Fizika u video igrama

Miloš Beočanin, MSc
https://github.com/mbeocanin

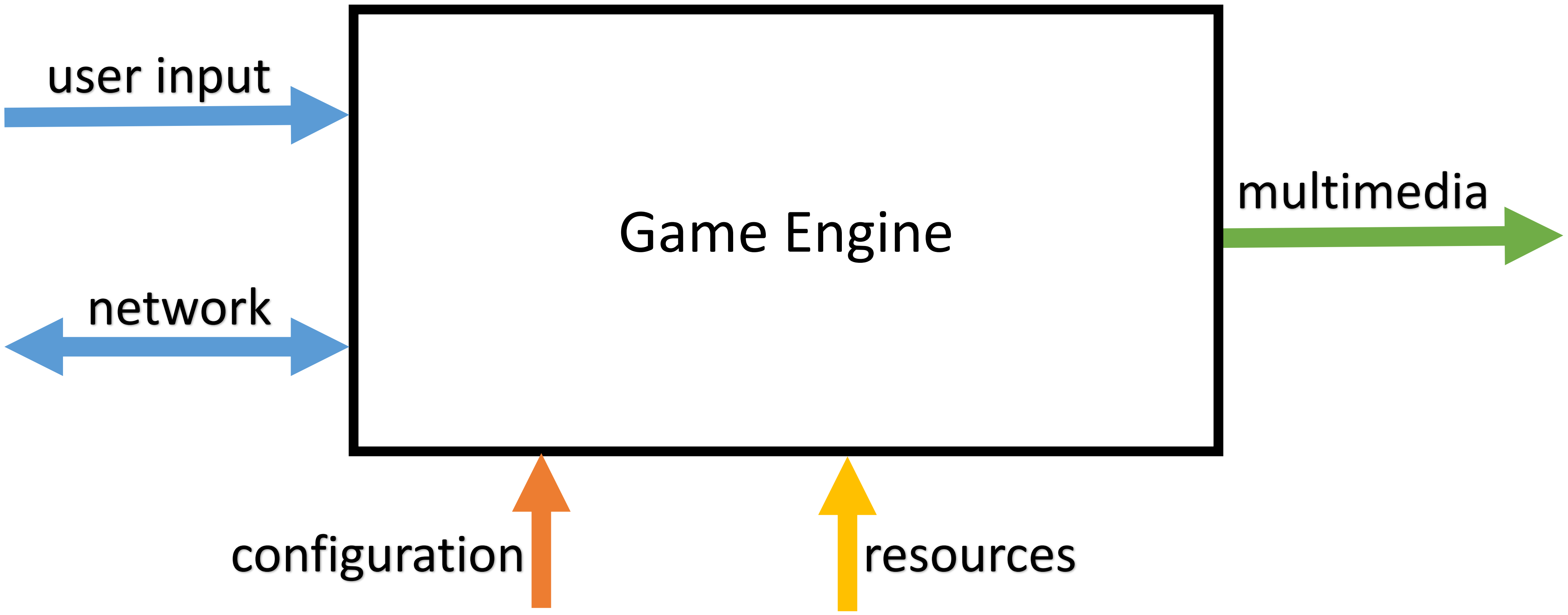
Sadržaj

1. *Game engine*
2. *Phyisics Engine*
   - model
   - kinematika
   - ograničeno kretanje
3. Demo
4. Pitanja

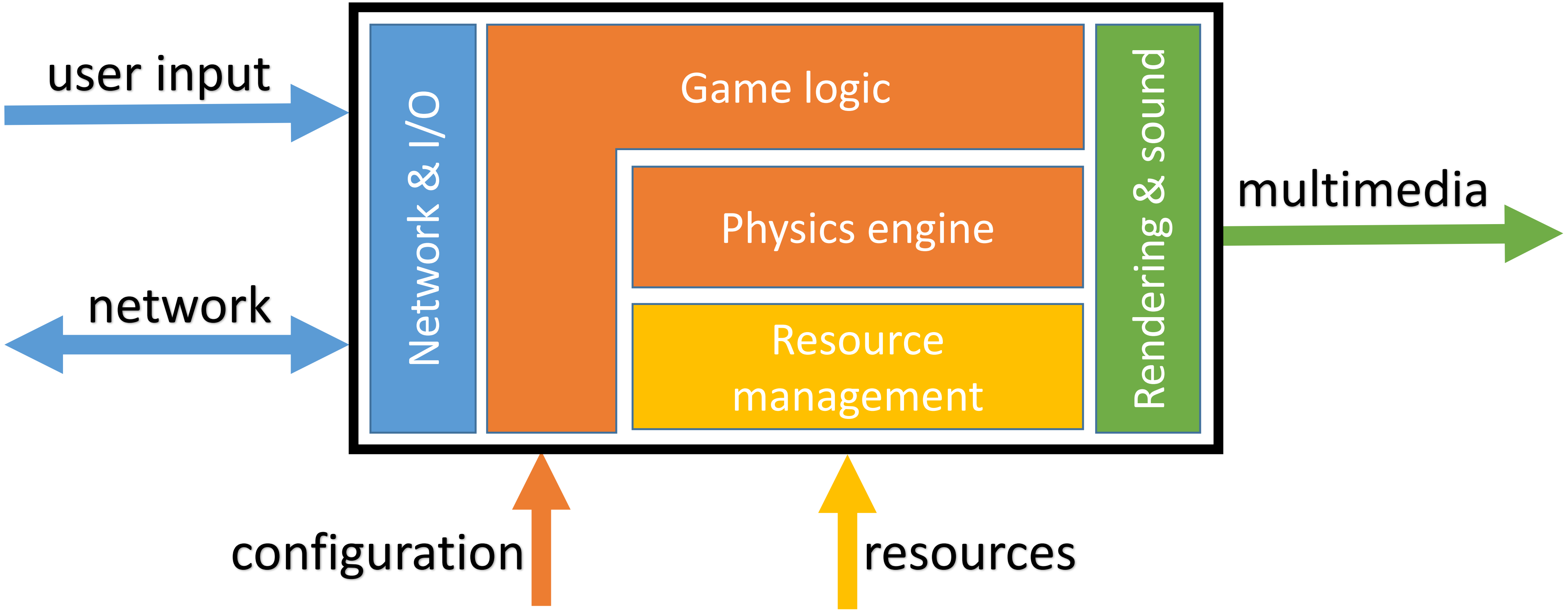
Literatura

- *Game Physics – Second Edition, David Eberly*
- Erin Catto (*https://box2d.org/publications/*)

Game Engine


user input
network
Game Engine
multimedia
configuration
resources

Game Engine

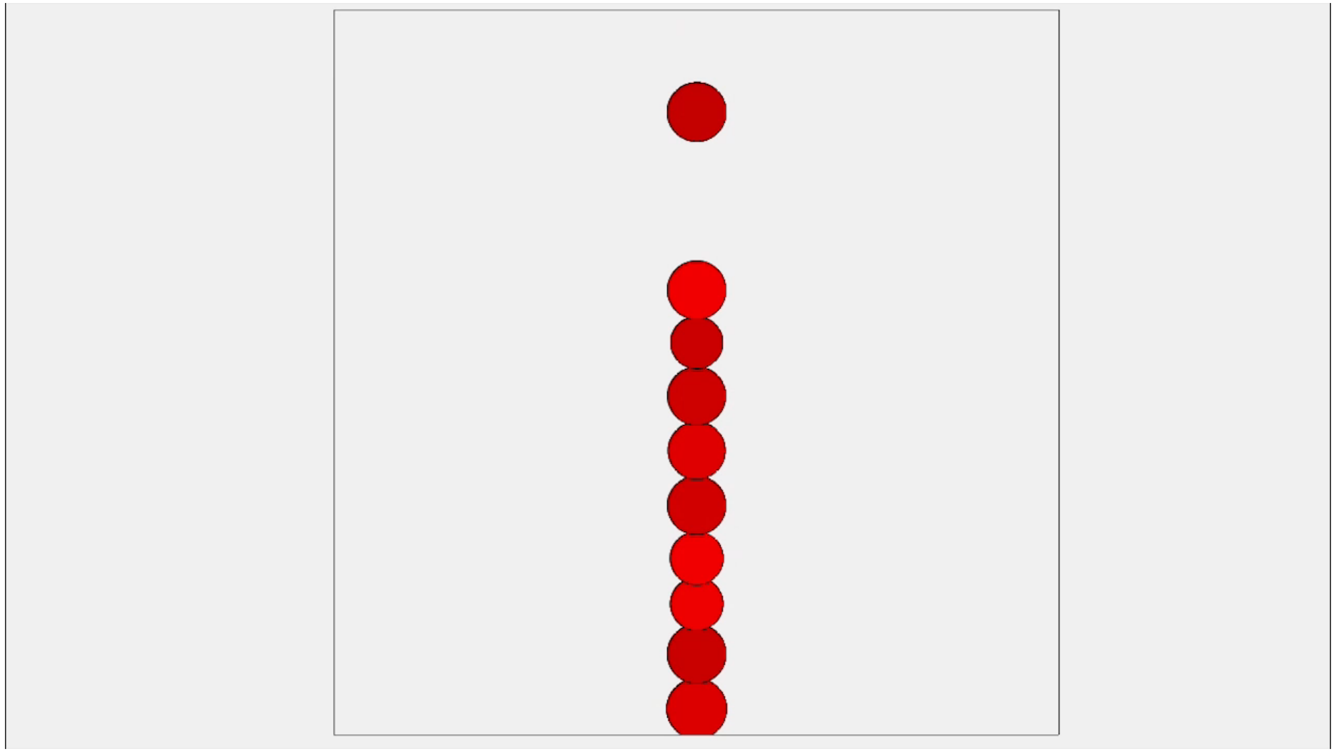

user input
network
Network & I/O
Game logic
Physics engine
Resource management
Rendering & sound
multimedia
configuration
resources

Physics Engine

Oblasti:

1. Fizika (mehanika)
2. Teorija sistema (automatika)
3. Numerika
4. Grafika
5. Optimizacija

Physics Engine



1. Model
   I. Opis prostora
   II. Opis tela
2. Kinematika (*kinematics*)
   1. Njutnovi zakoni kretanja
   2. Integracija
   3. Spoljašnje sile
3. Ograničeno kretanje (*constrained motion*):
   I. Otkrivanje sudara (*collision detection*)
   II. Modelovanje ograničenja (*constraint modeling*)
   III. Rešavanje ograničenja (*constraint solving*)

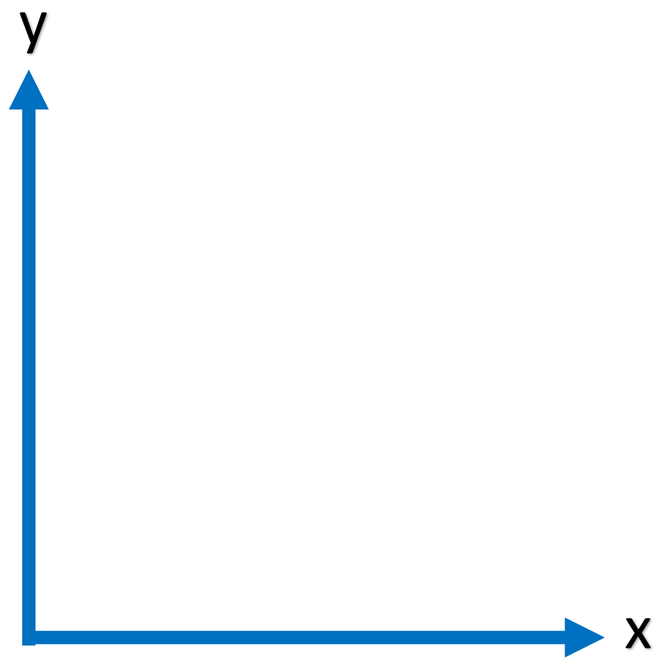
Model

Kako opisati stanje fizičkog sistema u datom trenutku?

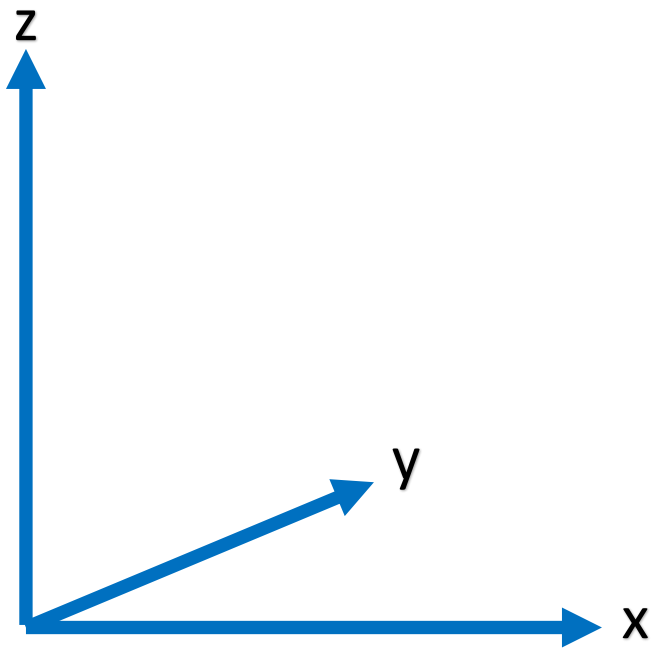
Model

1. Opis prostora

2D



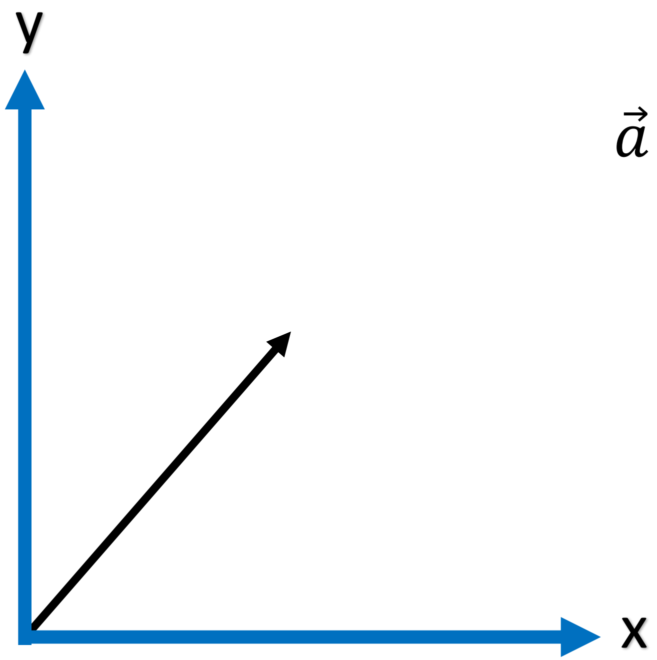
3D



Model

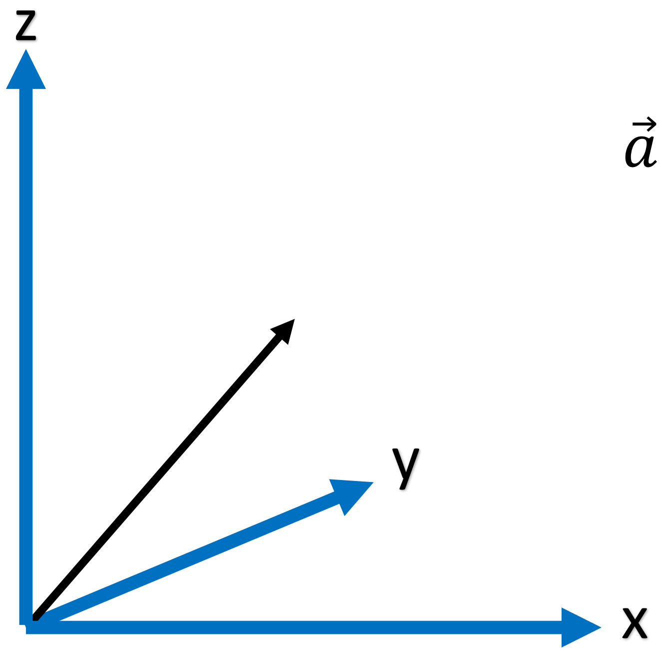
1. Opis prostora
    - vektori

2D



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3D



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Model

1. Opis prostora
   • vektori

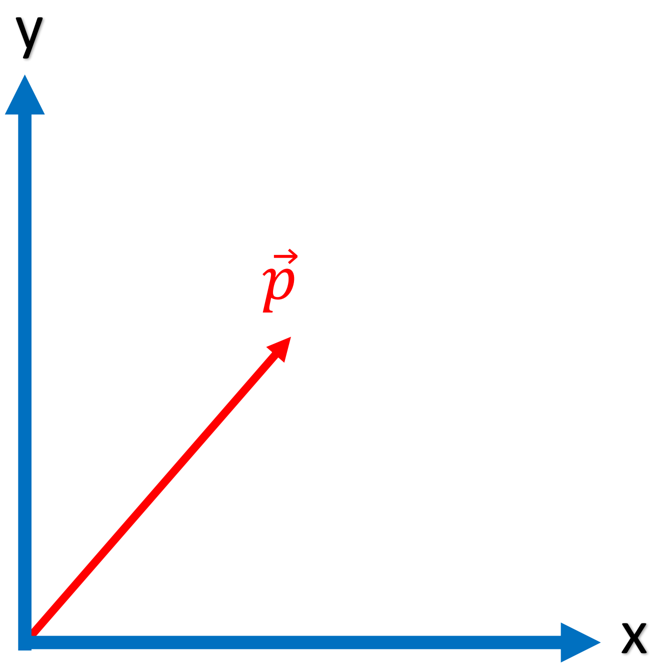
+ uopštavaju problem (ista rešenja važe za 2D i 3D)
+ uprošćavaju zapis (istovremeno se zapisuju operacije po svim dimenzijama)
+ brže izvršavanje (istovremeno se obavljaju operacije po svim dimenzijama)
+ pogodni za savremeni hardver
+ većina grafičih API-a obezbeđuje model vektora sa potrebnim operacijama

\- zahtevaju poznavanje vektorske algebra (treba se navići)

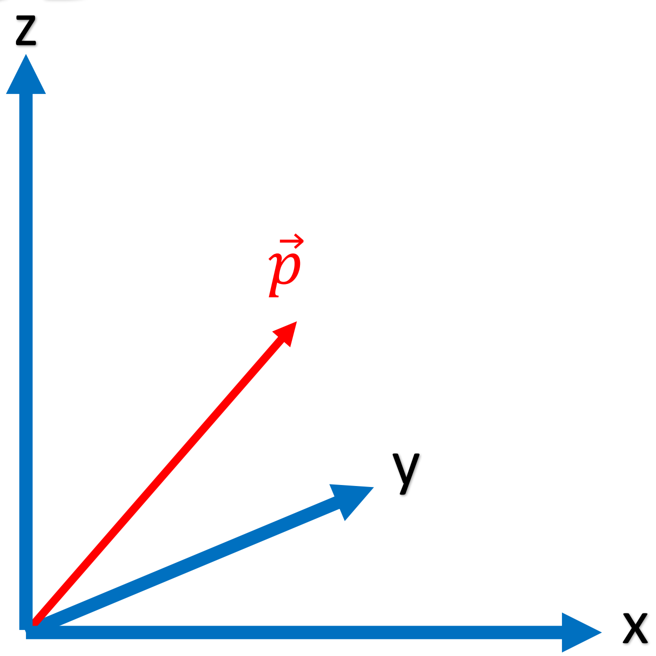
Model

2. Opis tela
   I. položaj

2D



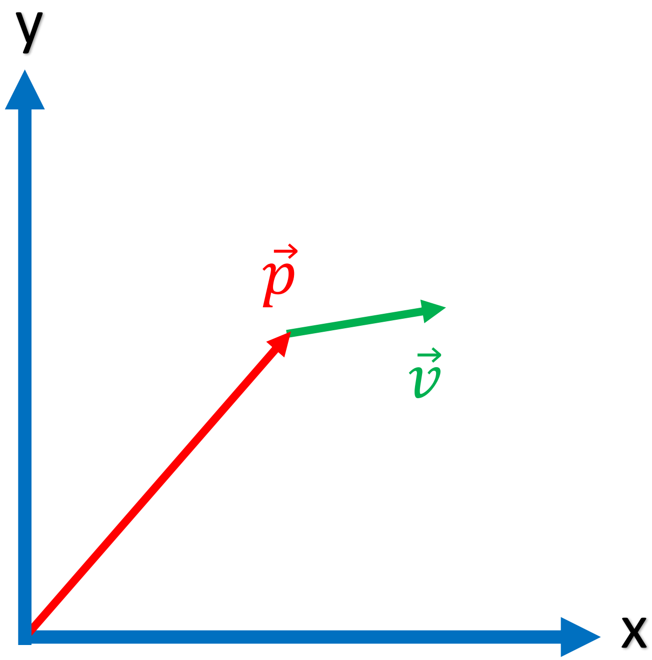
3D



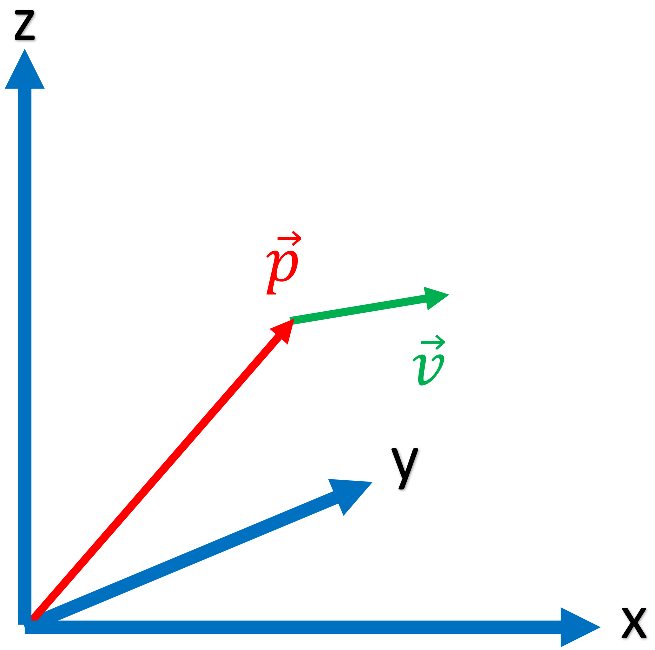
Model

2. Opis tela
   1. položaj
   2. trenutna brzina

2D



3D

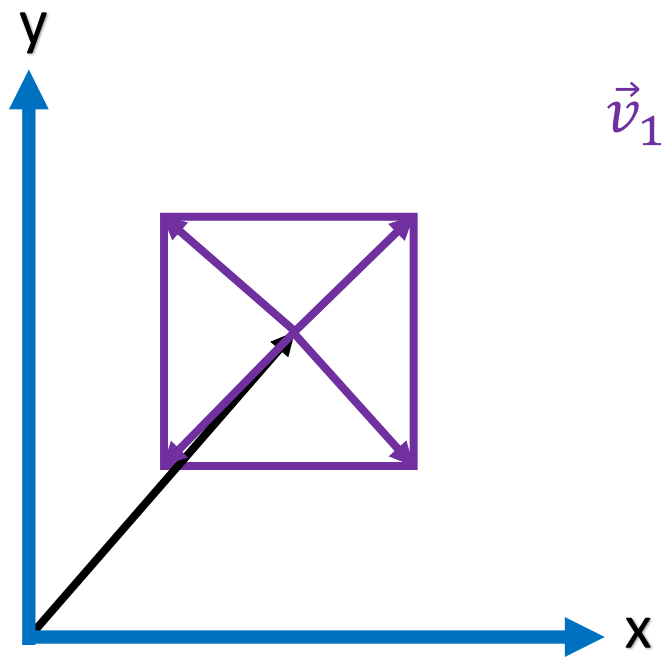


Model

2. Opis tela

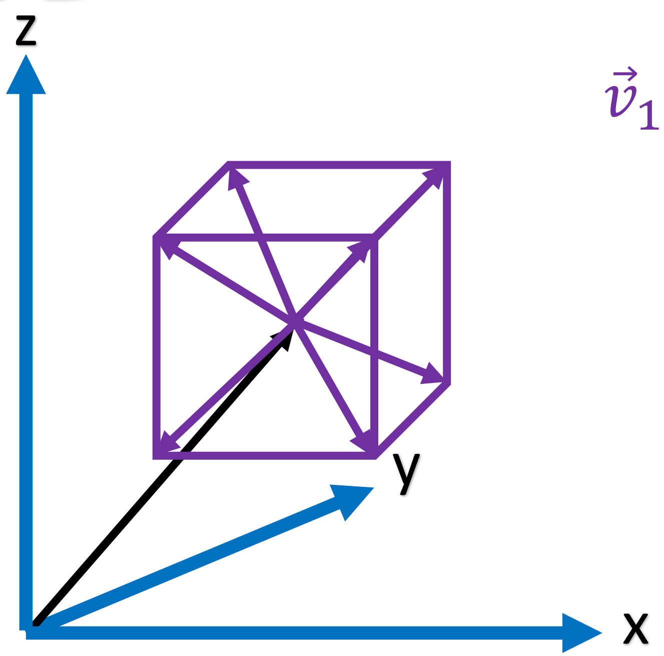
   IV. geometrija

2D



$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$

3D

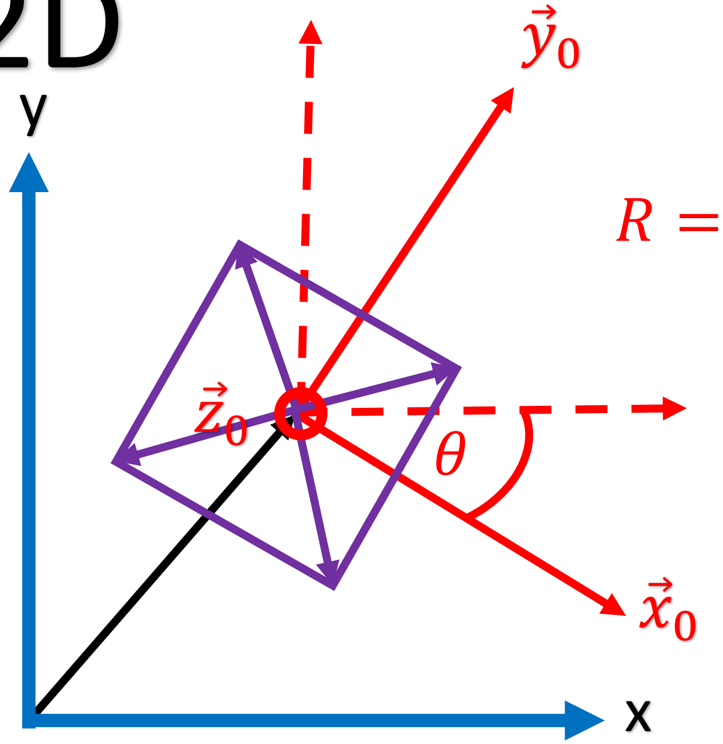


$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$

Model

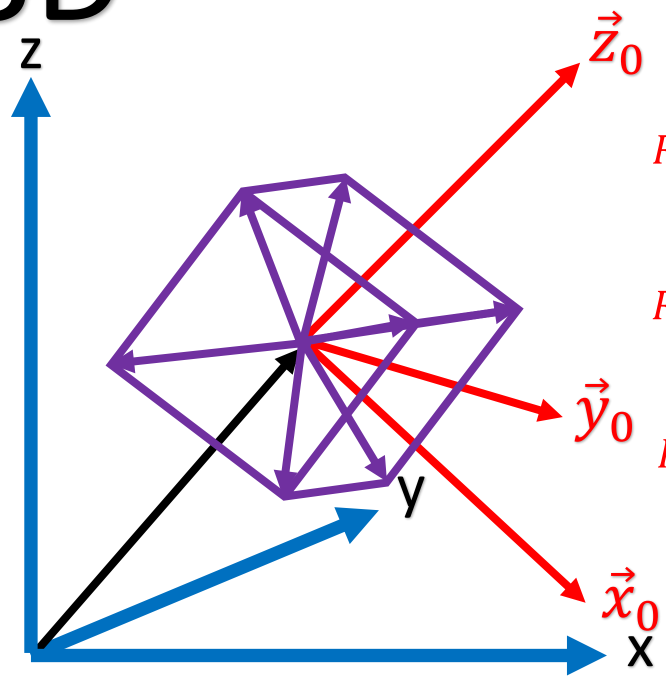
2. Opis tela
    V. orjentacija

2D



$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3D



$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

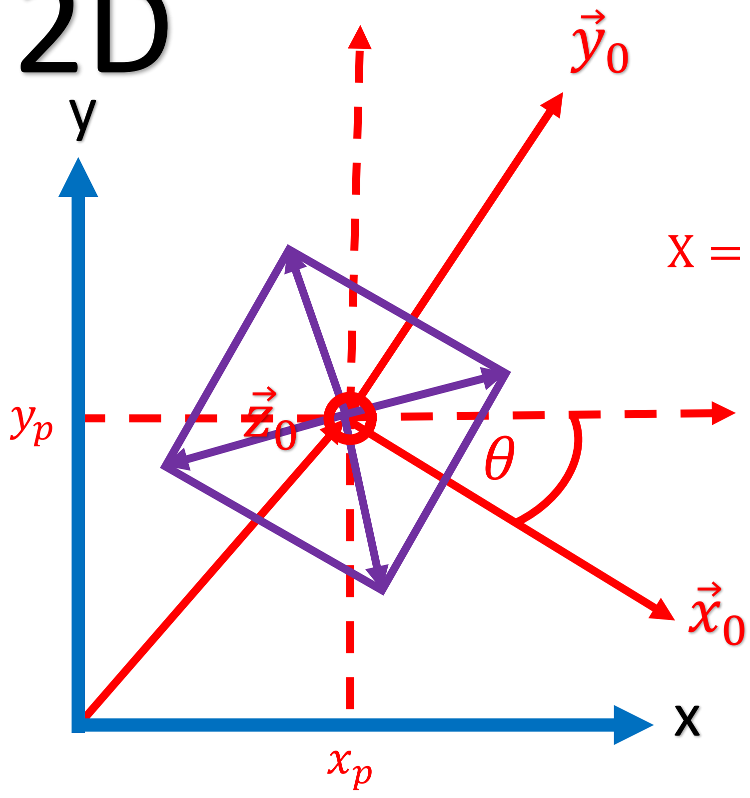
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_x R_y R_z$$

Model

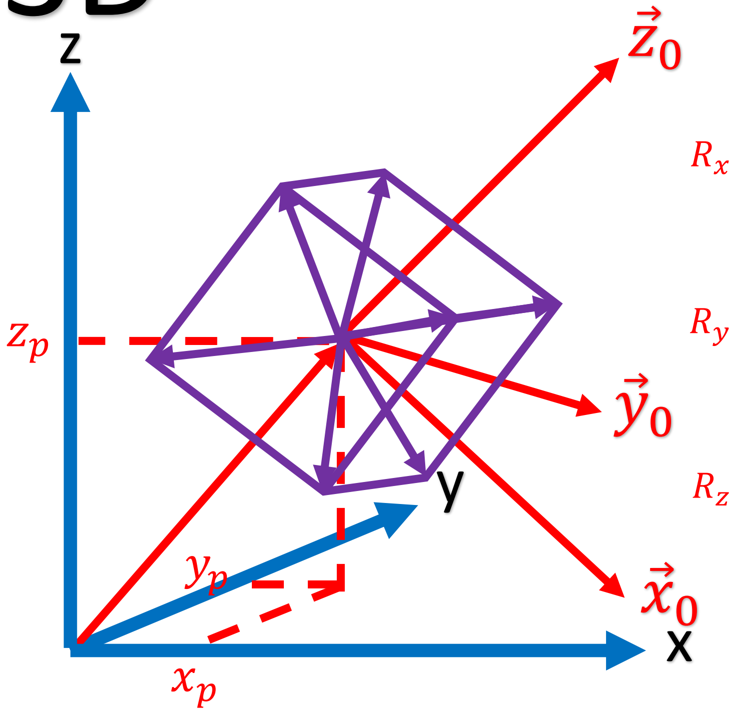
2. Opis tela
   - transformacija tela: pozicija + orjentacija (homogene koordinate)

2D



$$X = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_p \\ \sin\theta & \cos\theta & y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & 0 & y_p \\ 0 & 0 & 1 & z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x & 0 \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

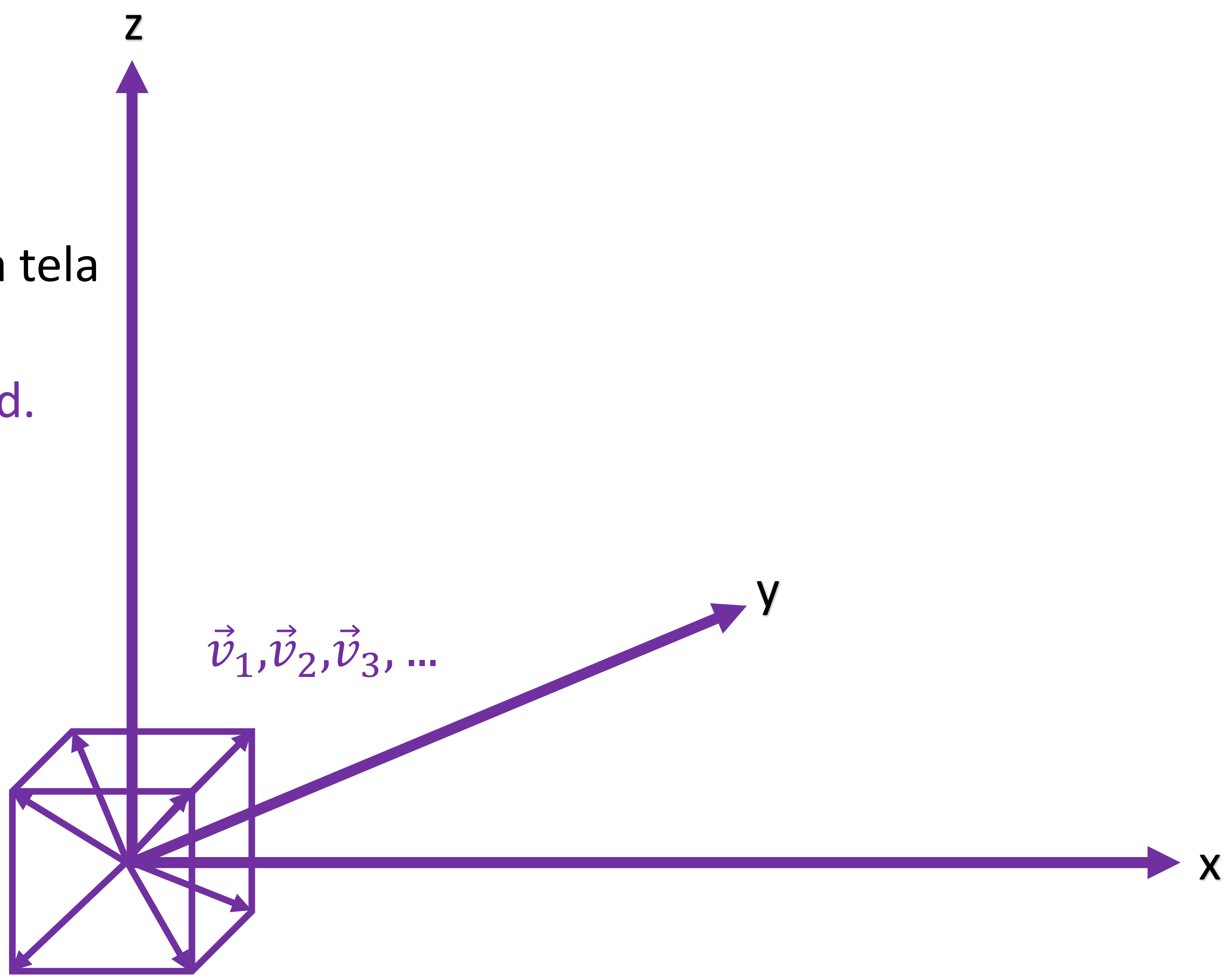
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = R_z R_y R_x T$$

