako da različite vrste ograničenja imaju isti oblik)
2. napraviti sistem jednačina svih ograničenja
3. naći rešenje sistema (istovremeno rešiti sva ograničenja)
4. primeniti rešenje sistema modifikujući silu koja deluje na telo pre integracije
5. pri integraciji kretanje tela će odvijati na dozvoljen način tako da ne narušava ograničenja





# Ograničeno kretanje

- postupak (*pipeline*):



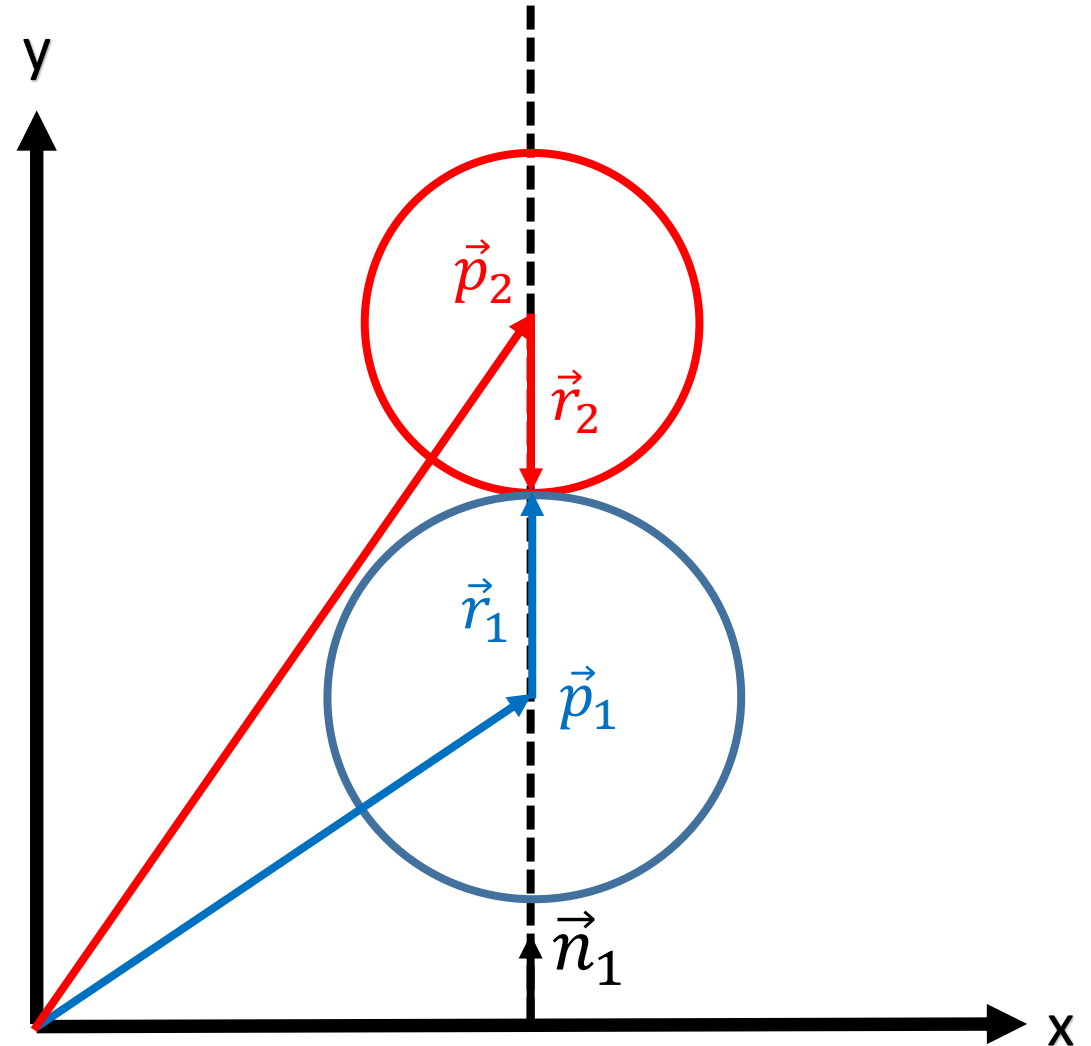


# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Kontaktno ograničenje za 2 kruga  
(*pairwise*):

$$\begin{aligned} c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= 0 \\ (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1 &= 0 \end{aligned}$$





# Ograničeno kretanje

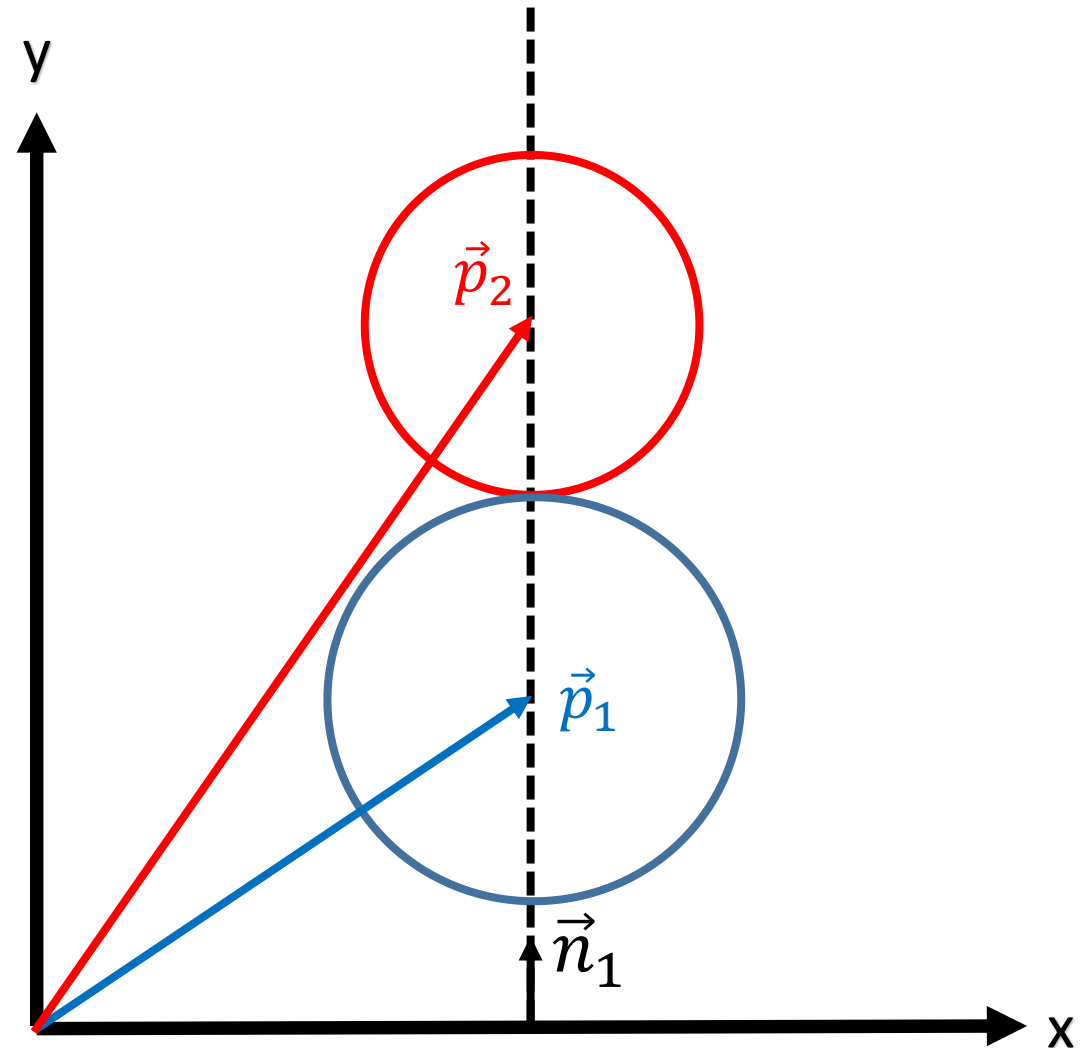
## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Da bi stanje ostalo nepromenjeno:

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

1. izvod ograničenja ne sme da se menja:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$



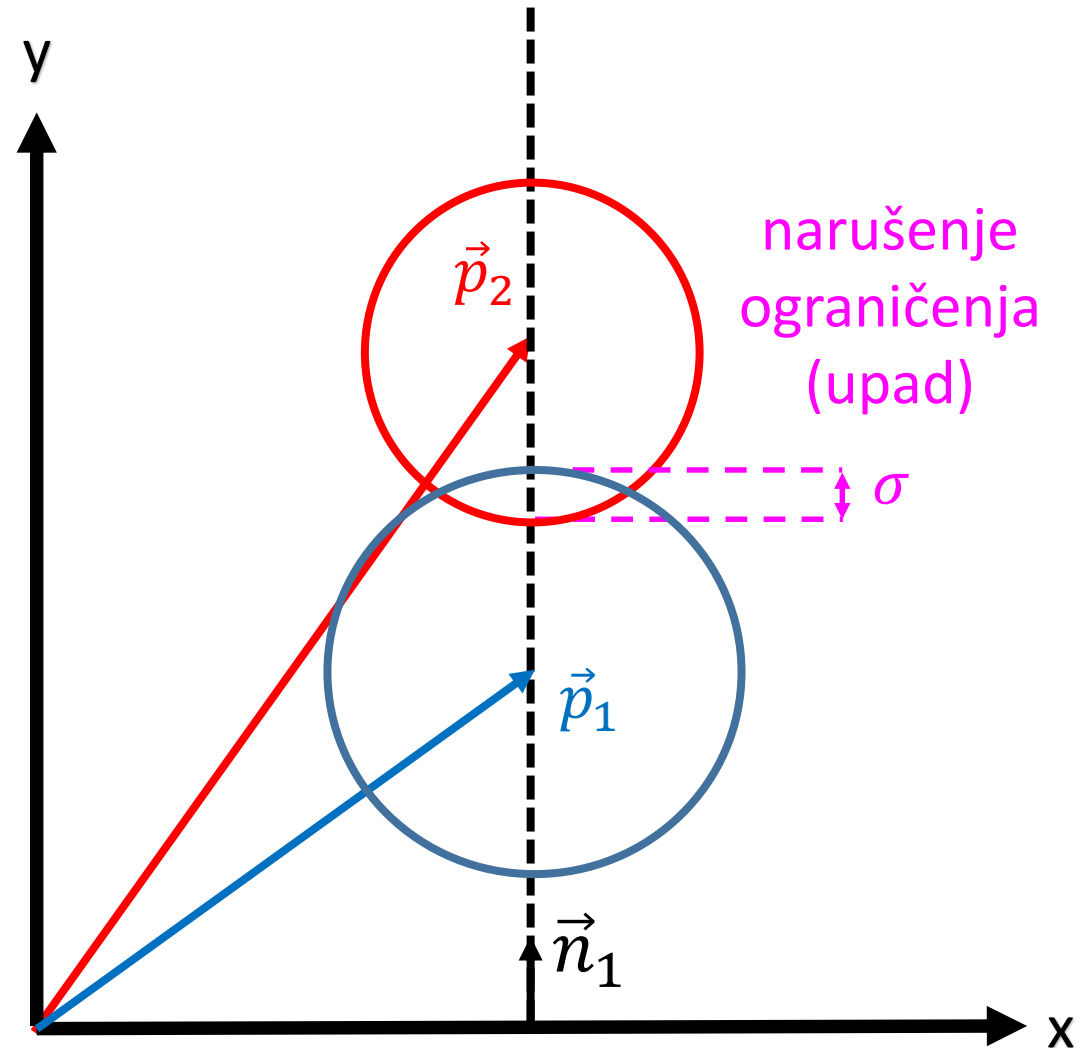


# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Ograničenja su već narušena:

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) < 0$$





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

pretpostavka:

ograničenja su zadovoljena

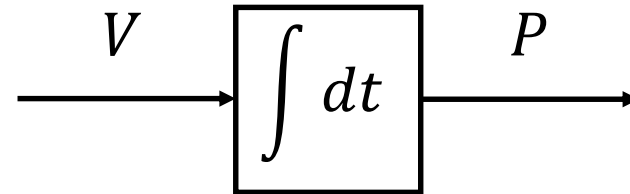
$$c = 0$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

rešenje će biti  
takve brzine da  
položaji ostanu  
nepromenjeni

neispravni  
položaji





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

*Baumgarte stabilization (J.  
Baumgarte):*

pretpostavka:

ograničenja su narušena

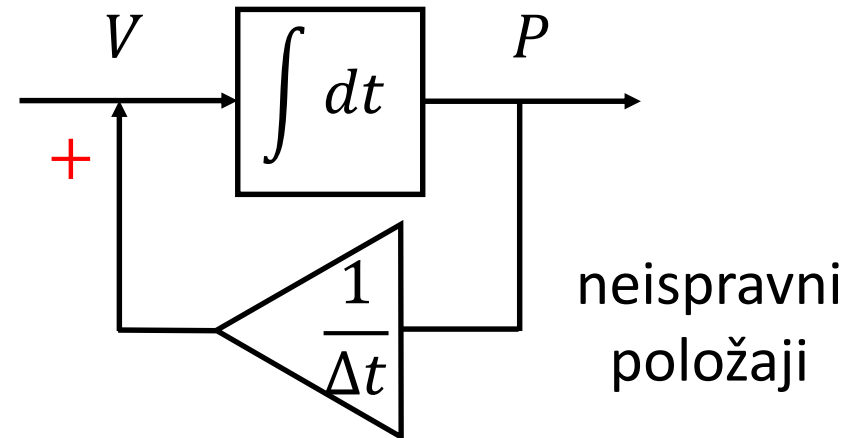
$$c < 0$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \frac{c}{\Delta t} = 0$$

rešenje će biti  
takve brzine da  
položaji budu  
korigovani

korigovani  
položaji





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

*Baumgarte stabilization:*

pretpostavka:  
ograničenja su narušena  
 $c < 0$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \beta \frac{c}{\Delta t} = 0$$

ograničiti  
uvođenje  
energije

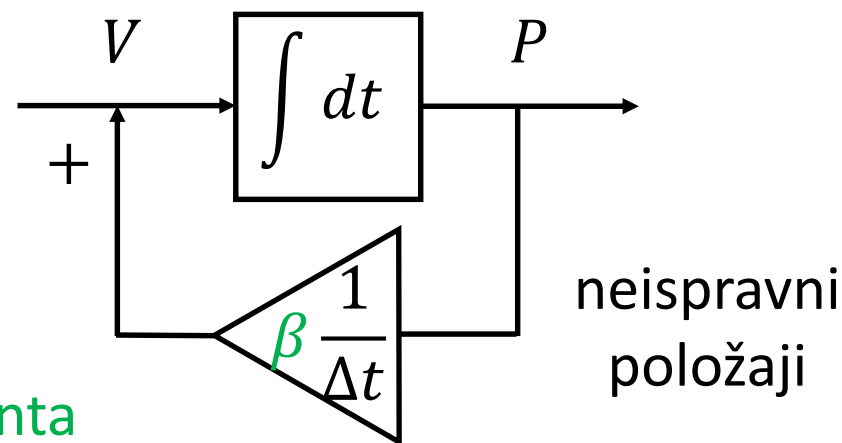
$$0 \leq \beta \leq 1$$

unapred definisana konstanta

pri integraciji se uvode  
greške, pa položaji neće biti  
u potpunosti korigovani  
onako kako je to određeno  
brzinama (*numerical drift*),  
tj. može doći do uvođenja  
energije u sistem

rešenje će biti  
takve brzine da  
položaji budu  
korigovani

korigovani  
položaji



neispravni  
položaji





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \beta \frac{c}{\Delta t} = 0$$

$$\frac{dc}{dt} = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

normala se ne menja

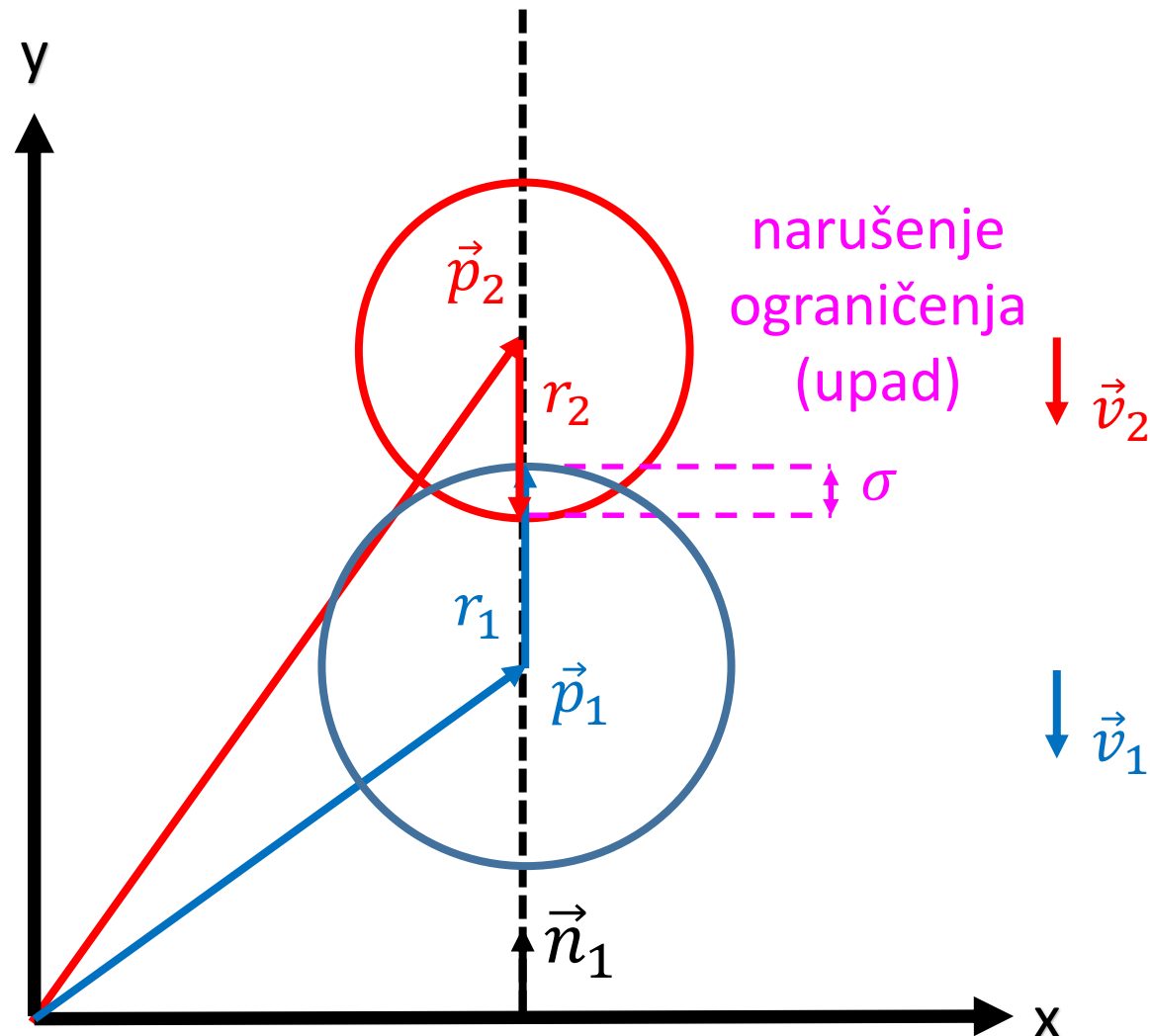
$$\frac{d}{dt}((\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1) = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1 + (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{n}_1 = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

$$\left( \frac{d}{dt} \vec{p}_2 + \frac{d}{dt} \vec{r}_2 - \frac{d}{dt} \vec{p}_1 - \frac{d}{dt} \vec{r}_1 \right) \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

poluprečnici se ne menjaju

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

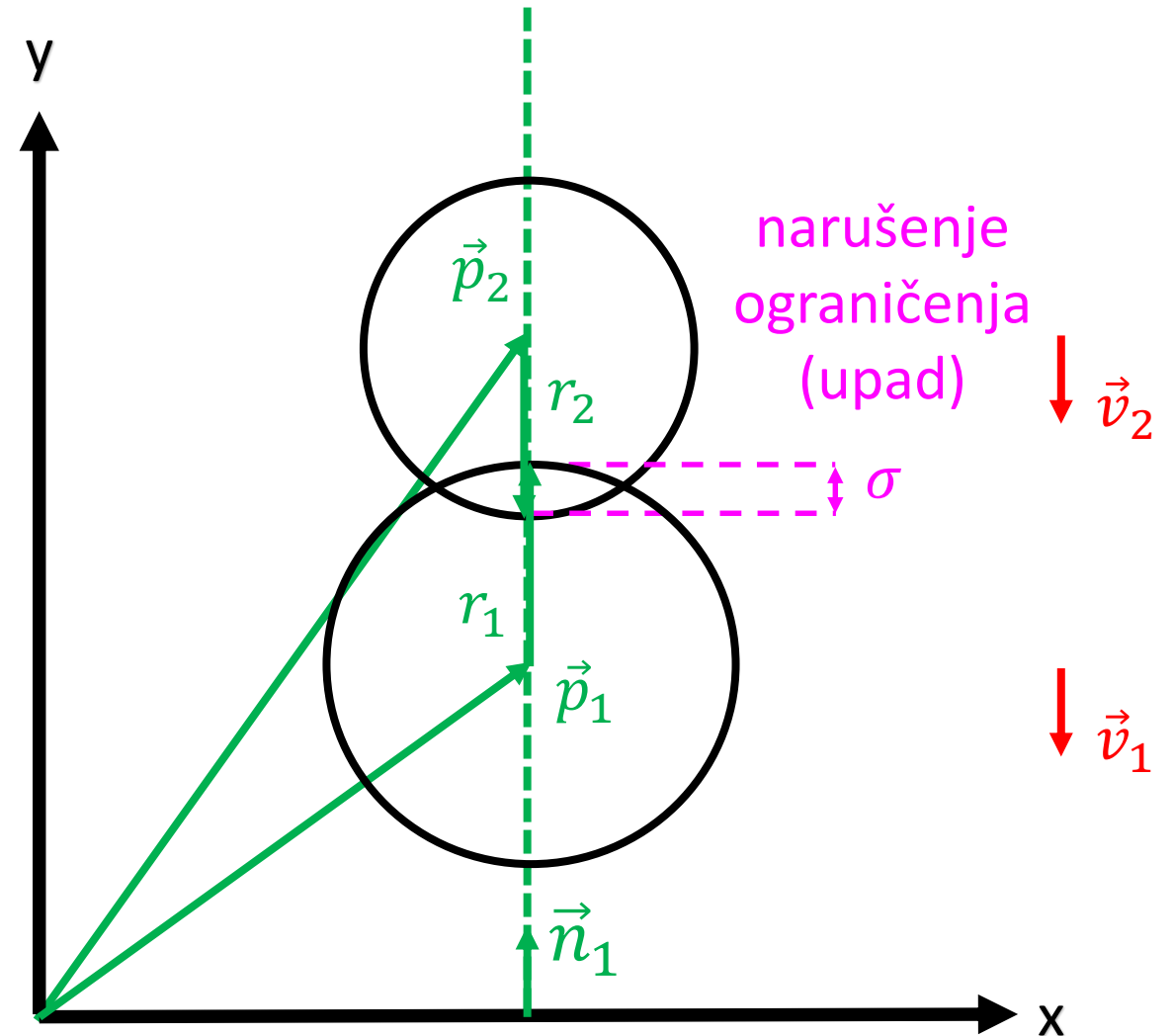
$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1$$

rešavamo:

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

tražimo      poznato

*(Note: In the original image, red arrows point from 'tražimo' to the velocity terms, and green arrows point from 'poznato' to the position terms and the normal vector term.)*