Model

2. Opis tela
   - transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

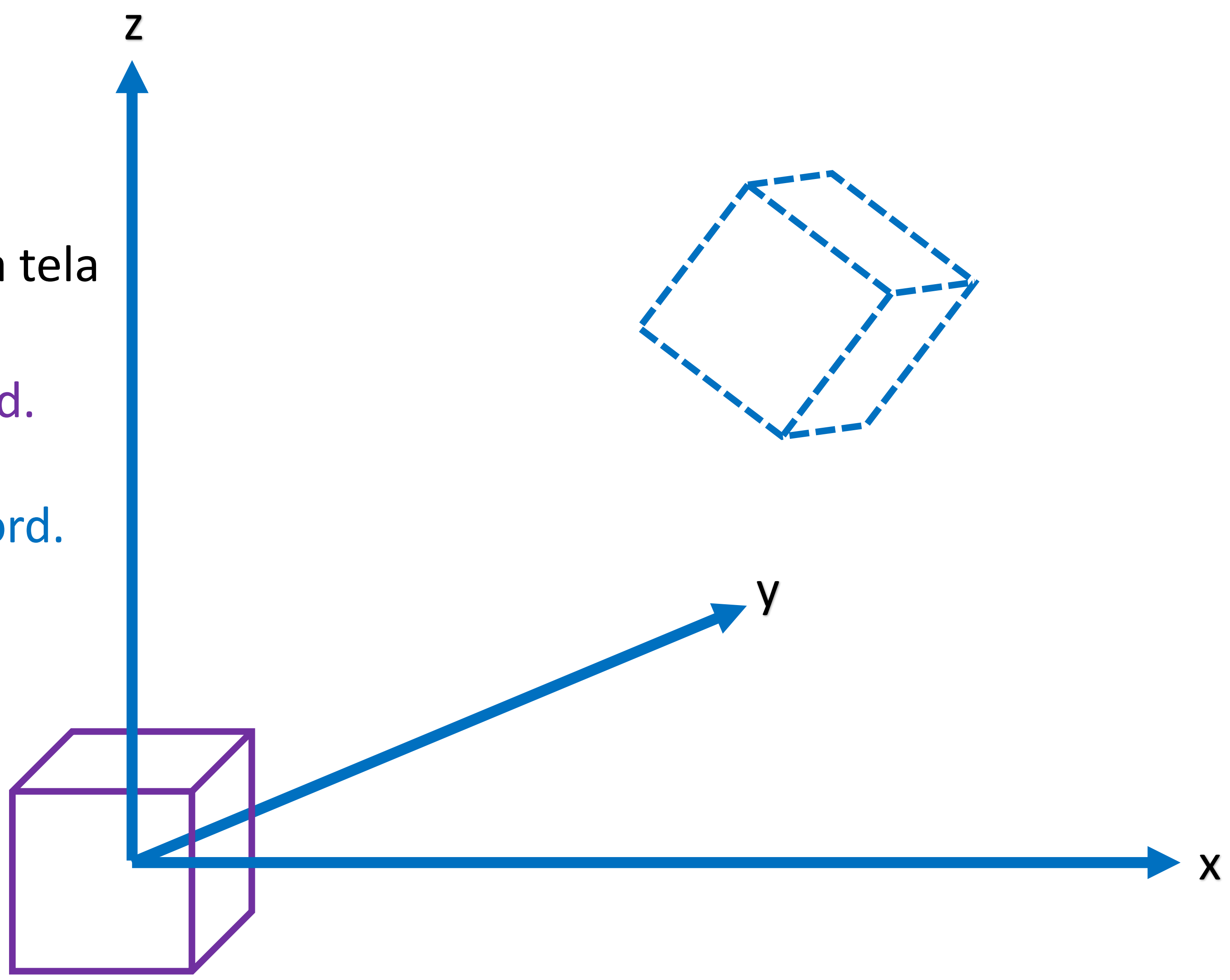


Model

2. Opis tela
   - transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem

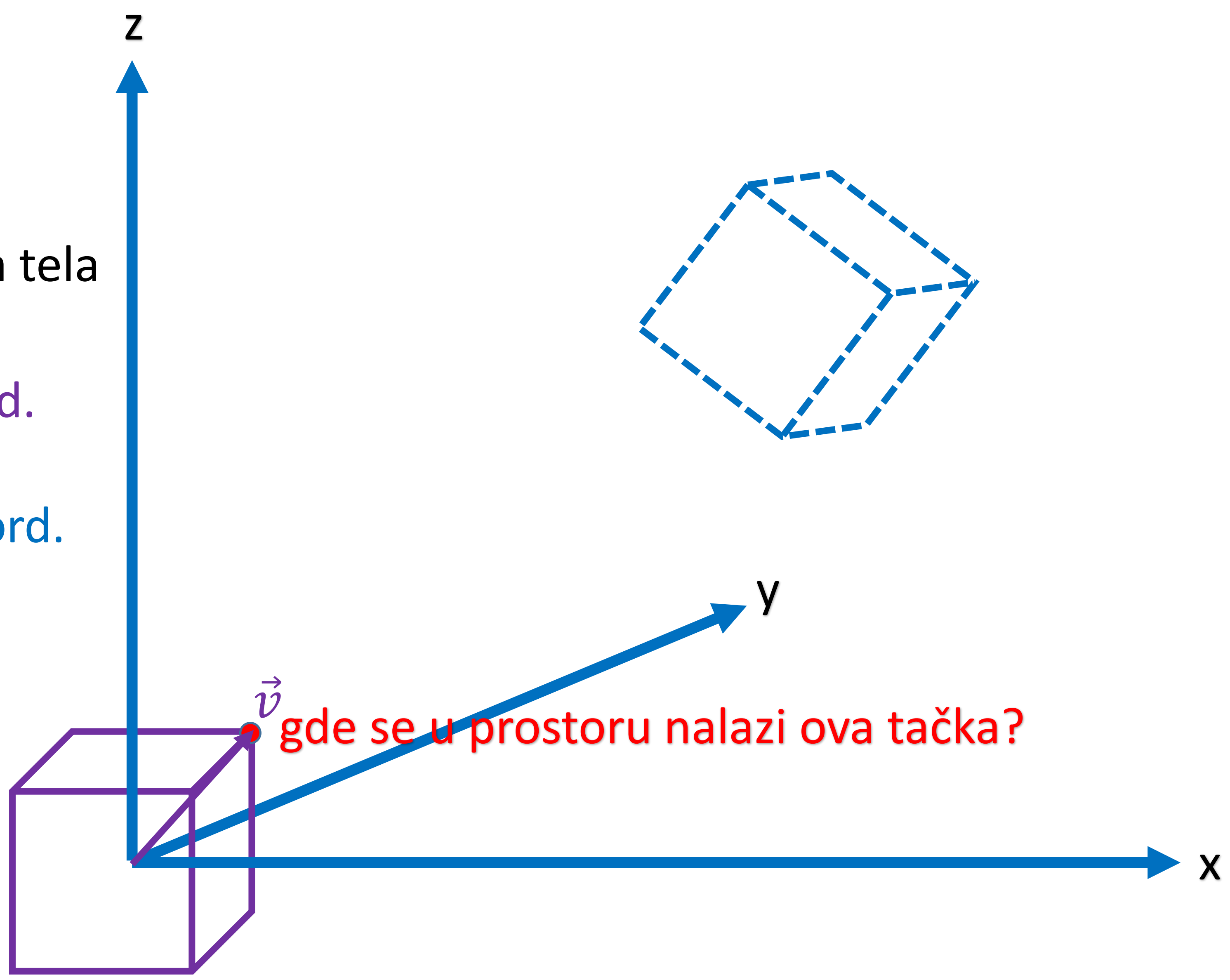


Model

2. Opis tela
    - transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem

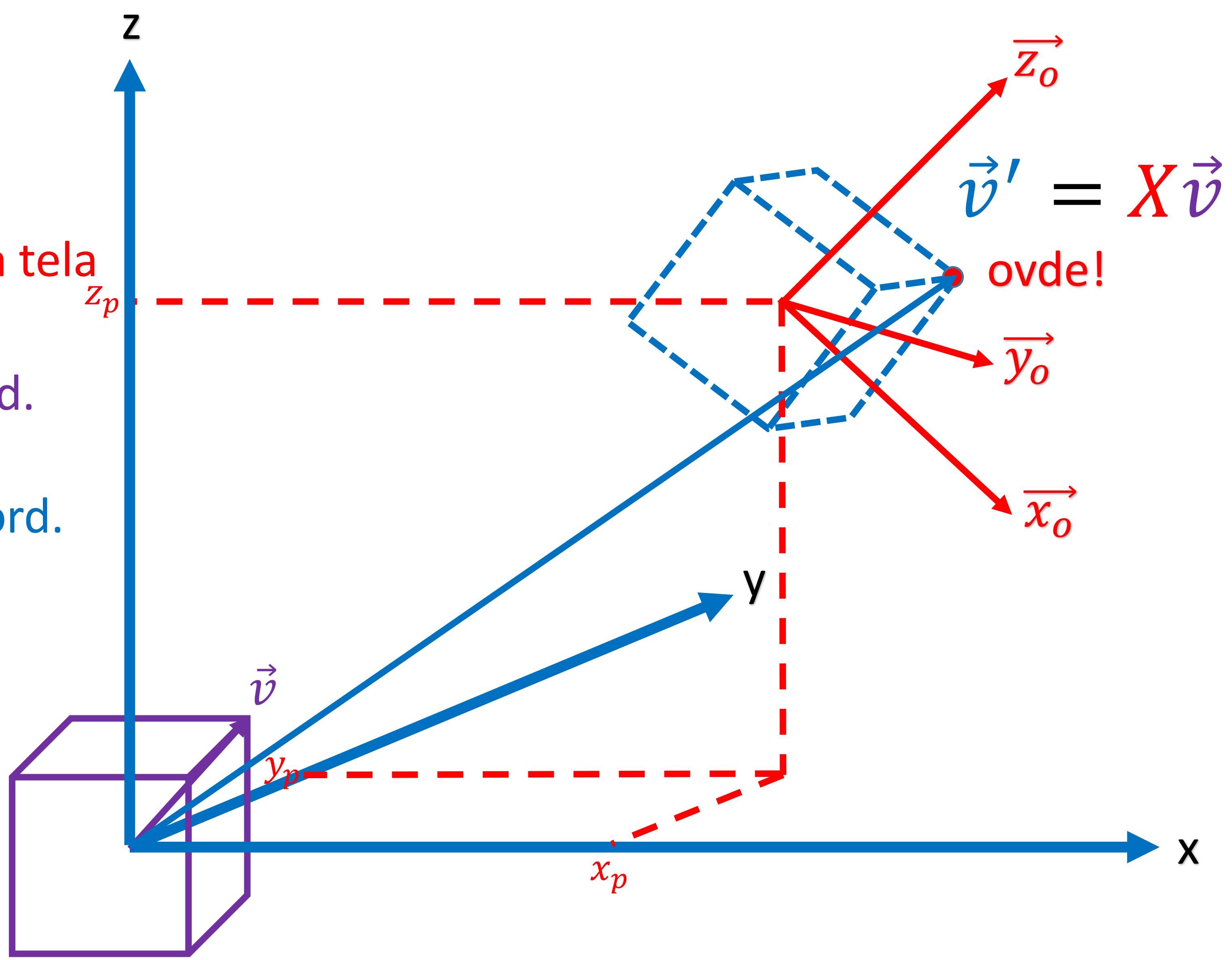


Model

2. Opis tela
   - transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem

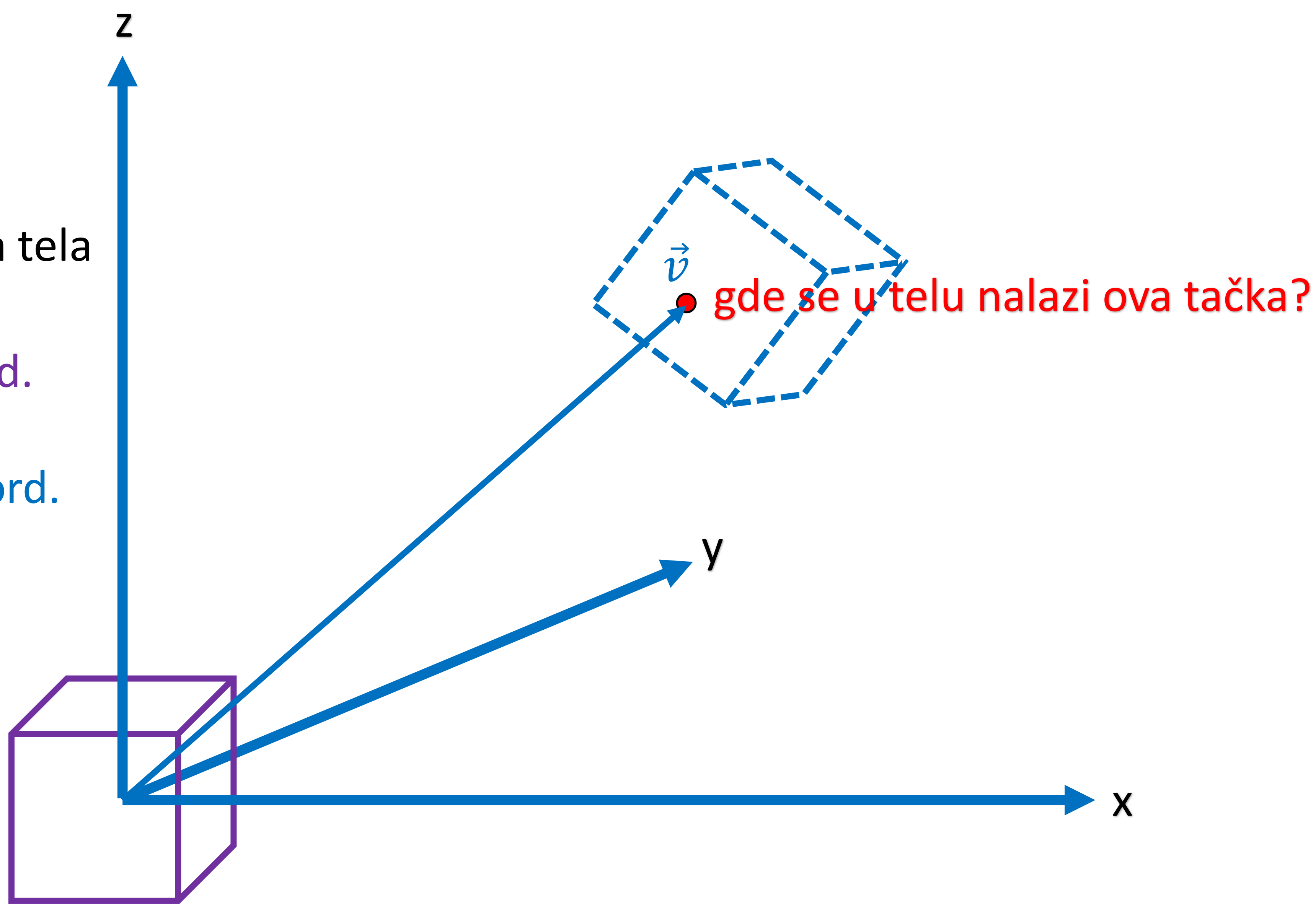


Model

2. Opis tela
   - transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem

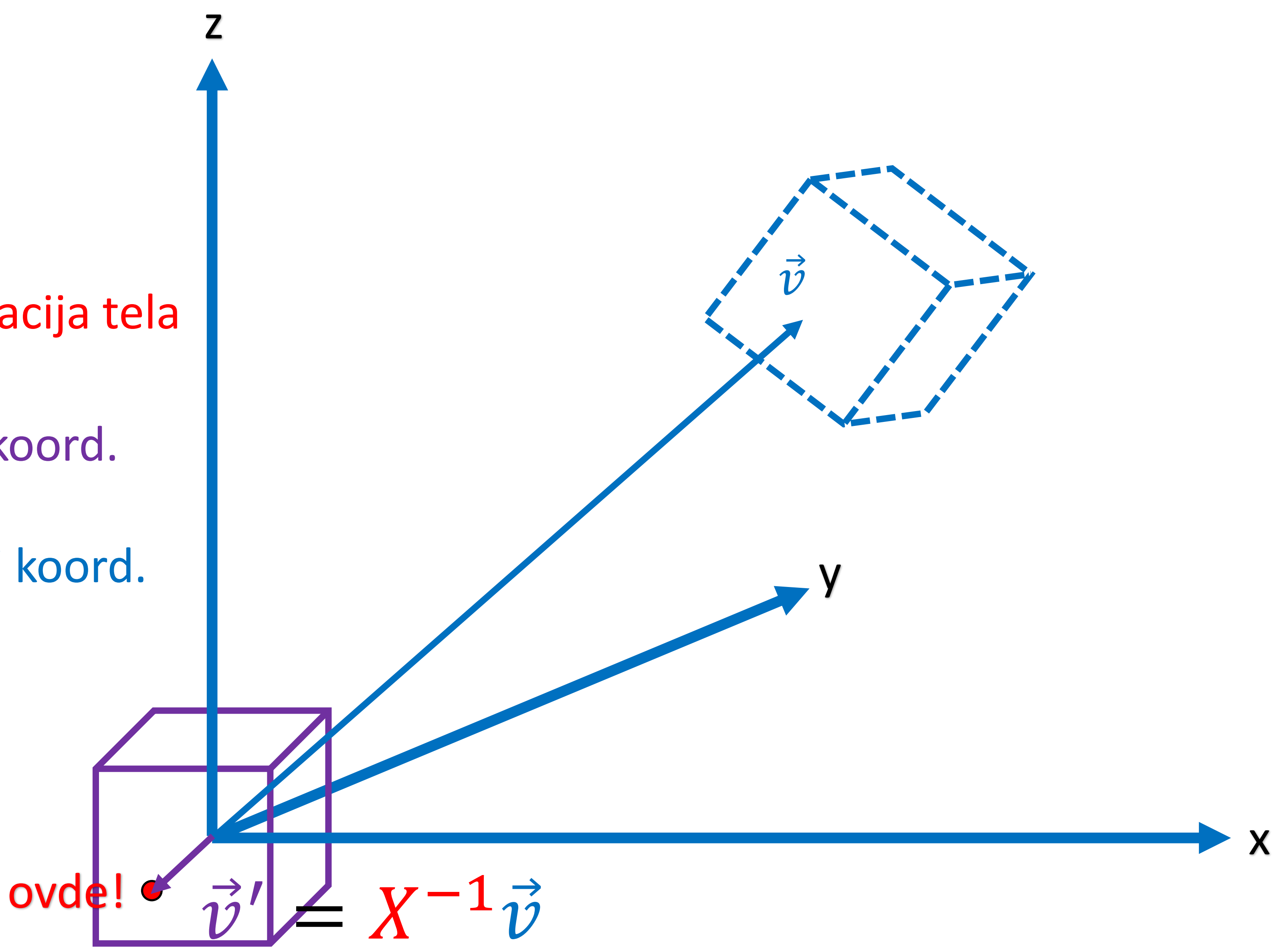


Model

2. Opis tela
   - (inverzna) transformacija tela

I. lokalni koord. sistem

II. globalni koord. sistem



Model

2. Opis tela
   - transformacija tela

+ geometrija tela se modeluje jednom u lokalnom koord. sistemu i više se ne menja
+ pri kretanju se menjaju samo položaj i orjentacija tela, a ne cela geometrija (mnogo manje zahtevno za procesor)
+ za prikaz se grafičkom API-u prosleđuje originalna geometrija tela i matrica transformacije, a <u>grafički hardver</u> obavlja sve potrebne proračune
+ većina grafičkih API-a obezbeđuje model matrice transformacije sa potrebnim operacijama

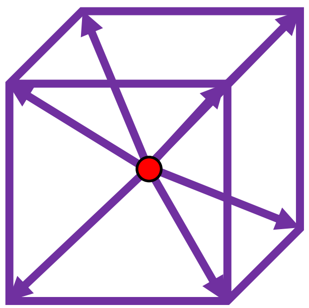
- za proračune koji obuhvataju geometriju više tela (npr. otkrivanje sudara), potrebno je transformisati tačke u isti prostor (globalni ili lokalni istog tela); ove proračune u opštem slučaju obavlja <u>procesor</u>, ali je potreba za tim najčešće ređa od prikaza

Model

2. Opis tela
   - geometrijski centar

$$\vec{C}_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i}{n}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$



Model

2. Opis tela
   - geometrijski centar
   - centar mase

$$\vec{C}_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i}{n}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$

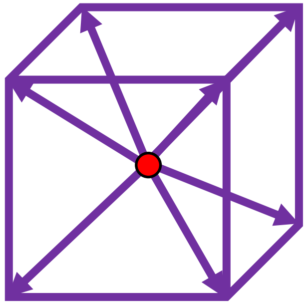
$$\vec{C}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

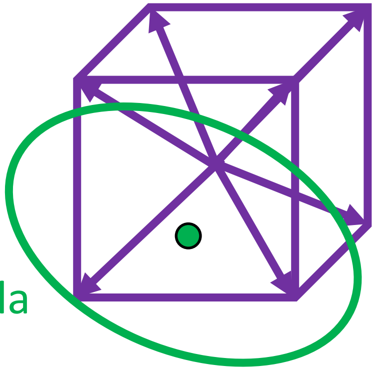
$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$

$m_1, m_2, m_3 \ldots$

za homogena tela:

$$\vec{C}_m = \vec{C}_g$$





teža strana tela

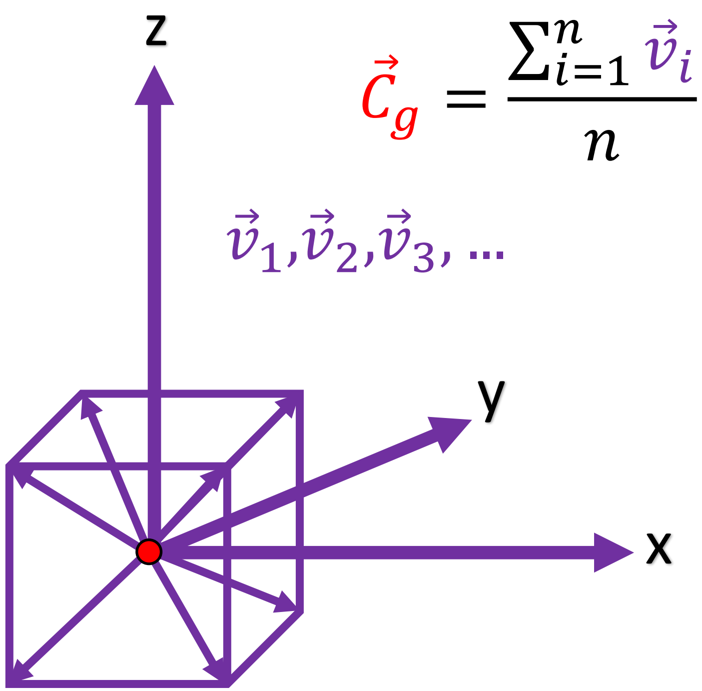
Model

$\vec{C}_g$ (ili $\vec{C}_m$ ako postoji) treba da bude u koordinatnom početku lokalnog koord. sistema!
(transformacije se vrše u odnosu na njega)

2. Opis tela
   - geometrijski centar
   - centar mase

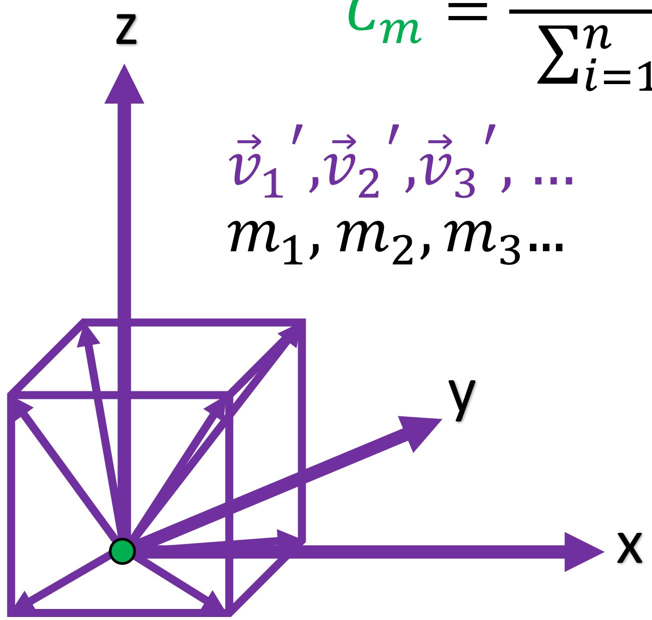
$$\vec{C}_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i}{n}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$



$$\vec{C}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}', \vec{v}_3{}', \ldots$
$m_1, m_2, m_3 \ldots$

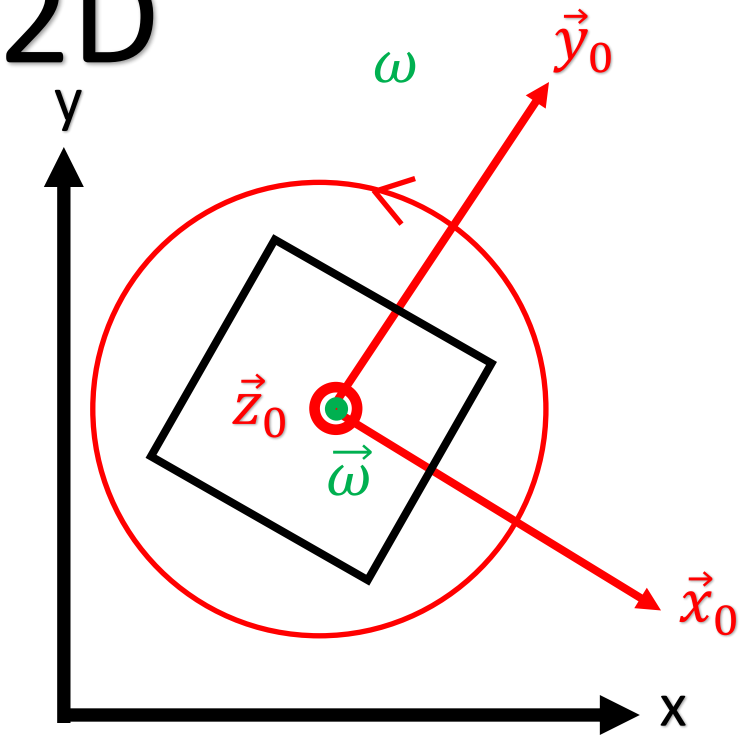


Model

2. Opis tela

   VI. trenutna ugaona brzina

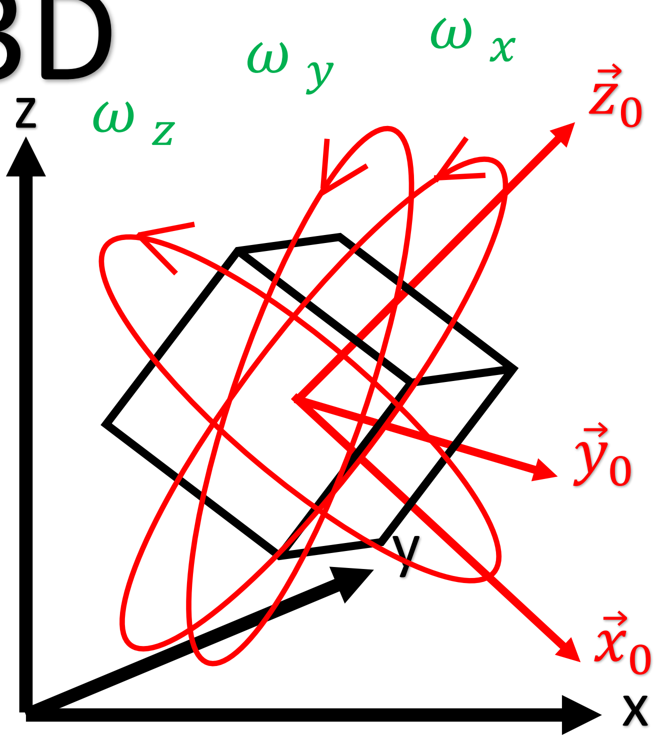
2D



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} = \omega$$

skalar!

3D



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

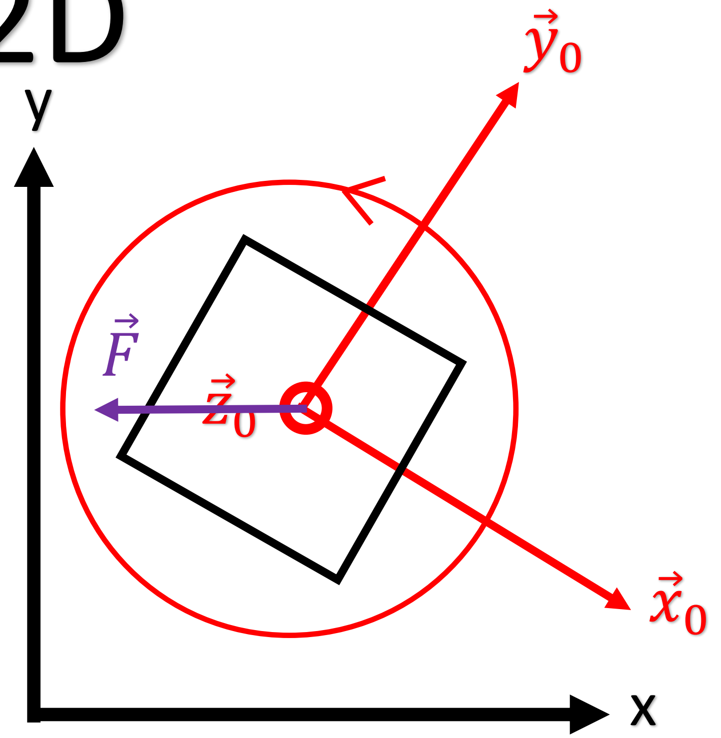
vektor!

Model

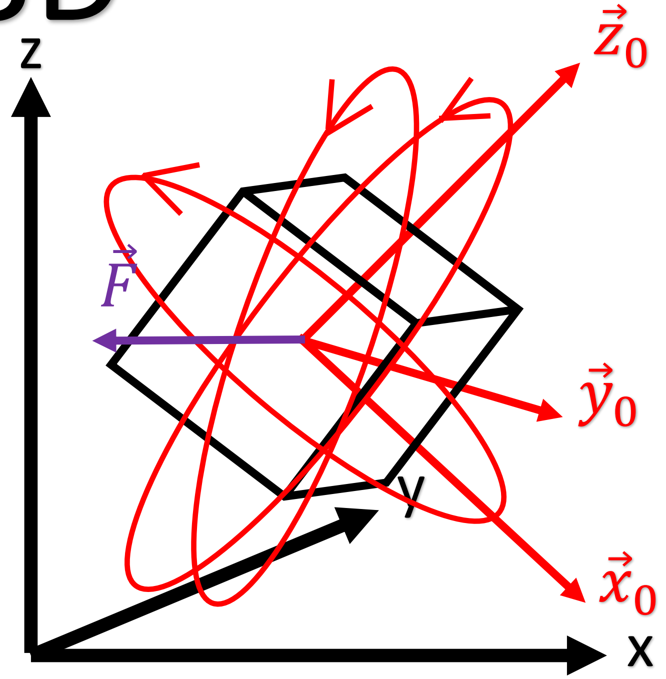
2. Opis tela

VIII. trenutna sila

2D



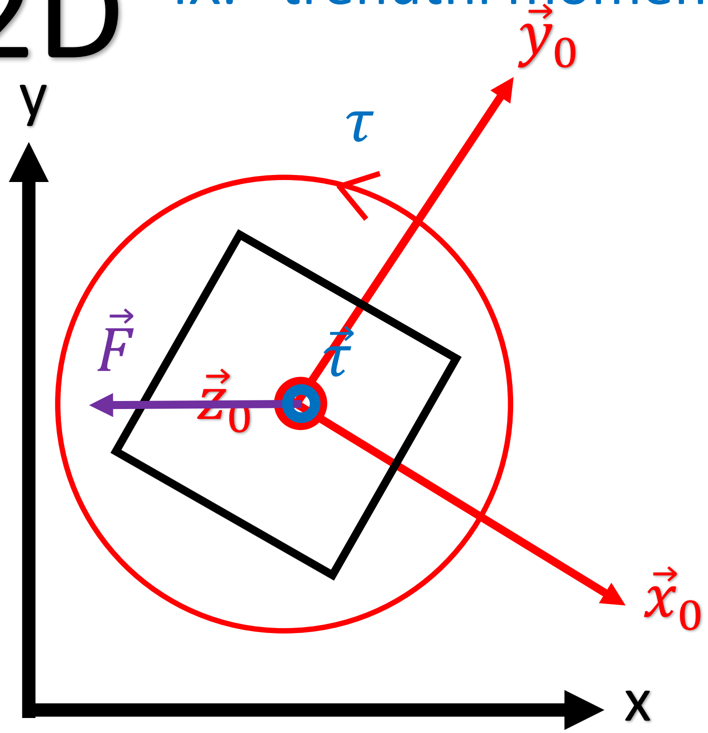
3D



Model

2. Opis tela
   - VIII. trenutna sila
   - IX. trenutni moment sile

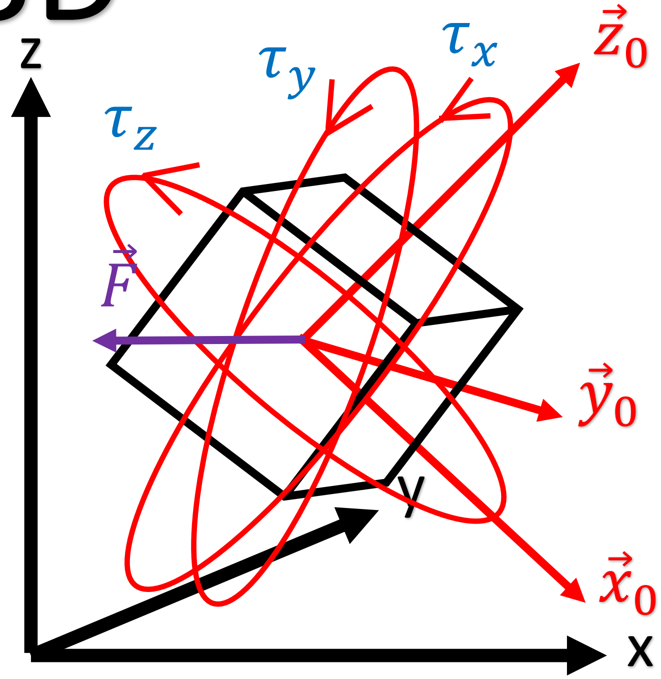
2D



$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} = \tau$$

skalar!

3D



$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}$$

vektor!

Model

2. Opis tela
   X. masa

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje
2D/3D	
masa	
m	

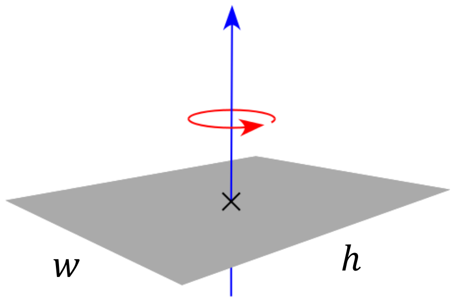
Model

2. Opis tela

X. masa

XI. moment inercije

U tabeli su momenti inercije za rotaciju oko $\vec{C}_g$

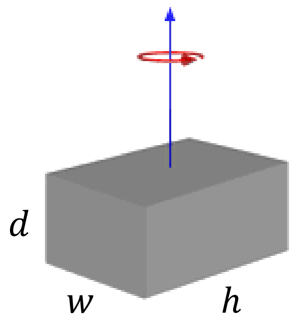


Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	**2D**	
masa	**moment inercije (skalar)**	
m	krug: $I = \frac{mr^2}{2}$ pravougaonik: $I = \frac{m}{12}(w^2 + h^2)$ $\vdots$	

Model

2. Opis tela
    X. masa
    XI. tenzor inercije

U tabeli su tenzori inercije za rotaciju oko $\vec{C}_g$



Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	**2D**	**3D**
masa	**moment inercije (skalar)**	**tenzor inercije (matrica)**
m	krug: $I = \frac{mr^2}{2}$	sfera: $I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$
	pravougaonik: $I = \frac{m}{12}(w^2 + h^2)$	kvadar: $I = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{12}(h^2 + d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{m}}{12}(w^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{m}}{12}(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$
	$\vdots$	$\vdots$

Model

2. Opis tela

Linearno kretanje				Rotaciono kretanje						
2D/3D				**2D**			**3D**			
geometrija:	$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots$	$[m]$		**geometrija:**	$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots$	$[m]$				
položaj:	$\vec{p}$	$[m]$		**ugao:**	θ	$[rad]$	**orjentacija:**	$\vec{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_x\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix}$	$[rad]$	
brzina:	$\vec{v}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$		**ugaona brzina:**	ω	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	**ugaona brzina:**	$\vec{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}$	$\left[\frac{rad}{s}\right]$	
sila:	$\vec{F}$	$[N]$		**moment sile:**	τ	$[Nm]$	**moment sile:**	$\vec{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_x\\\tau_y\\\tau_z\end{bmatrix}$	$[Nm]$	
masa:	m	$[kg]$		**moment inercije:**	I	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$	**tenzor inercije:**	$I=\begin{bmatrix}I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}$	$\left[\frac{kg}{m^2}\right]$	

Kinematika

Kako opisati promene stanja fizičkog sistema između dva uzastopna trenutka?

Kinematika

Za poznate početne uslove kretanja:

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	**2D**	**3D**
početni položaj: $\vec{p}_0$	početni ugao: θ_0	početna orjentacija: $\vec{\theta}_0$
početna brzina $\vec{v}_0$	početna ugaona brzina ω_0	početna ugaona brzina: $\vec{\omega}_0$

Potrebno je naći:

Linearno kretanje	Rotaciono kretanje	
2D/3D	**2D**	**3D**
položaj: $\vec{p}(t) = ?$	ugao: $\theta(t) = ?$	orjentacija: $\overrightarrow{\theta}(t) = ?$

Kinematika

- analitičko rešenje (ako je $\vec{F}$ konstantna):

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2$$

- ne može se opisati složeno kretanje
- ne može se opisati interaktivno kretanje (uslovljeno reakcijom korisnika)

Vratimo se na početak! Odakle ova jednačina?

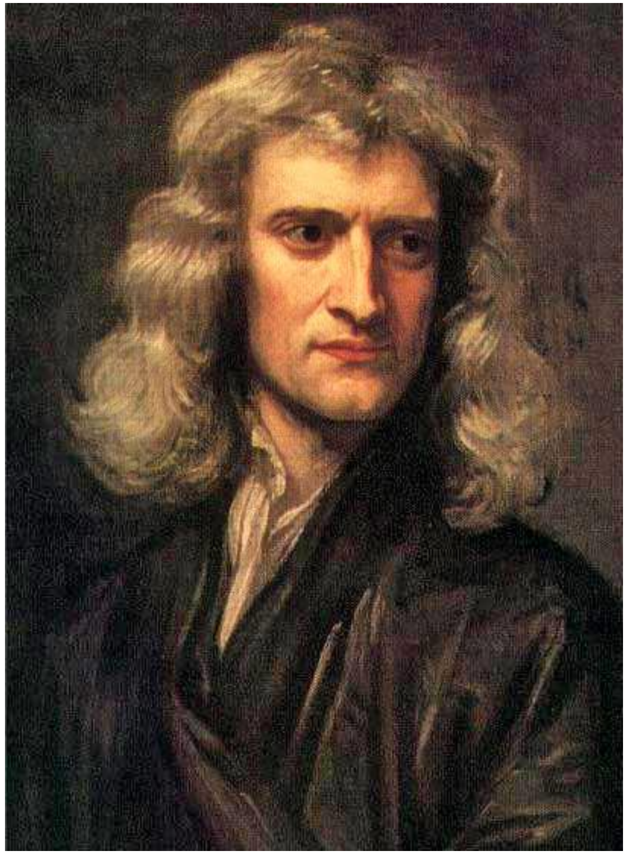
Kinematika

- 2. Njutnov zakon kretanja:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

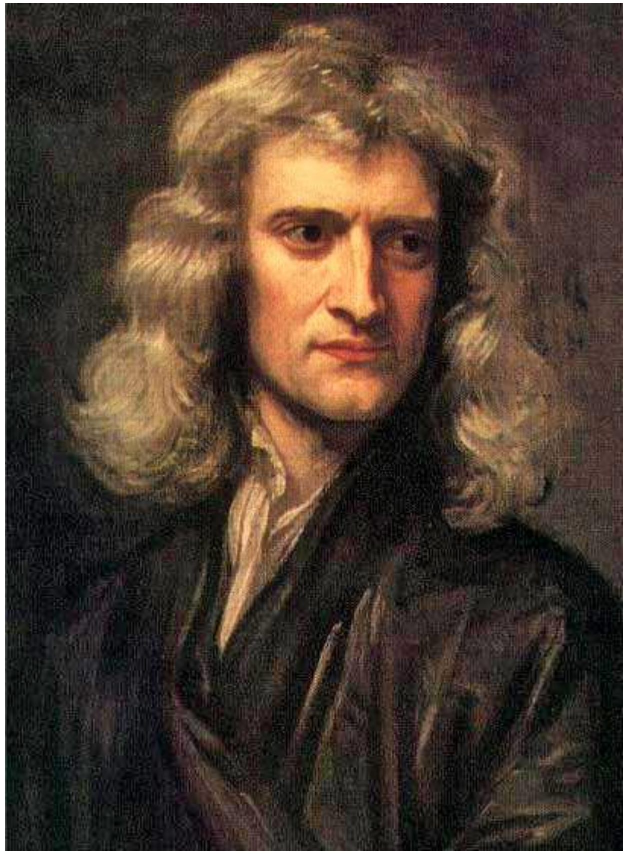


Diferencijalna jednačina 2. reda!

Kinematika

- 2. Njutnov zakon kretanja:

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$



Kako izgleda analitičko rešenje kada $\vec{F}(t)$ nije konstantna?

Zavisi od $\vec{F}(t)$, a ona zavisi od interakcije!

Kinematika

Funkcija se u svakom trenutku $(t + \Delta t)$ može razviti u Tejlorov red:

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \cdots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

Preskočiti analitičko rešenje i umesto toga rešiti dif. jedn. numerički!

Kinematika

- Ojlerov metod

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt} \cancel{+ \frac{\Delta t^2}{2}\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \cdots + \frac{\Delta t^n}{n!}\frac{d^n f(t)}{dt^n}}$$

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + \Delta t \frac{df(t)}{dt}$$

Kinematika

- Ojlerov metod

funkcija položaja:

$$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t\,\frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

Kinematika

- Ojlerov metod

jednom diferencirane obe strane jednačine:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}(t + \Delta t)}{dt} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} + \Delta t \frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2}$$

Kinematika

- Ojlerov metod

smena: $\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \vec{p}(t) + \Delta t\vec{v}(t)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t\frac{\vec{F}(t)}{m}$$

Kinematika

- Ojlerov metod

iterativni zapis:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_{i-1}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

Kinematika

- Ojlerov metod

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_{i-1}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

- koristi brzinu iz prošle iteracije za izračunavanje položaja

Kinematika

- simplektički (*Semi-implicit*) Ojlerov metod

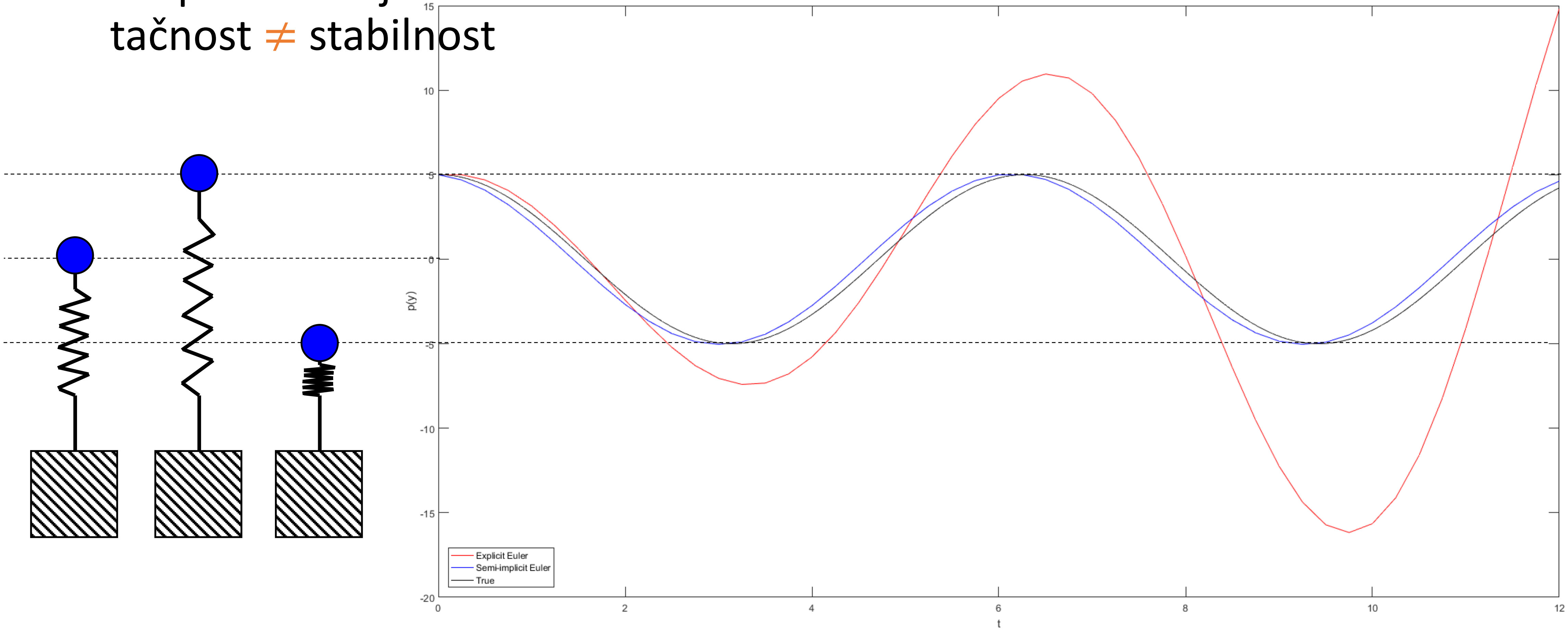
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

\+ prvo izračuna brzinu za tekuću iteraciju, a zatim je koristi za izračunavanje položaja
\+ unapređena stabilnost metode za isti broj operacija!

Kinematika

- simplektički Ojlerov metod:
  tačnost $\neq$ stabilnost



Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

0
$\vec{v}_0$
$\vec{p}_0$

0
$\vec{\omega}_0$
$\vec{\theta}_0$

Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$

Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{2}\Delta t$
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$	$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta t \frac{\vec{F}_1}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$	$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta t \vec{v}_2$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{2}\Delta t$
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$	$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_1}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$	$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \Delta t \vec{\omega}_2$

Kinematika

- simplektički Ojlerov metod (integracija)

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{2}\Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{i}\Delta t$
$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta t \frac{\vec{F}_0}{m}$	$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta t \frac{\vec{F}_1}{m}$	$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$
$\vec{p}_0$	$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta t \vec{v}_1$	$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta t \vec{v}_2$	$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$

$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} + \Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{2}\Delta t$	$\mathbf{0} + \mathbf{i}\Delta t$
$\vec{\omega}_0$	$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_0}{I}$	$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \Delta t \frac{\vec{\tau}_1}{I}$	$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{\tau}_{i-1}}{I}$
$\vec{\theta}_0$	$\vec{\theta}_1 = \vec{\theta}_0 + \Delta t \vec{\omega}_1$	$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 + \Delta t \vec{\omega}_2$	$\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_{i-1} + \Delta t \vec{\omega}_i$

Kinematika

- postupak (*pipeline*):

Primena sile

Integracija

Prikaz

Pauza

Kinematika

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{F}_{i-1}}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t \vec{v}_i$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{\vec{\tau}_{i-1}}{I}$$

$$\vec{\theta}_i = \vec{\theta}_{i-1} + \Delta t \vec{\omega}_i$$

Šta je poznato a šta nepoznato?

Kinematika

- 1. Njutnov zakon:

ako su $\vec{F}_{i-1} = 0$ i $\vec{\tau}_{i-1} = 0$:

a) ako su $\vec{v}_{i-1} \neq 0$ i $\vec{\omega}_{i-1} \neq 0$:

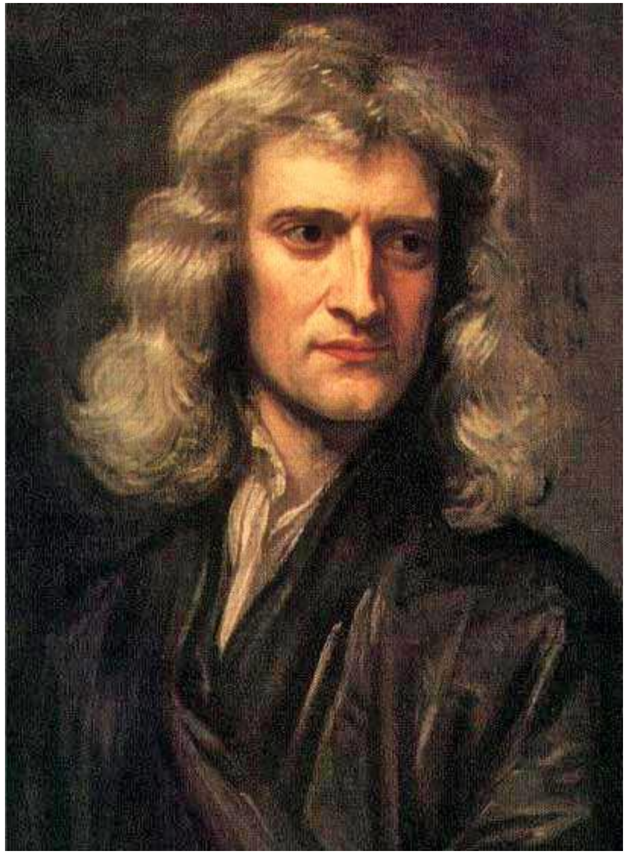
$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t \frac{0}{m} = \vec{v}_{i-1} = const.$$

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + \Delta t \frac{0}{I} = \vec{\omega}_{i-1} = const.$$

b) ako su $\vec{v}_{i-1} = 0$ i $\vec{\omega}_{i-1} = 0$:

$$\vec{v}_i = 0 + \Delta t \frac{0}{m} = 0 = const.$$

$$\vec{\omega}_i = 0 + \Delta t \frac{0}{I} = 0 = const.$$



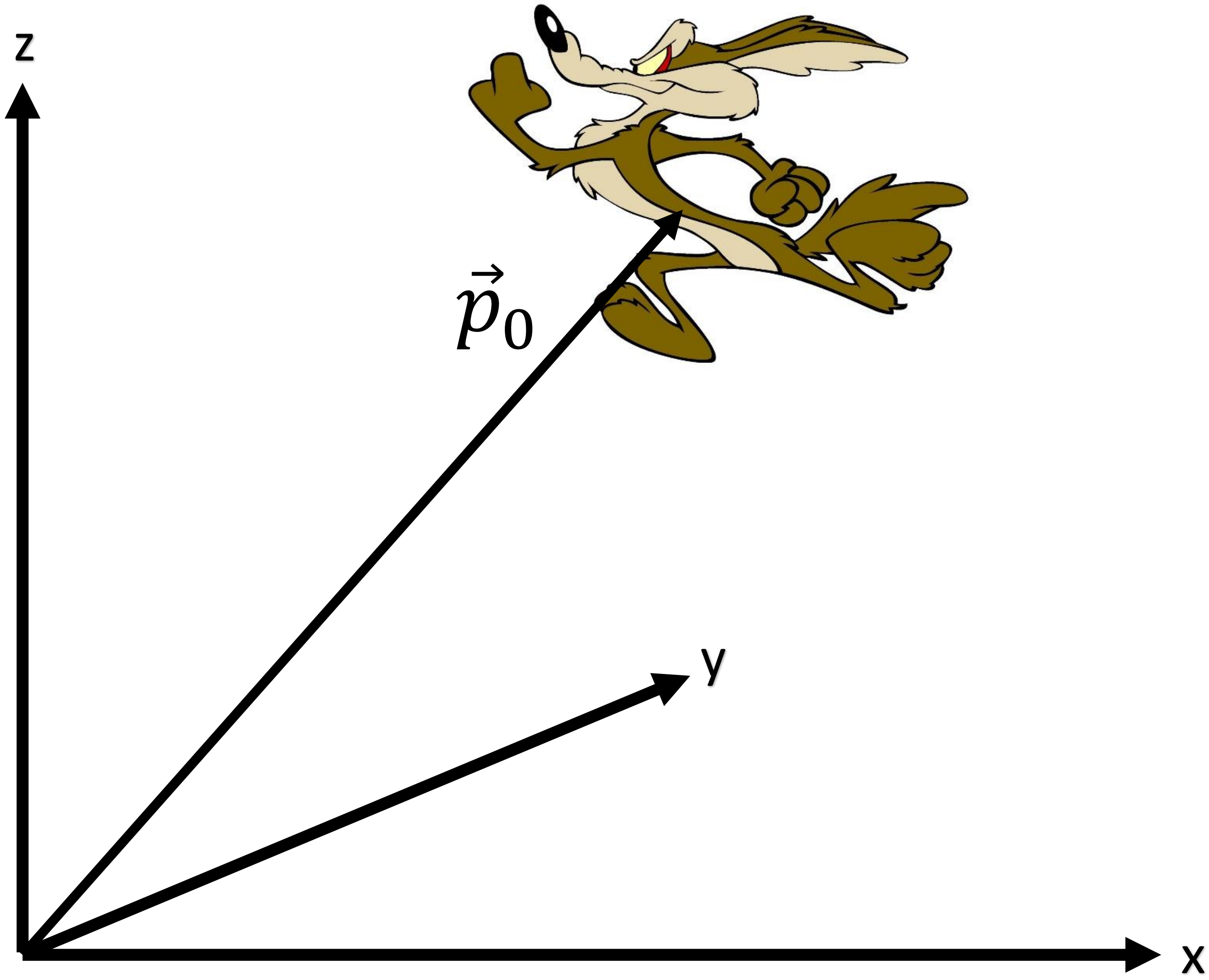
Kinematika

$$\vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_0 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = 0$$



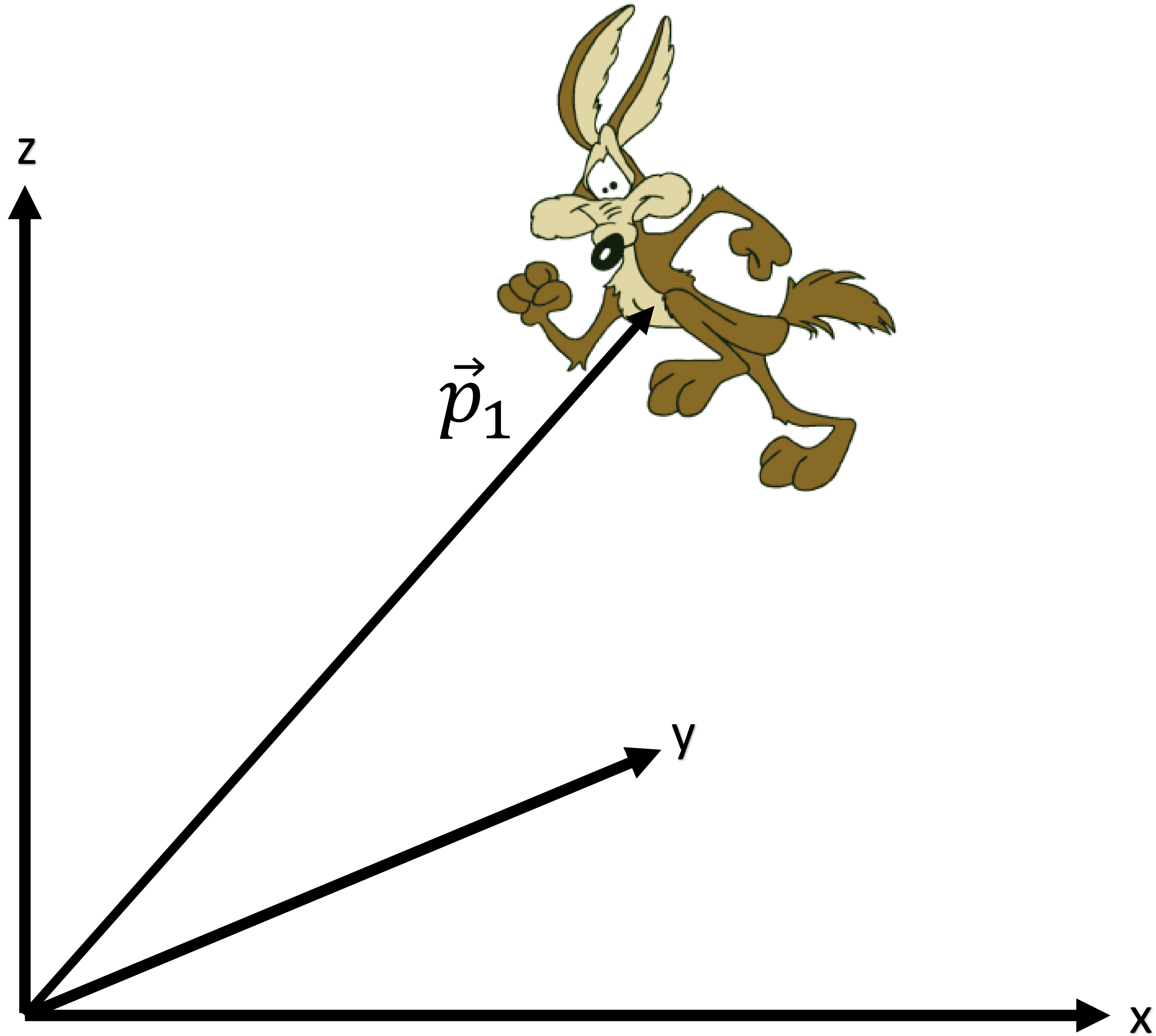
Kinematika

$$\vec{F}_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = \Delta t$$



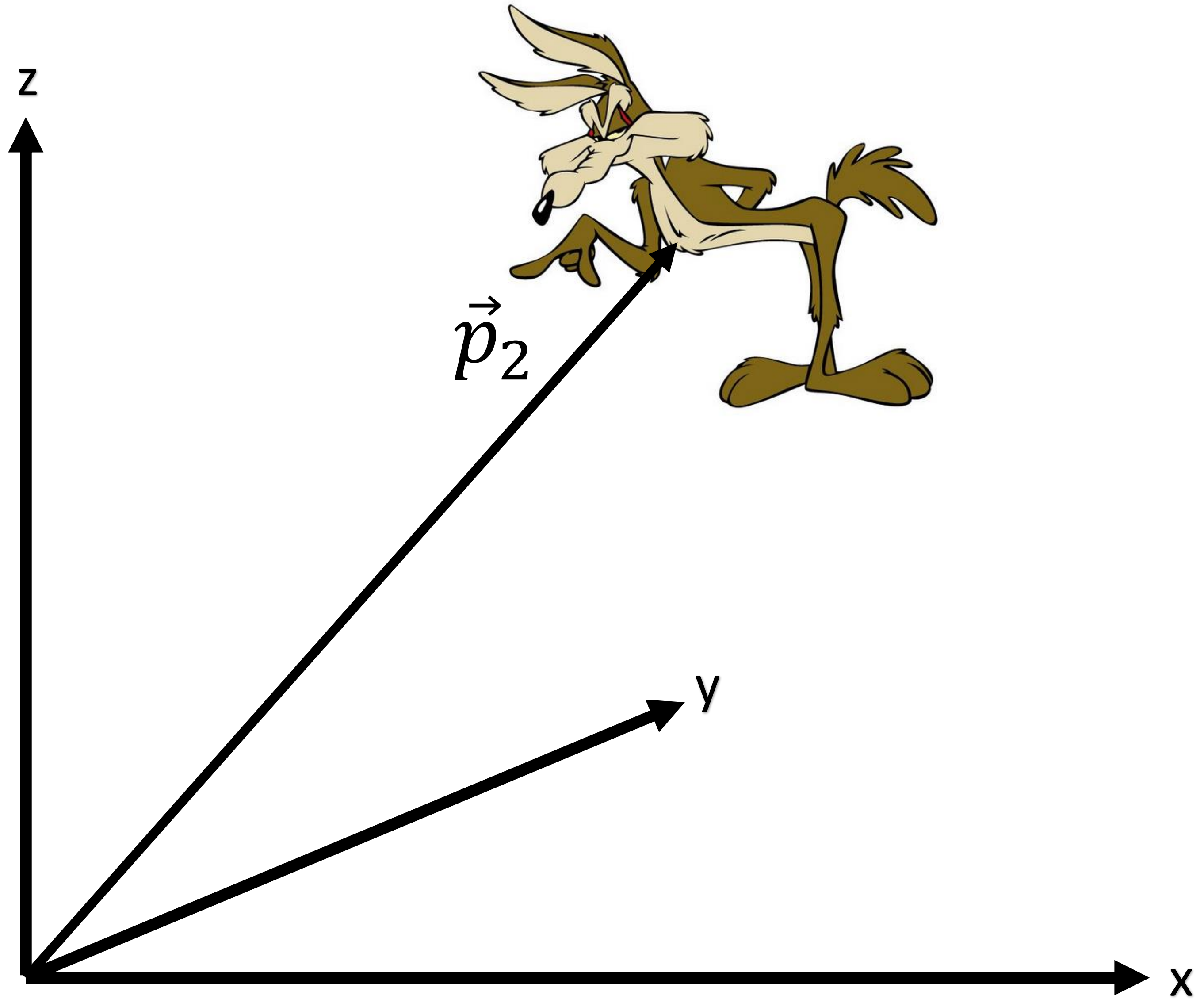
Kinematika

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 5.00 \end{bmatrix}$$

$$t = 2\Delta t$$



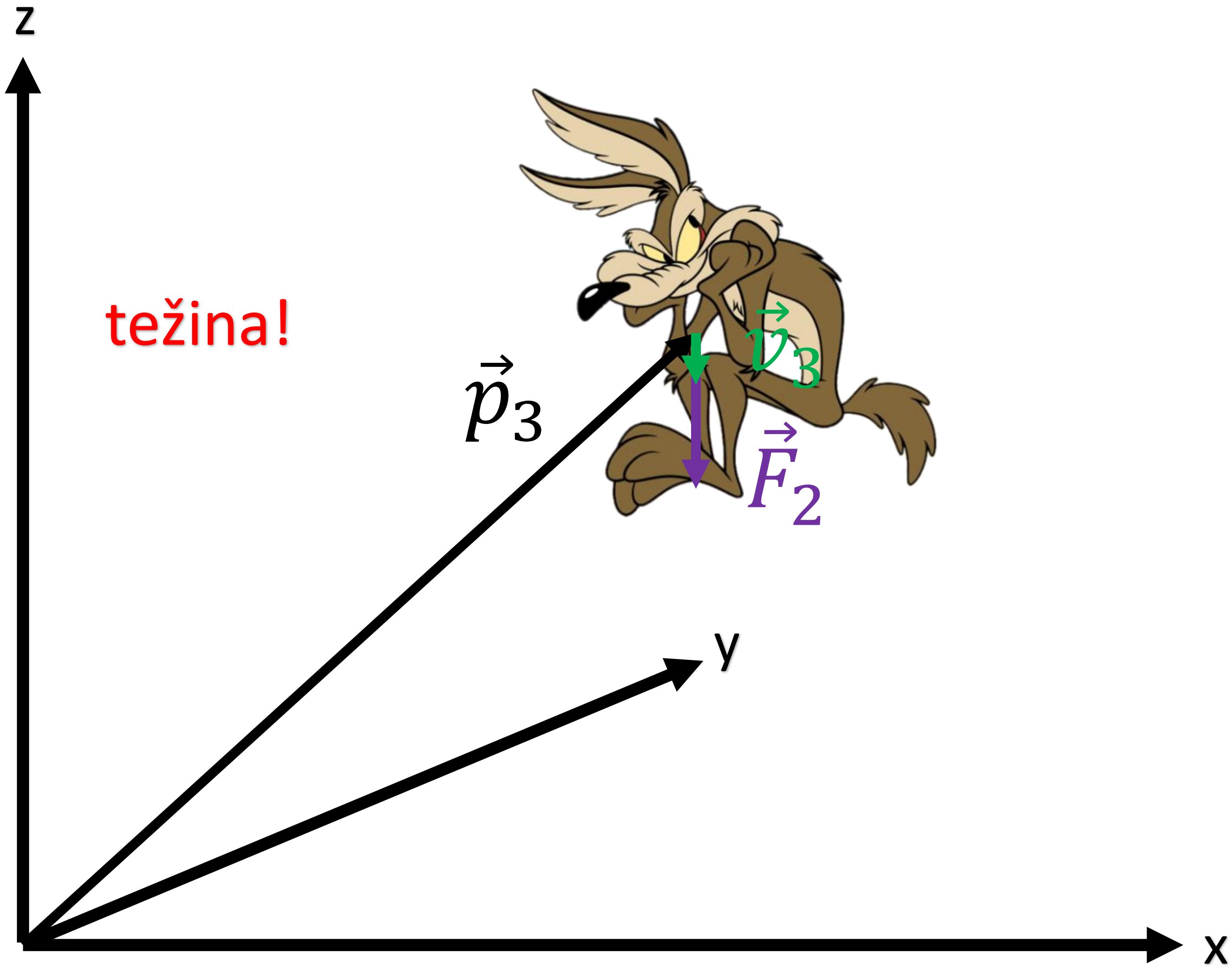
Kinematika

$$\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -2.45 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = \begin{bmatrix} 5.00 \\ 5.00 \\ 4.38 \end{bmatrix}$$

$$t = 3\Delta t$$



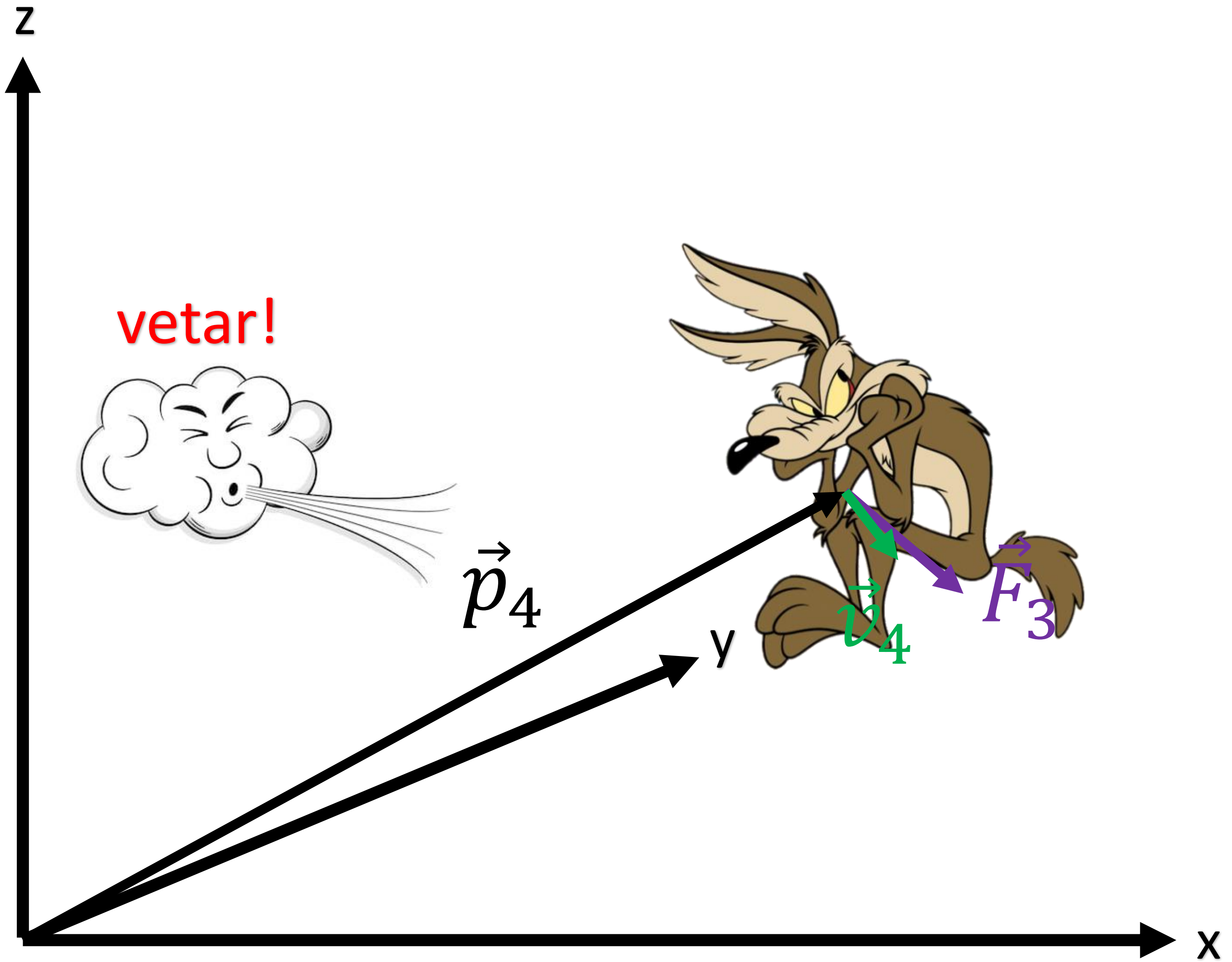
Kinematika

$$\vec{F}_3 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -4.90 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_4 = \begin{bmatrix} 6.11 \\ 5.00 \\ 3.15 \end{bmatrix}$$

$$t = 4\Delta t$$



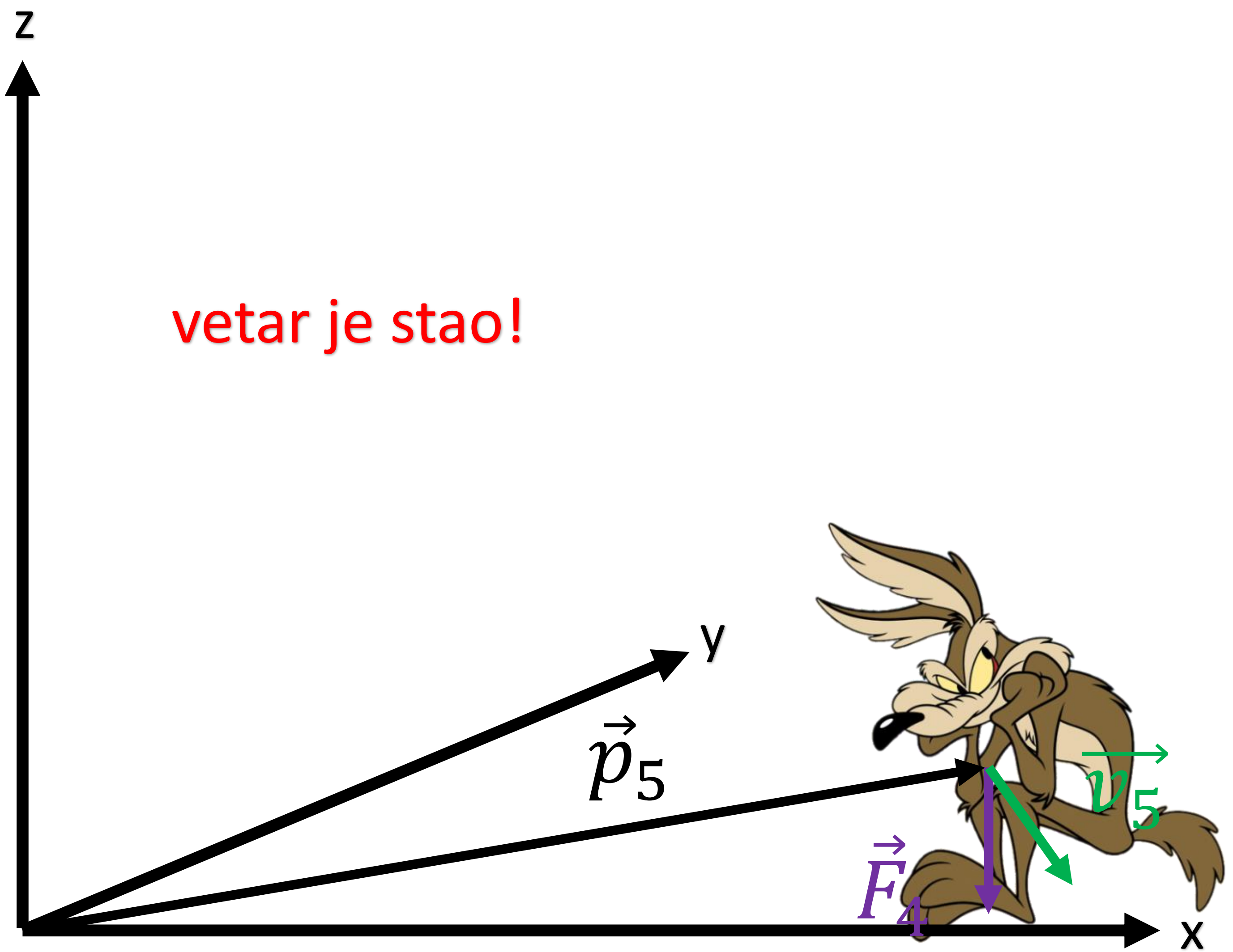
Kinematika

$$\vec{F}_4 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -9.81 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_5 = \begin{bmatrix} 7.22 \\ 5.00 \\ 1.31 \end{bmatrix}$$

$$t = 5\Delta t$$



Kinematika

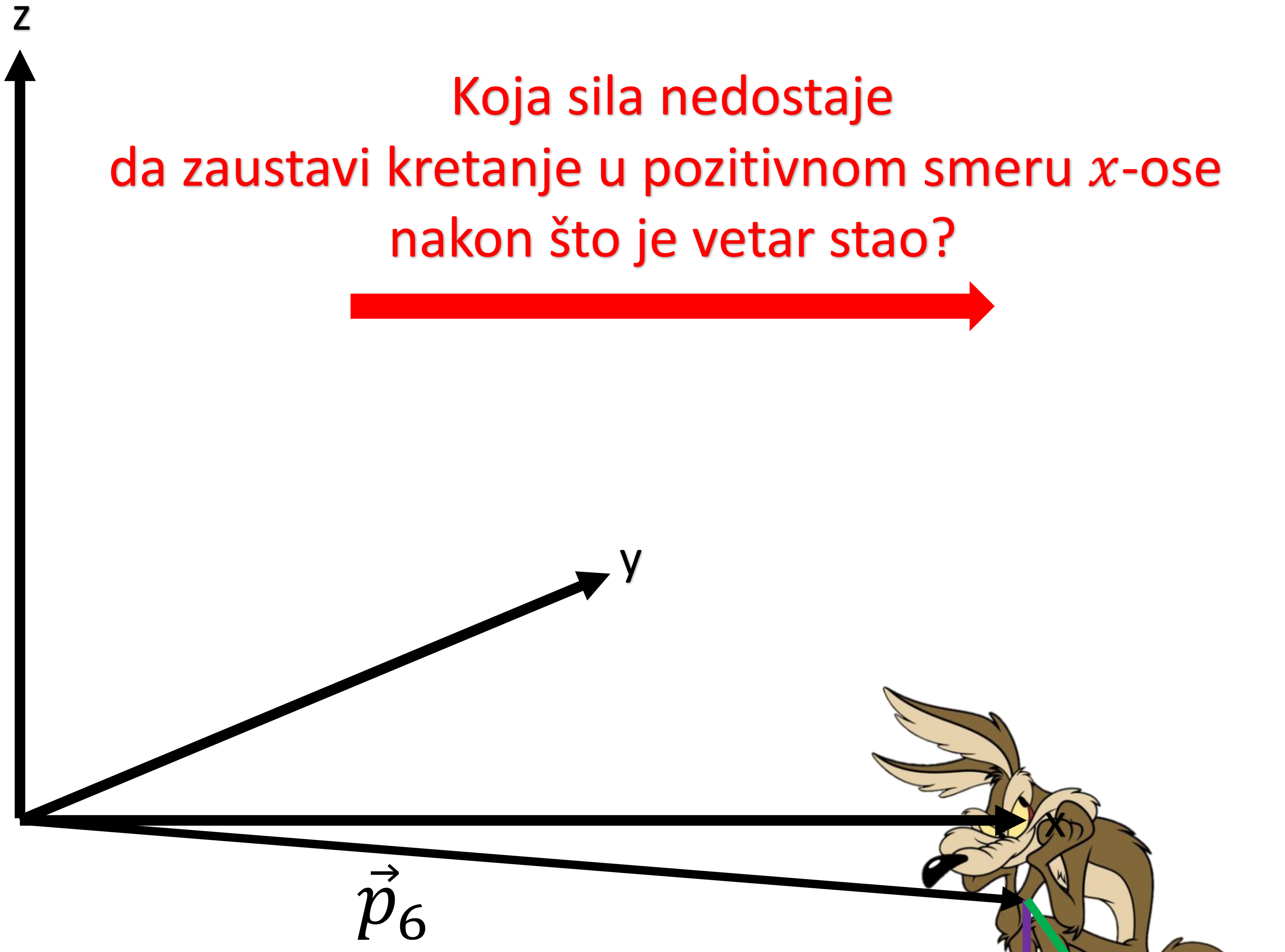
$$\vec{F}_5 = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_6 = \begin{bmatrix} 3.33 \\ 0.00 \\ -7.35 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_6 = \begin{bmatrix} 8.33 \\ 5.00 \\ -1.14 \end{bmatrix}$$

$$t = 6\Delta t$$

Koja sila nedostaje
da zaustavi kretanje u pozitivnom smeru x-ose
nakon što je vetar stao?