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

$$\sigma = (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1$$

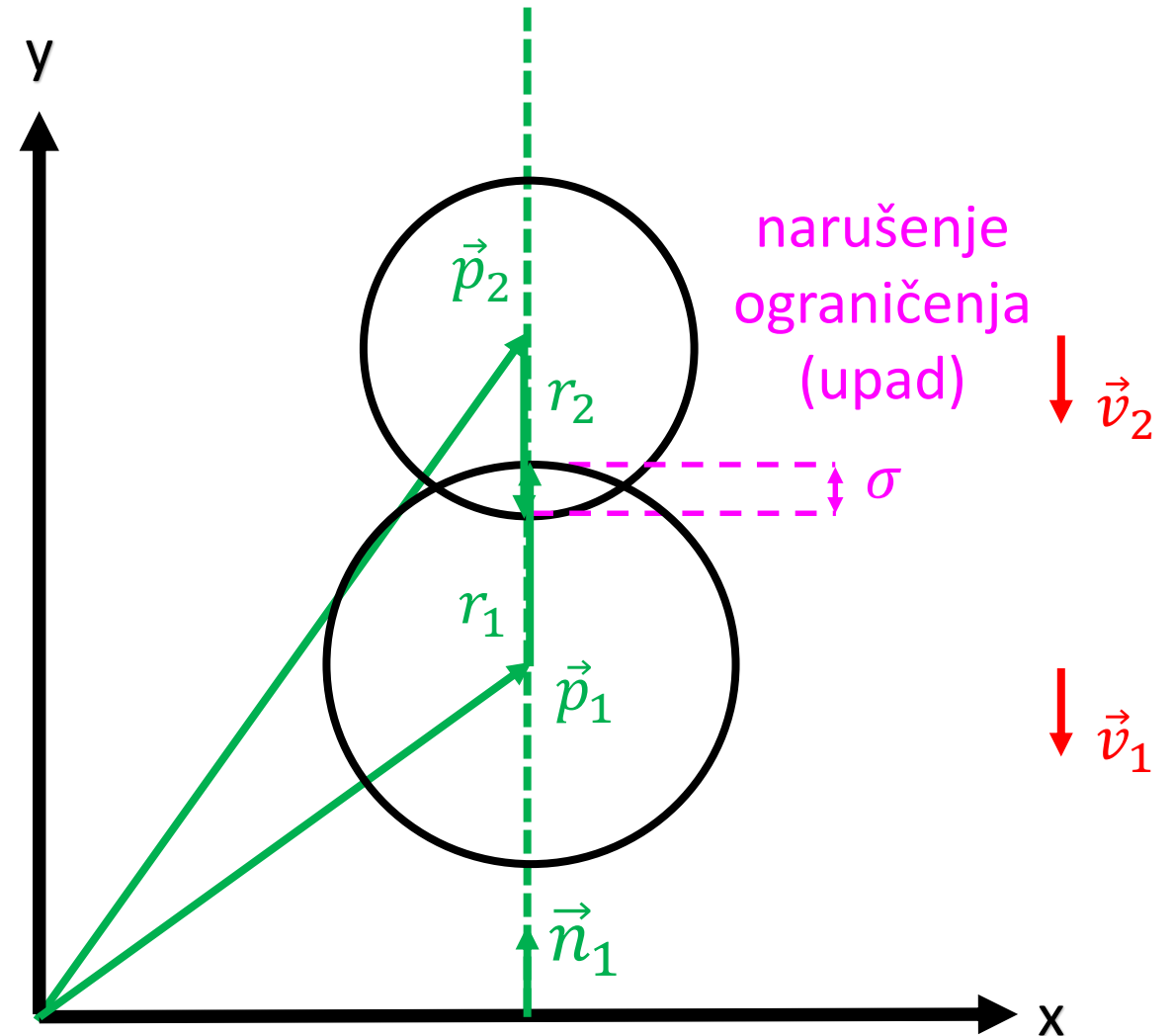
rešavamo:

izračunato pri  
otkrivanju sudara

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

tražimo

poznato





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1$$

vektorski:

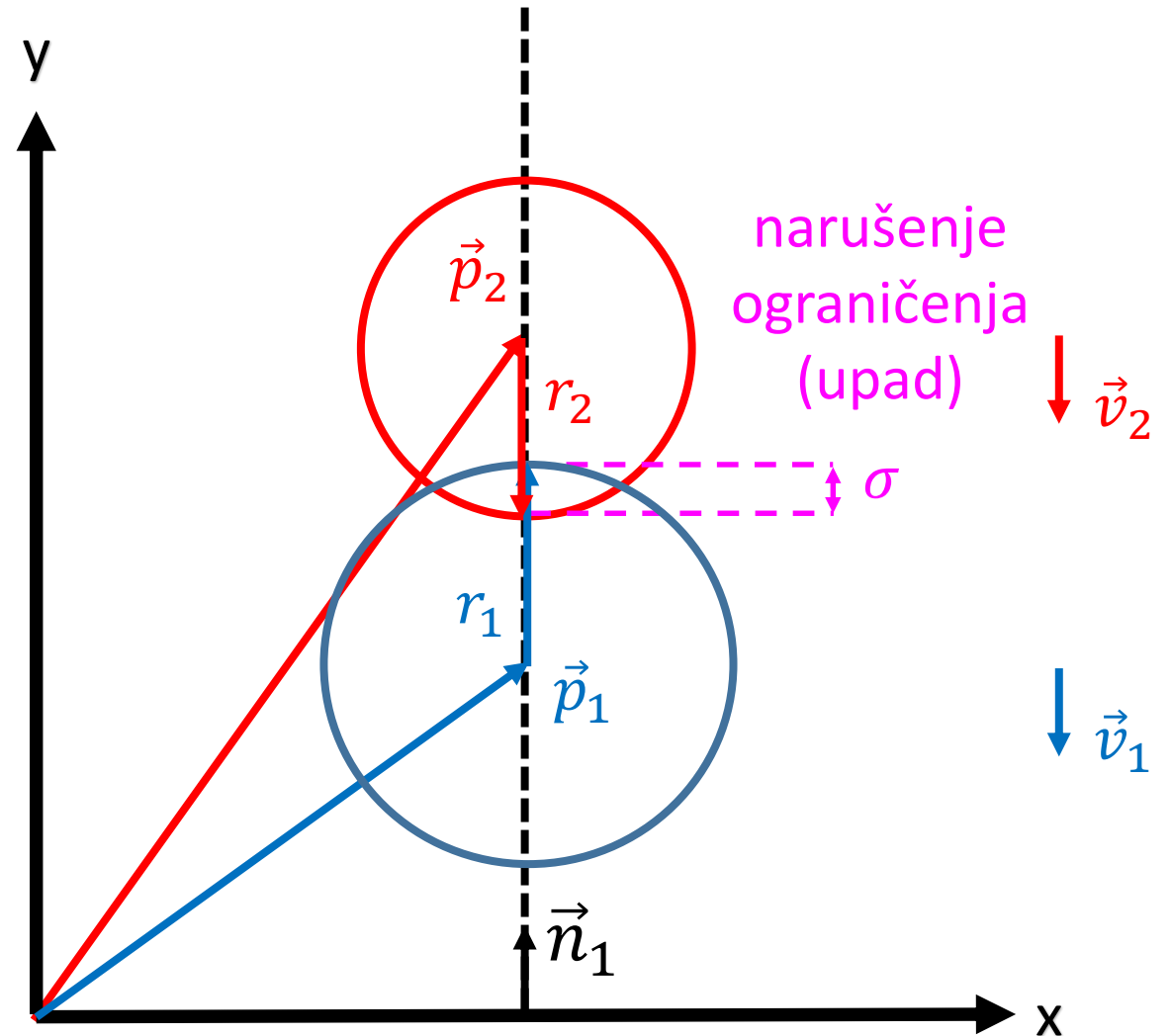
$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

drugačiji oblik  
za različita  
ograničenja

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

uvek isto

$$jv = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$





# Ograničeno kretanje

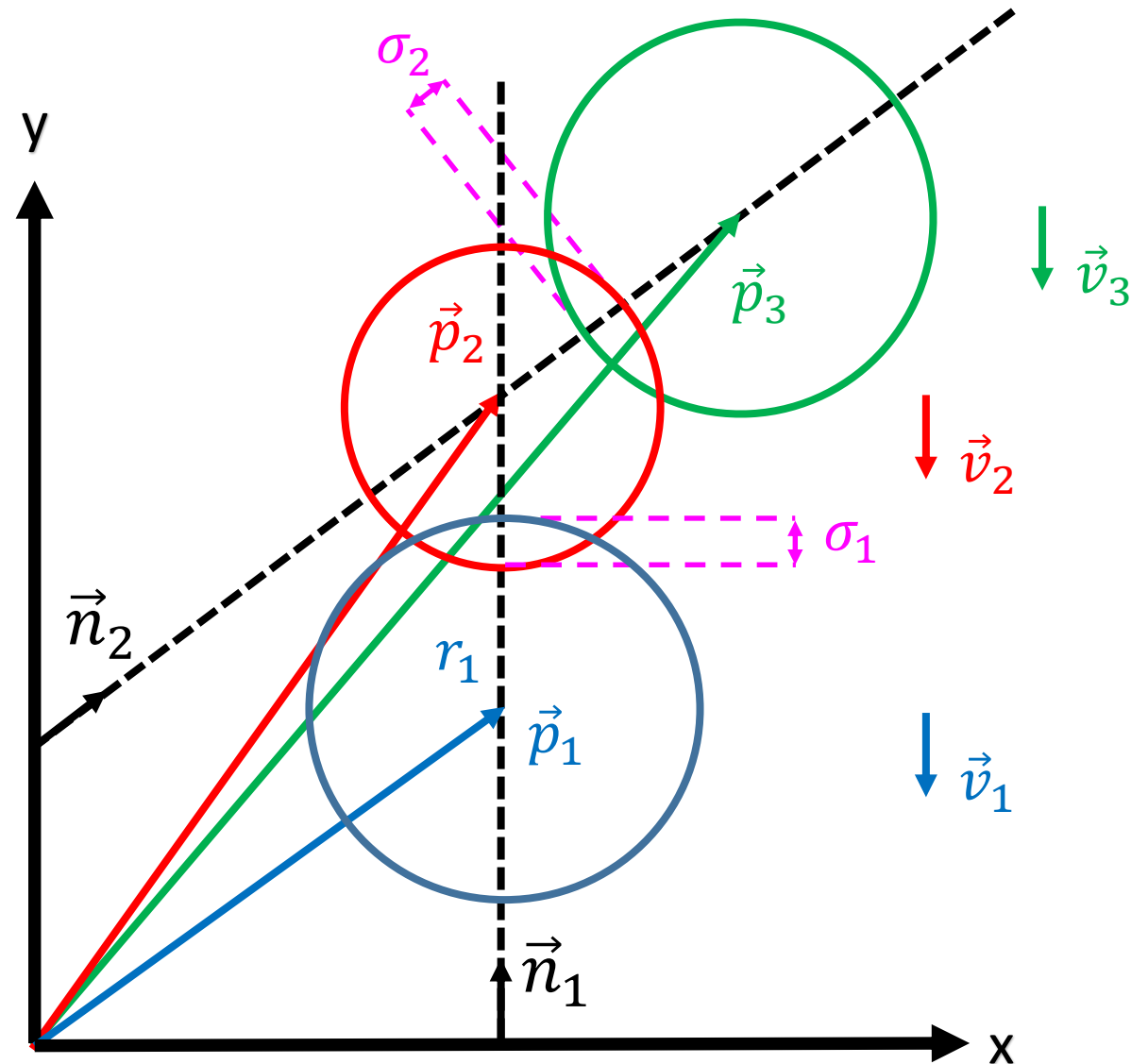
## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Za složen sistem:

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_2 & \vec{n}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$\vdots$





# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Sistem 1. izvoda ograničenja:

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_2 & \vec{n}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_n & \vec{n}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{v}_{n+1} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_n}{\Delta t}$$



# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Prošireno za svaku dimenziju vektora:

$$\begin{bmatrix} -n_{1x} & -n_{1y} & n_{1x} & n_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{2x} & -n_{2y} & n_{2x} & n_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{3x} \\ v_{3y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} -n_{nx} & -n_{ny} & n_{nx} & n_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{nx} \\ v_{ny} \\ v_{(n+1)x} \\ v_{(n+1)y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_n}{\Delta t}$$



# Ograničeno kretanje

## 2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Jakobijan

narušenja  
ograničenja  
brzine (upadi)

$$\begin{bmatrix}
 v_{1x} & v_{1y} & v_{2x} & v_{2y} & \dots & & & & & \\
 -n_{1x} & -n_{1y} & n_{1x} & n_{1y} & 0 & 0 & & & & \\
 0 & 0 & -n_{2x} & -n_{2y} & n_{2x} & n_{2y} & & & & \\
 & & \vdots & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & -n_{(n-1)x} & -n_{(n-1)y} & n_{(n-1)x} & n_{(n-1)y} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 0 & -n_{nx} & -n_{ny} & n_{nx} & n_{ny}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{1x} \\
 v_{1y} \\
 v_{2x} \\
 v_{2y} \\
 \vdots \\
 v_{nx} \\
 v_{ny}
 \end{bmatrix}
 = -\beta \frac{1}{\Delta t}
 \begin{bmatrix}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \vdots \\
 \sigma_{n-1} \\
 \sigma_n
 \end{bmatrix}$$

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

Da bi narušenje ograničenja bilo rešeno brzina u pravcu narušavanja ograničenja mora da poništi narušenje ograničenja.