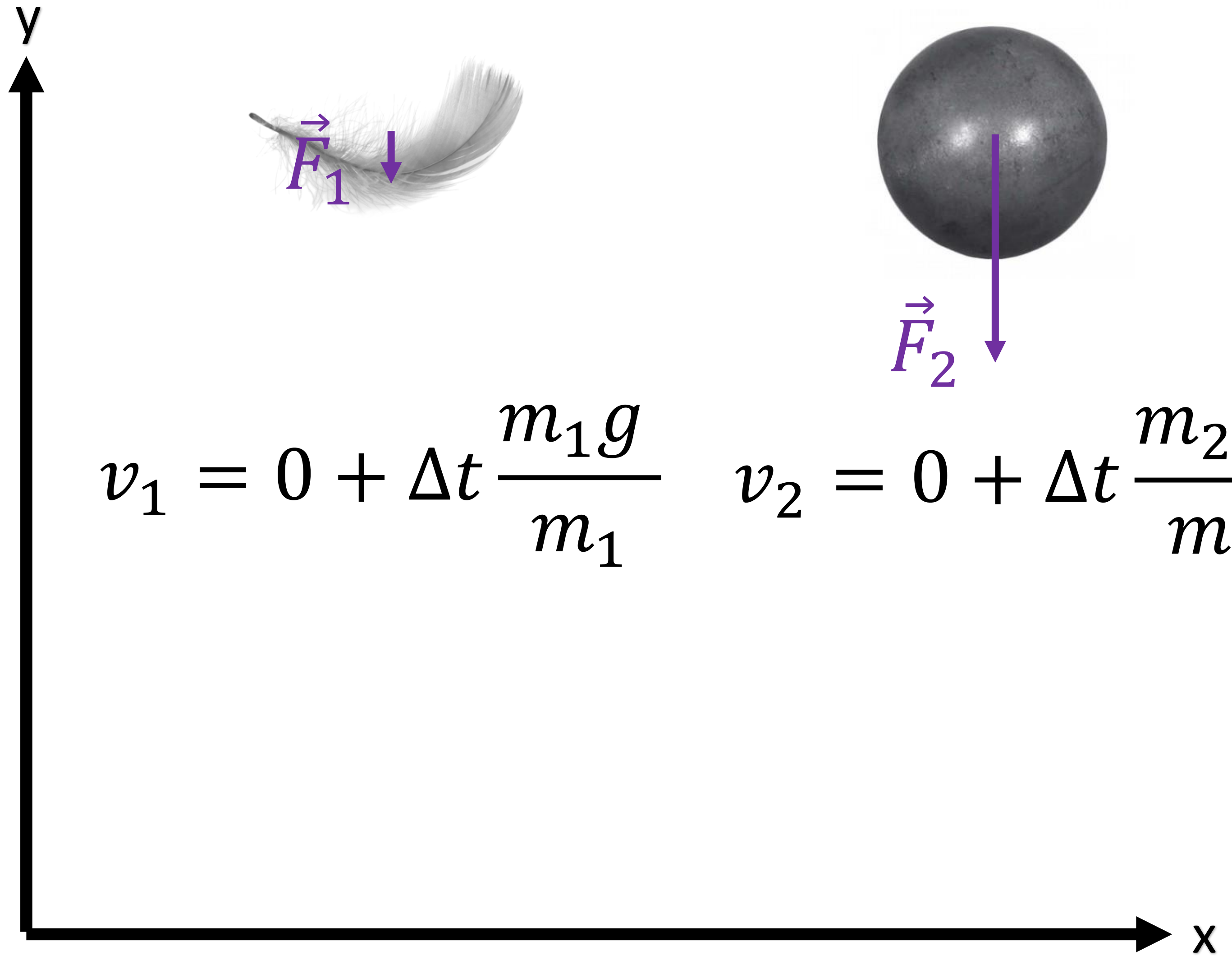
Kinematika

$$m_1 \ll m_2$$

vakum:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight}$$

(samo težina tela)



$$v_1 = 0 + \Delta t \frac{m_1 g}{m_1} \qquad v_2 = 0 + \Delta t \frac{m_2 g}{m_2}$$

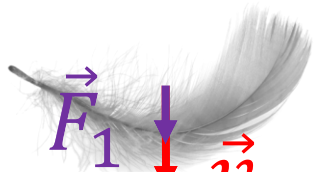
Kinematika

vakum:

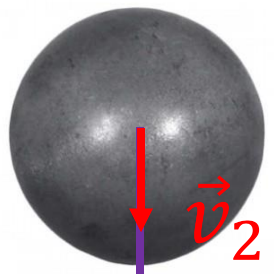
$$\vec{F} = \vec{F}_{weight}$$

(samo težina tela)

$$m_1 \ll m_2$$



$\vec{F}_1$ $\vec{v}_1$



$\vec{v}_2$ $\vec{F}_2$

$$v_1 = 0 + \Delta t \, \frac{\cancel{m_1} g}{\cancel{m_1}} \qquad v_2 = 0 + \Delta t \, \frac{\cancel{m_2} g}{\cancel{m_2}}$$

$$v_1 = v_2$$

y

x

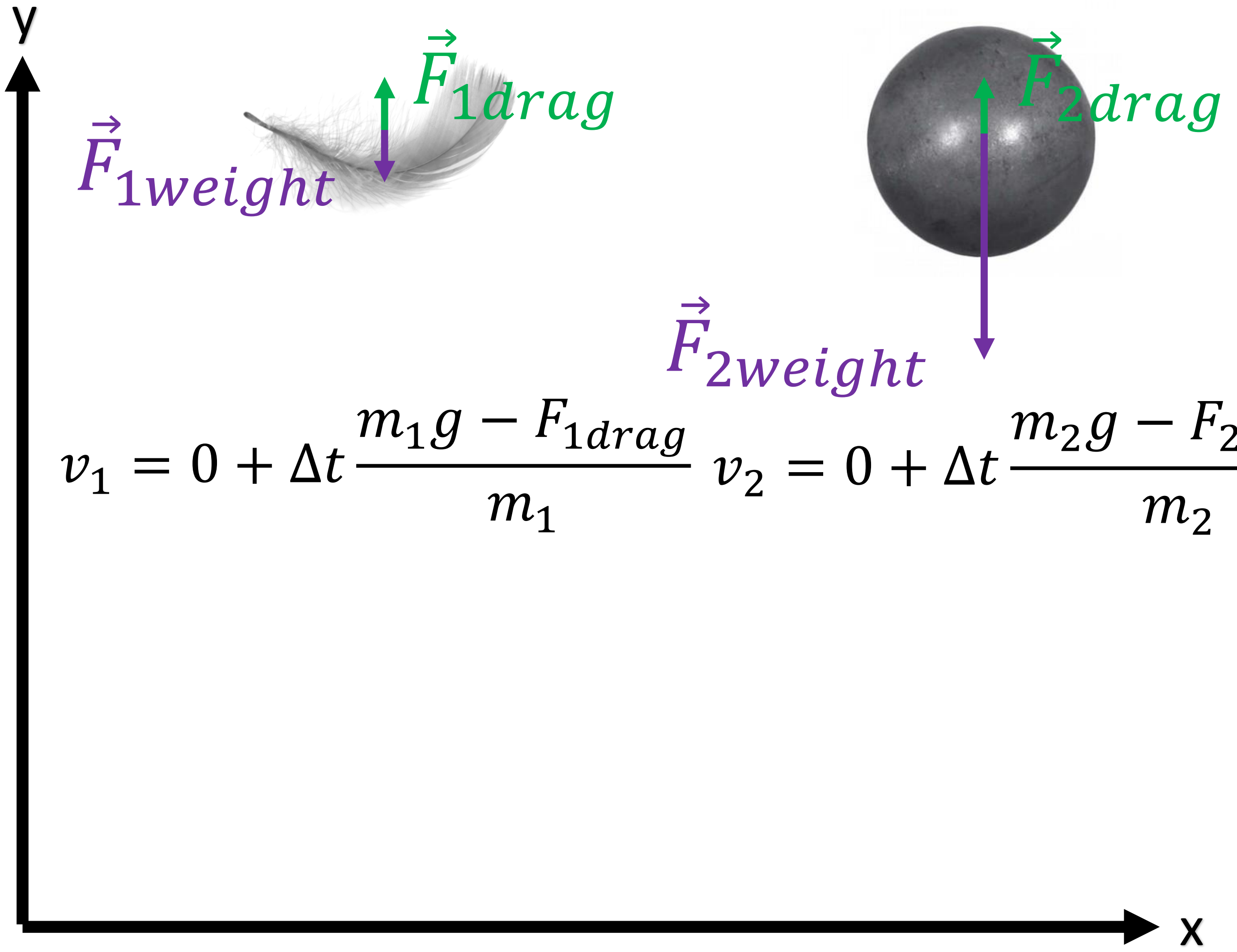
Kinematika

$$m_1 \ll m_2$$

fluid:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight} + \vec{F}_{drag}$$

(težina tela + otpor fluida)



$$v_1 = 0 + \Delta t \frac{m_1 g - F_{1drag}}{m_1} \qquad v_2 = 0 + \Delta t \frac{m_2 g - F_{2drag}}{m_2}$$

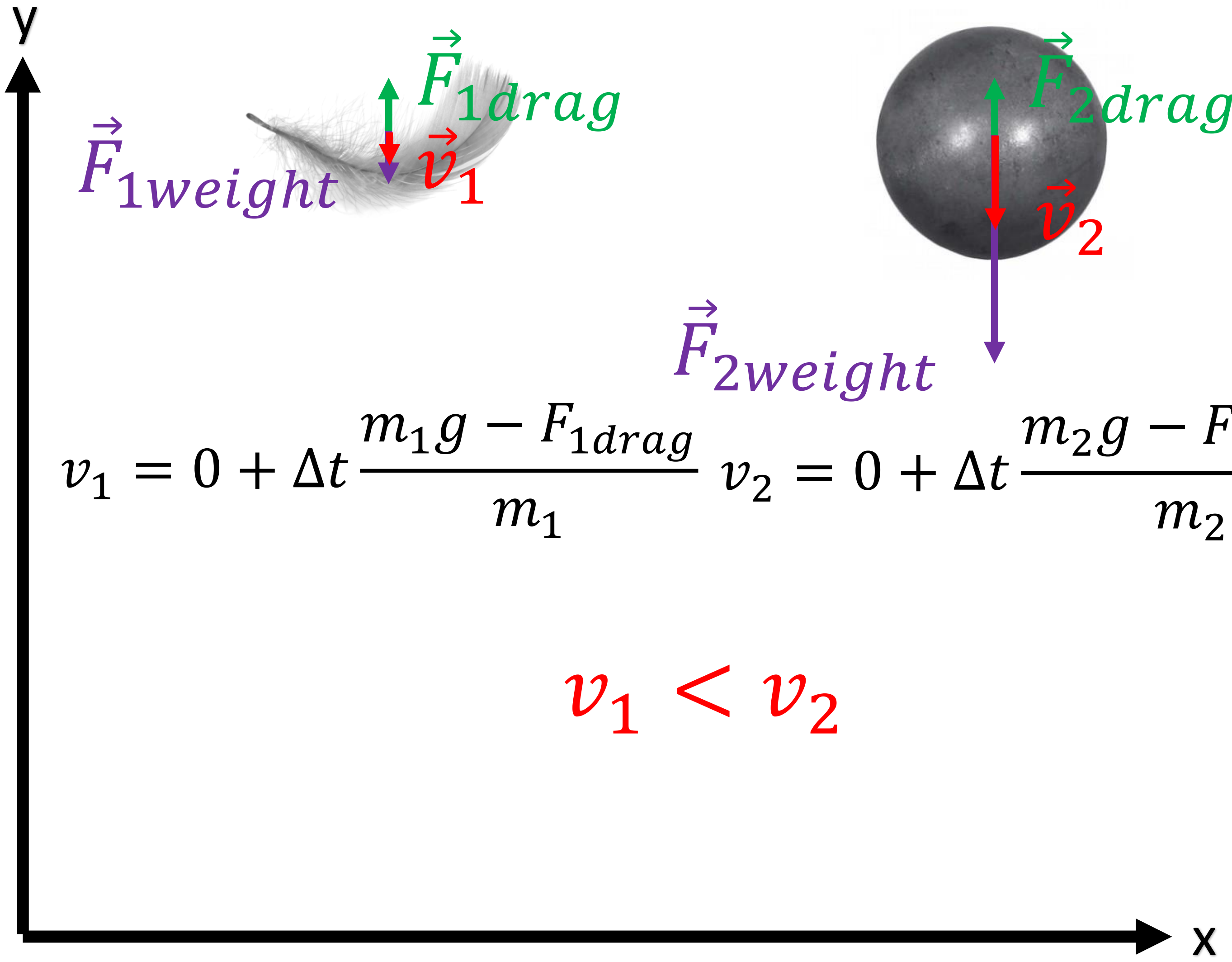
Kinematika

$$m_1 \ll m_2$$

fluid:

$$\vec{F} = \vec{F}_{weight} + \vec{F}_{drag}$$

(težina tela + otpor fluida)



$$v_1 = 0 + \Delta t \frac{m_1 g - F_{1drag}}{m_1} \quad v_2 = 0 + \Delta t \frac{m_2 g - F_{2drag}}{m_2}$$

$$v_1 < v_2$$

Kinematika

Dve osnovne vrste tela:

1. Materijalne tačke, tj. čestice (*particles*)
2. Čvrsta tela (*rigid bodies*)

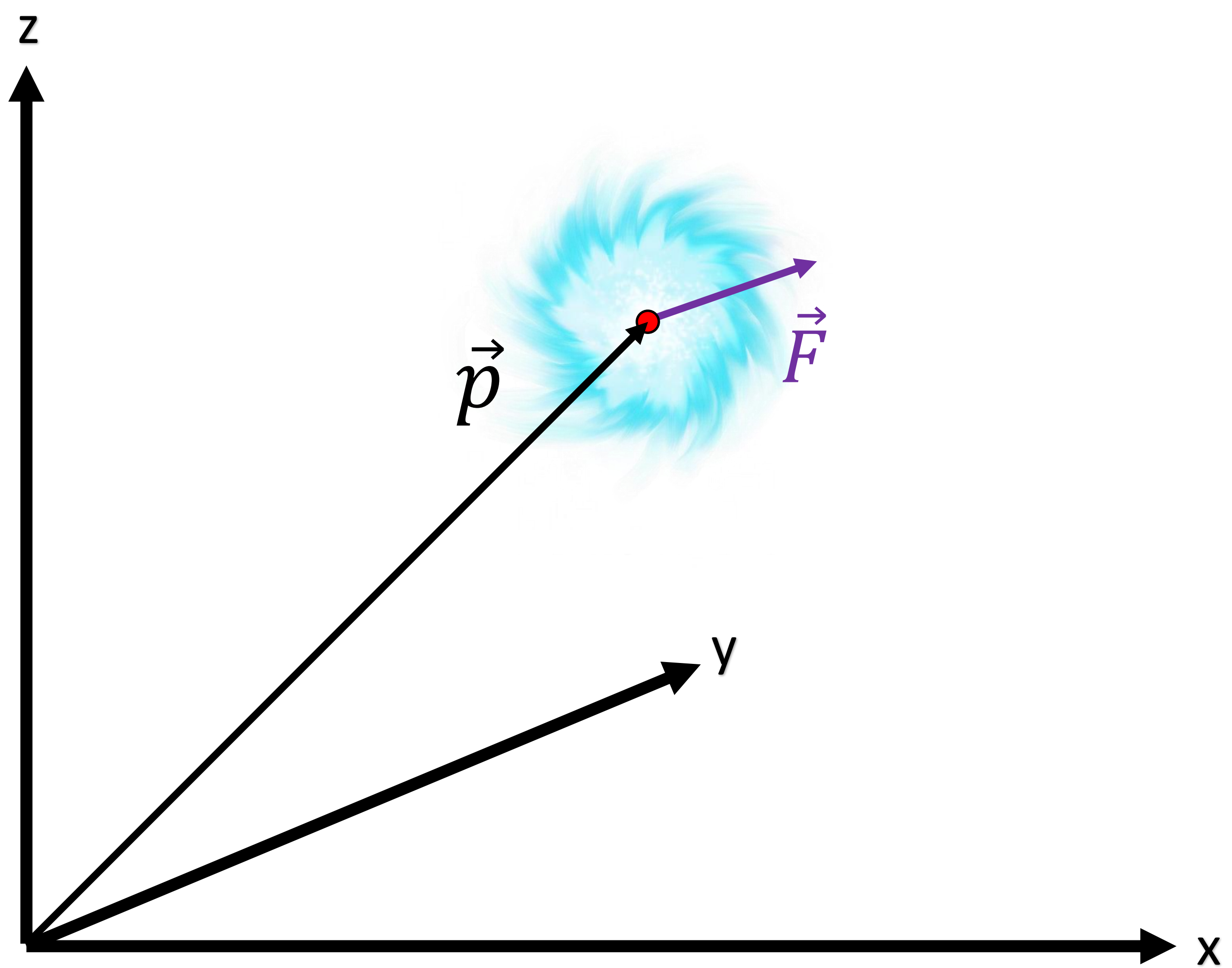
Složene vrste tela (na neki način kombinacije osnovnih vrsta):

1. Meka tela (*soft bodies*)
2. Fluidi
3. Tkanina
4. *Ragdolls*
5. itd.

Kinematika

- materijalna tačka (*particle*):

+ nema definisanu orjentaciju ni rotaciju
+ sve spoljašnje sile deluju na $\overrightarrow{C_g}$



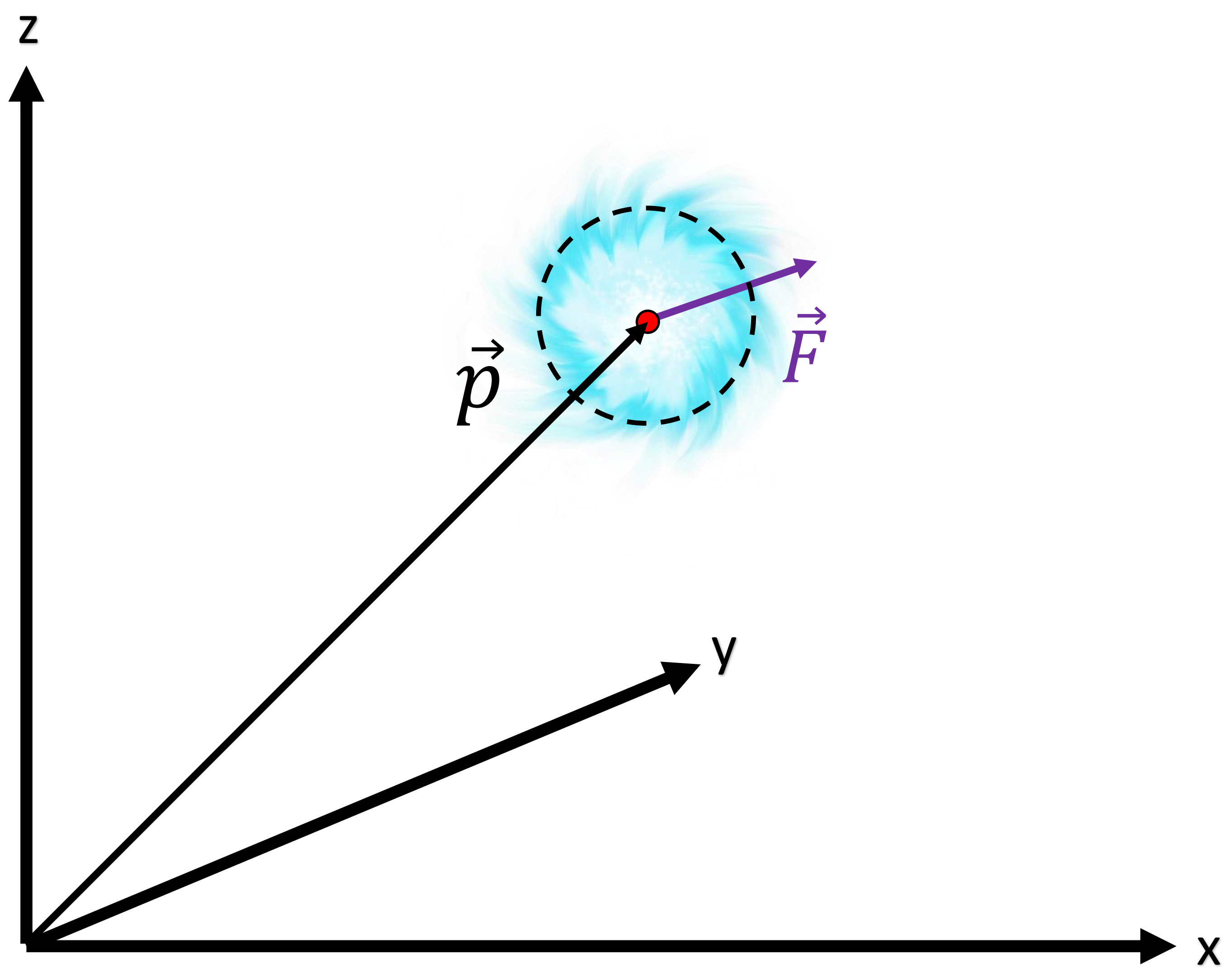
Kinematika

- materijalna tačka (*particle*):

\+ nema definisanu orjentaciju ni rotaciju

\+ sve spoljašnje sile deluju na $\vec{C}_g$

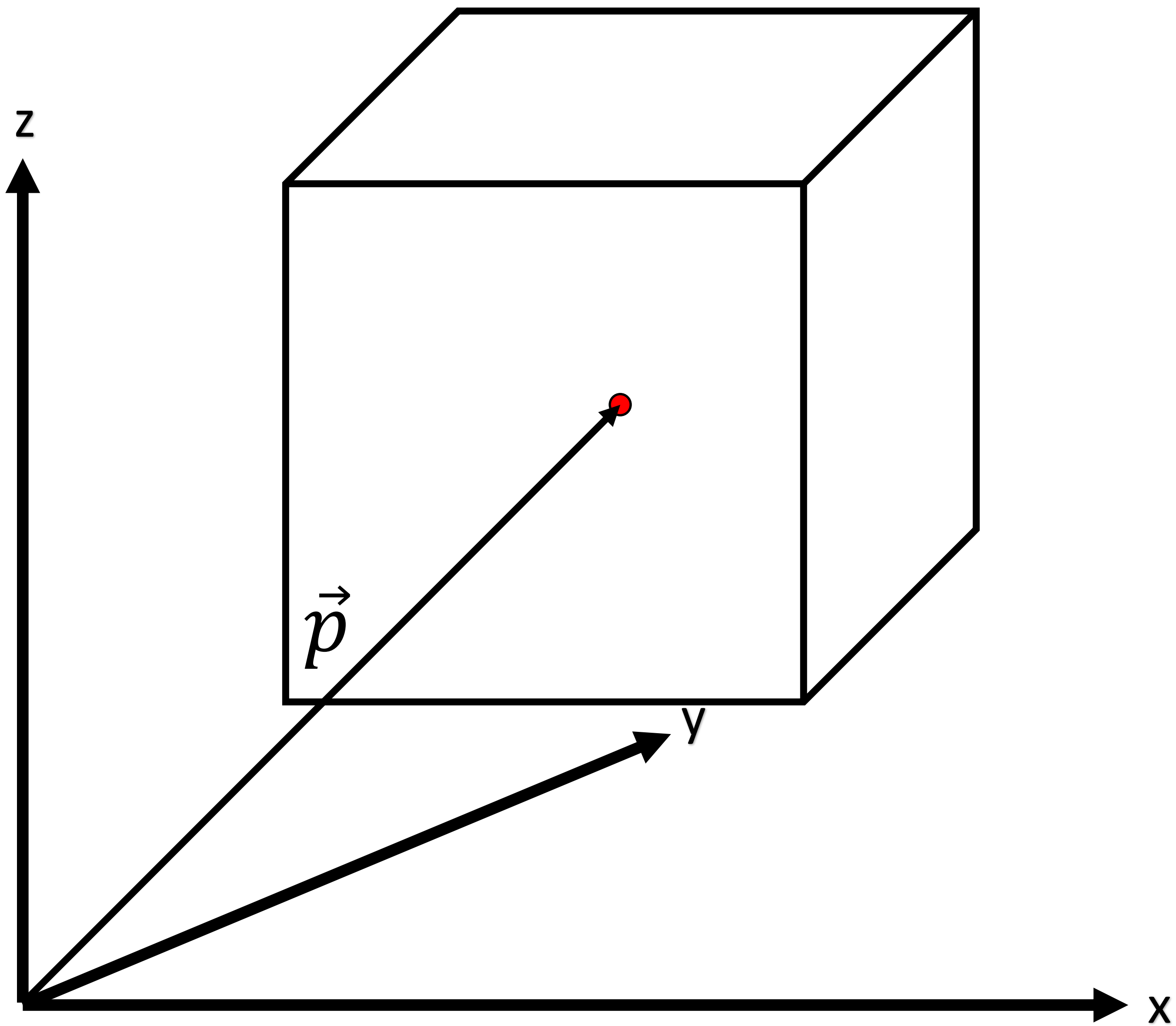
(za otkrivanje sudara telo mora imati nekakvu geometriju, a najčešće je simetrično)



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

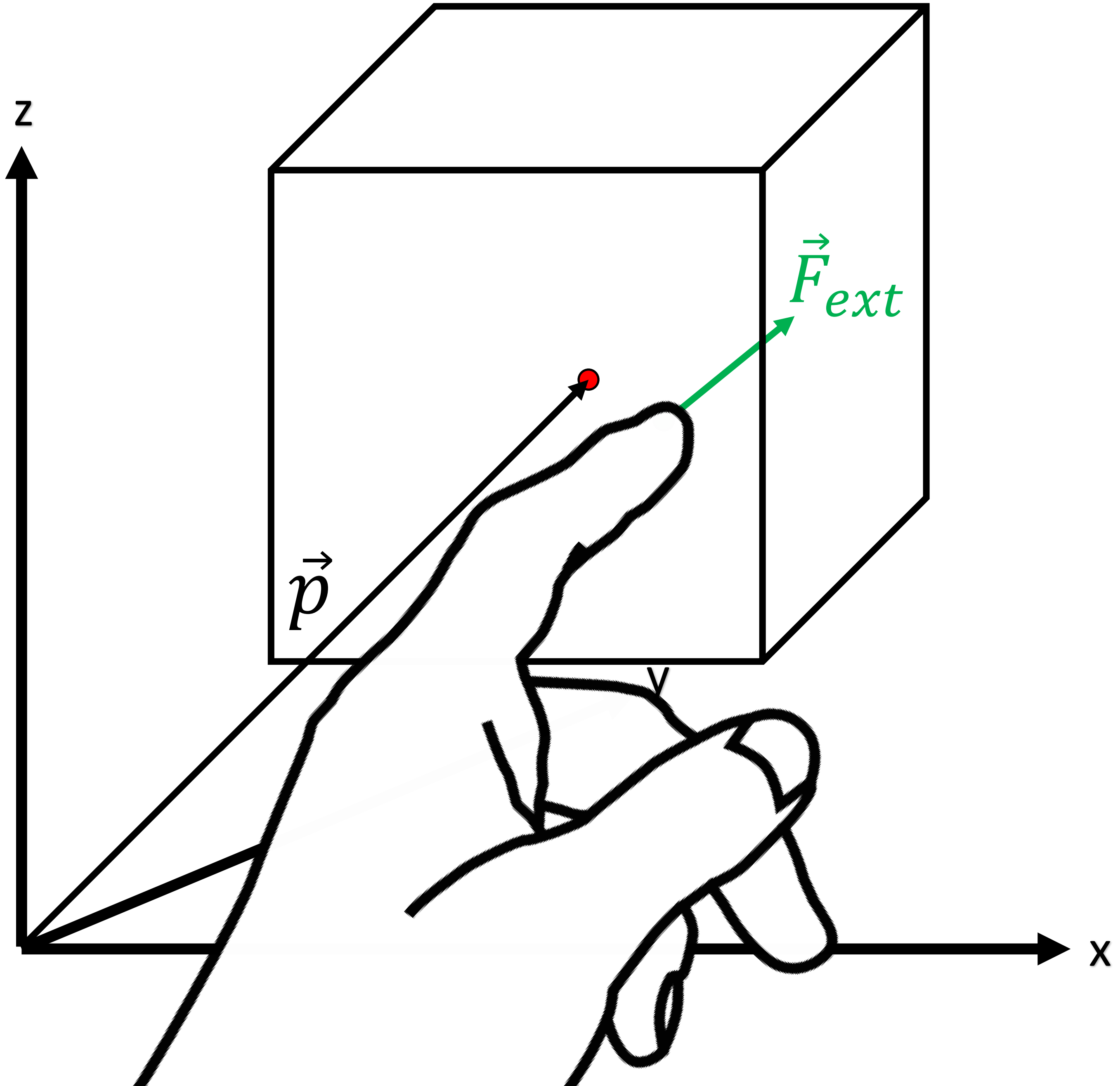
- ima definisanu orjentaciju i rotaciju



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

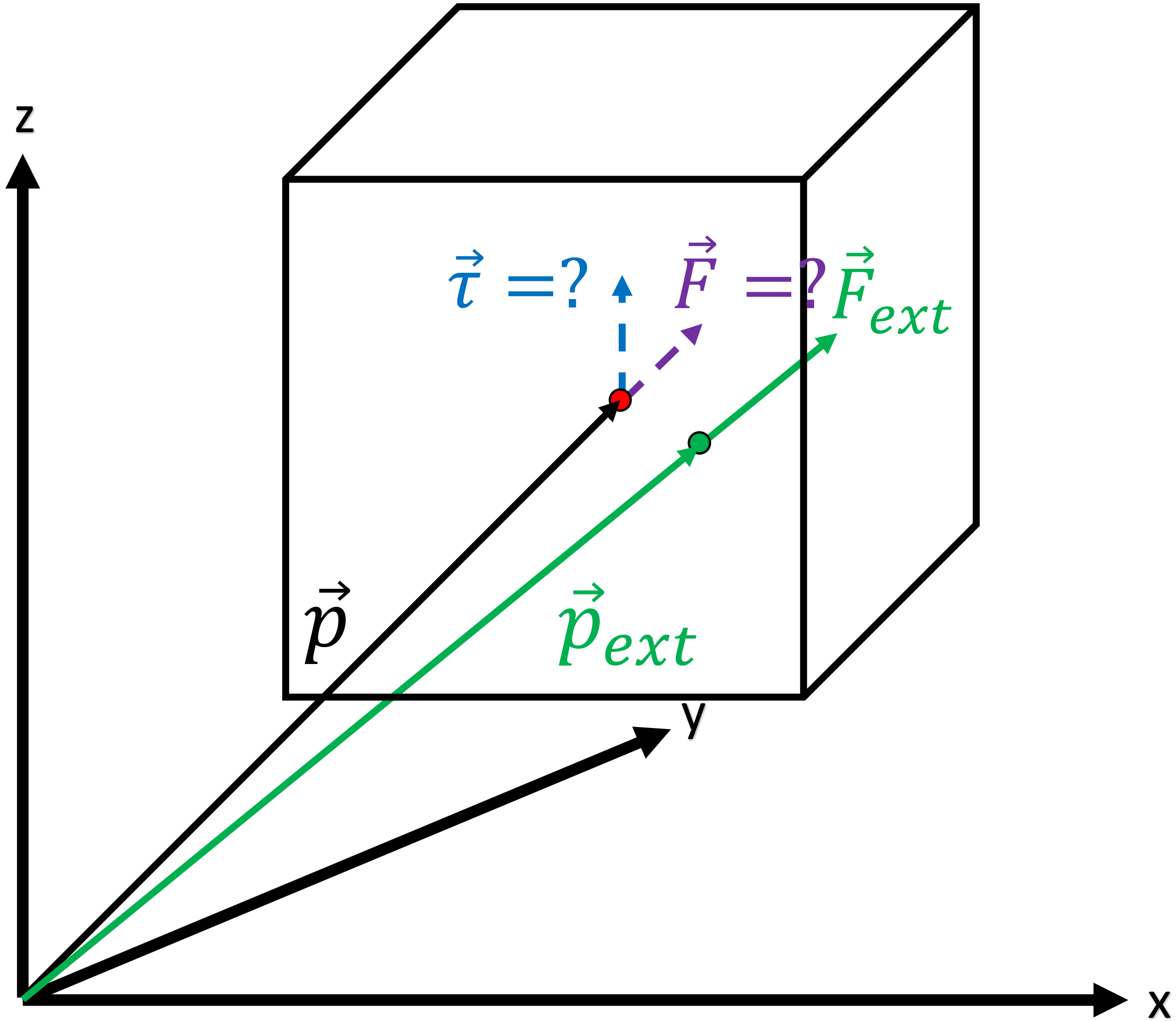
- ima definisanu orjentaciju i rotaciju



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

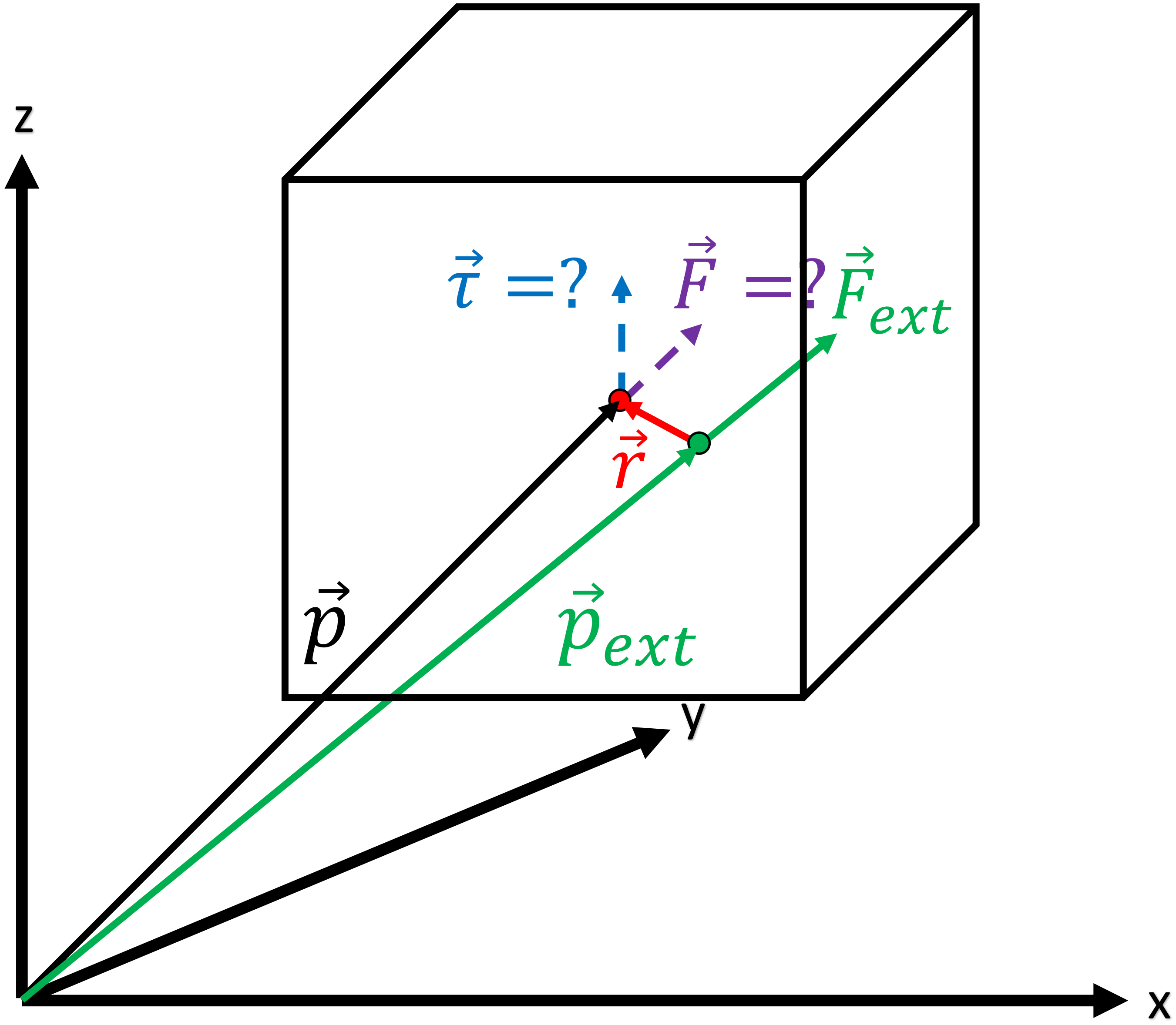
- ima definisanu orjentaciju i rotaciju
- potrebno je izračunati linearnu komponentu sile $\vec{F}$ i moment sile $\vec{\tau}$ na osnovu delovanja spoljašnje sile $\vec{F}_{ext}$



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

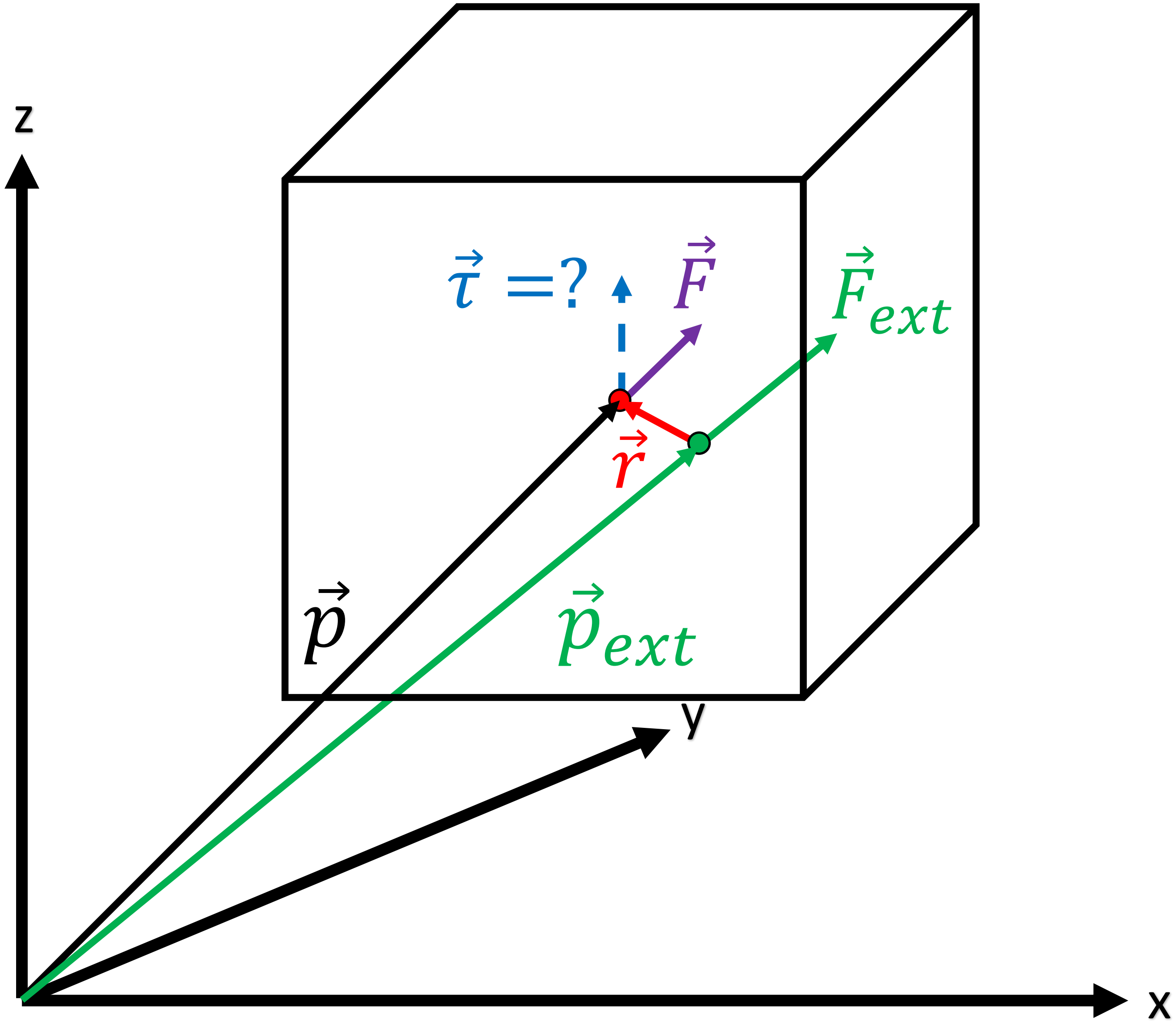
1. $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

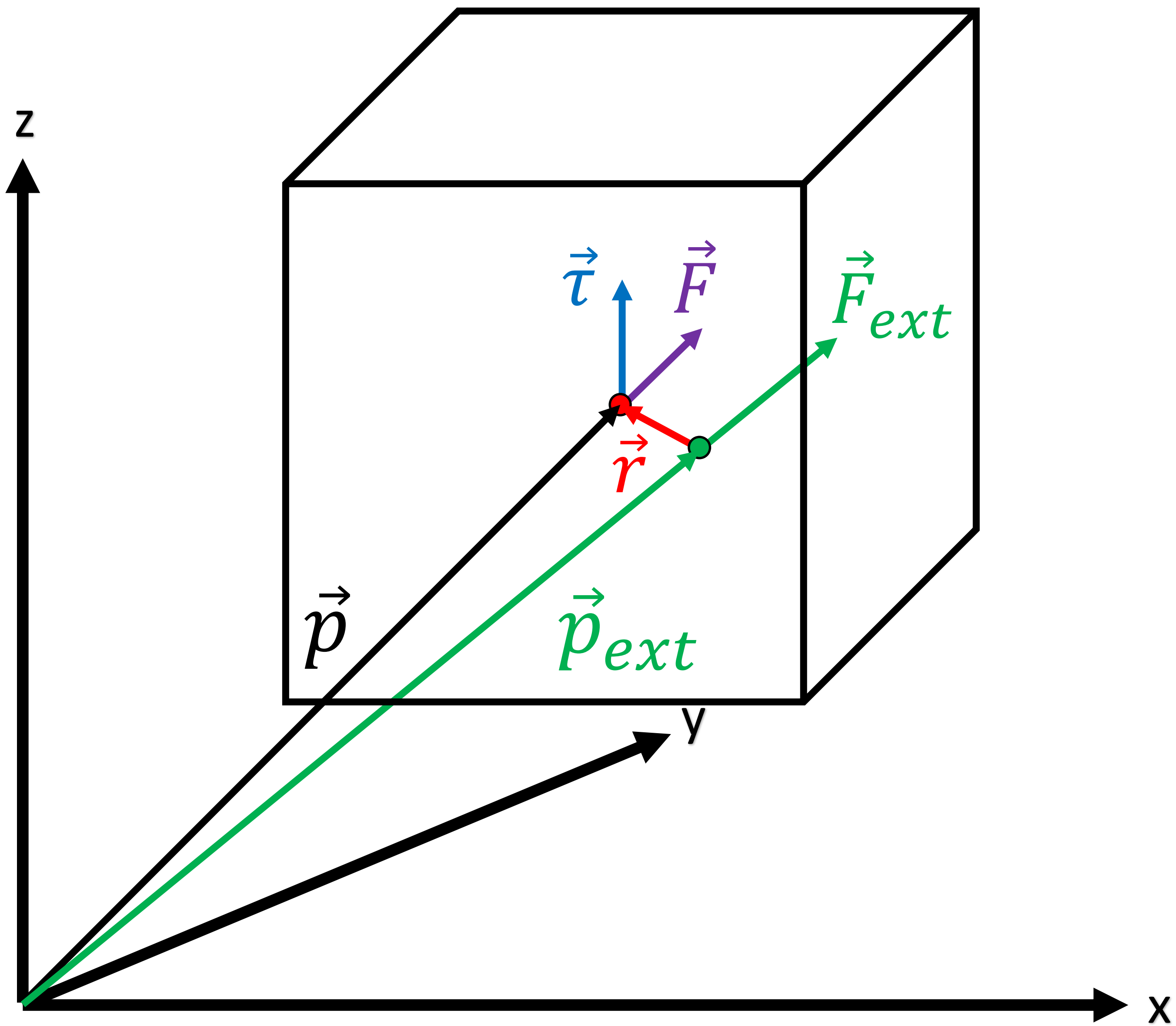
1. $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$
2. $\vec{F} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{r} \, \frac{\vec{F}_{ext}}{|\vec{F}_{ext}|}$



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

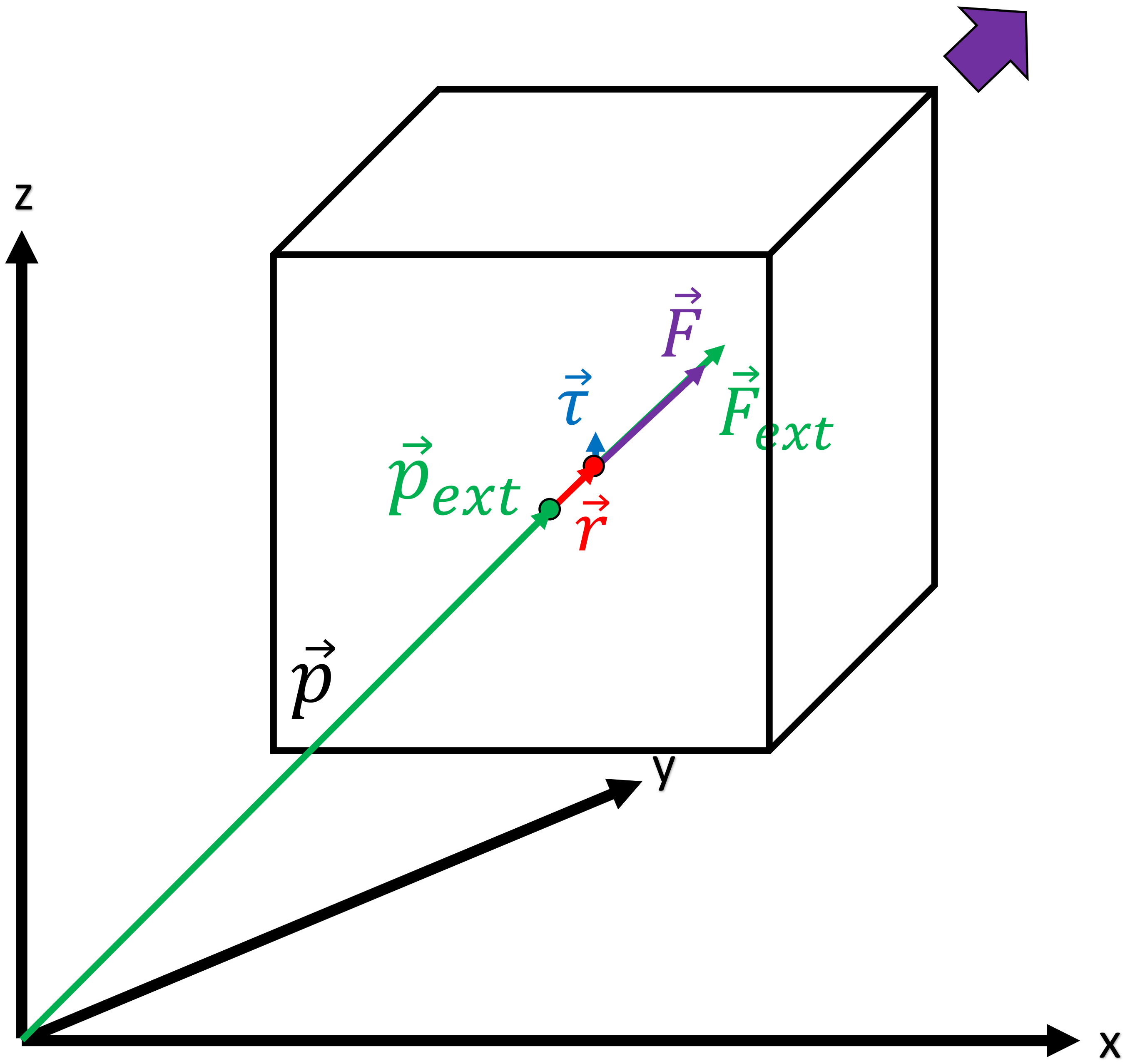
1. $\vec{r} = \vec{p} - \vec{p}_{ext}$
2. $\vec{F} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{r}\,\frac{\vec{F}_{ext}}{|\vec{F}_{ext}|}$
3. $\vec{\tau} = \vec{F}_{ext} \times \vec{r}$



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

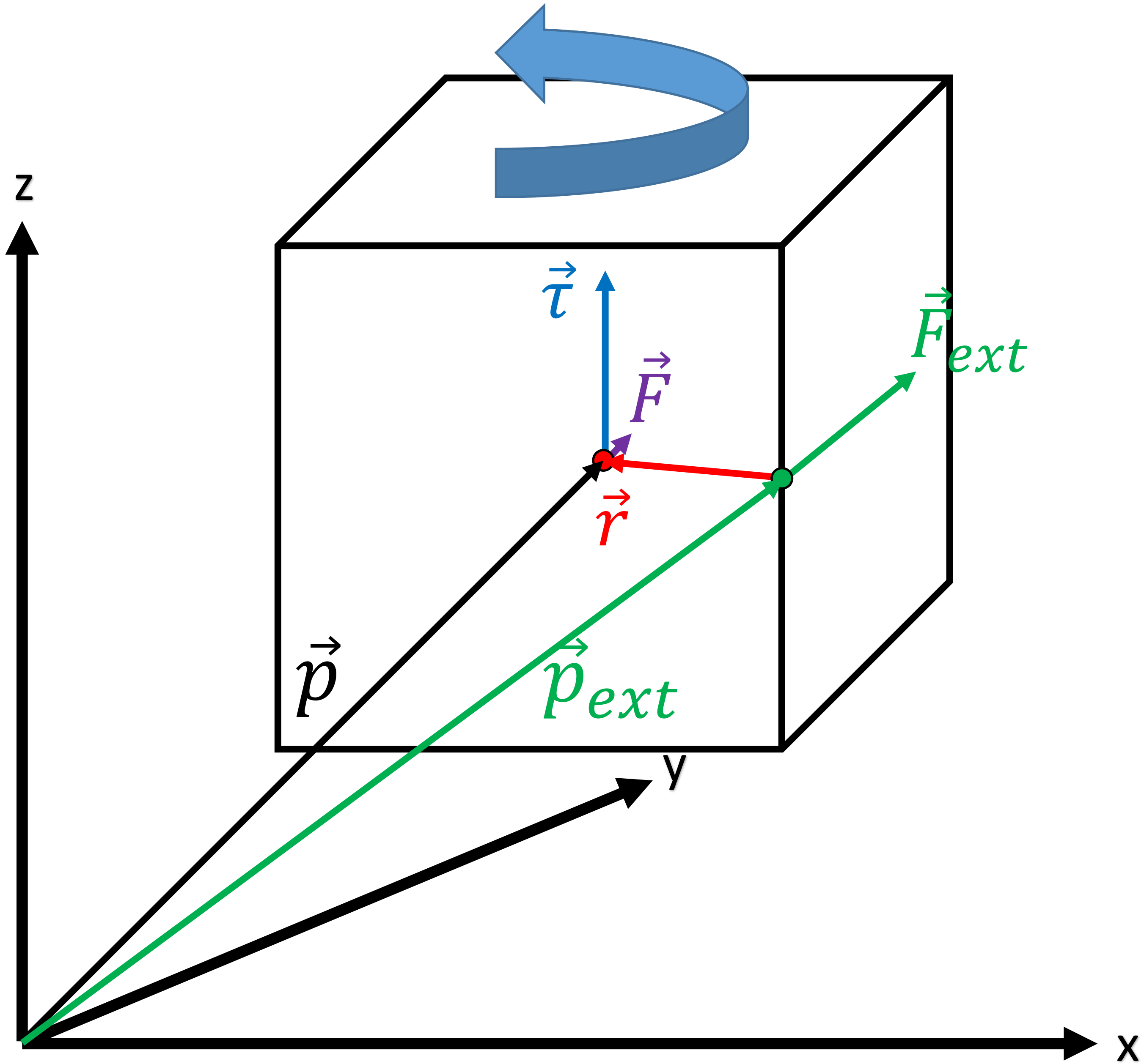
što su više $\vec{r}$ i $\vec{F}_{ext}$ paralelni, linearno kretanje postaje dominantnije



Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

što su više $\vec{r}$ i $\vec{F}_{ext}$ normalni, rotaciono kretanje postaje dominantnije

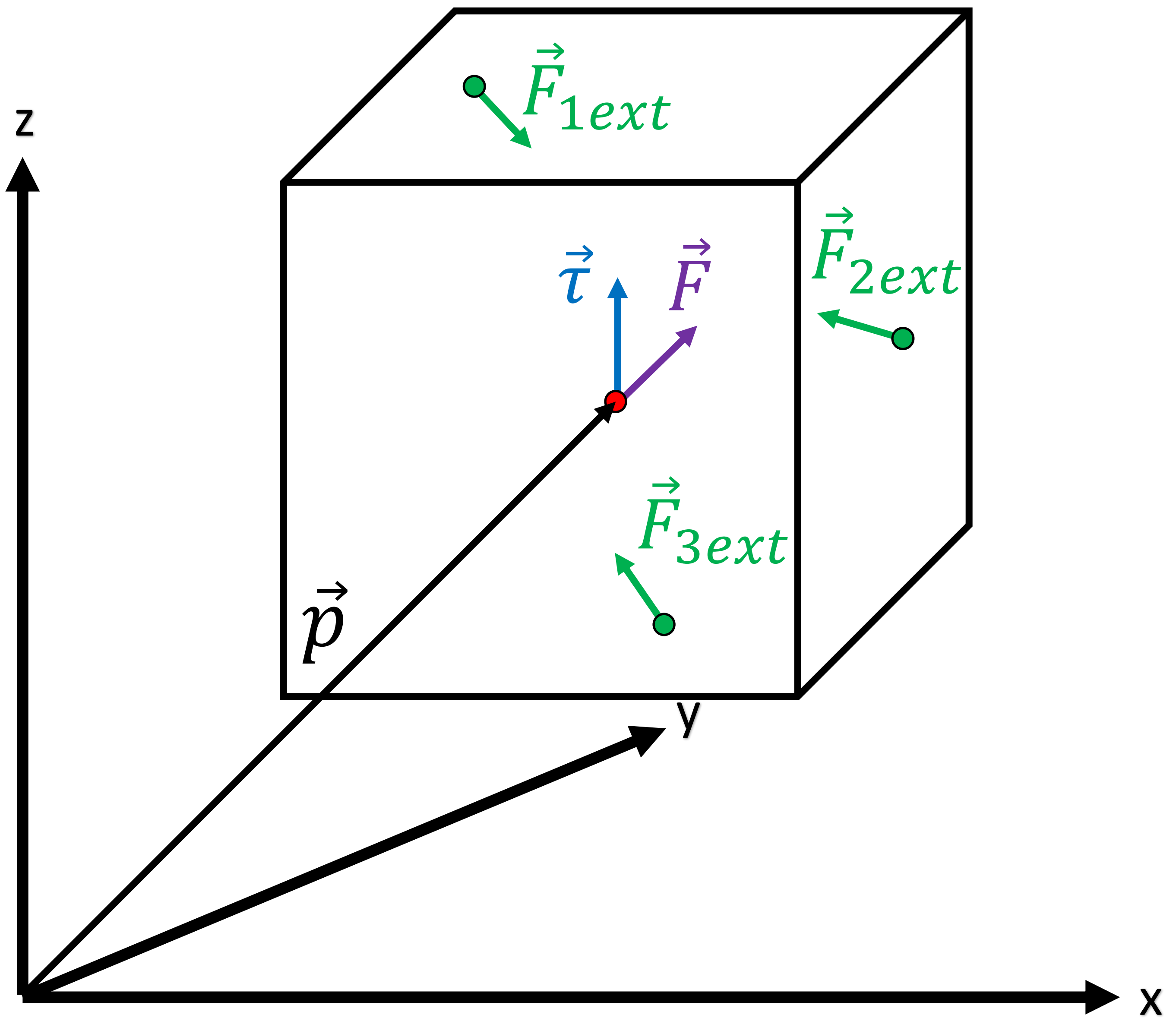


Kinematika

- čvrsto telo (*rigid body*):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots$$



Kinematika

- skaliranje:

Ako je npr. potrebno da objekat za vreme:

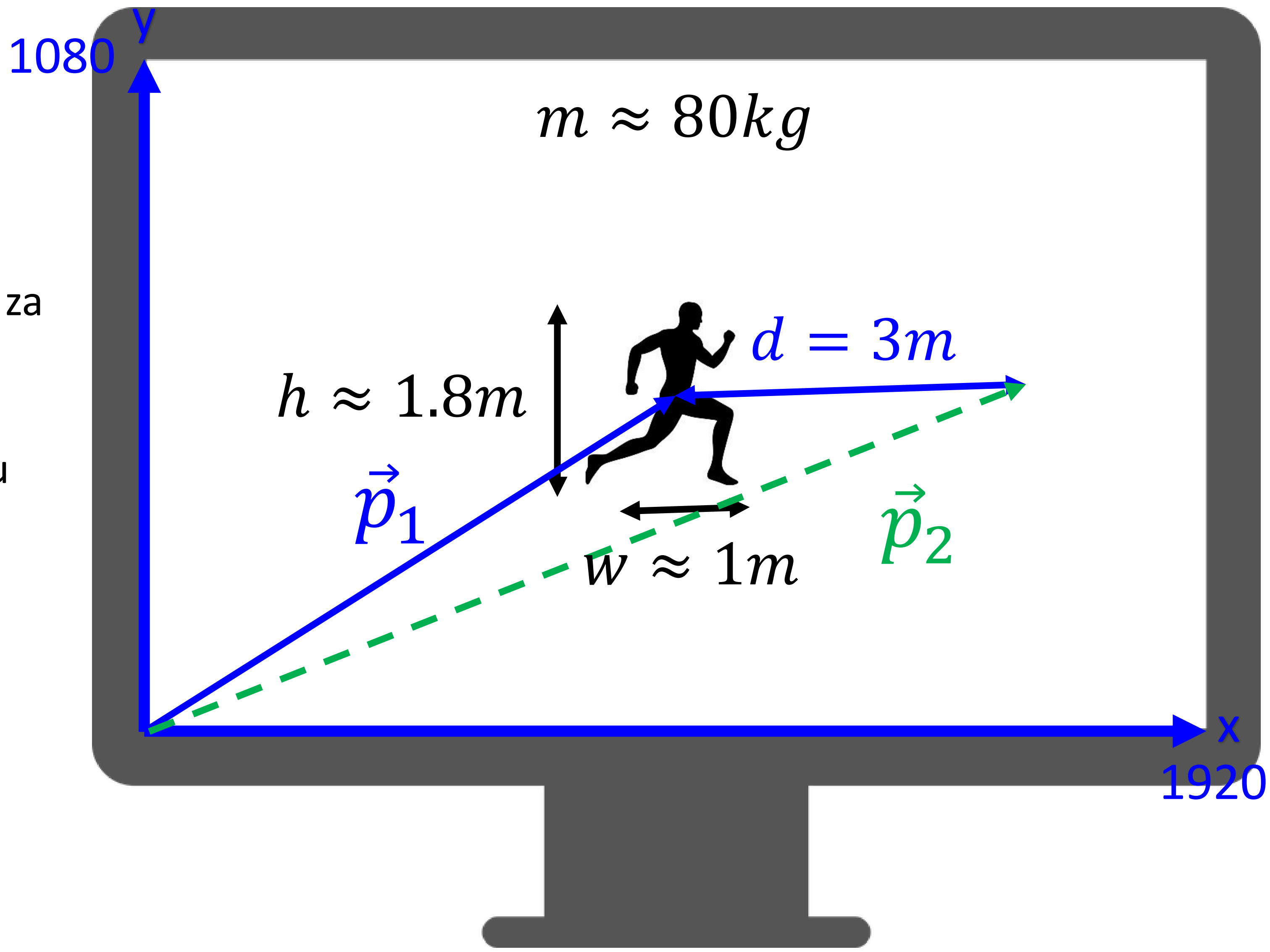
$$t = 1s$$

promeni položaj iz $\vec{p}_1$ u $\vec{p}_2$ koji su udaljeni:

$$d = 3m$$

brzina bi trebalo da bude:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$



Kinematika

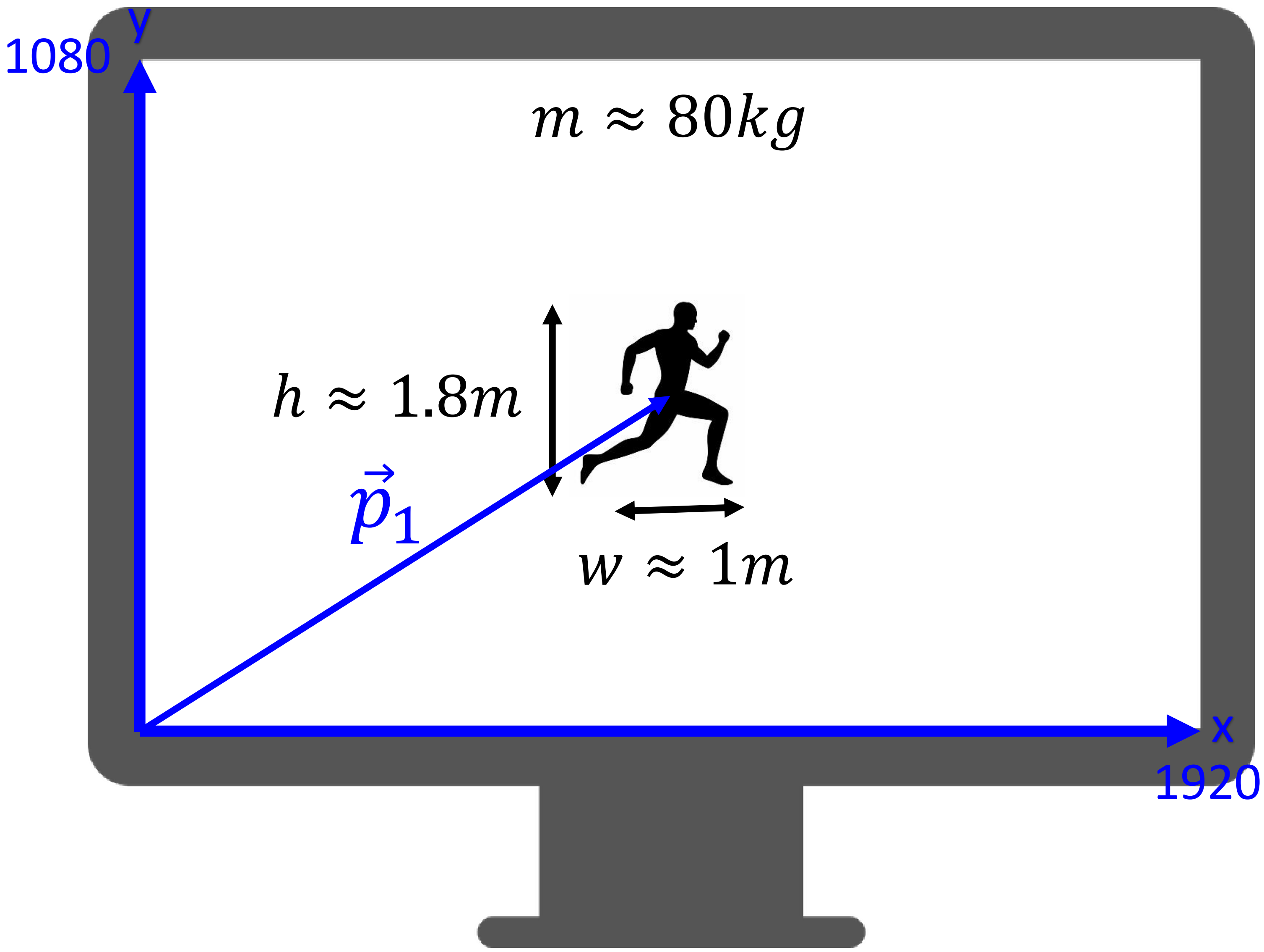
- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$



Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

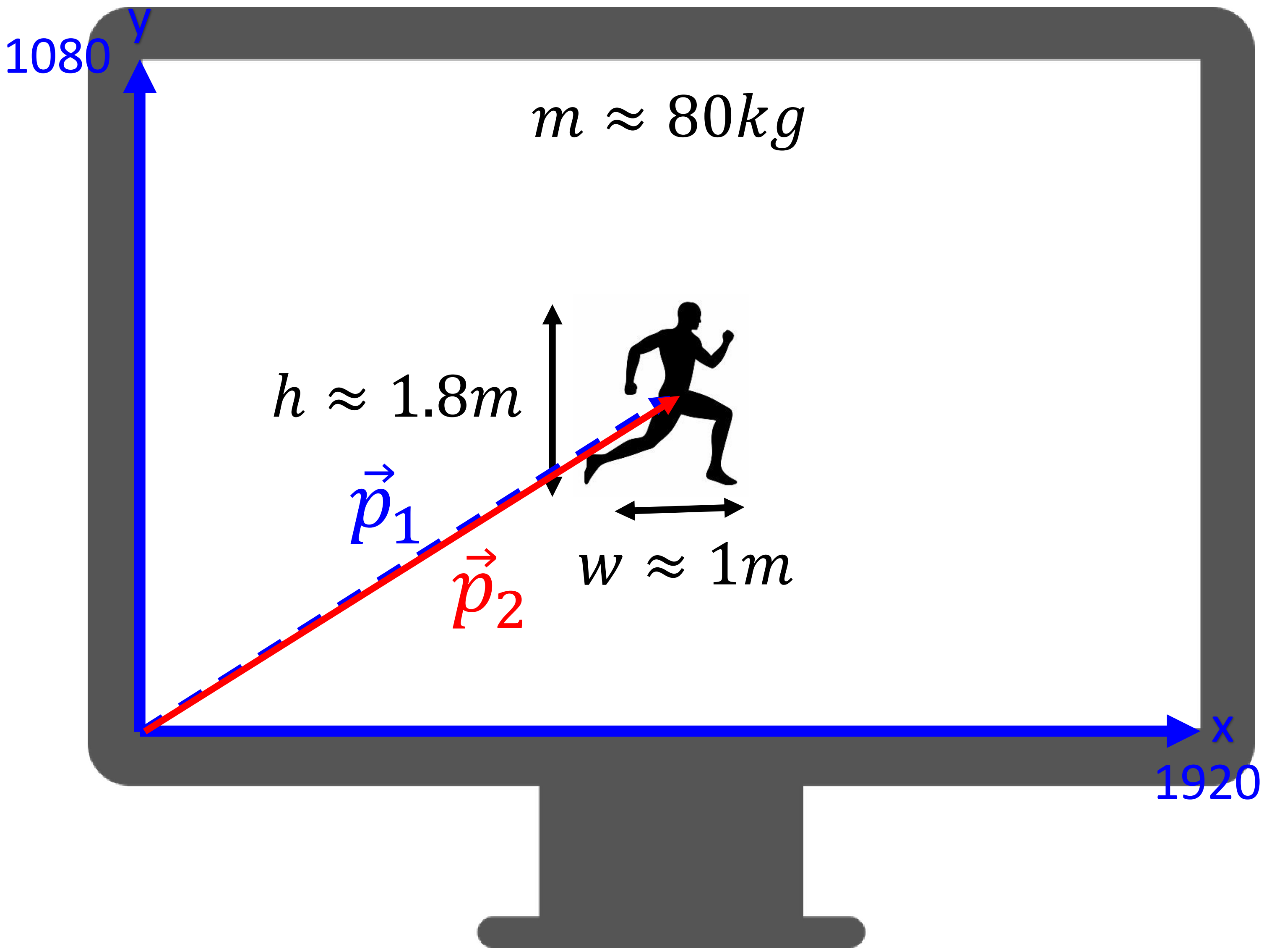
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 963 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Jako sporo?



Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

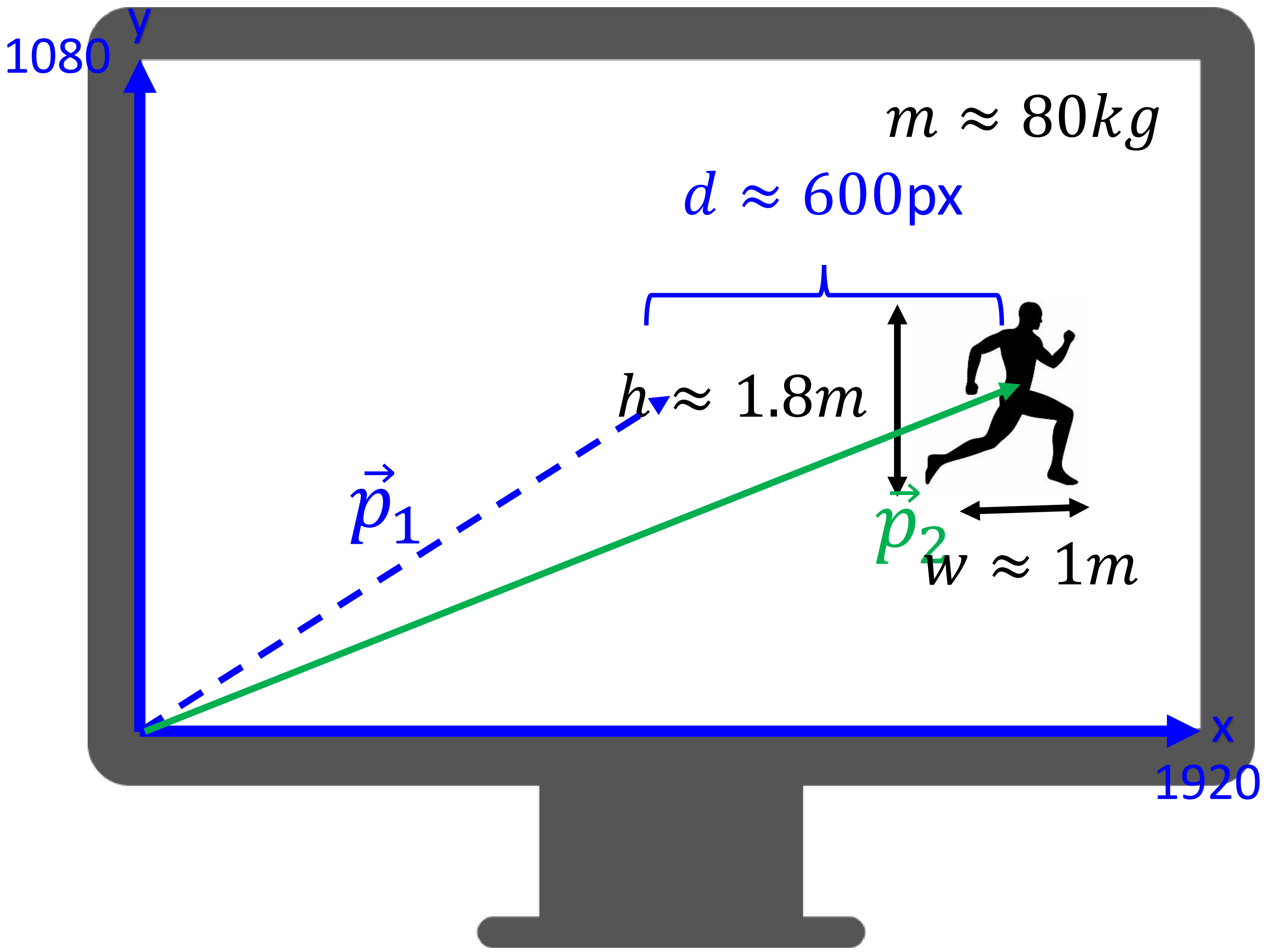
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1560 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Rešenje?



Kinematika

- skaliranje:

bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

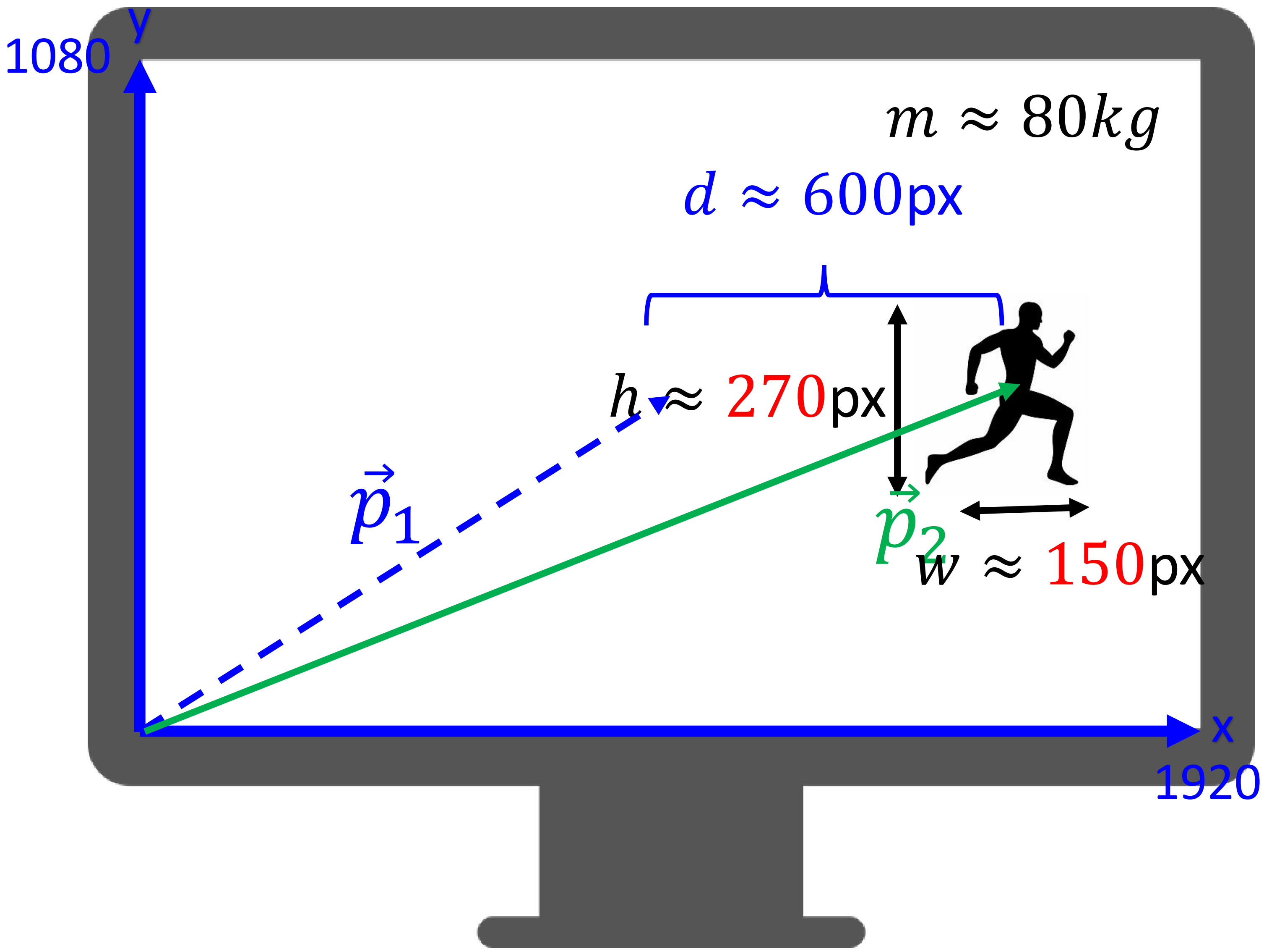
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{px}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix} 1560 \\ 540 \end{bmatrix} px$$

Rešenje?



Kinematika

- skaliranje:

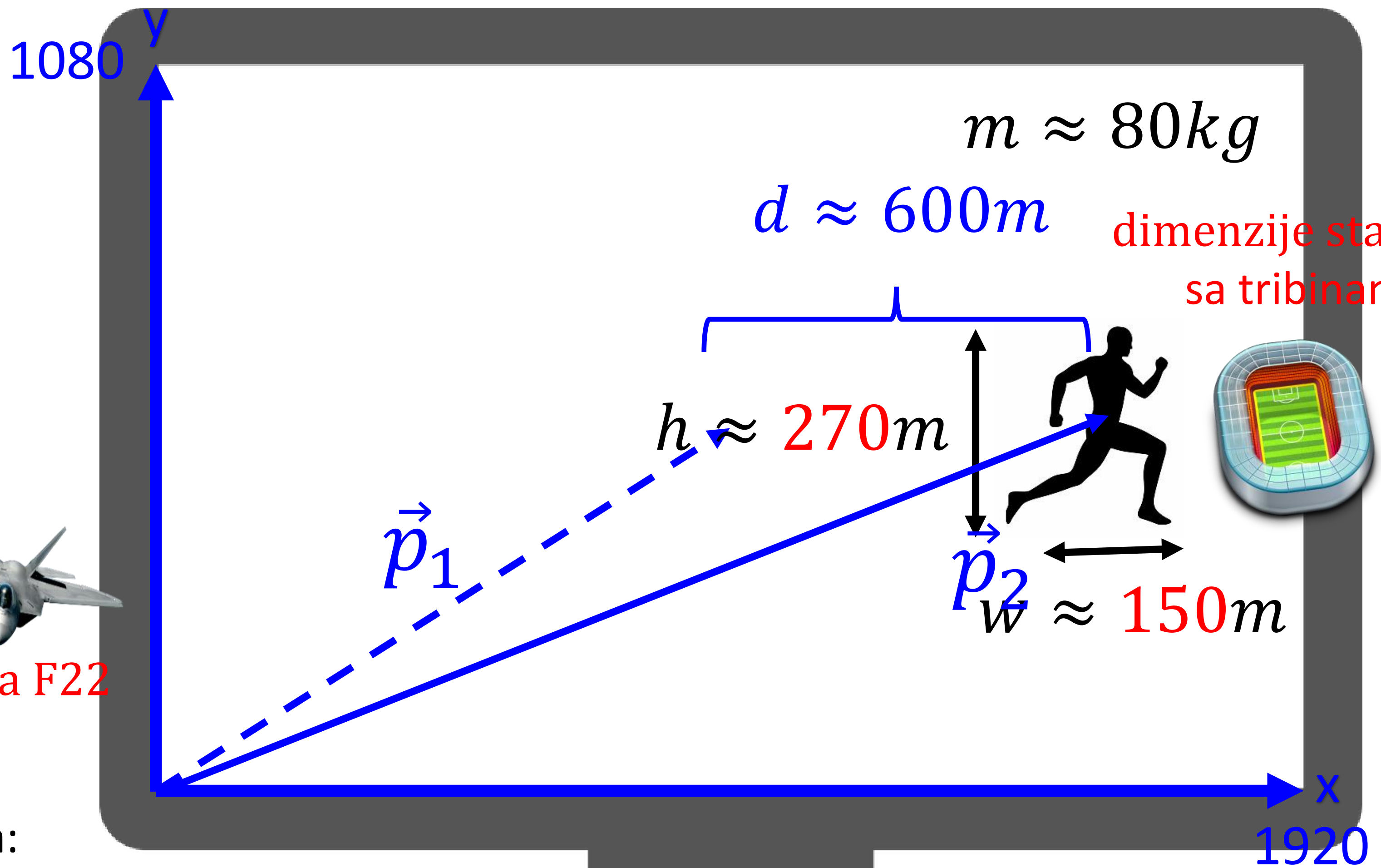
bez skaliranja:

$$1m = 1px$$

$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix} 960 \\ 540 \end{bmatrix} m$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

brzina F22



Da bi telo razvilo ovoliku brzinu tokom samo $1s$, potrebna je sila:

$$F = 80kg \frac{\begin{bmatrix} 600 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}}{1s} = \begin{bmatrix} 48000 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

potisak mlaznog motora

Kinematika

- skaliranje:

sa skaliranjem:

$$1m = 200px$$

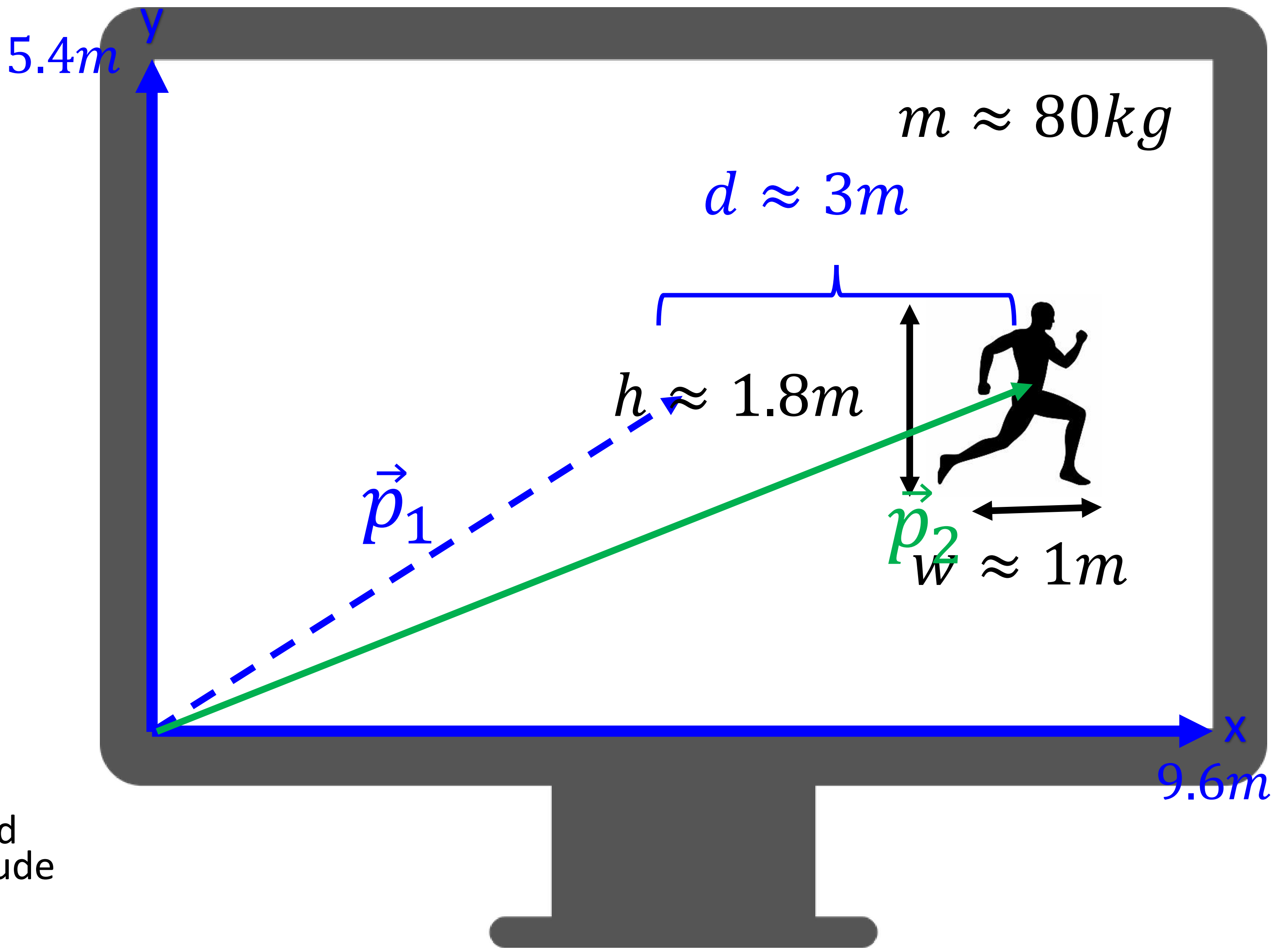
$$\vec{p}_1 = \begin{bmatrix}4.8\\2.8\end{bmatrix}m$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\frac{m}{s}$$

$$t = 1s$$

$$\vec{p}_2 = \begin{bmatrix}7.8\\2.8\end{bmatrix}m$$

Odnos se određuje u zavisnosti od primene, a poželjno je da je da bude dinamički izmenljiv (*zoom*).



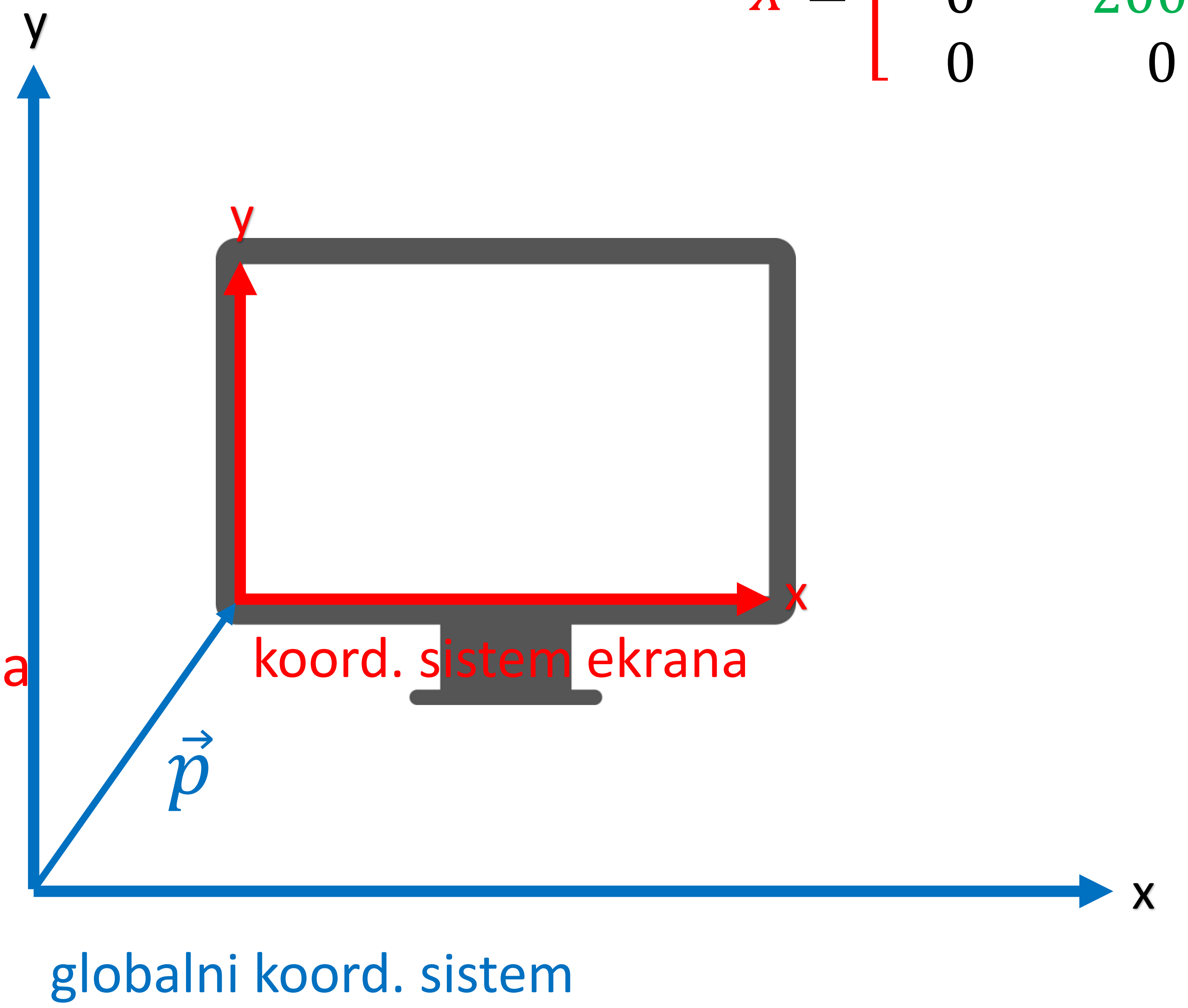
Kinematika

$$X = \begin{bmatrix} 200.0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 200.0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Što je faktor skaliranja manji, više stane na ekran i obrnuto!



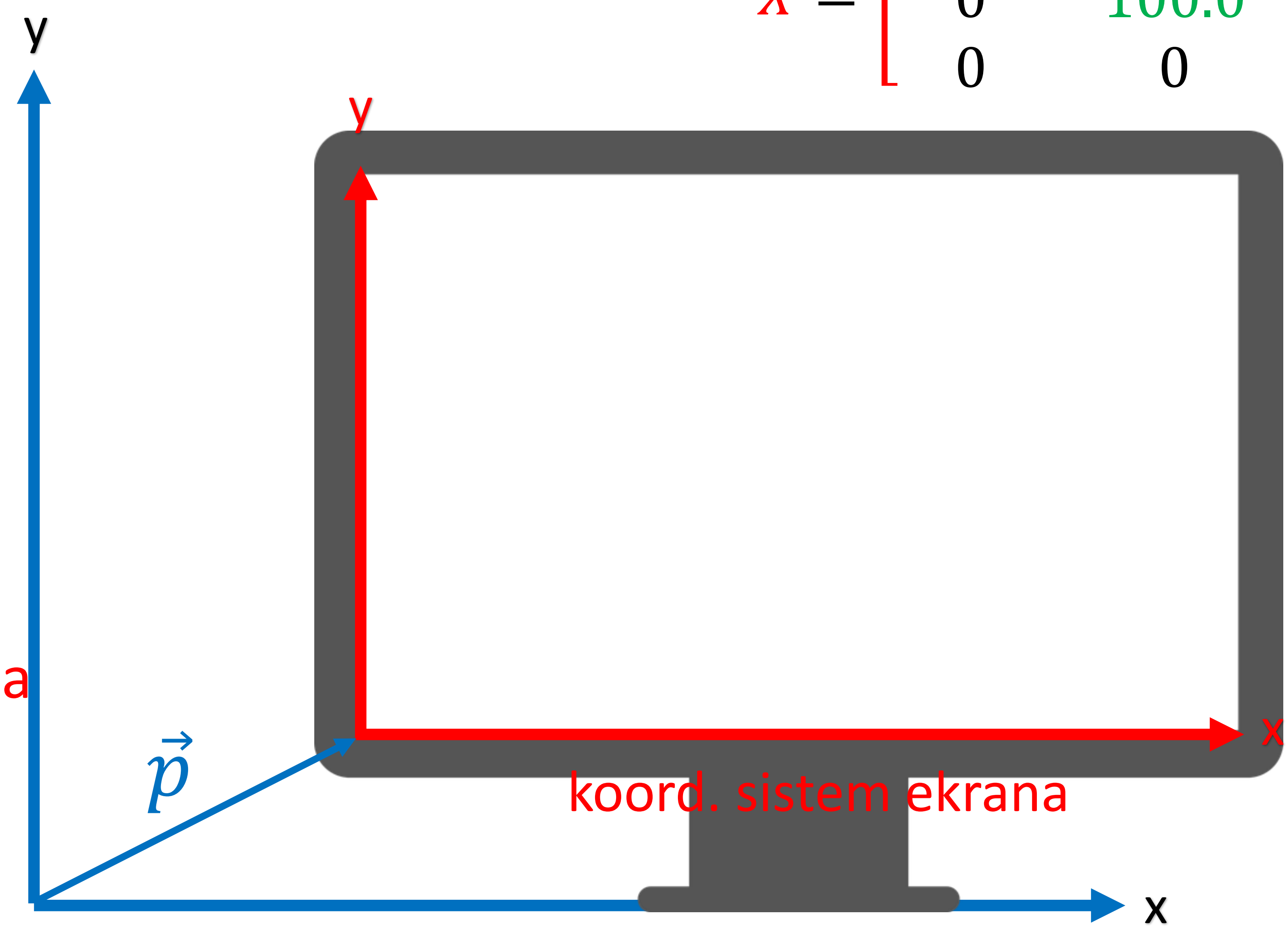
Kinematika

$$X = \begin{bmatrix} 100.0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 100.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Što je faktor skaliranja manji, više stane na ekran i obrnuto!

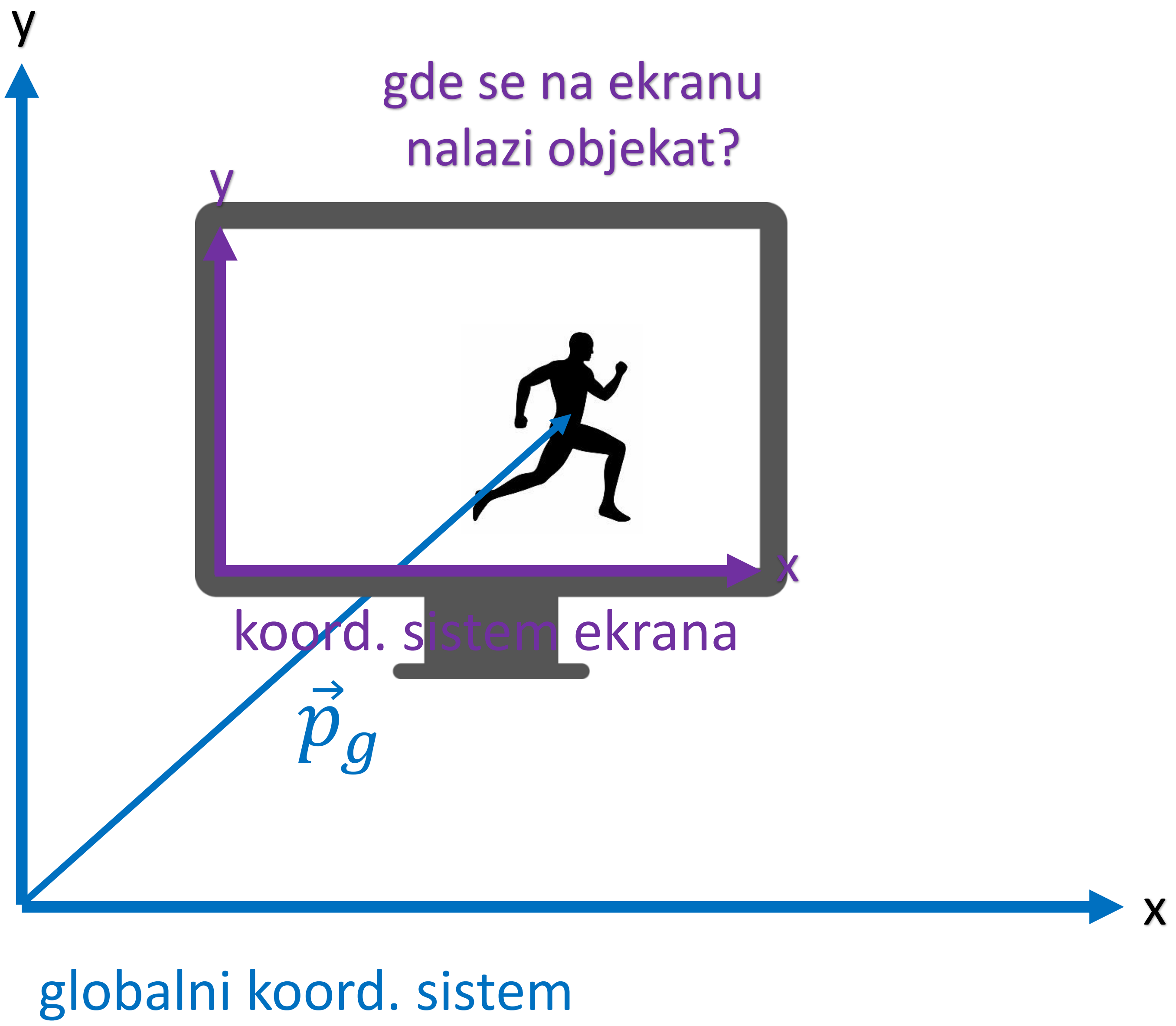


globalni koord. sistem

Kinematika

- prostor ekrana:

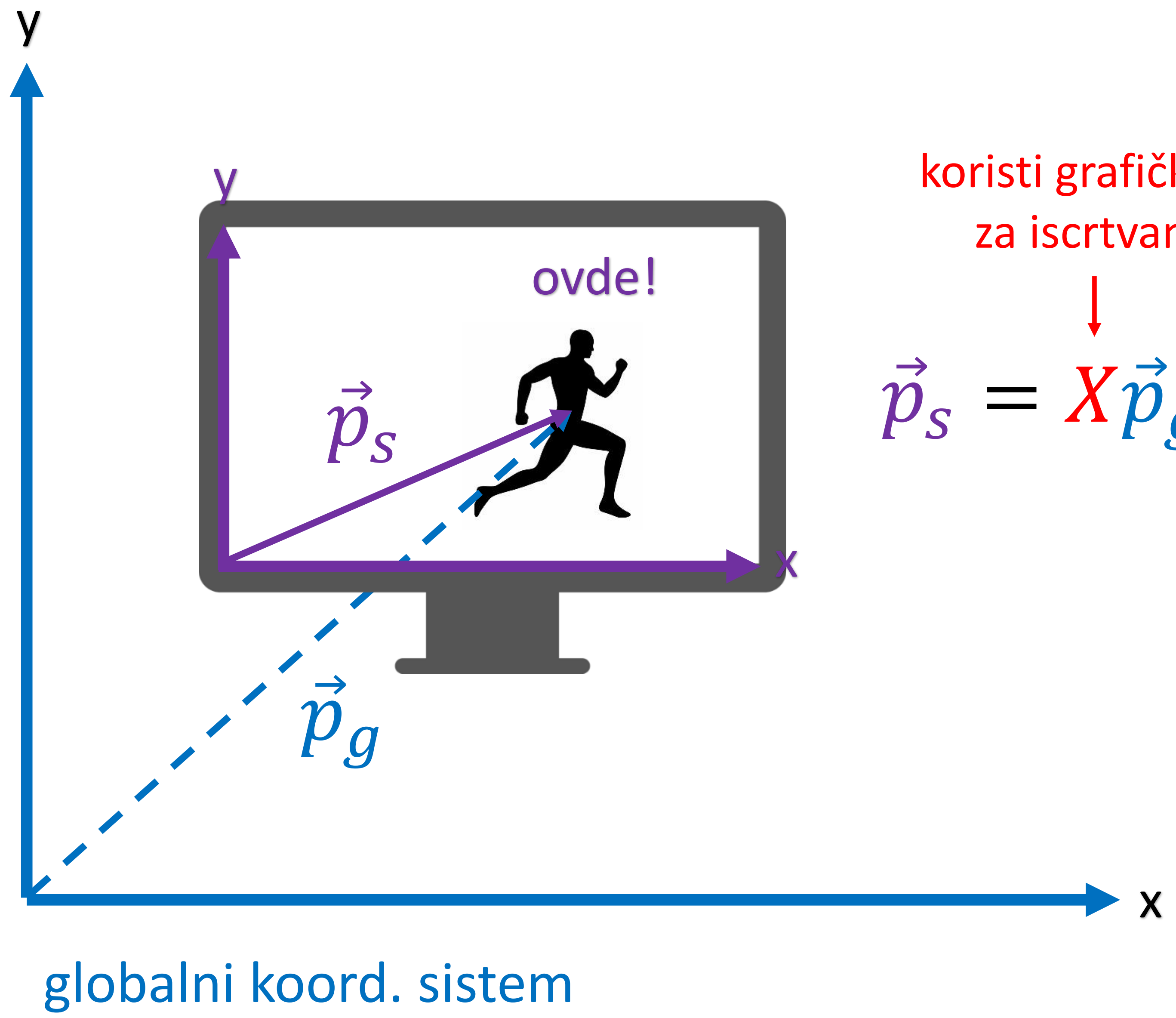
$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



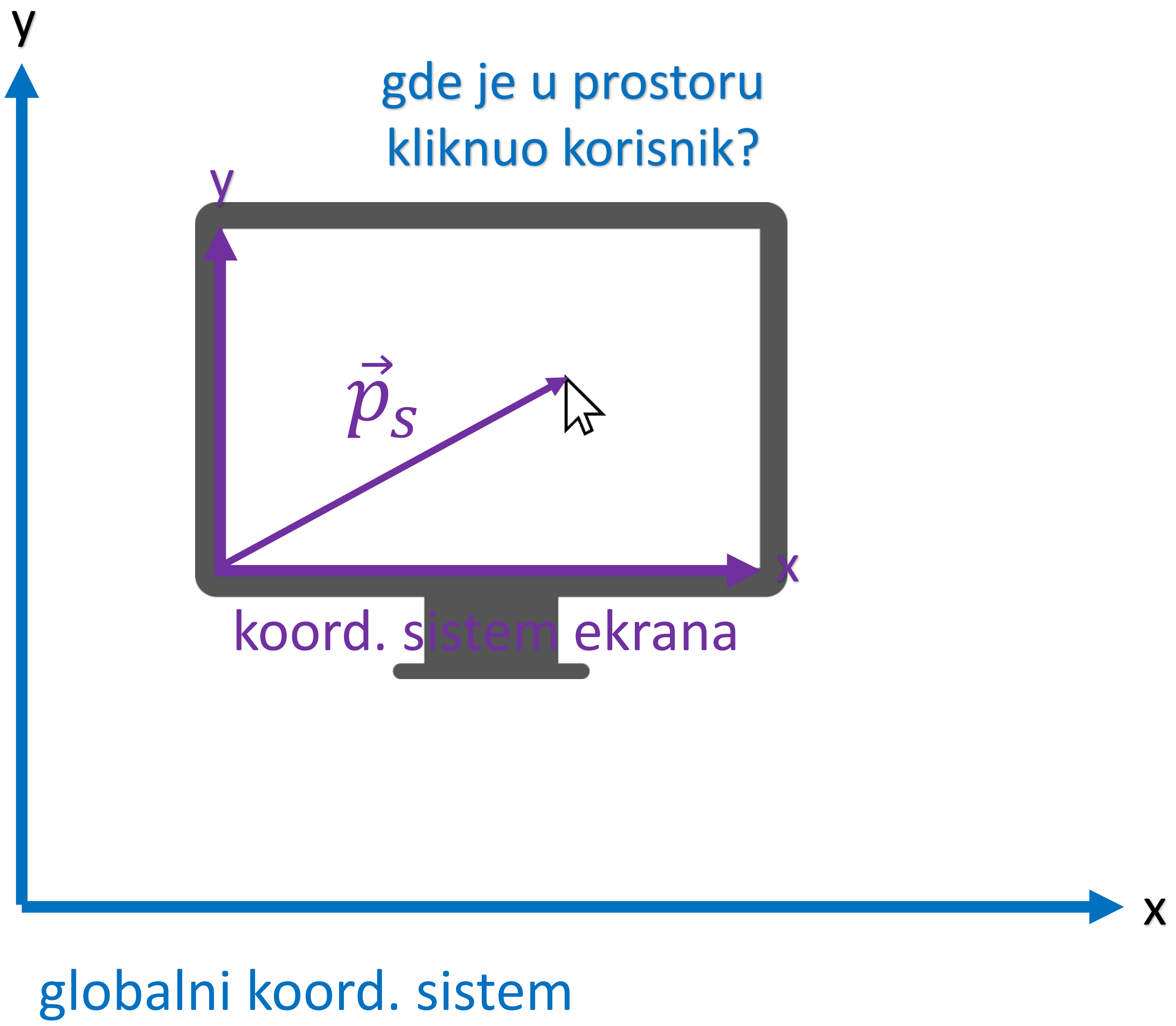
koristi grafički API za iscrtvanje

$$\vec{p}_s = X\vec{p}_g$$

Kinematika

- prostor ekrana:

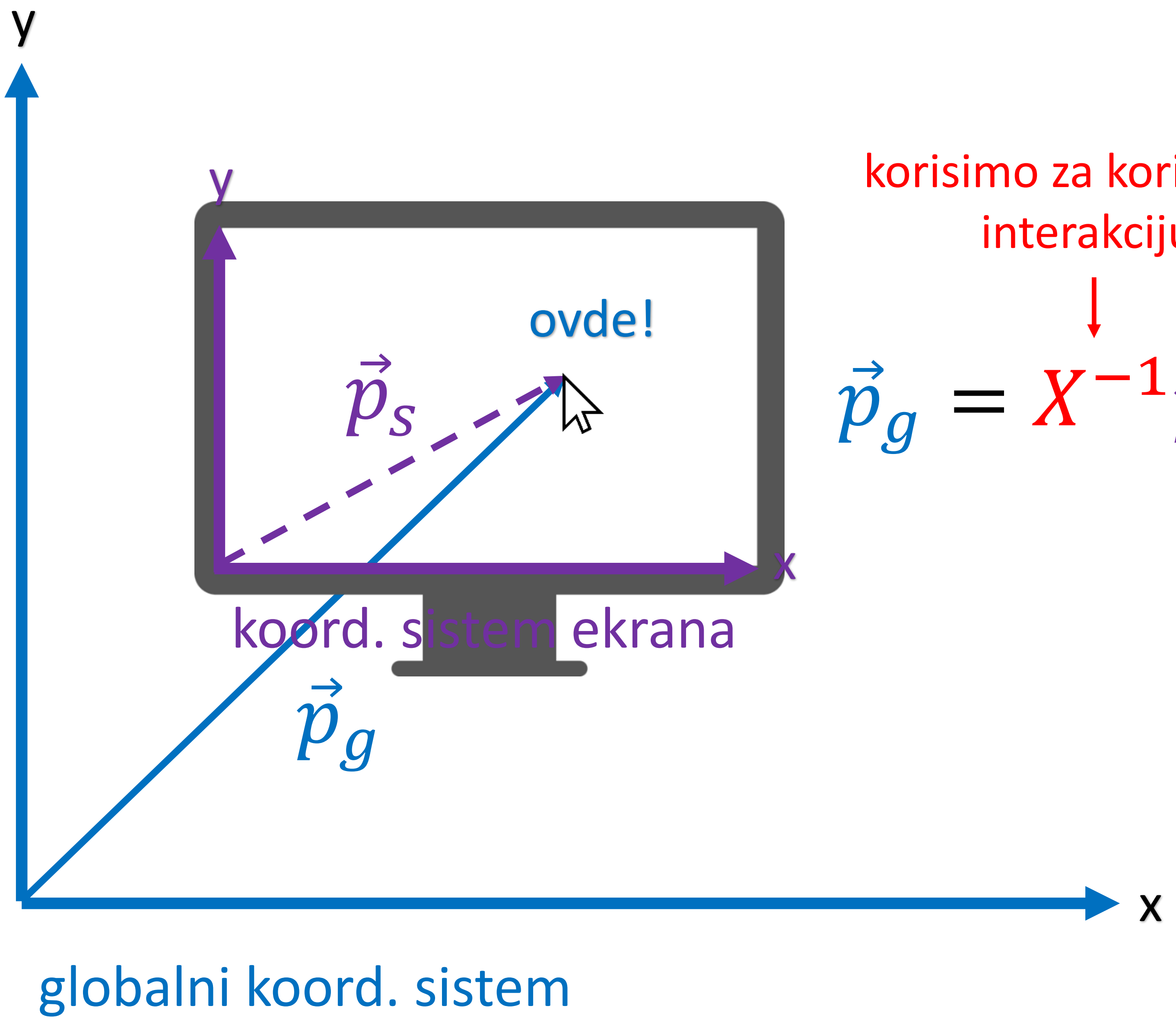
$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kinematika

- prostor ekrana:

$$X = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x \\ 0 & s_y & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



korisimo za korisničku interakciju

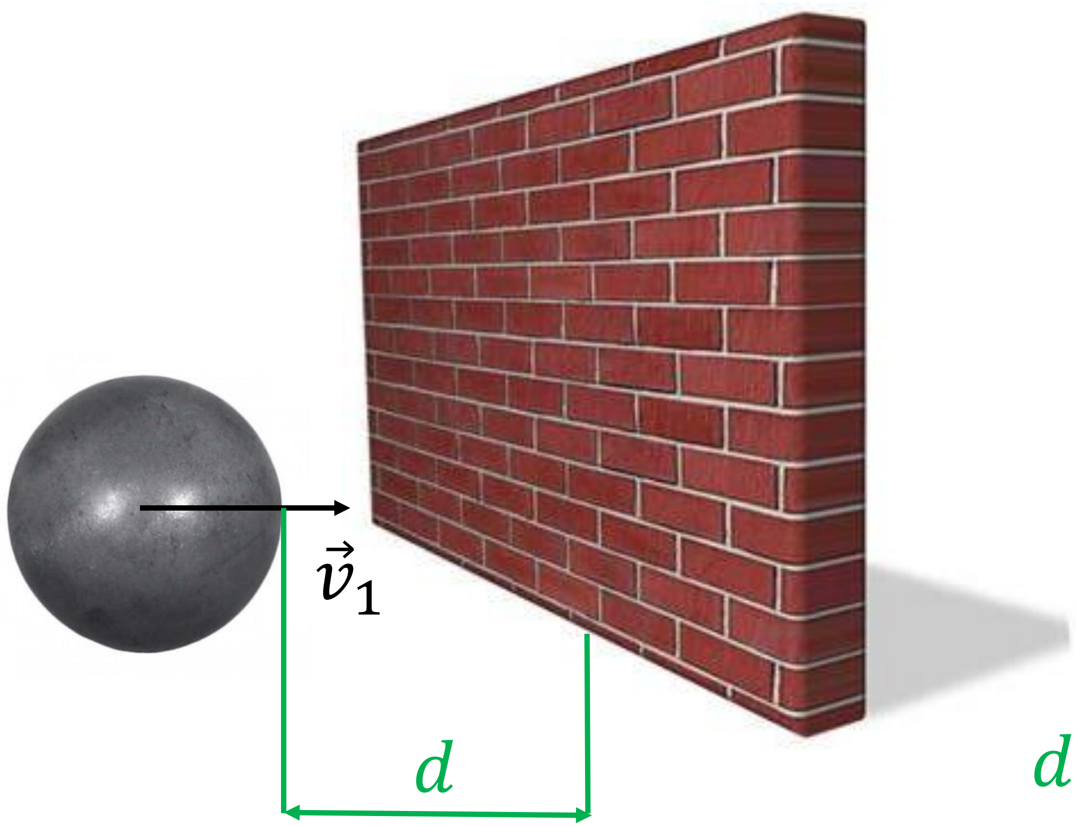
$$\vec{p}_g = X^{-1}\vec{p}_s$$

Ograničeno kretanje

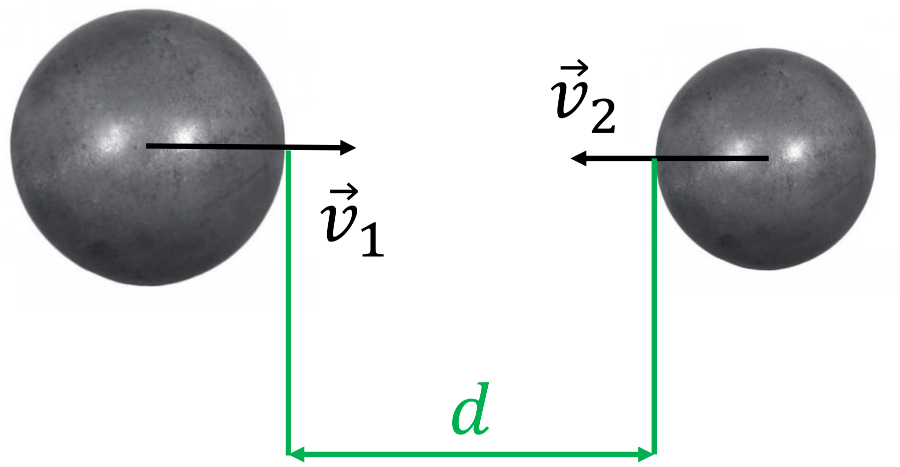
Kako ograničiti slobodno kretanje/rotaciju tela u unapred određenim uslovima?