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$\textcolor{red}{J}\textcolor{red}{V} = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

tražena brzina u narednom vremenskom trenutku

Potrebno je izračunati silu koja će poništiti narušenje ograničenja!



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$\mathbf{J}V = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

matrično:

2. Njutnov zakon!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F \leftarrow \text{ukupna sila}$$

2. izvod položaja

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

Ne uklapa se!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c) \leftarrow \text{tražena korektivna sila}$$

2. izvod položaja

poznata masa

poznata spoljašnja sila

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

1. rešenje: diferencirati još jednom

Rezultat: izvod Jakobijana se komplikuje!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$

2. izvod položaja

poznata masa

poznata spoljašnja sila

tražena korektivna sila

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

matrično:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV(t + \Delta t) = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

brzina u narednom vremenskom trenutku

2. rešenje: konačna razlika

Rezultat: uvodi se aproksimacija!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{V(t + \Delta t) - V}{\Delta t} = \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$

poznata trenutna brzina

poznata masa

poznata spoljašnja sila

tražena korektivna sila



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$\frac{d^2 \vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d \vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$

$$V(t + \Delta t) = -\beta \frac{1}{dt} J^T S$$

$$V(t + \Delta t) - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$

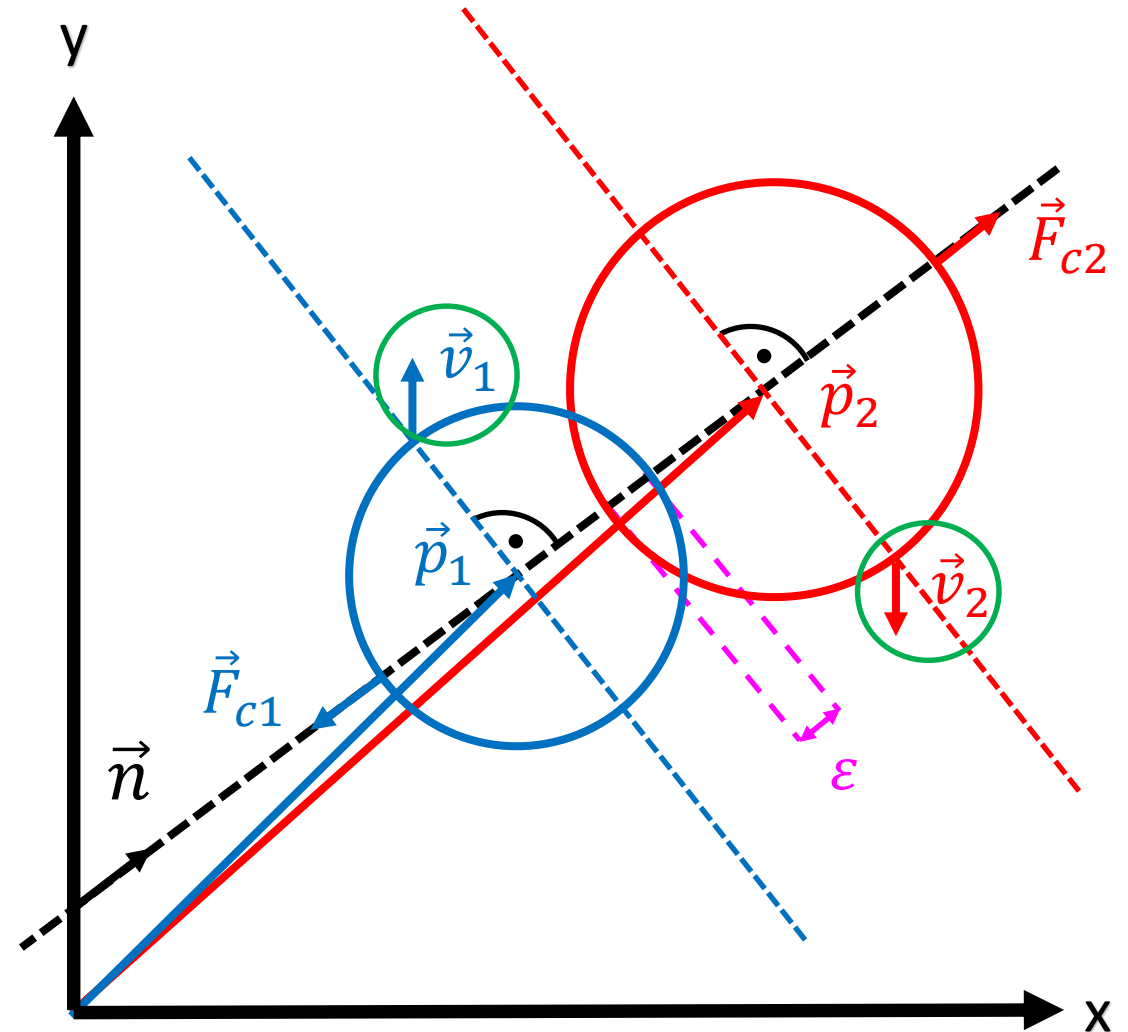


# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja: Korektivne sile:

$$\vec{F}_c \perp \dot{V}(t + \Delta t)$$

- poništavaju deo **trenutne brzine** koji narušava ograničenje
- ne deluju duž pravca dozvoljene brzine, već normalno na njega
- ne dodaju energiju u sistem (vrše virtuelni rad)





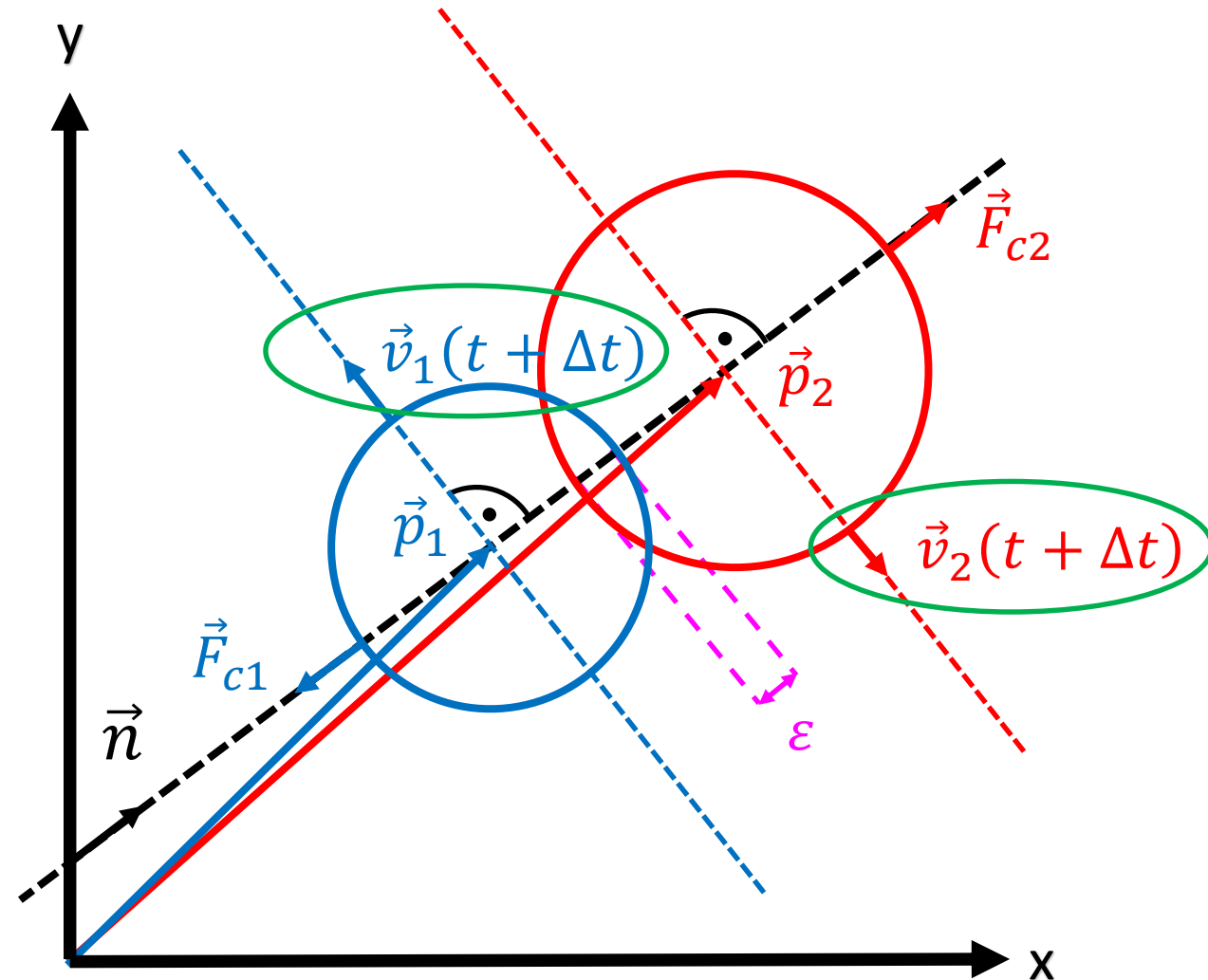


# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja: Korektivne sile:

$$\vec{F}_c \perp \vec{V}(t + \Delta t)$$

- poništavaju deo trenutne brzine koji narušava ograničenje
- ne deluju duž pravca **dozvoljene brzine**, već normalno na njega
- ne dodaju energiju u sistem (vrše virtuelni rad)





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

svaka vrsta Jakobijana  
je normalna na  
rezultujuće brzine

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

$$JV(t + \Delta t) = 0$$

Ako je:

$$F_c \perp V(t + \Delta t)$$

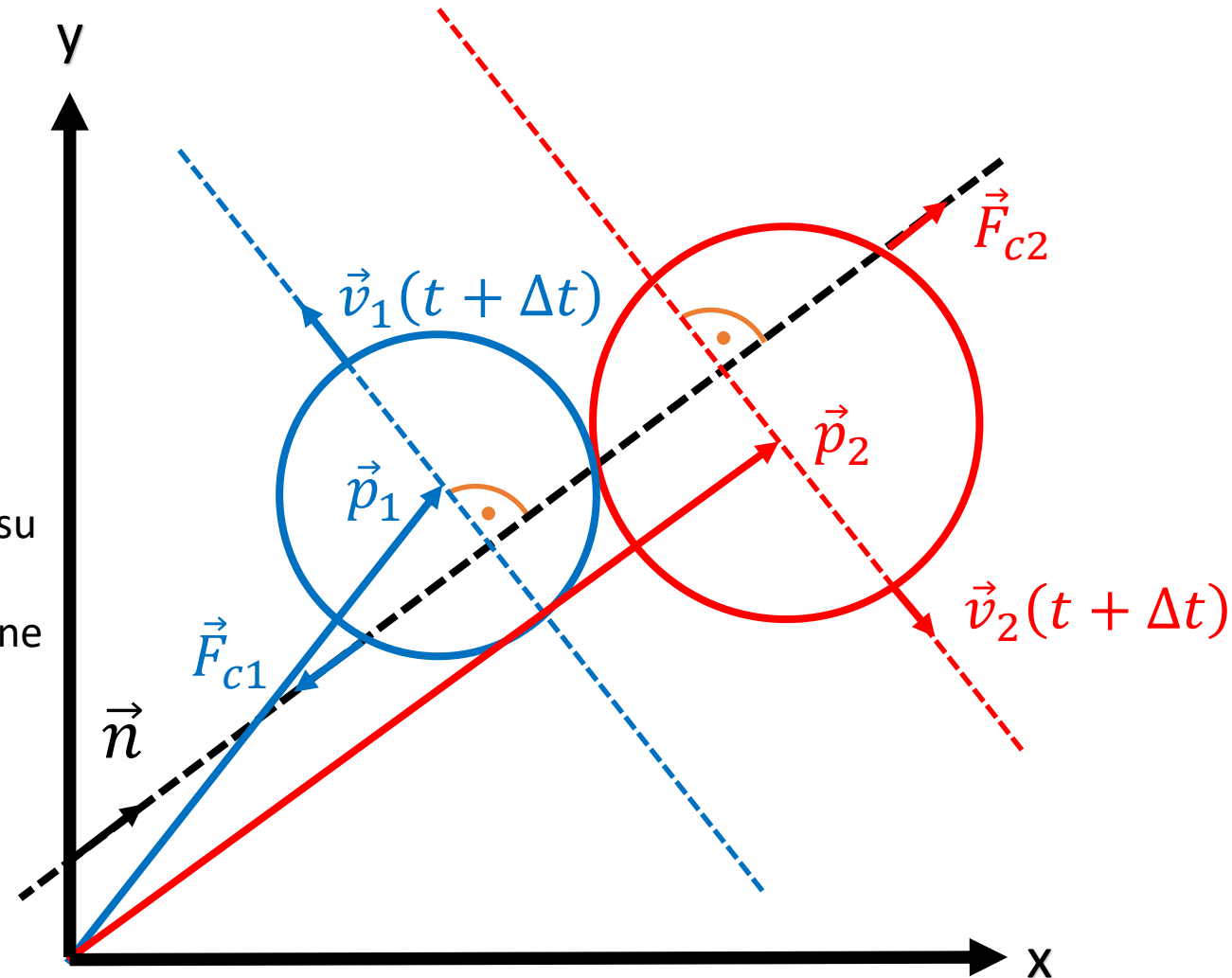
korektivne sile su  
normalne na  
rezultujuće brzine

Tada važi:

korektivne sile  
tada moraju biti  
paralelne sa  
vrstama od  $J^T$

$$F_c = J^T \lambda$$

pravac intenzitet





# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + J^T \lambda)$$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + J^T \lambda)$$

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} F_{ext} + \Delta t \frac{1}{M} J^T \lambda$$

$$\Delta t \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V - \Delta t \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$





# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

Šta je poznato a šta nepoznato?