Ograničeno kretanje

- kontaktna ograničenja: dozvoljeno stanje

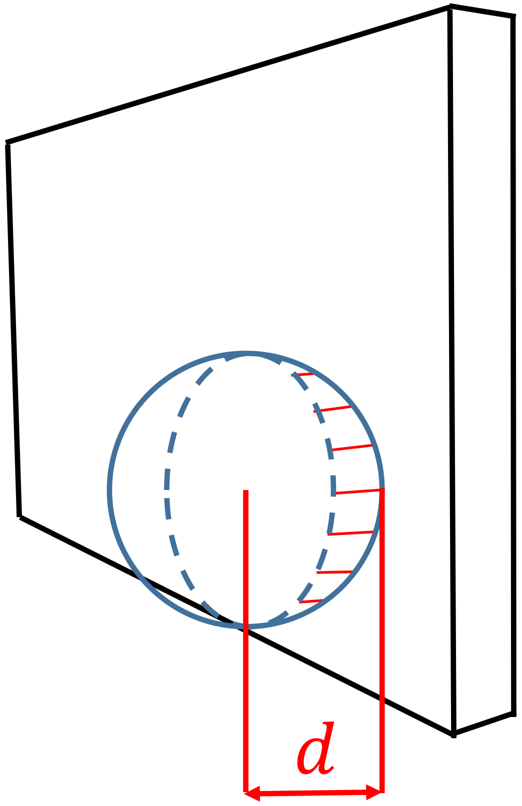


$d \geq 0$

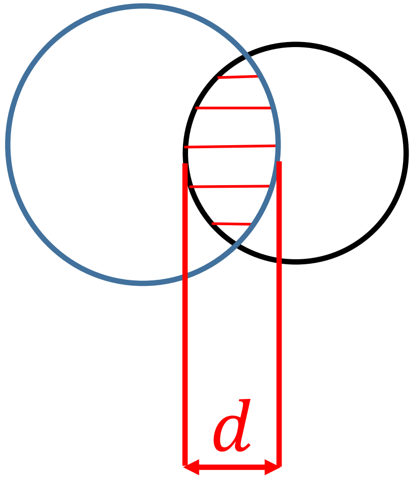


Ograničeno kretanje

- kontaktna ograničenja: nedozvoljeno stanje

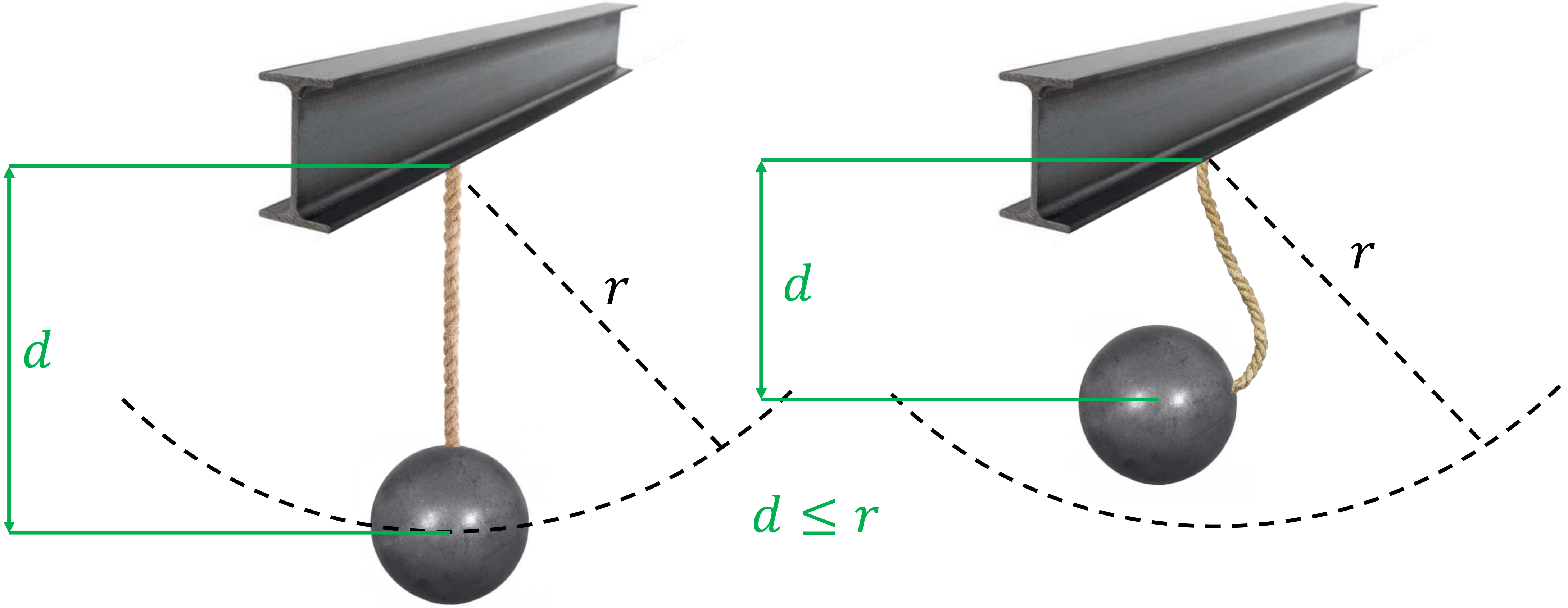


$$d < 0$$



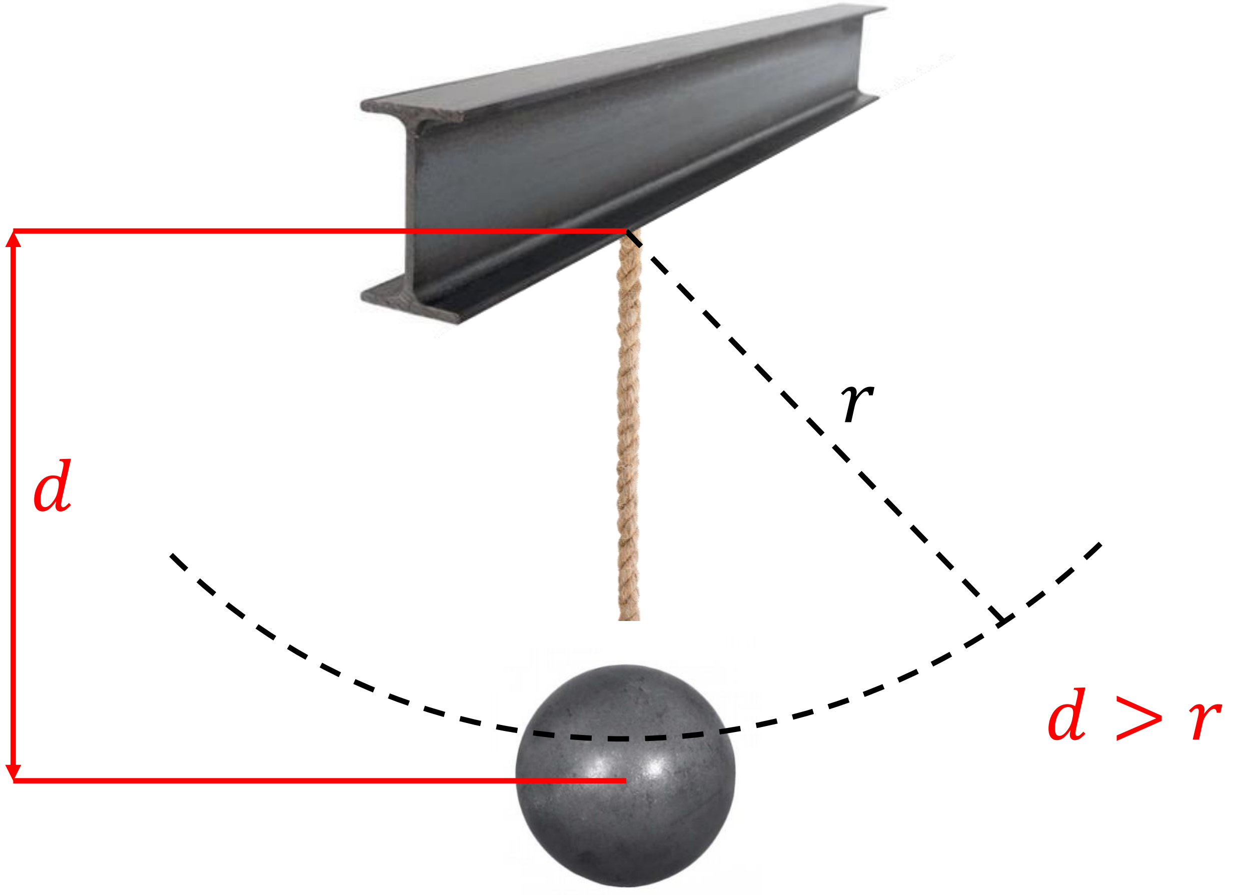
Ograničeno kretanje

- klatna: dozvoljeno stanje



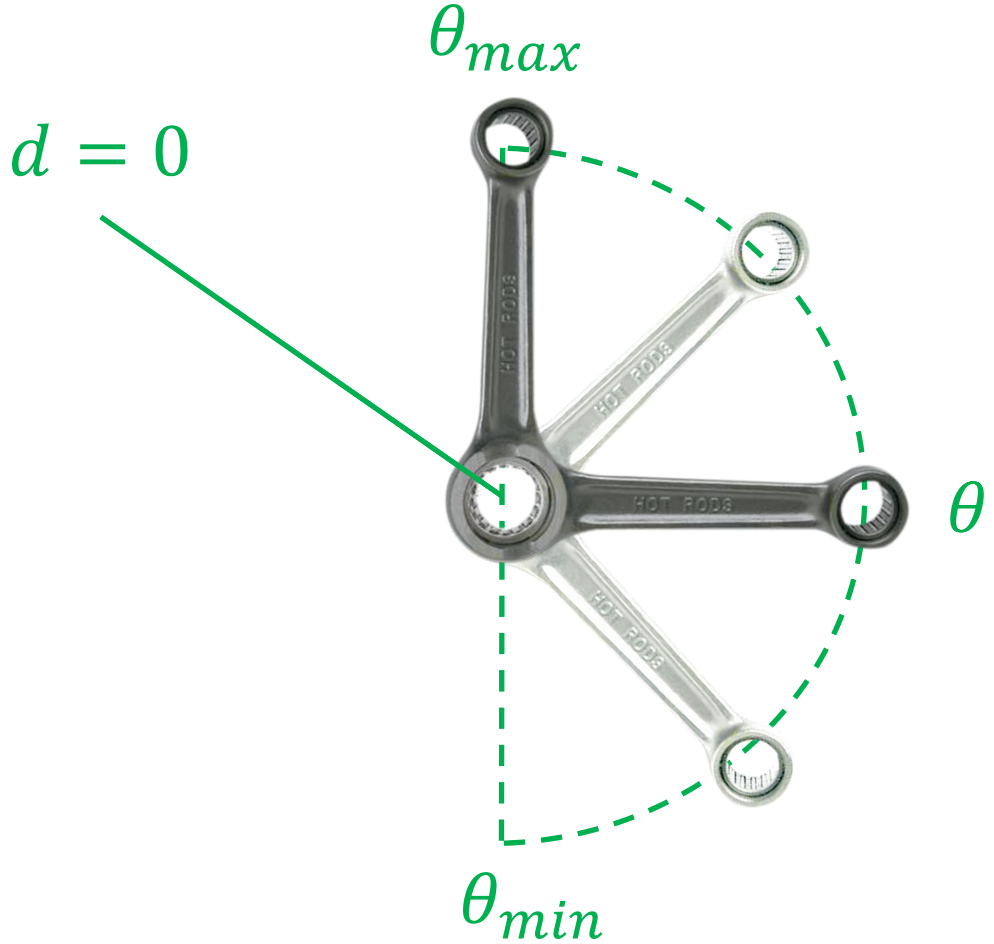
Ograničeno kretanje

- klatna: nedozvoljeno stanje



Ograničeno kretanje

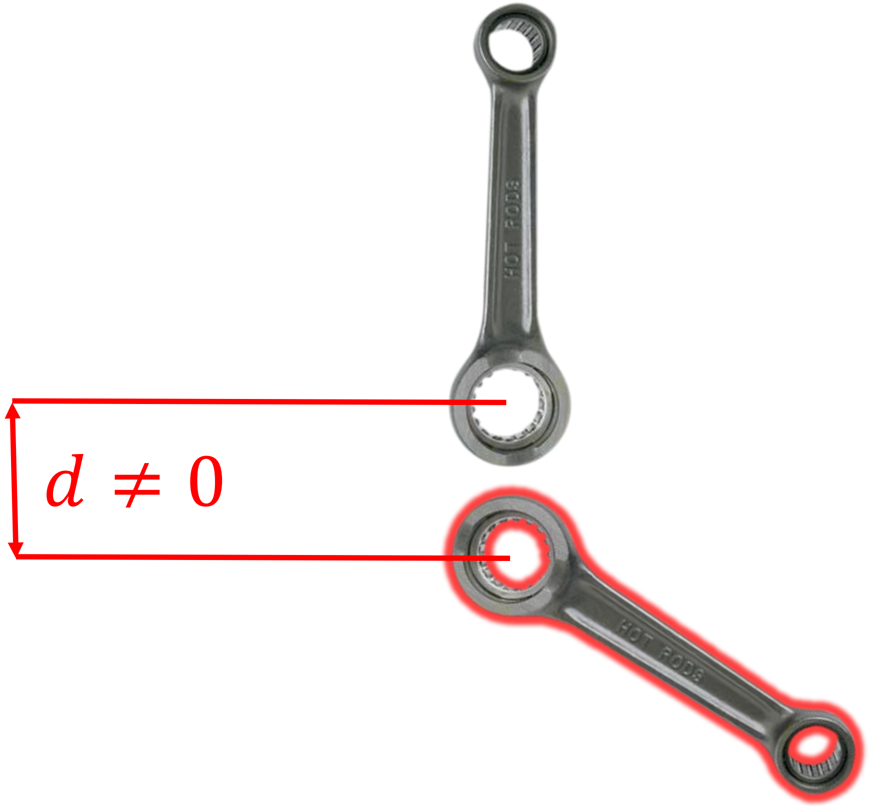
- zglobovi (*joints*): dozvoljeno stanje

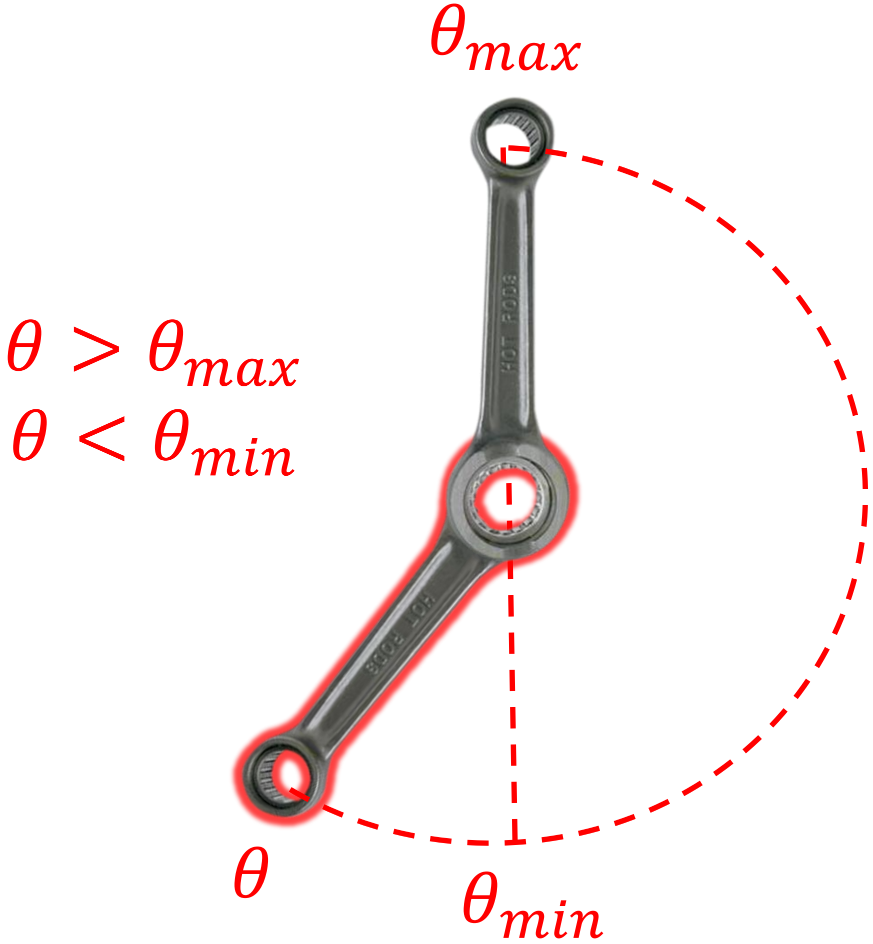


$$\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max}$$

Ograničeno kretanje

- zglobovi (*joints*): nedozvoljeno stanje





Ograničeno kretanje

- opruge
- fluidi
- tkanina
- *ragdolls*
- itd.

Ograničeno kretanje

- postupak (*pipeline*):

Primena sile

Integracija

Otkrivanje (narušenja) ograničenja

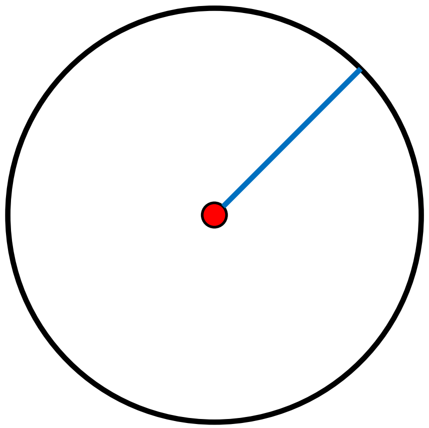
Rešavanje ograničenja

Prikaz

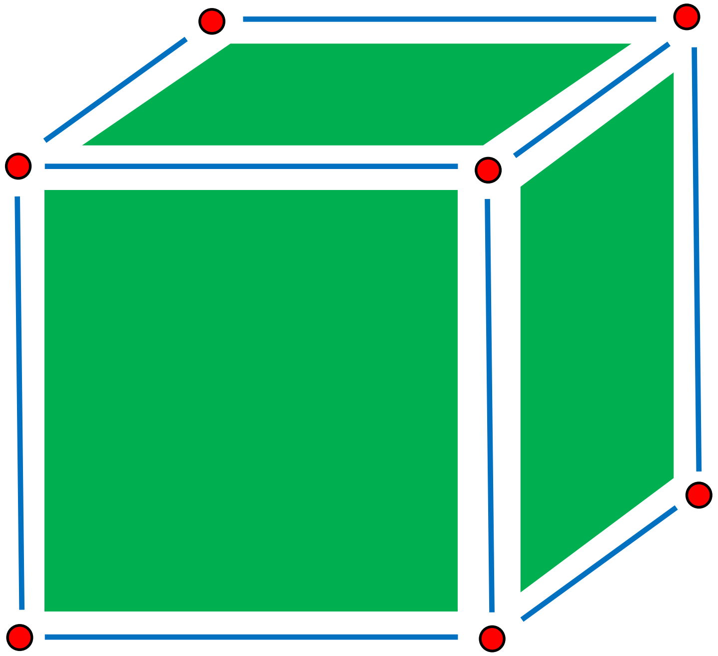
Pauza

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - karakteristična obeležja geometrije (*features*)



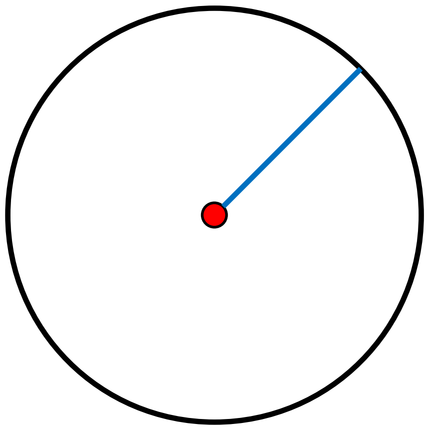
- centar
- poluprečnik



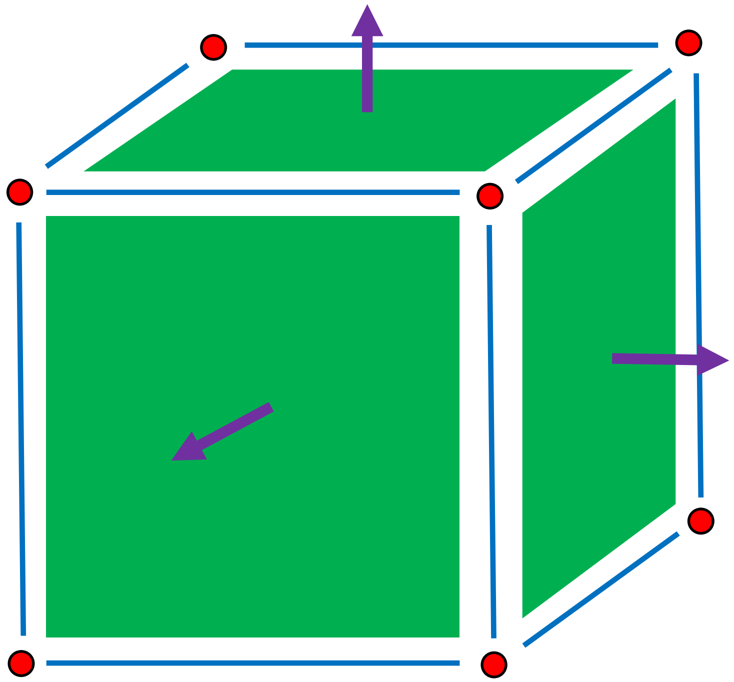
- temena (*veritces*)
- ivice (*edges*)
- stranice (*faces*)
- šta je spolja, a šta unutra?

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - karakteristična obeležja geometrije (*features*)



- centar
- poluprečnik

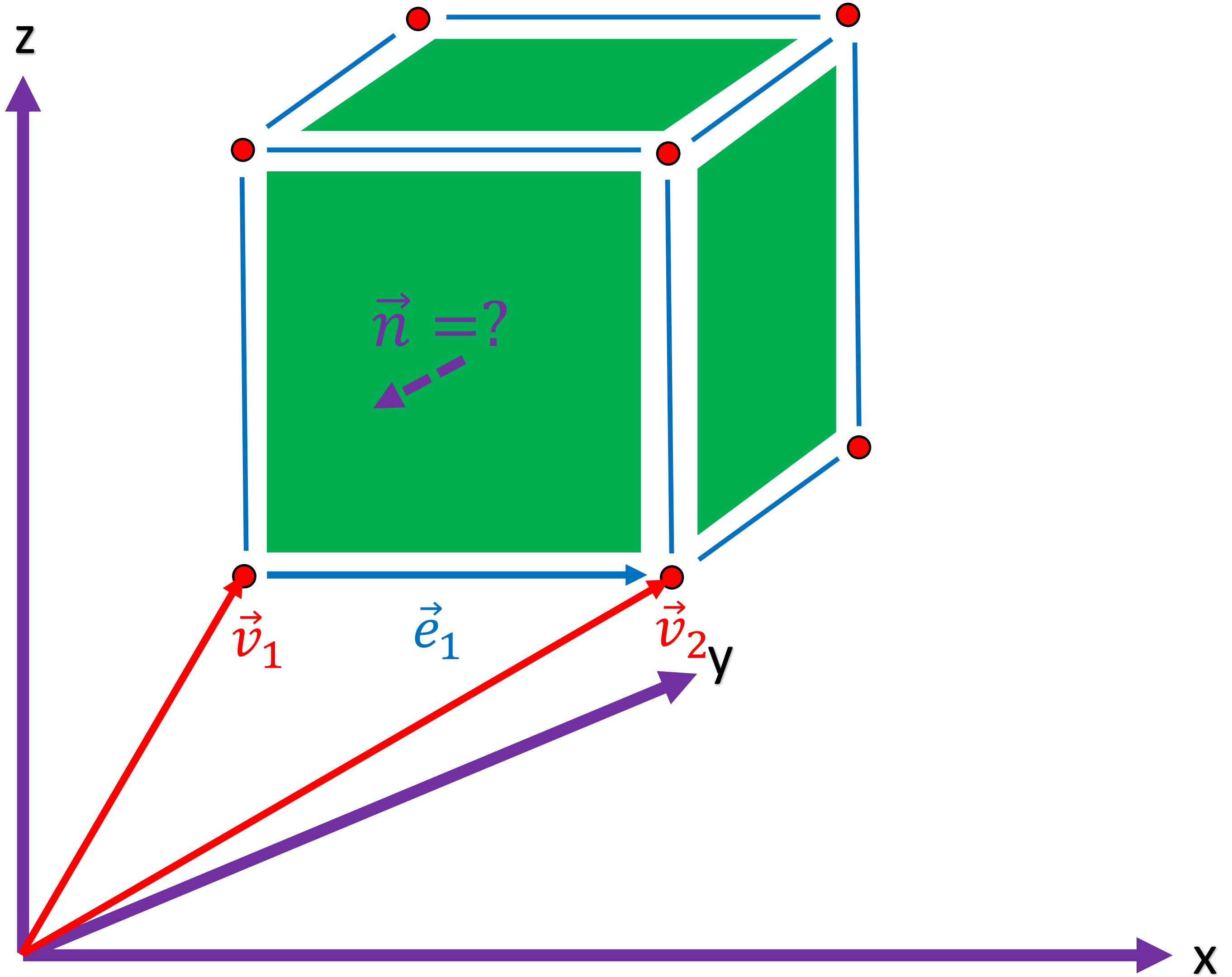


- temena (*veritces*)
- ivice (*edges*)
- stranice (*faces*)
- normale

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - normale (3D)

$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

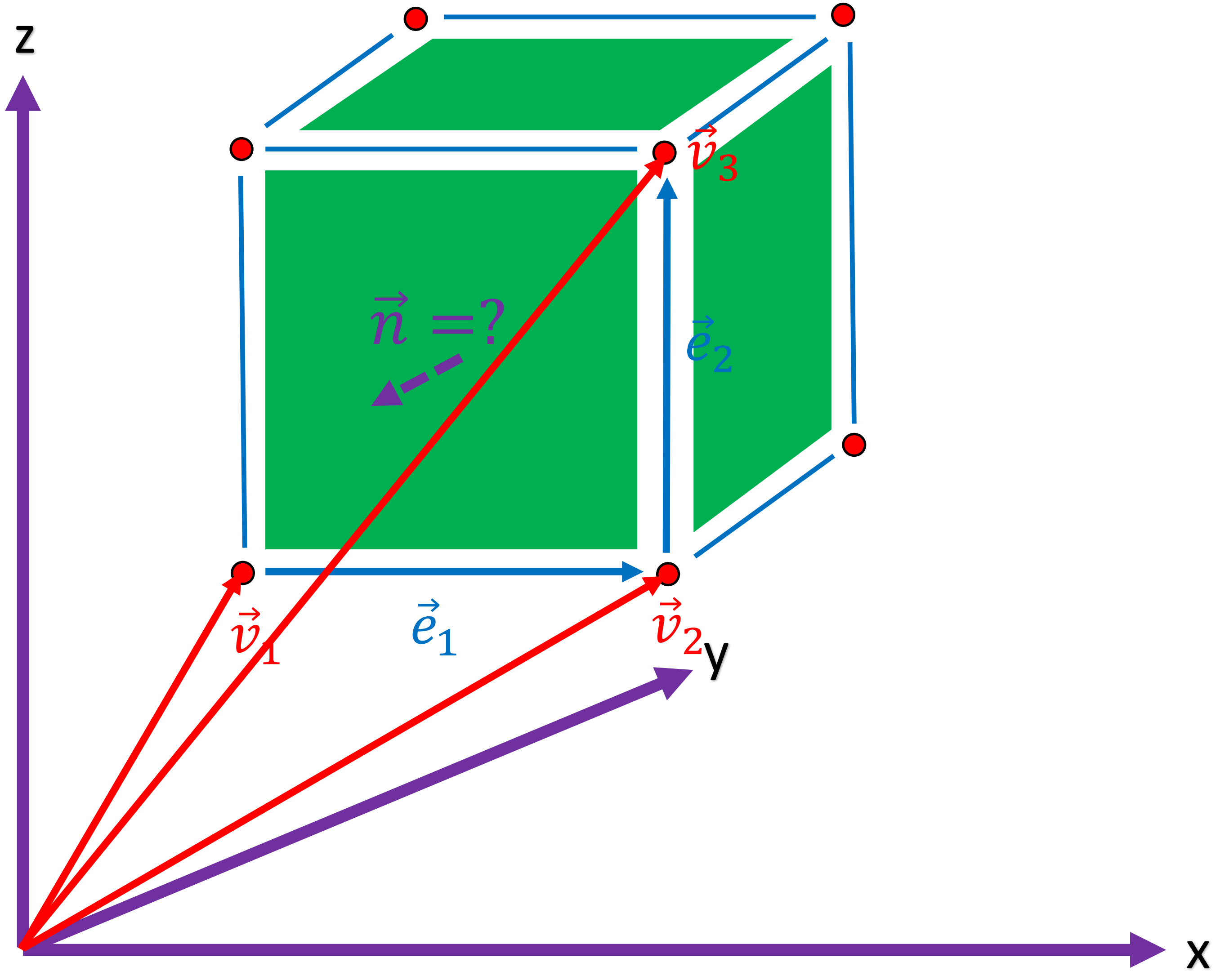


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - normale (3D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$$



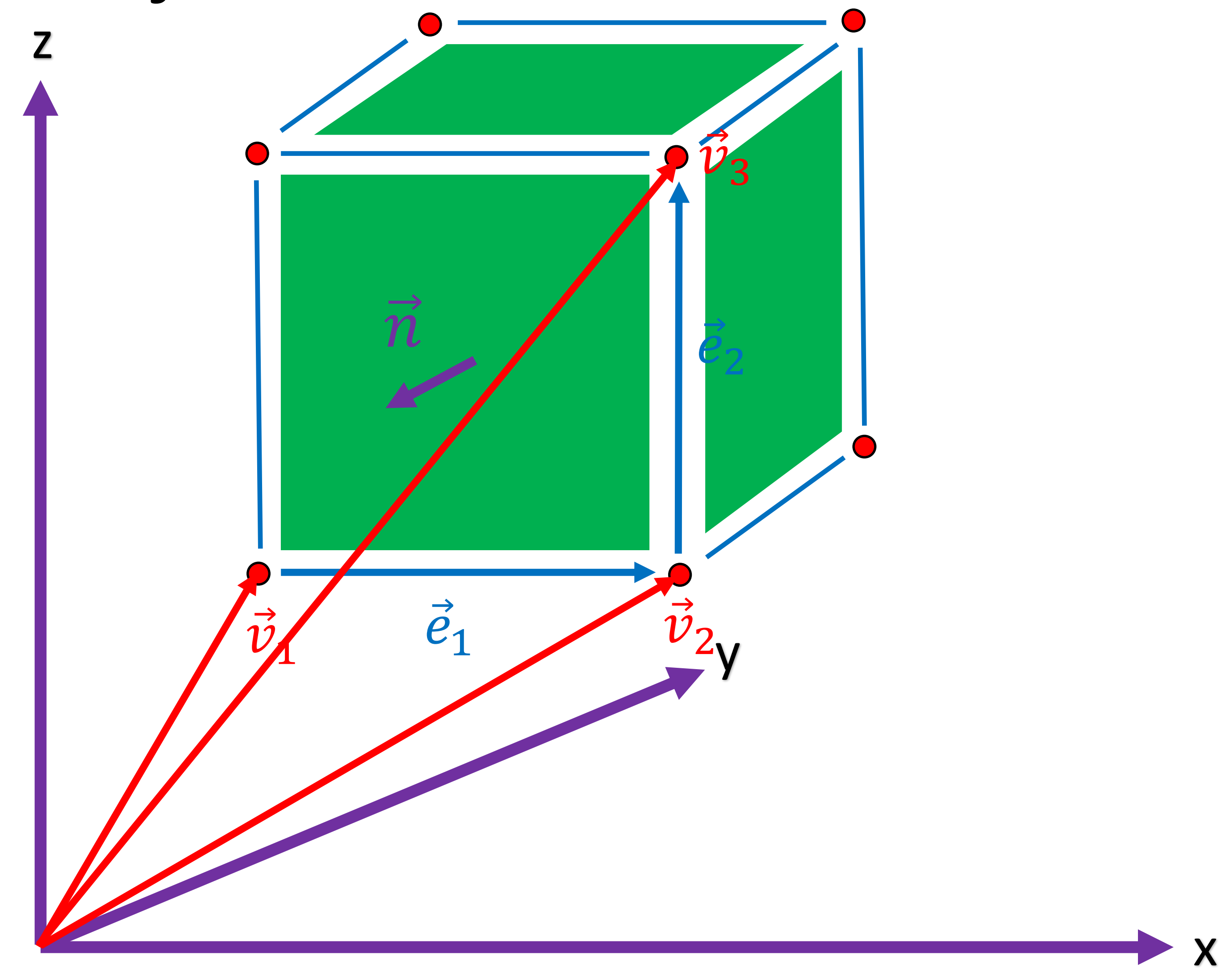
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - normale (3D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$$