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

efektivna inverzna masa

koliko ubzanje je potrebno da reši trenutno narušenje ograničenja?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem trenutne brzine?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem spoljašnje sile?

$$\frac{1}{kg}$$

$$\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{m}{s^2}$$

$$\frac{1}{kg} \frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{m}{s^2}$$





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

efektivna inverzna masa

koliko ubzanje je potrebno da reši trenutno narušenje ograničenja?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem trenutne brzine?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem spoljašnje sile?

$$\frac{1}{kg}$$

matrica  $n \times n!$

$$\frac{m}{s^2}$$

vektor  $n \times 1!$

$$\frac{m}{s^2}$$

vektor  $n \times 1!$

$$\frac{1}{kg} \frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{m}{s^2}$$

vektor  $n \times 1!$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$

$$\lambda = A \backslash b$$

rešavanje sistema linearnih  
algebarskih jednačina



# Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$

$$\lambda = A \backslash b$$

$$F_c = J^T \lambda$$



# Ograničeno kretanje

Na 1. korektivu silu utiče  
množilac samo 1. ograničenja!

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$\begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \\ F_{c3x} \\ F_{c3y} \\ \vdots \\ F_{cnx} \\ F_{cny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_{1x} & 0 & \dots & 0 \\ -n_{1y} & 0 & \dots & 0 \\ n_{1x} & -n_{2x} & \dots & 0 \\ n_{1y} & -n_{2y} & \dots & 0 \\ 0 & n_{2x} & \dots & 0 \\ 0 & n_{2y} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -n_{(n-1)x} & \dots & 0 \\ \vdots & -n_{(n-1)y} & \dots & 0 \\ \vdots & n_{(n-1)x} & \dots & -n_{nx} \\ \vdots & n_{(n-1)y} & \dots & -n_{ny} \\ 0 & 0 & \dots & n_{nx} \\ 0 & 0 & \dots & n_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Lagranžovi množioci  
(intenzitet korektivih sila)

predstavljaju  
rešenje problema

$$F_c = J^T \lambda$$



# Ograničeno kretanje

Na 2. korektivu silu utiču  
množioc 1. i 2. ograničenja!

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$\begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \\ F_{c3x} \\ F_{c3y} \\ \vdots \\ F_{cnx} \\ F_{cny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & & & & & \\ -n_{1x} & 0 & & & & & \\ -n_{1y} & 0 & & & & & \\ n_{1x} & -n_{2x} & \dots & & & & \\ n_{1y} & -n_{2y} & & & & & \\ 0 & n_{2x} & & & & & \\ 0 & n_{2y} & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & -n_{(n-1)x} & 0 & & \\ & & & -n_{(n-1)y} & 0 & & \\ & & \dots & n_{(n-1)x} & -n_{nx} & & \\ & & & n_{(n-1)y} & -n_{ny} & & \\ & & & 0 & n_{nx} & & \\ & & & 0 & n_{ny} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Lagranžovi množioc  
(intenzitet korektivih sila)

predstavljaju  
rešenje problema

$$F_c = J^T \lambda$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$

$$\lambda = A \backslash b$$

$$F_c = J^T \lambda$$

rešavanje sistema linearnih  
algebarskih jednačina

integracija:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_c}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$



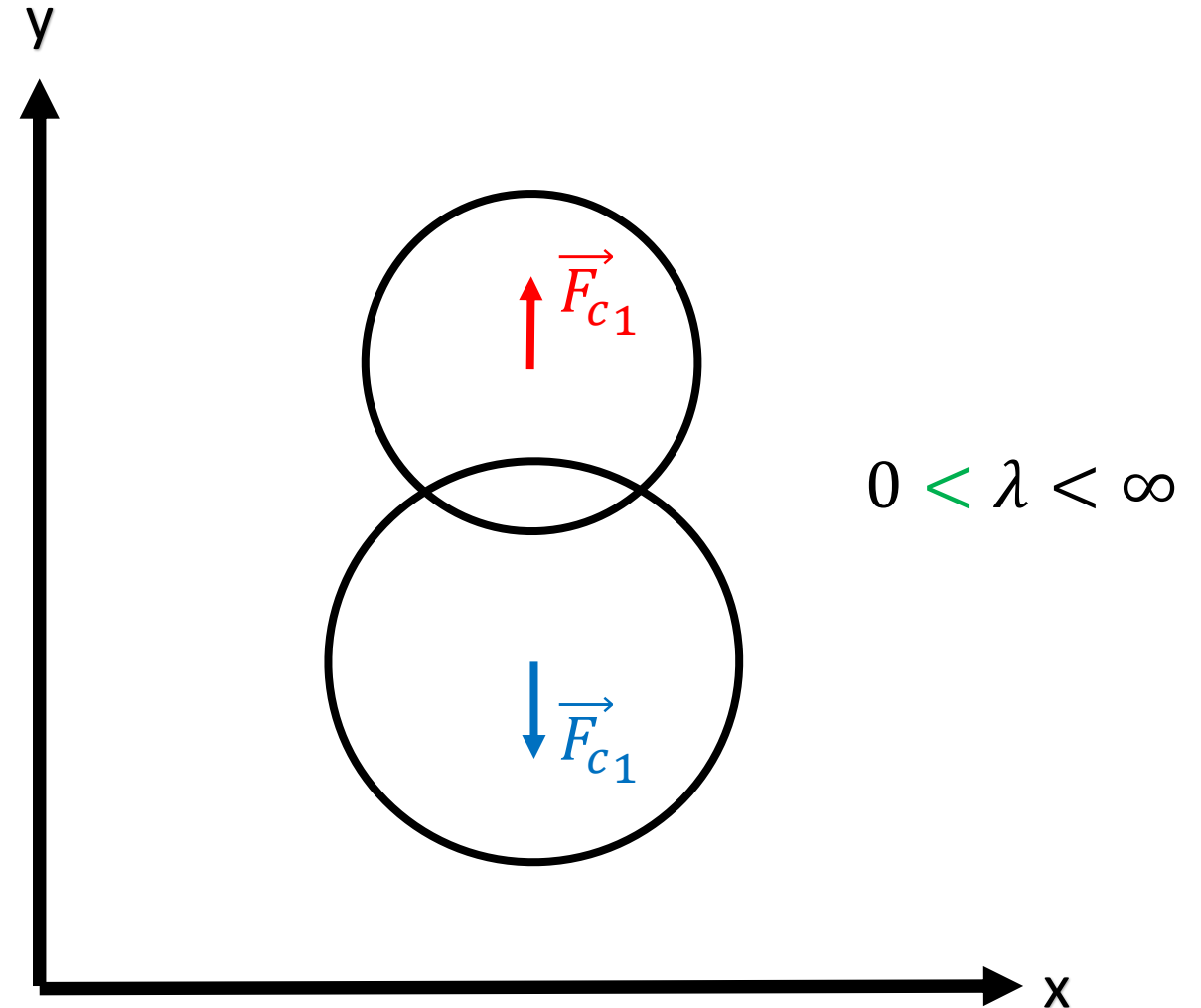
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

rezultujuća pozitivna (odgurujuća) sila  $F_c$







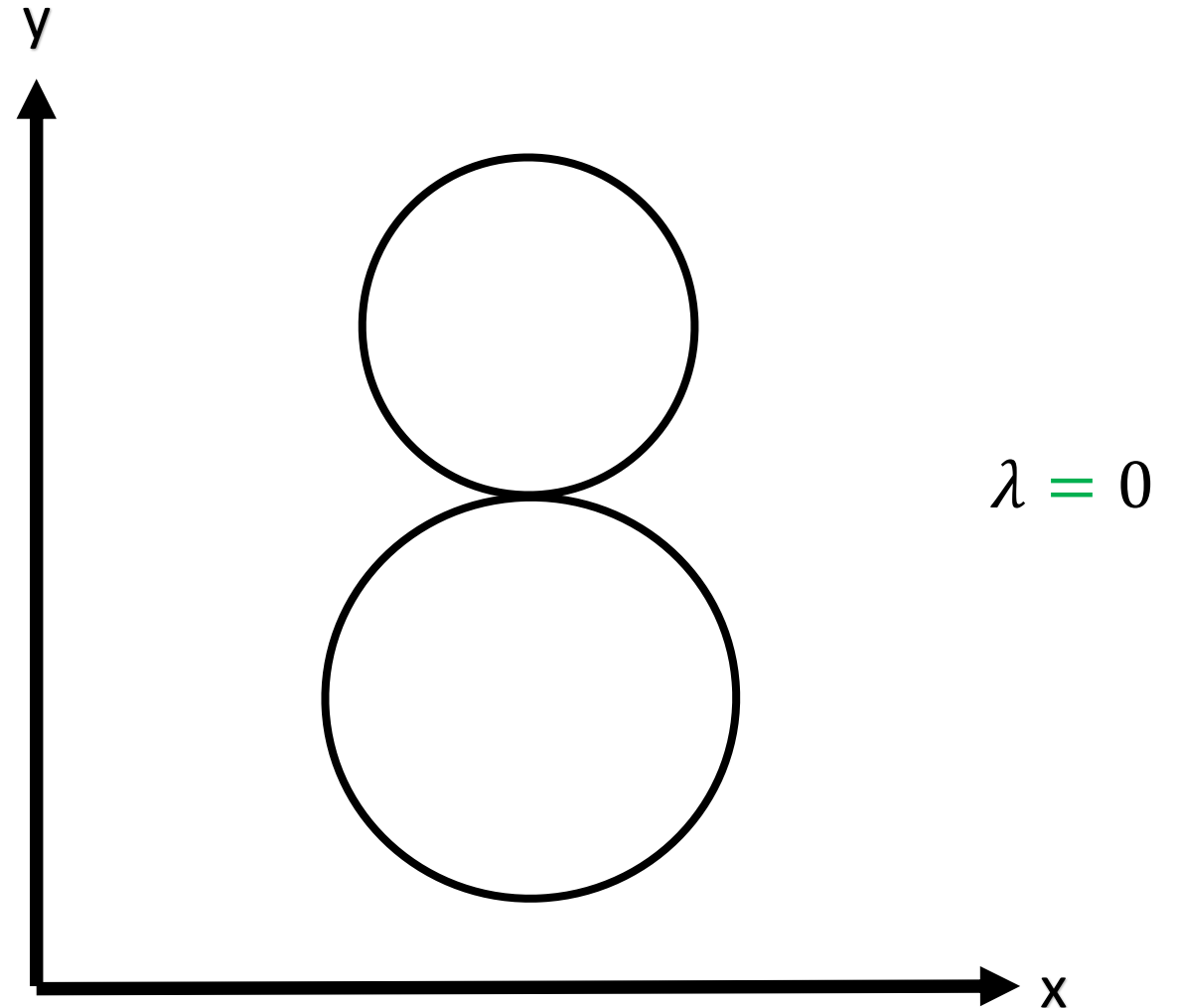
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečen upad!





# Ograničeno kretanje

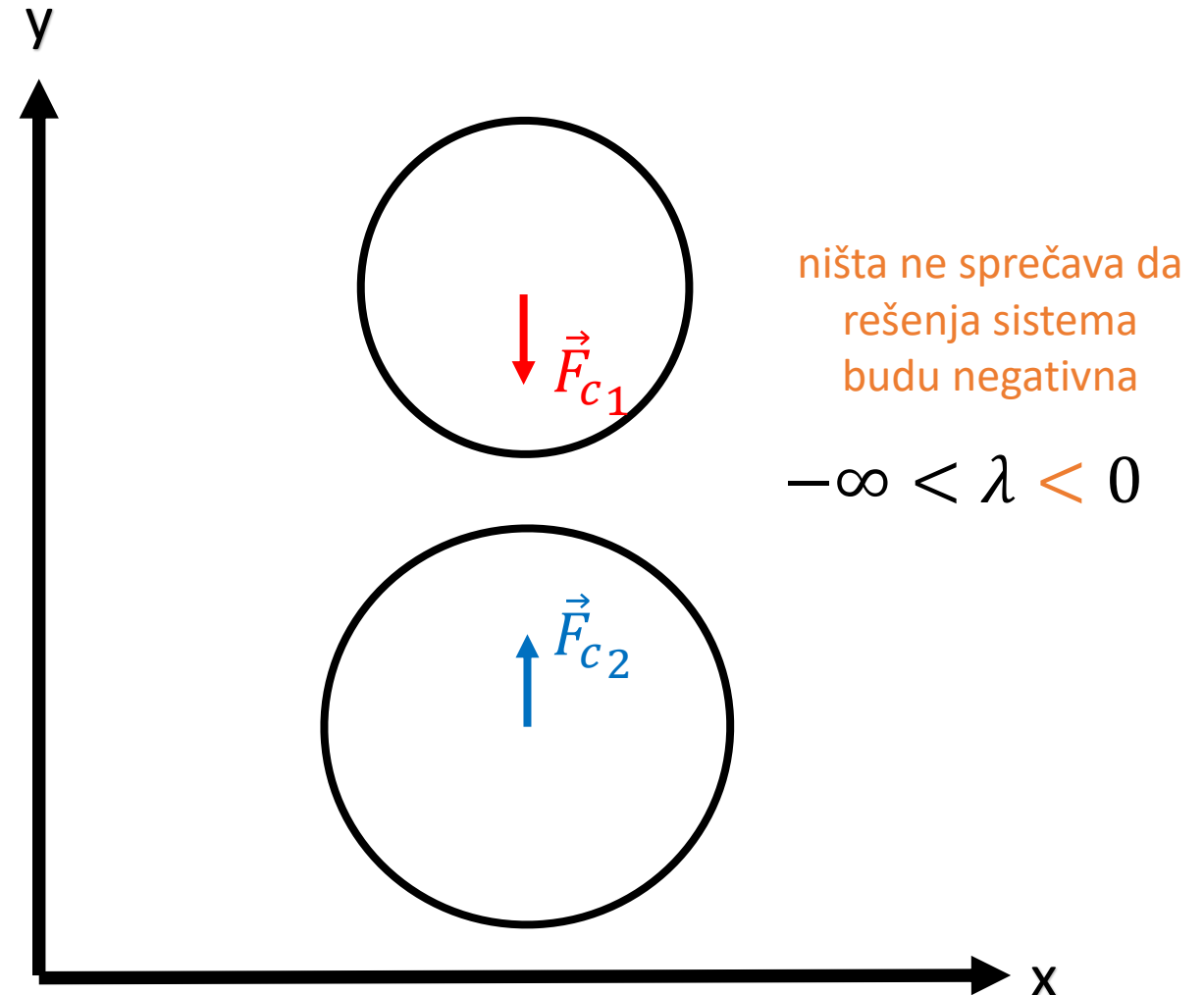
## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečeno i odvajanje!

rezultujuća negativna (privlačea) sila  $F_c$





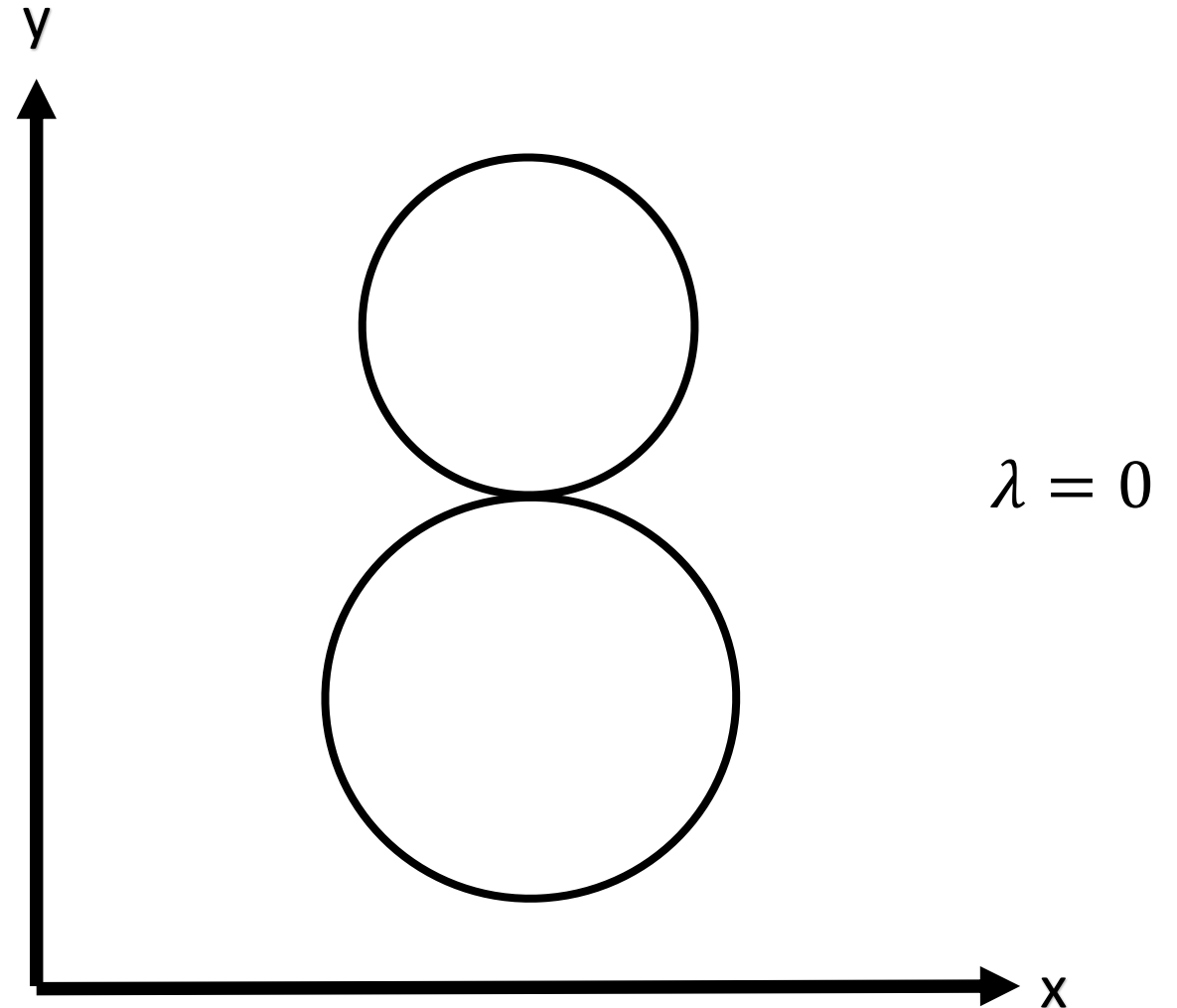
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečeno i odvajanje!





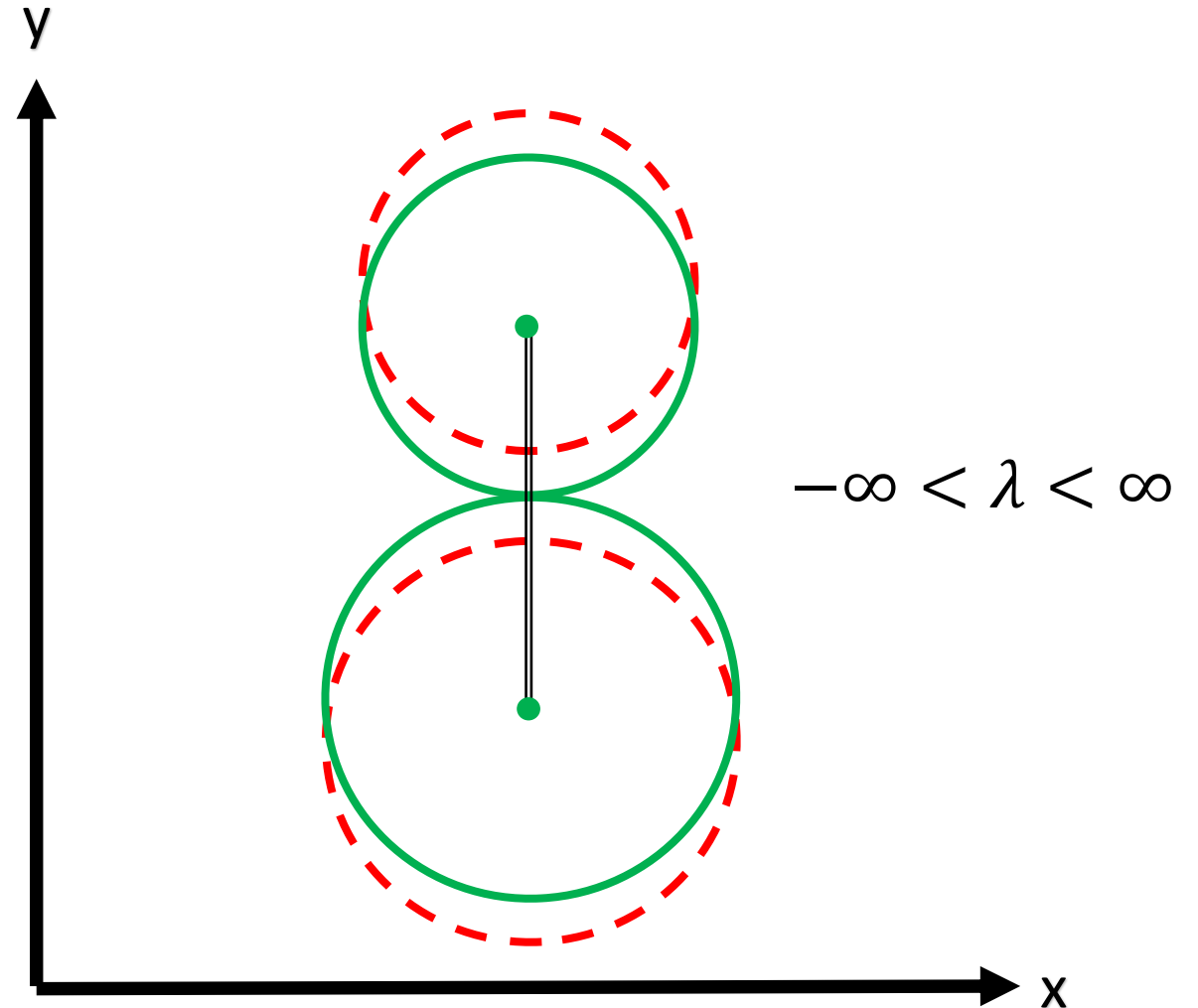
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

npr. **krute veze** (*distance joints*)!





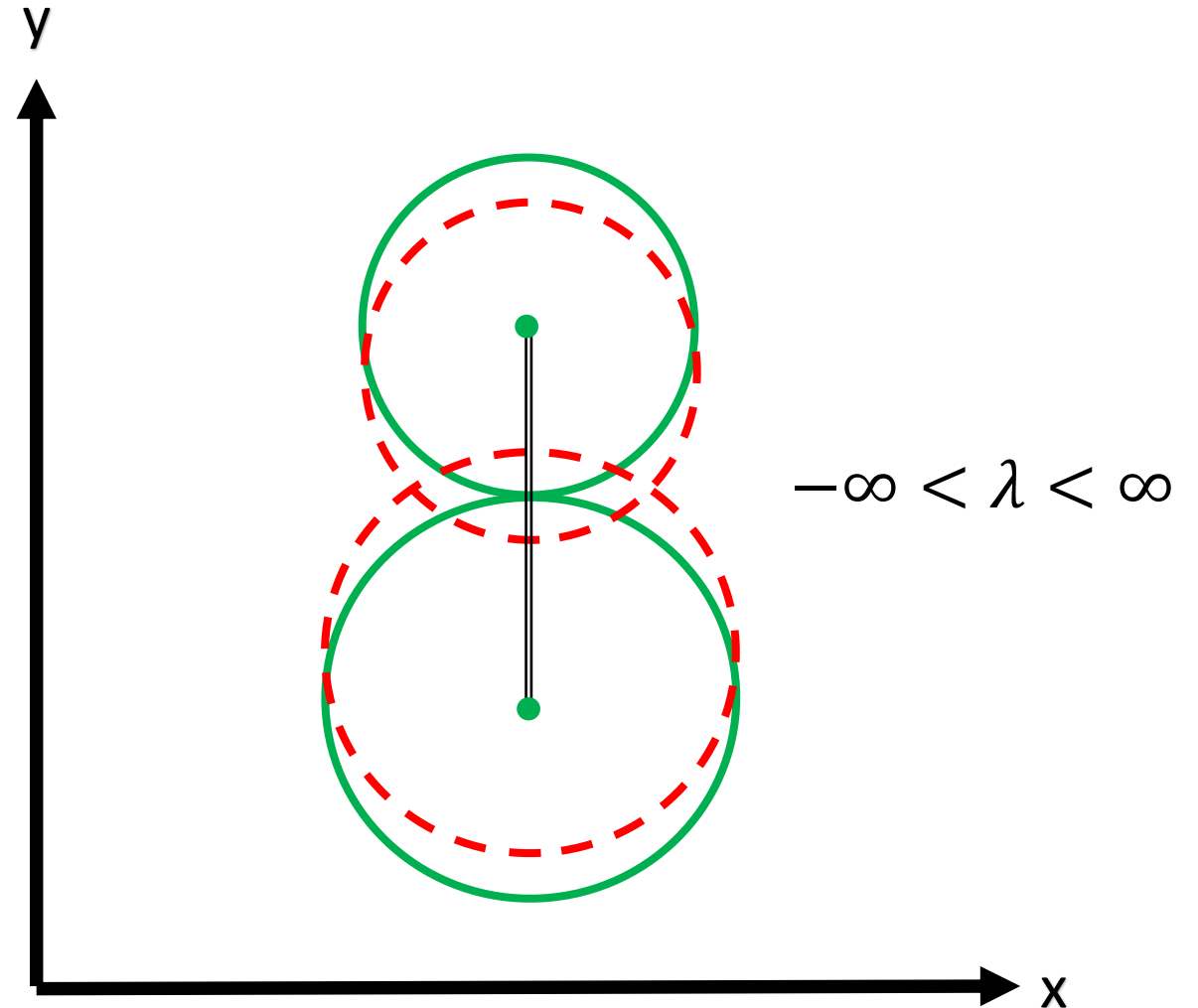
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti  
(*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

npr. **krute veze** (*distance joints*)!





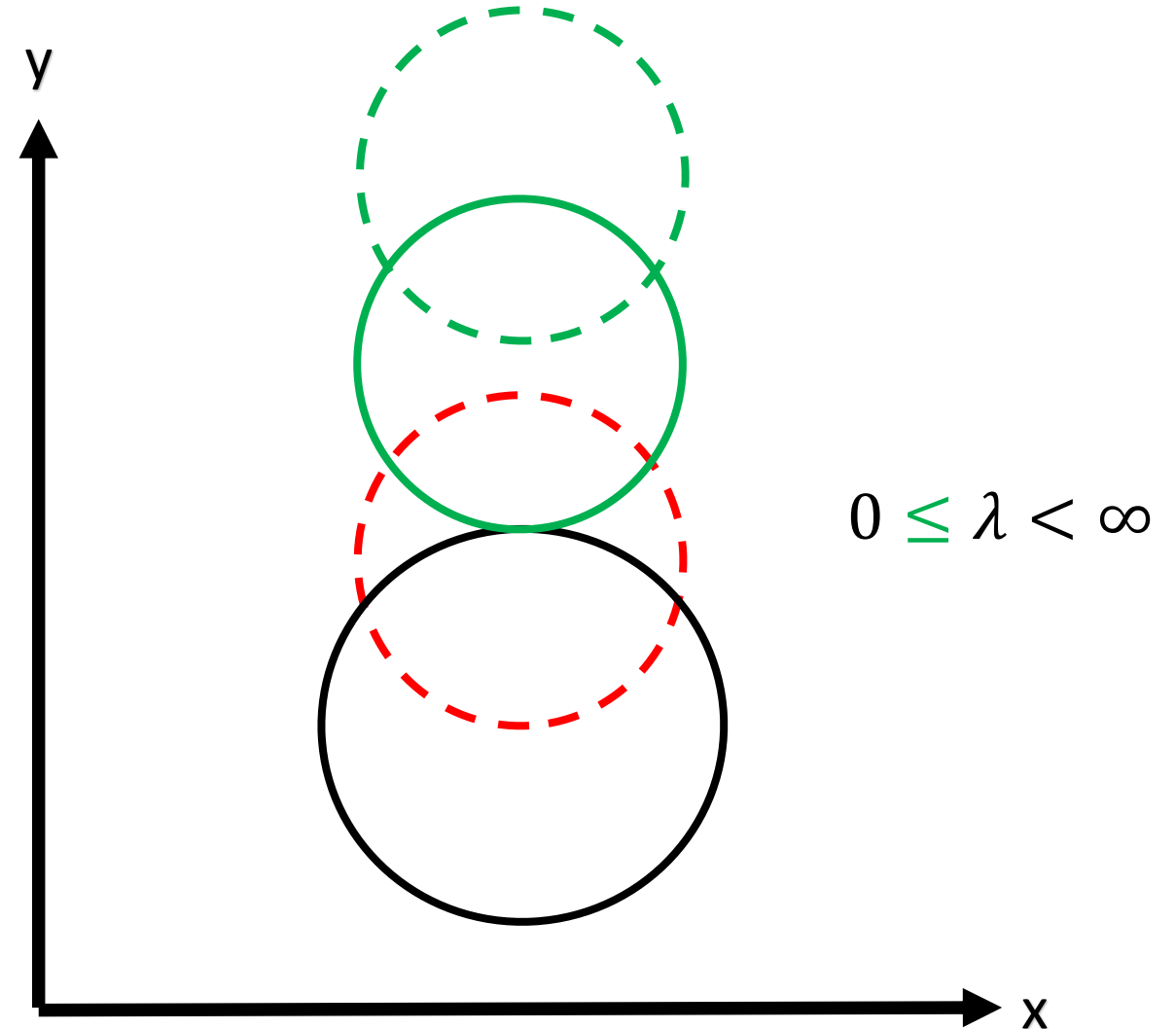
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa nejednakosti  
(*inequality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \geq 0$$

npr. **kontaktna ograničenja!**





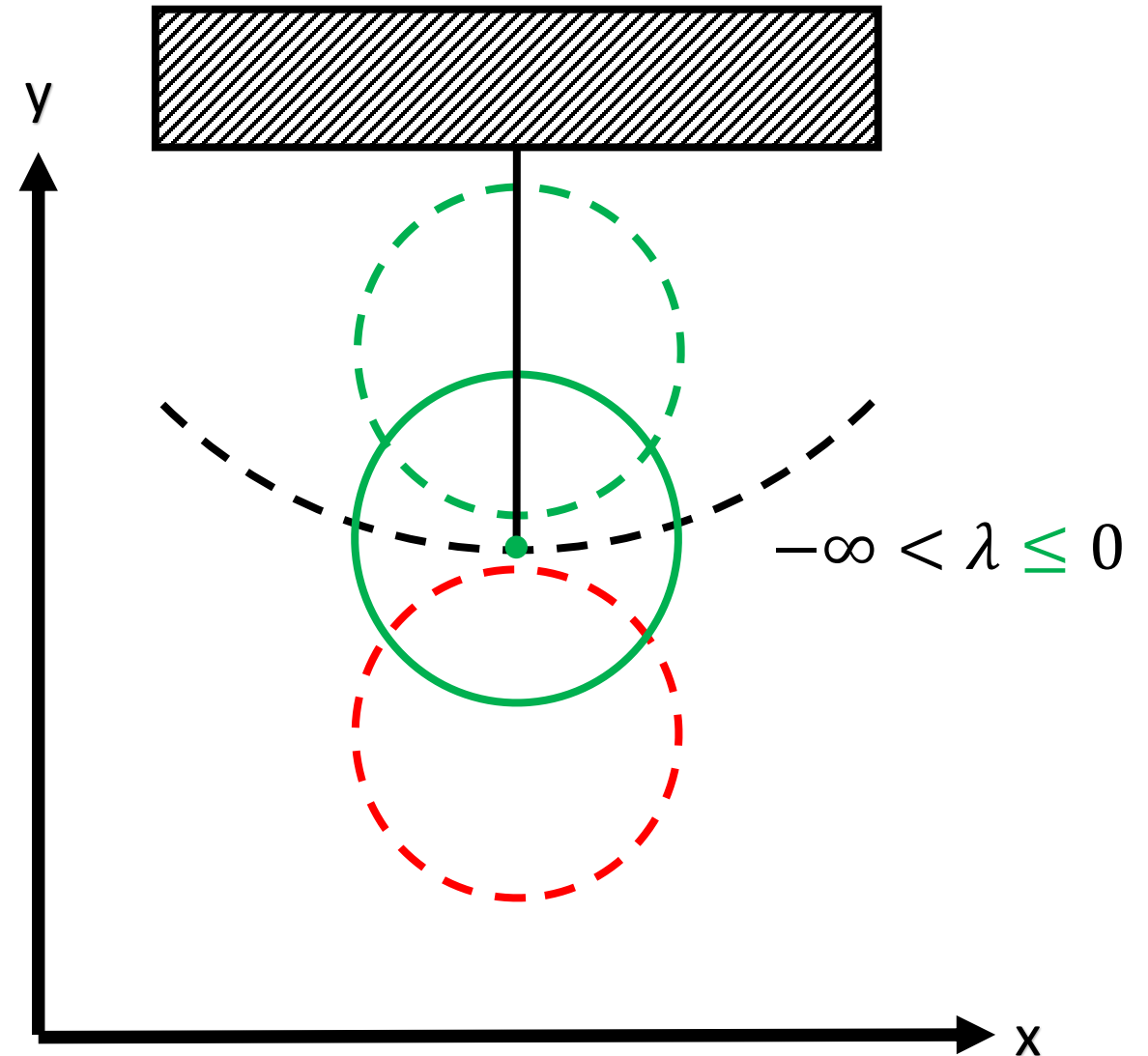
# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa nejednakosti  
(*inequality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \leq 0$$

npr. **klatna** (*pendulums*)!





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- sistem linearnih algebarskih jednačina

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$

- Rešava samo sistem ograničenja tipa jednakosti!





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Jednakost:  $c(\dots) = 0$

Nejednakost tipa  $\geq$ :  $c(\dots) \geq 0$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $c(\dots) \leq 0$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

Jednakost:  $A\lambda = b$

Nejednakost tipa  $\geq$ :  $A\lambda \geq b$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $A\lambda \leq b$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

### I. prevođenje nejednakosti u jednakosti

traži se (teži da proizvede  $F_c$ ) slack promenljiva (jednakost i nejednakosti važe)

Jednakost:  $\overset{\text{red arrow}}{\text{green}} A \overset{\text{black arrow}}{\text{red}} \lambda + F_c = \text{purple } b \quad F_c = \text{orange } 0$

Nejednakost tipa  $\geq$ :  $\text{green } A \text{red } \lambda + F_c = \text{purple } b \quad F_c \leq \text{orange } 0$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $\text{green } A \text{red } \lambda + F_c = \text{purple } b \quad F_c \geq \text{orange } 0$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

### I. prevođenje nejednakosti u jednakosti

nađeno (proizvodi  $F_c$ )

slack promenljiva (sada je višak)

Jednakost:  $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad -\infty \leq \lambda \leq \infty$

Nejednakost tipa  $\geq$ :  $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad 0 \leq \lambda \leq \infty$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad -\infty \leq \lambda \leq 0$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je  $\lambda$  u svojim granicama (nema sile  $F_c$  koja bi trebalo da deluje)



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- I. prevođenje nejednakosti u jednakosti
- II. uopštenje graničnih vrednosti  $\lambda$  da bi bile izmenljive

nađeno (proizvodi  $F_c$ )

slack promenljiva (sada je višak)

Jednakost:  $\overset{\text{nađeno (proizvodi } F_c)}{\color{red}A\lambda} + \overset{\text{slack promenljiva (sada je višak)}}{F_c} = \color{blue}b \quad F_c = 0 \quad \color{red}\lambda_{min} \leq \lambda \leq \color{red}\lambda_{max}$

Nejednakost tipa  $\geq$ :  $\color{red}A\lambda + F_c = \color{blue}b \quad F_c = 0 \quad \color{red}\lambda_{min} \leq \lambda \leq \color{red}\lambda_{max}$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $\color{red}A\lambda + F_c = \color{blue}b \quad F_c = 0 \quad \color{red}\lambda_{min} \leq \lambda \leq \color{red}\lambda_{max}$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je  $\lambda$  u svojim granicama (nema sile  $F_c$  koja bi trebalo da deluje)



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- I. prevođenje nejednakosti u jednakosti
- II. uopštenje graničnih vrednosti  $\lambda$  da bi bile izmenljive
- III. komplementarnost

dostiglo granice (ne može da proizvede  $F_c$ )      slack promenljiva (jednakost i nejednakosti više ne važe)

Jednakost:  $\overset{\text{red}}{A}\overset{\text{red}}{\lambda} + F_c = \overset{\text{purple}}{b} \quad F_c \neq 0 \quad \lambda_{min} = \lambda \quad \vee \quad \lambda = \lambda_{max}$

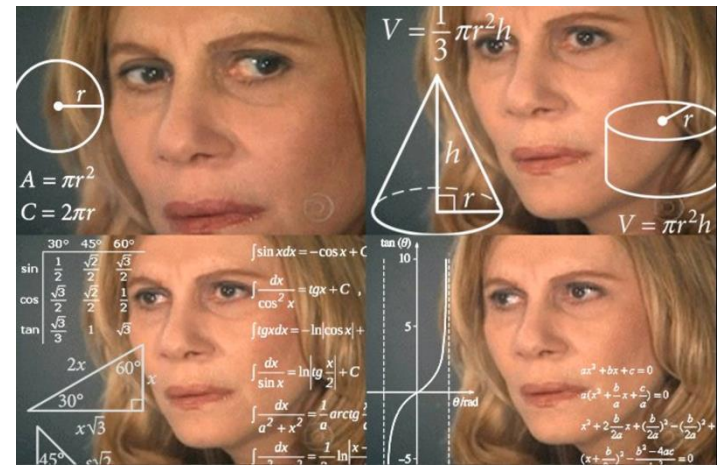
Nejednakost tipa  $\geq$ :  $\overset{\text{red}}{A}\overset{\text{red}}{\lambda} + F_c = \overset{\text{purple}}{b} \quad F_c \geq 0 \quad \lambda_{min} = \lambda$

Nejednakost tipa  $\leq$ :  $\overset{\text{red}}{A}\overset{\text{red}}{\lambda} + F_c = \overset{\text{purple}}{b} \quad F_c \leq 0 \quad \lambda = \lambda_{max}$

- ograničenja su narušena ako i samo ako je  $\lambda$  dostiglo svoje granice (postoji sila  $F_c$  koja bi trebalo da deluje)



# Ograničeno kretanje



## 3. Rešavanje ograničenja:

- (mešoviti) linearni komplementarni problem (MLCP)

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda + F_c = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

*mixed linear complementarity problem*

$$A \lambda + F_c = b$$

$$F_{c_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min_i} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max_i}, \forall i \in N$$

$$F_{c_i} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_{\min_i}, \forall i \in N$$

$$F_{c_i} \leq 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_{\max_i}, \forall i \in N$$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je  $\lambda$  u svojim granicama (nema sile  $F_c$  koja bi trebalo da deluje)
- ograničenja su narušena ako i samo ako je  $\lambda$  dostiglo svoje granice (postoji sila  $F_c$  koja bi trebalo da deluje)



# Ograničeno kretanje



## 3. Rešavanje ograničenja:

- (mešoviti) linearni komplementarni problem (MLCP)

$c(\dots) = 0$	$c(\dots) \geq 0$	$c(\dots) \leq 0$
$-\infty < \lambda < \infty$	$\lambda \geq 0$	$\lambda \leq 0$

Drugim rečima:

Traži se  $\lambda$  samo u opsezima u kojima dati tip ograničenja treba zadovoljiti!

$$\begin{array}{l} c_1(\dots) = 0 \\ c_2(\dots) \geq 0 \\ c_3(\dots) \leq 0 \\ \vdots \\ c_n(\dots) = 0 \end{array} \quad \lambda_{min} = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix} \quad \lambda_{max} = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 0 \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix}$$





# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- *Gauss-Seidel* metoda (rešava sistem linearnih algebarskih jednačina):

```
function [x, it] = gs(A, b, x0, itMax, errMax)
    rows = length(A);

    x = x0;
    for it = 1:itMax
        for row = 1:rows
            x(row) = 1/A(row,row)*(b(row) - A(row,1:row - 1)*x(1:row - 1) - A(row,row + 1:end)*x0(row + 1:end));
        end
        if abs(x - x0) < errMax
            return
        end
        x0 = x;
    end
end
```



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- *Projected Gauss-Seidel* metoda (rešava MLCP):

```
function [x, it] = projectedGS(A, b, x0, xMin, xMax, itMax, errMax)
    rows = length(A);

    x = x0;
    for it = 1:itMax
        for row = 1:rows
            x(row) = 1/A(row,row)*(b(row) - A(row,1:row - 1)*x(1:row - 1) - A(row,row + 1:end)*x0(row + 1:end));
            % projection
            if x(row) < xMin(row)
                x(row) = xMin(row);
            end
            if x(row) > xMax(row)
                x(row) = xMax(row);
            end
        end
        if abs(x - x0) < errMax
            return
        end
        x0 = x;
    end
end
```

postoje i drugi algoritmi, među kojima je najpoznatiji  
Lemke algoritam (*Carlton E. Lemke*)



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda = b$$

$$\lambda = A \backslash b$$

$$F_c = J^T \lambda$$

rešavanje MLCP sa poznatim

$\lambda_{min}$  i  $\lambda_{max}$

integracija:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_c}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- keširanje kontakata (*contact caching*):

+ velika je verovatnoća da će rešenje u narednom trenutku biti blizu rešenja u prošlom.

Keširanjem se dramatično smanjuje broj potrebnih iteracija.

+ ako je sistem ograničenja peodređen, ima beskonačno mnogo rešenja. Bez keširanja se u svakom trenutku nalazi novo rešenje. Ovo prouzrokuje *jiggle* efekat.

- ograničenja se formiraju u svakom vremenskom trenutku. Vektor  $\lambda$  u narednom vremenskom trenutku može imati više ili manje elemenata, a elementi se mogu javiti u drugačijem redosledu. Potrebno je za svako ograničenje pronaći odgovarajući element vektora  $\lambda$  iz prošlog vremenskog trenutka. Problem se svodi na pretragu.



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- keširanje kontakata (*contact caching*):

trenutak  $\Delta t$ :

:

```
lambda1 = projectedGS(A, b, 0, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

:

trenutak  $2\Delta t$ :

:

```
lambda2 = projectedGS(A, b, lambda1, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

:

trenutak  $3\Delta t$ :

:

```
lambda3 = projectedGS(A, b, lambda2, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

:



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- deo sile koji postoji isključivo da bi poništio narušenje ograničenja biva integrisan u brzinu
- brzina biva integrisana i položaj i već u tekućoj iteraciji se **narušenje poništava**
- “višak” brzine (koji nije potekao od spoljašnje sile) se prenosi u narednu iteraciju (**energija se akumulira**) i prouzrokuje nestabilnost

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$A\lambda = b$

“veštački” uveden faktor da bi poništio narušenje ograničenja jer:

1. ono biva otkriveno nakon što se desi
2. čak i da 1. nije slučaj, desilo bi se usled numeričkih grešaka

integracija:

$$V(t + \Delta t) = V + \Delta t \frac{F_{ext} + F_c}{m}$$
$$P(t + \Delta t) = P + \Delta t V(t + \Delta t)$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- I. razdvojiti problem
- II. integrisati deo sile koja vrši korekciju brzine kao i do sada
- III. integrisati deo sile koja vrši korekciju položaja direktno u položaj

ista vrednost!  
(prostor za optimizaciju)

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda_v = -\frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A \lambda_v = b_v$$

$$\lambda_v = A \setminus b_v$$

$$F_{cv} = J^T \lambda_v$$

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda_p = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S$$

$$A \lambda_p = b_p$$

$$\lambda_p = A \setminus b_p$$

$$F_{cp} = J^T \lambda_p$$

integracija:

$$V(t + \Delta t) = V + \Delta t \frac{F_{ext} + F_{cv}}{m}$$

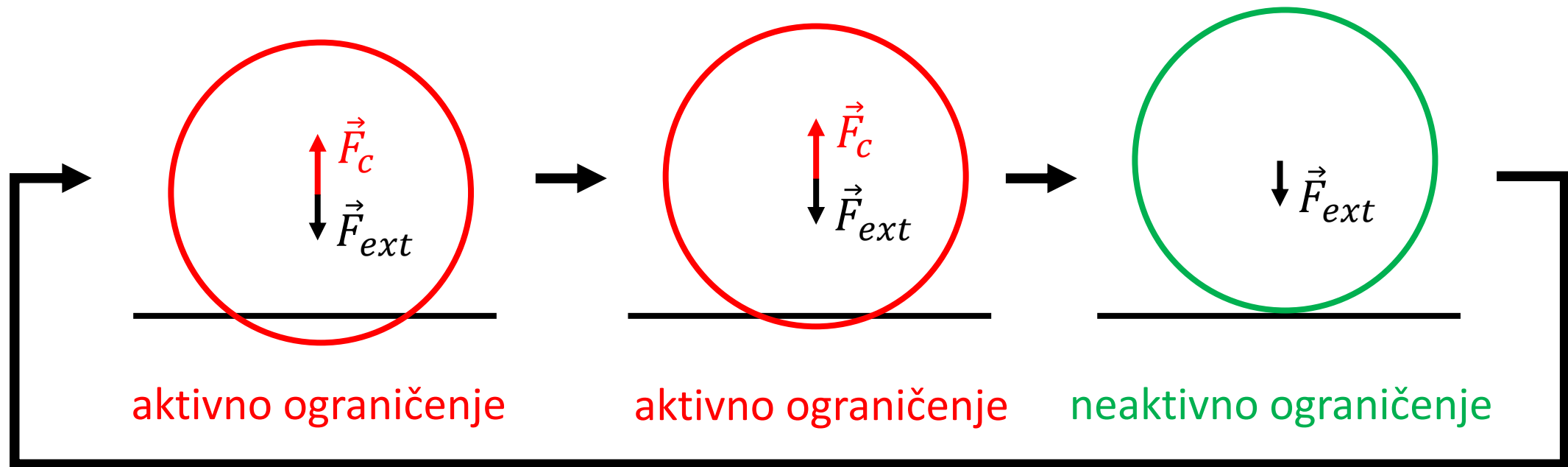
$$P(t + \Delta t) = P + \Delta t \left( V(t + \Delta t) + \Delta t \frac{F_{cp}}{m} \right)$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- kontaktna ograničenja:







# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- kontaktna ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda_p = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S$$

Sprečiti razrešavanje **malog dela upada** (ograničenje se održava aktivnim):

$$S = \sigma + \sigma_{slop}$$

↑  
realni upad  
(negativna vrednost)

$$0 < \sigma_{slop} \ll 1$$



# Ograničeno kretanje

## 3. Rešavanje ograničenja:

- kontaktna ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda_p = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S$$

sprečiti da suma bude pozitivna:

$$S = \min(\sigma + \sigma_{slop}, 0)$$



# Demo

<https://github.com/mbeocanin/MLCP-Particle-Physics-Sandbox>



# Pitanja

© 2021 Miloš Beočanin

<https://github.com/mbeocanin>