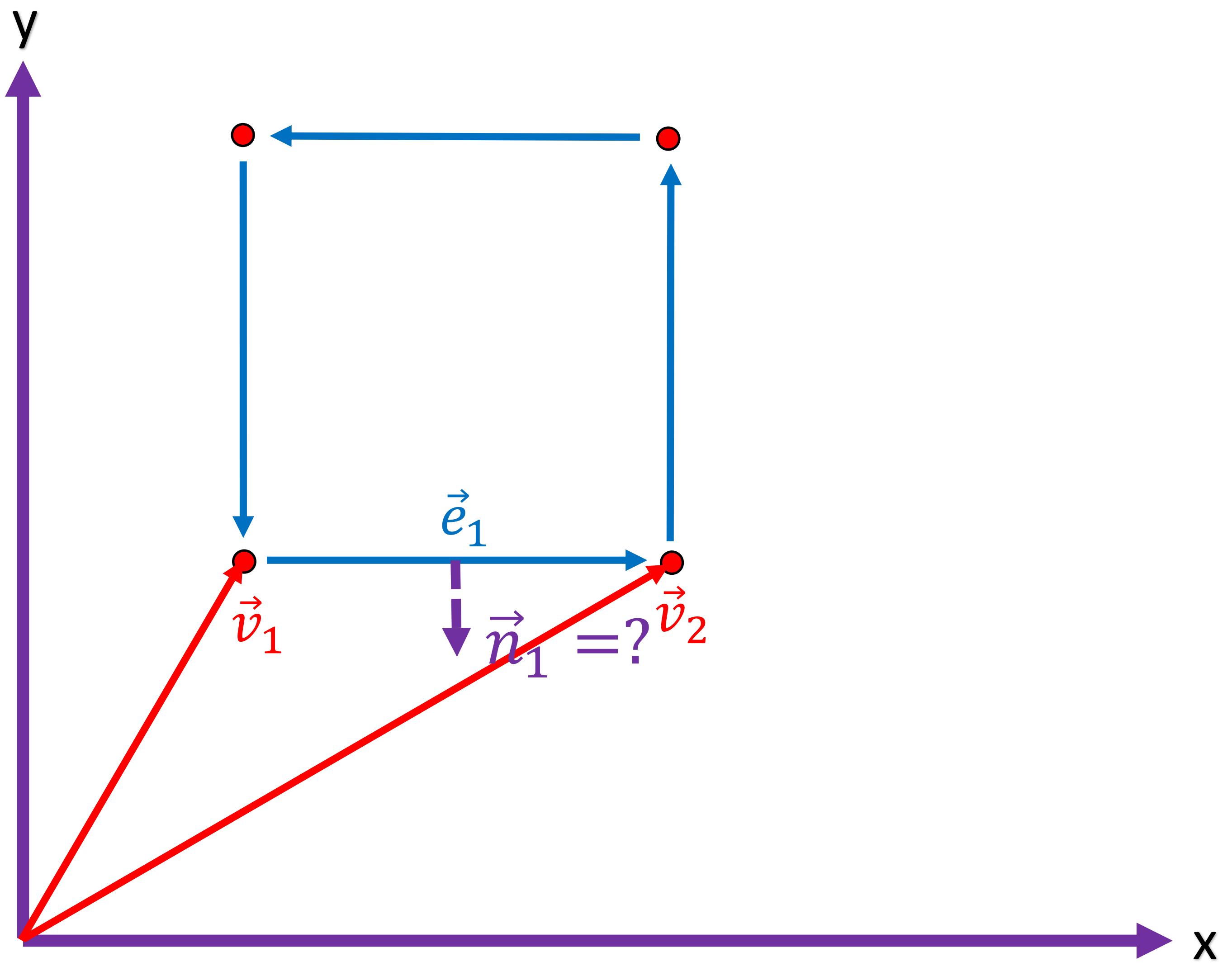
$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}{|\vec{e}_2 \times \vec{e}_1|}$$



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - normale (2D)

$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_1, y_1)$

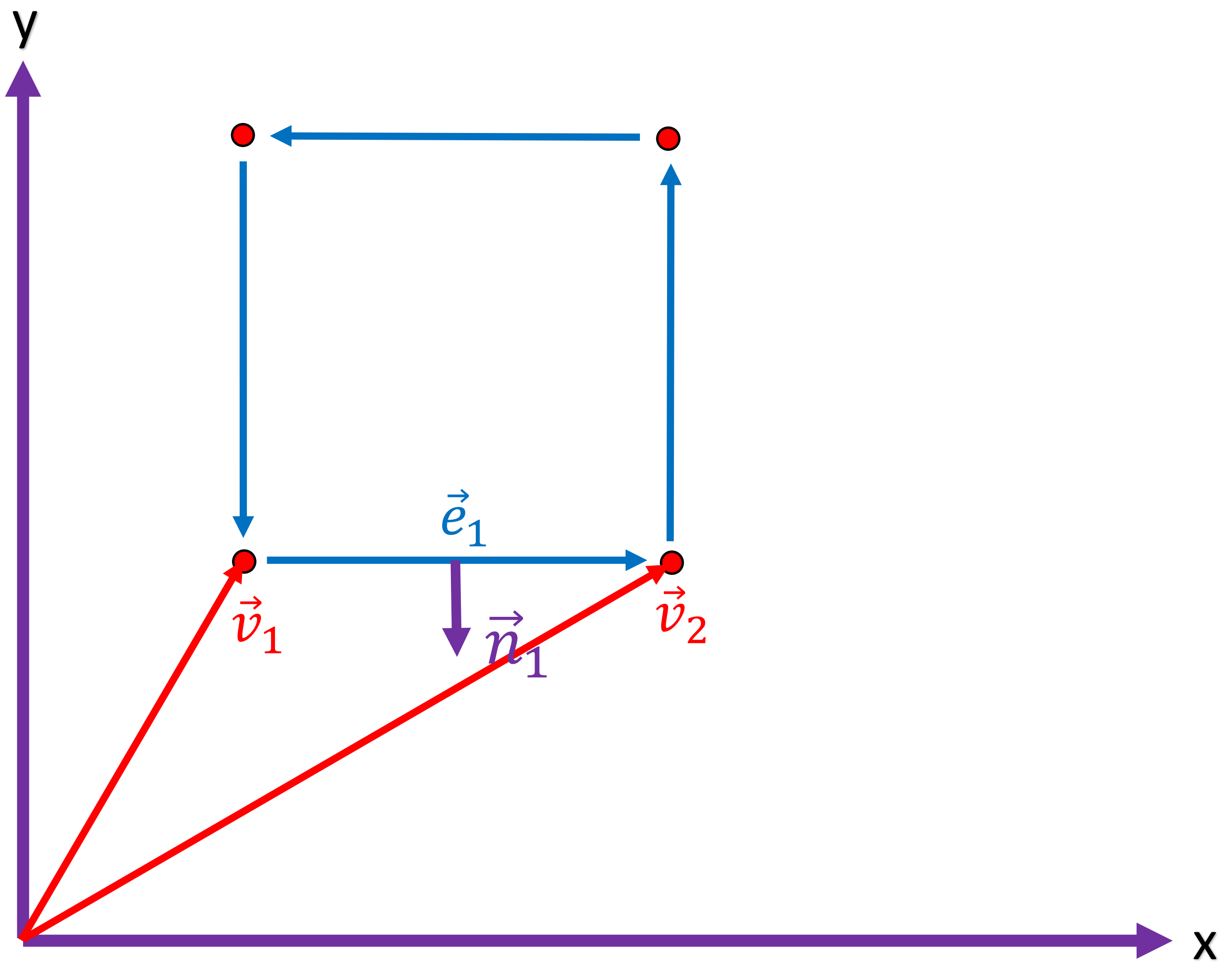


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - normale (2D)

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$

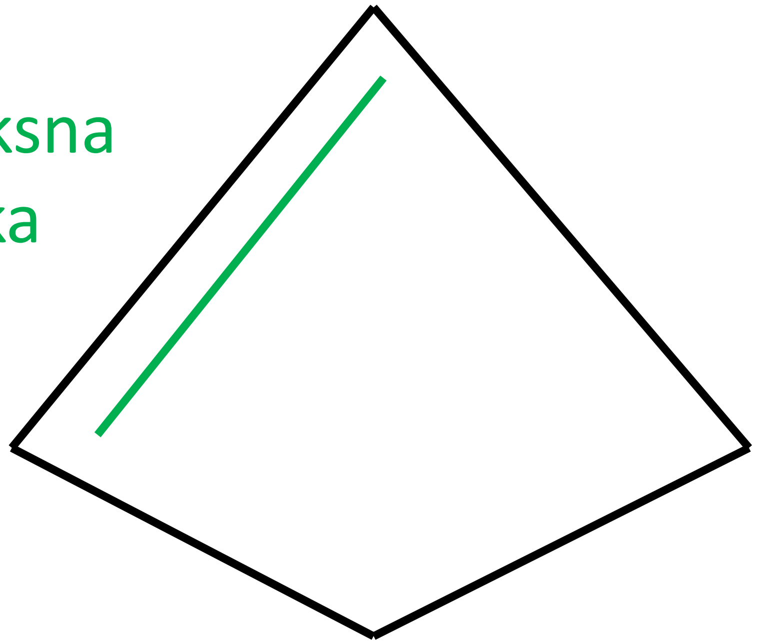
$$\vec{n}_1 = \frac{(y_1, -x_1)}{|(y_1, -x_1)|}$$



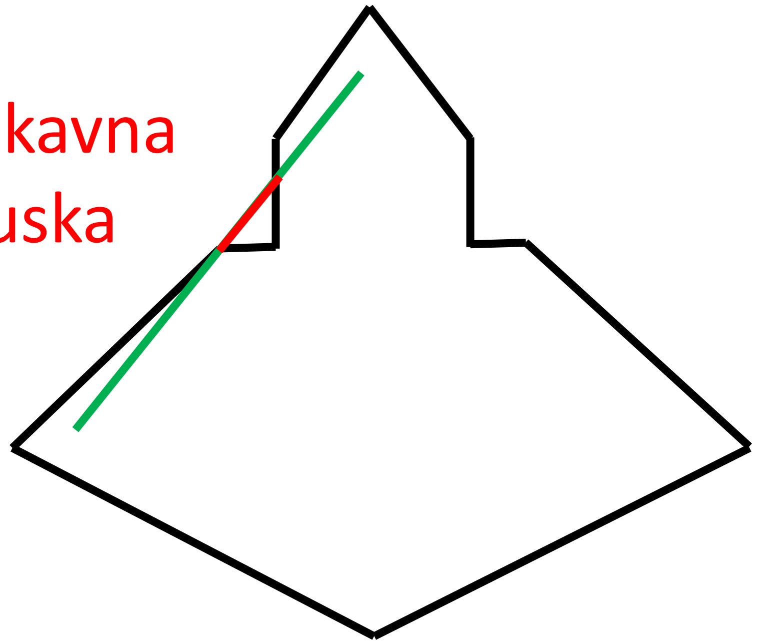
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - konveksna ljuska (*convex hull*):
     a) poligon (2D)
     b) poliedar (3D)

Konveksna ljuska

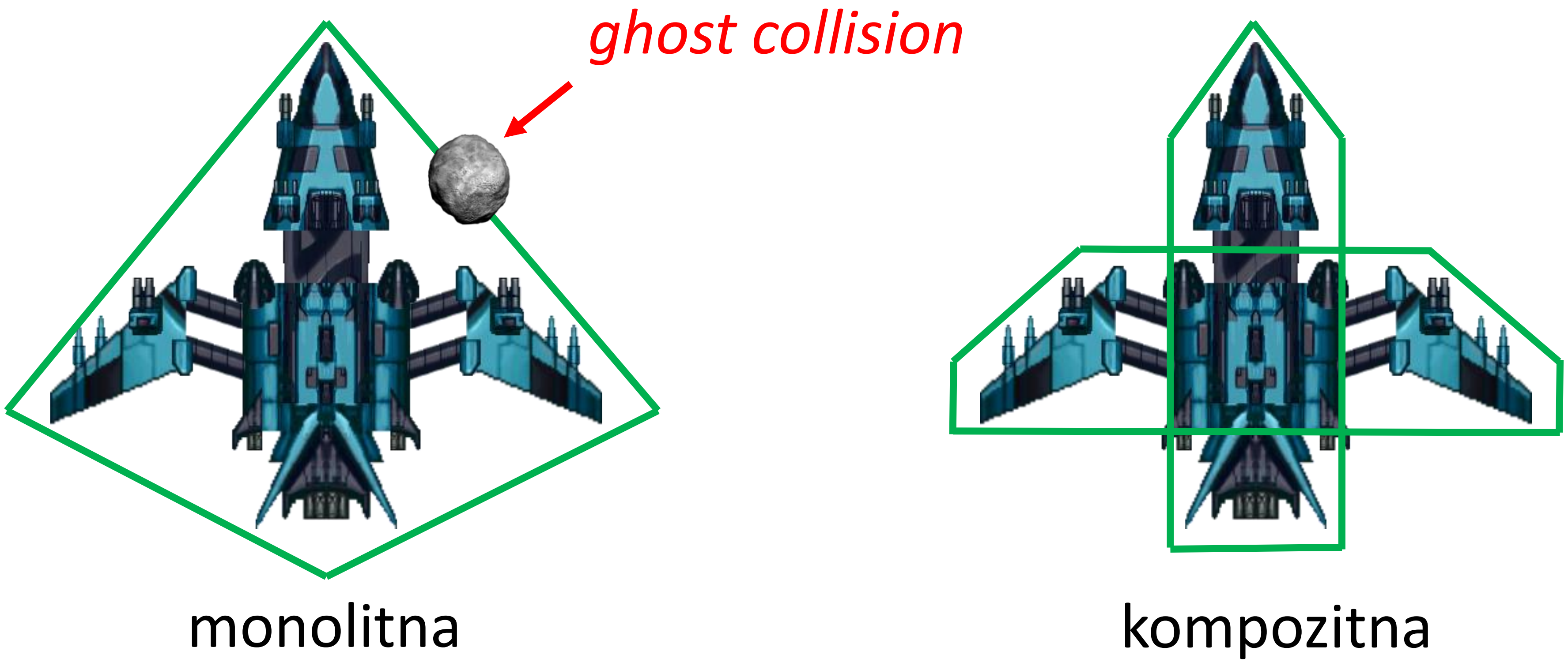


Konkavna ljuska



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - konveksna ljuska (*convex hull*):



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara

pristupi (algoritmi):

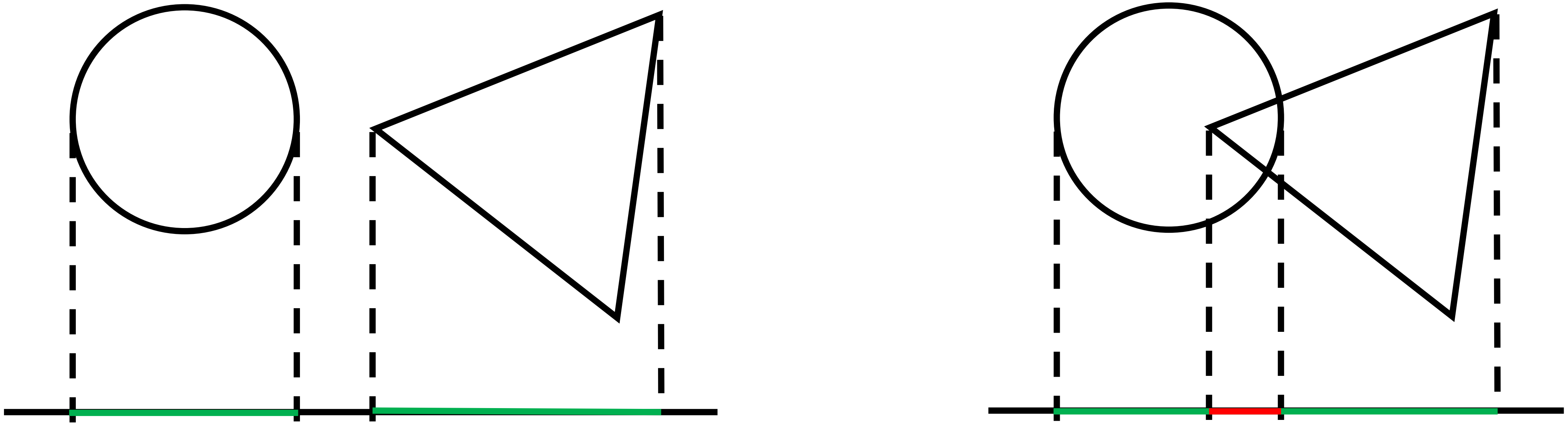
- SAT (*Separating Axis Test*), test razdvajajuće ose
- *Gilbert–Johnson–Keerthi distance* algoritam + *Expanding Polytope Algorithm*

- oslanjaju se na postojanje konveksnih ljuski!

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Theorem*:

“Ako postoji prava, duž koje se projekcije tela ne preklapaju, tela se ne sudaraju, a ta prava je za njih razdvajajuća osa.”

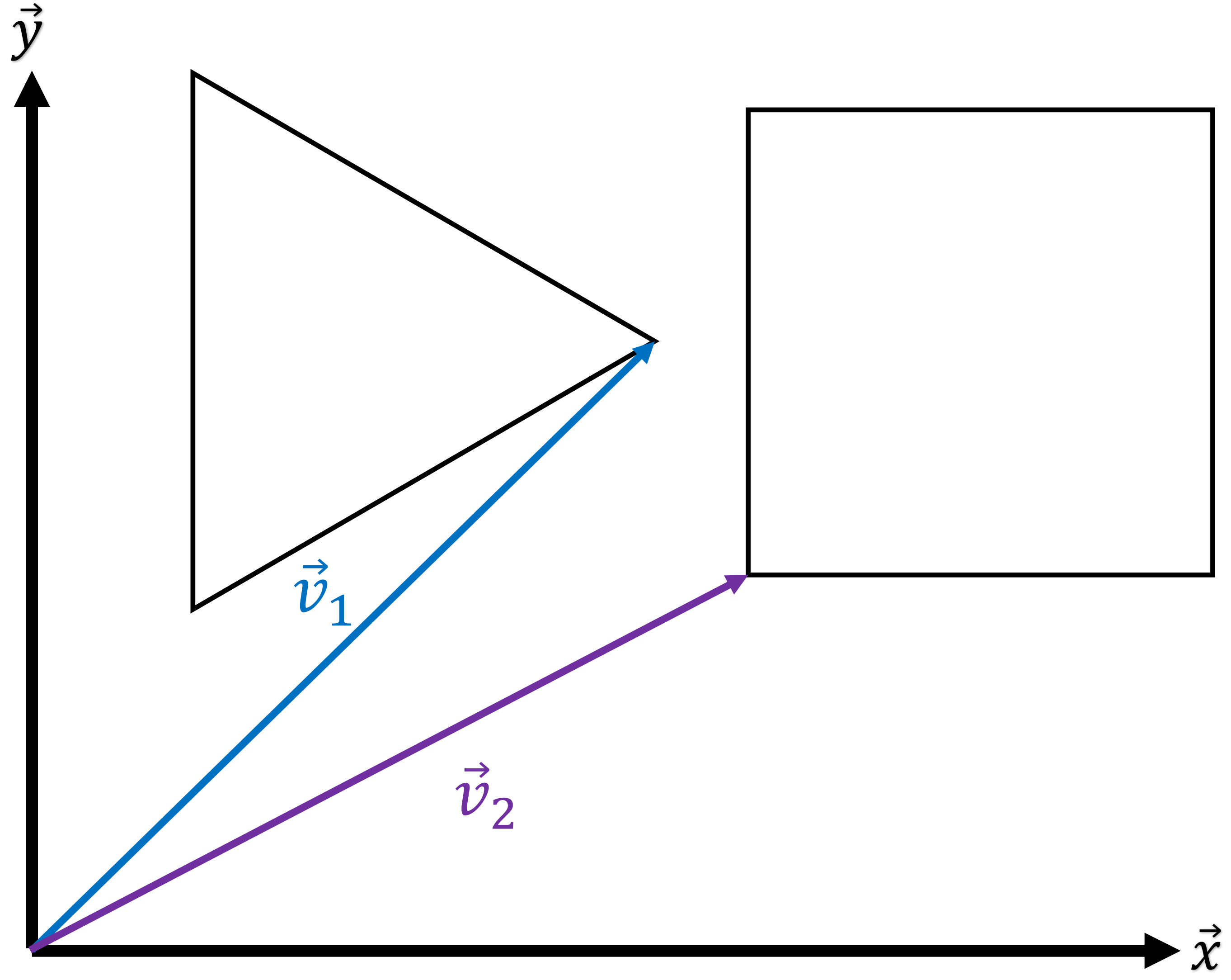


razdvajajuća osa

nije razdvajajuća osa (možda neka druga jeste)

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:



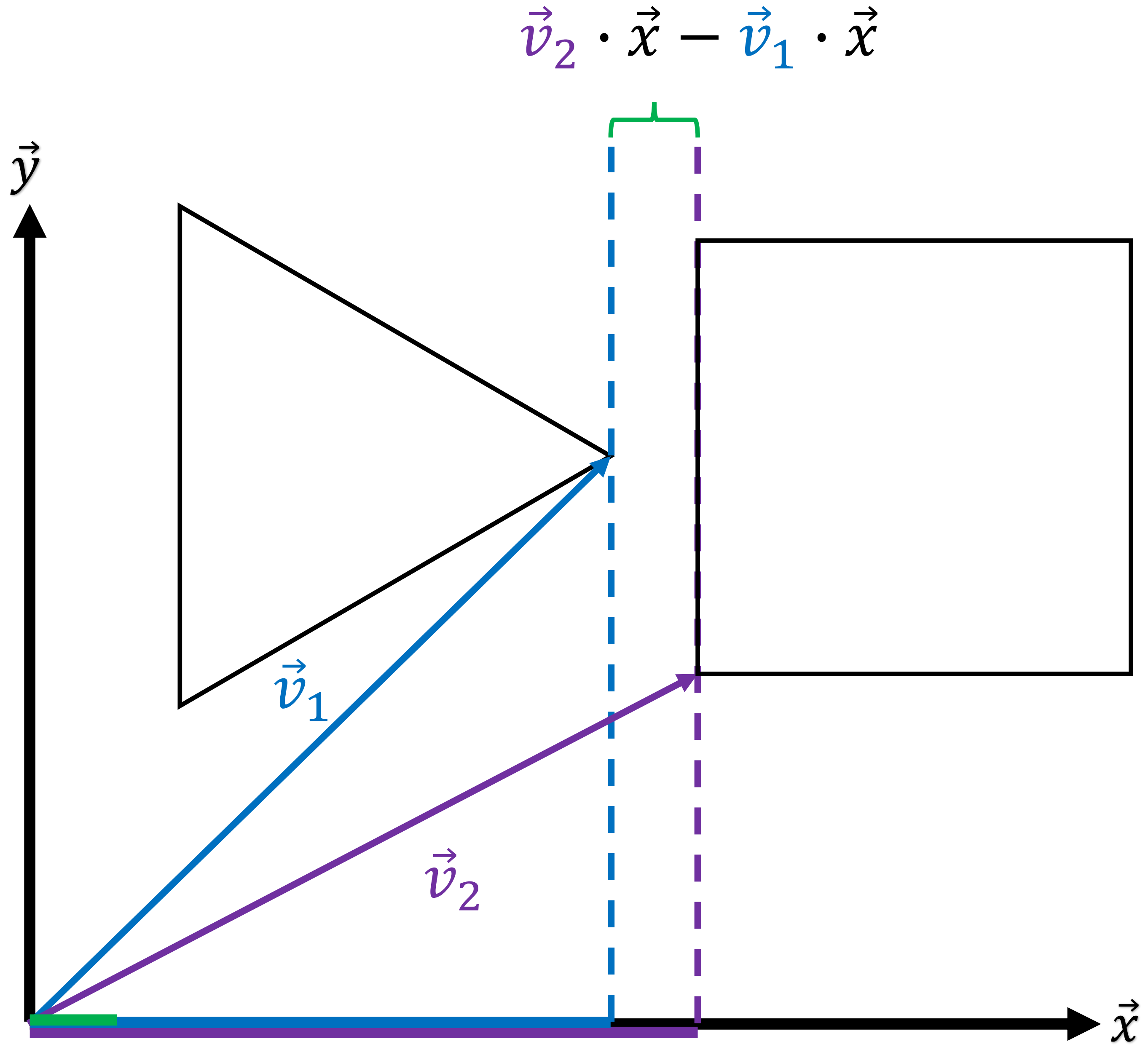
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x} - \vec{v}_1 \cdot \vec{x} > 0$$

Ne postoji kontakt!



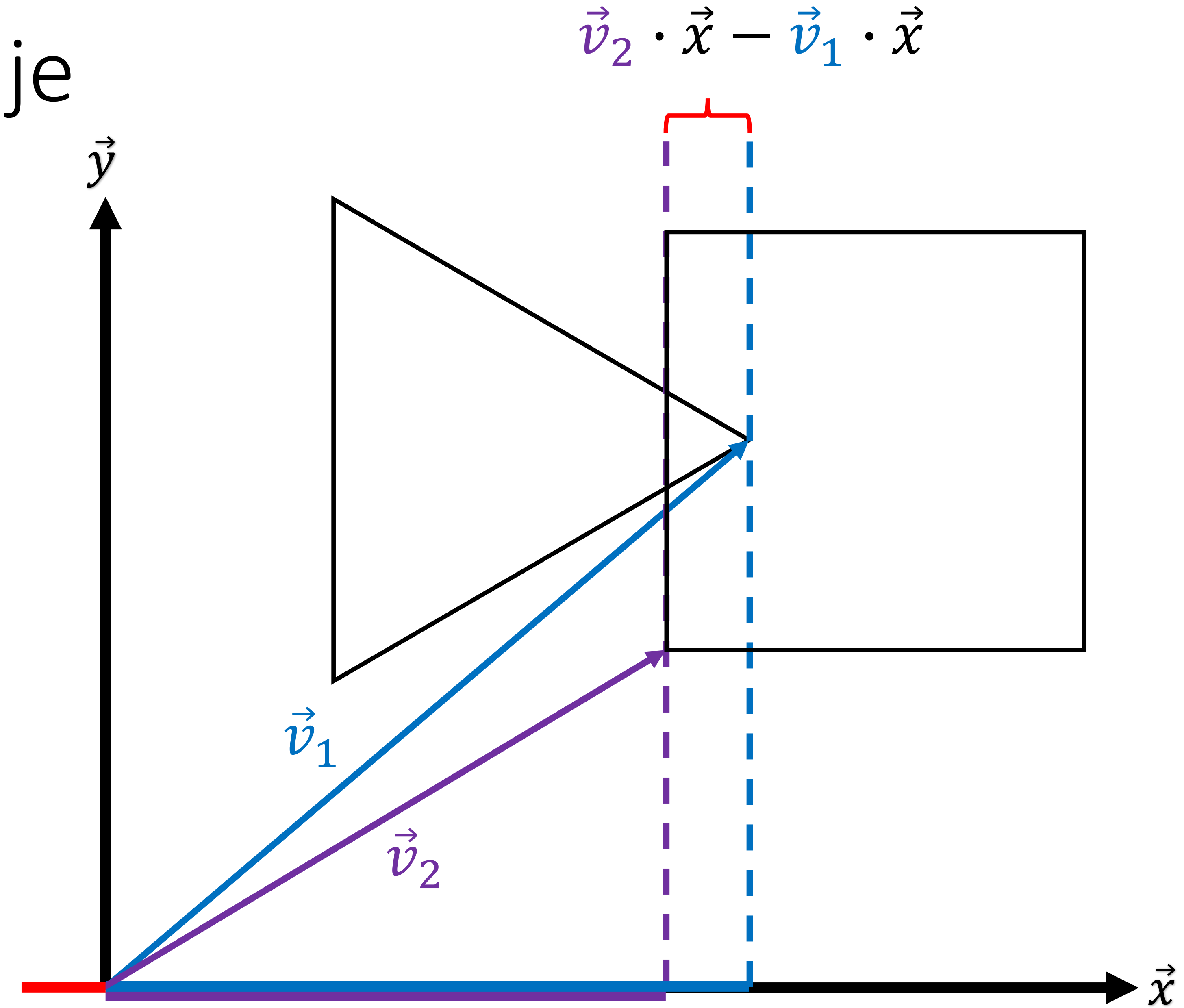
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x} - \vec{v}_1 \cdot \vec{x} \leq 0$$

Postoji kontakt!

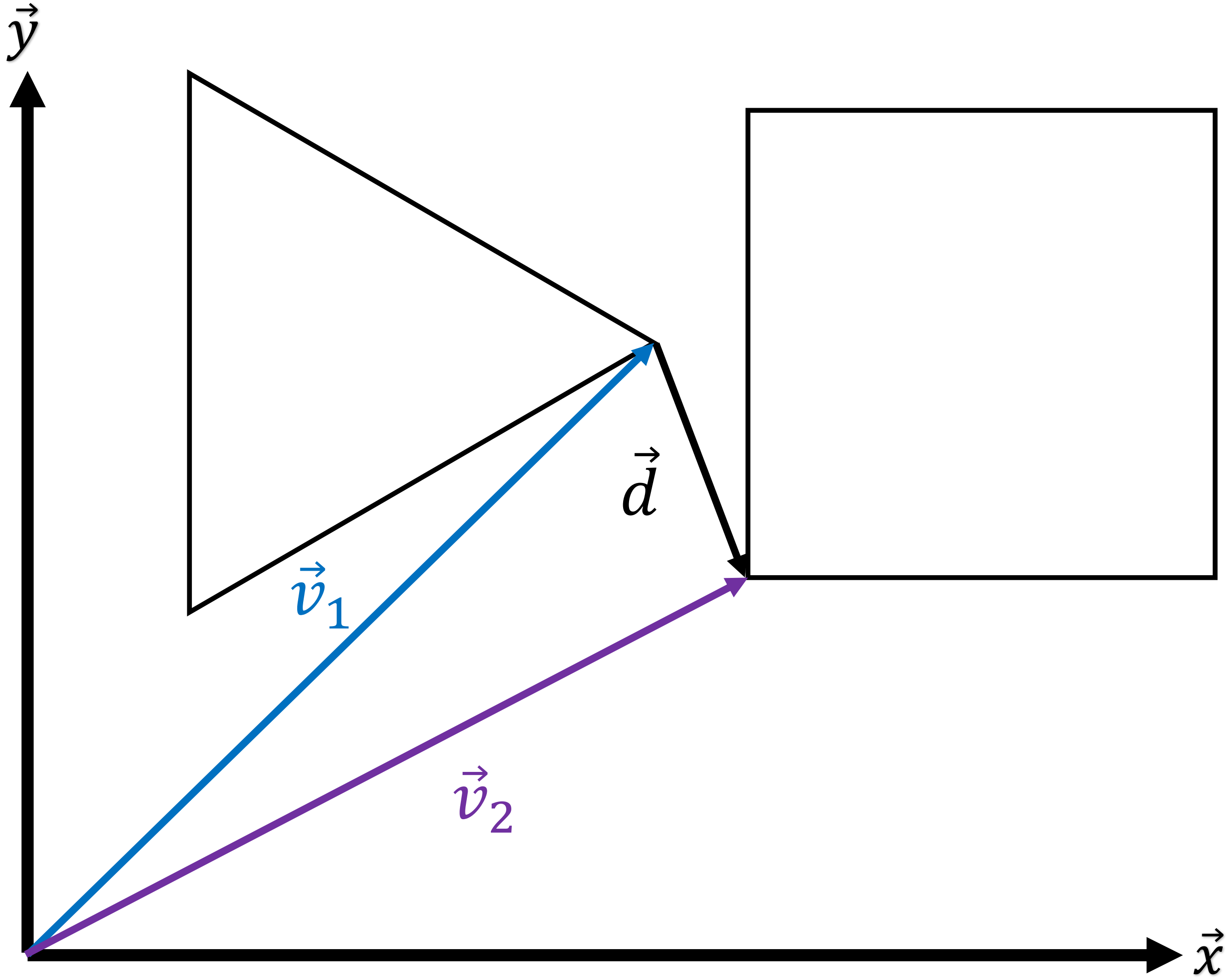


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

Vektor rastojanja:

$$\vec{d} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

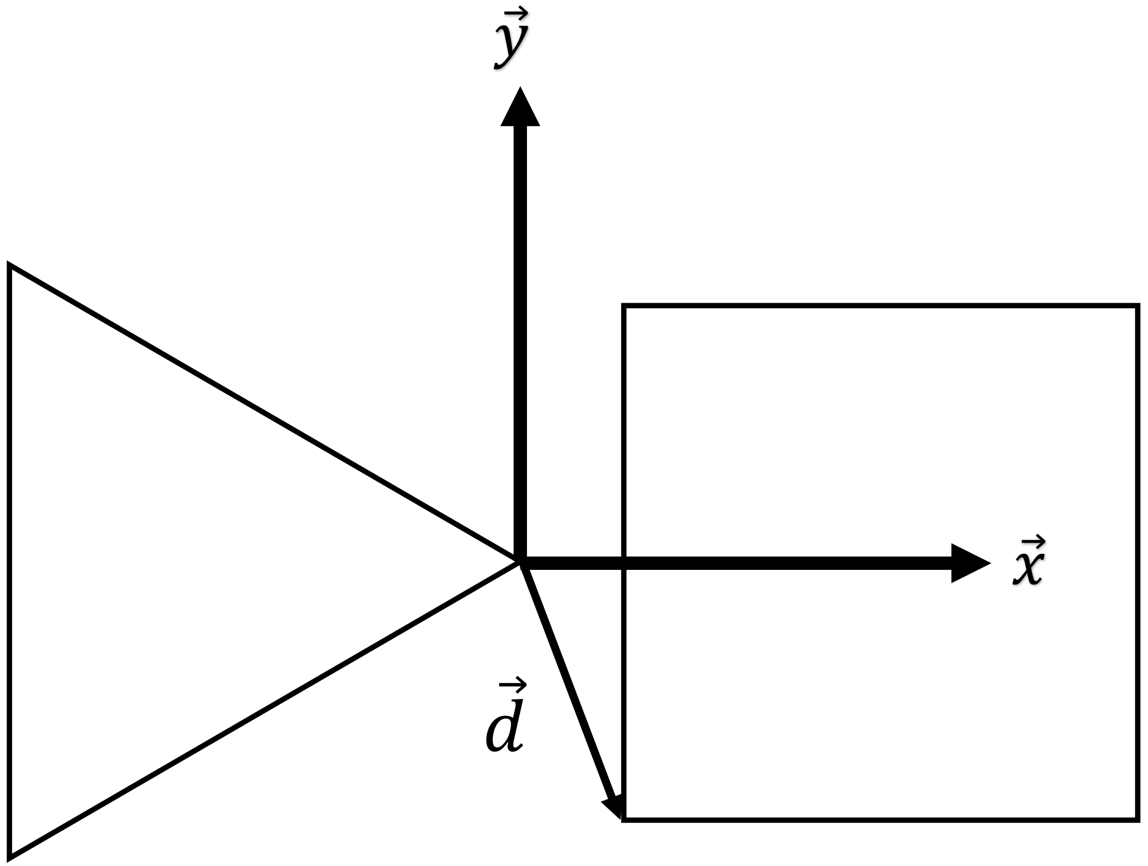


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

Vektor rastojanja:

$$\vec{d} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



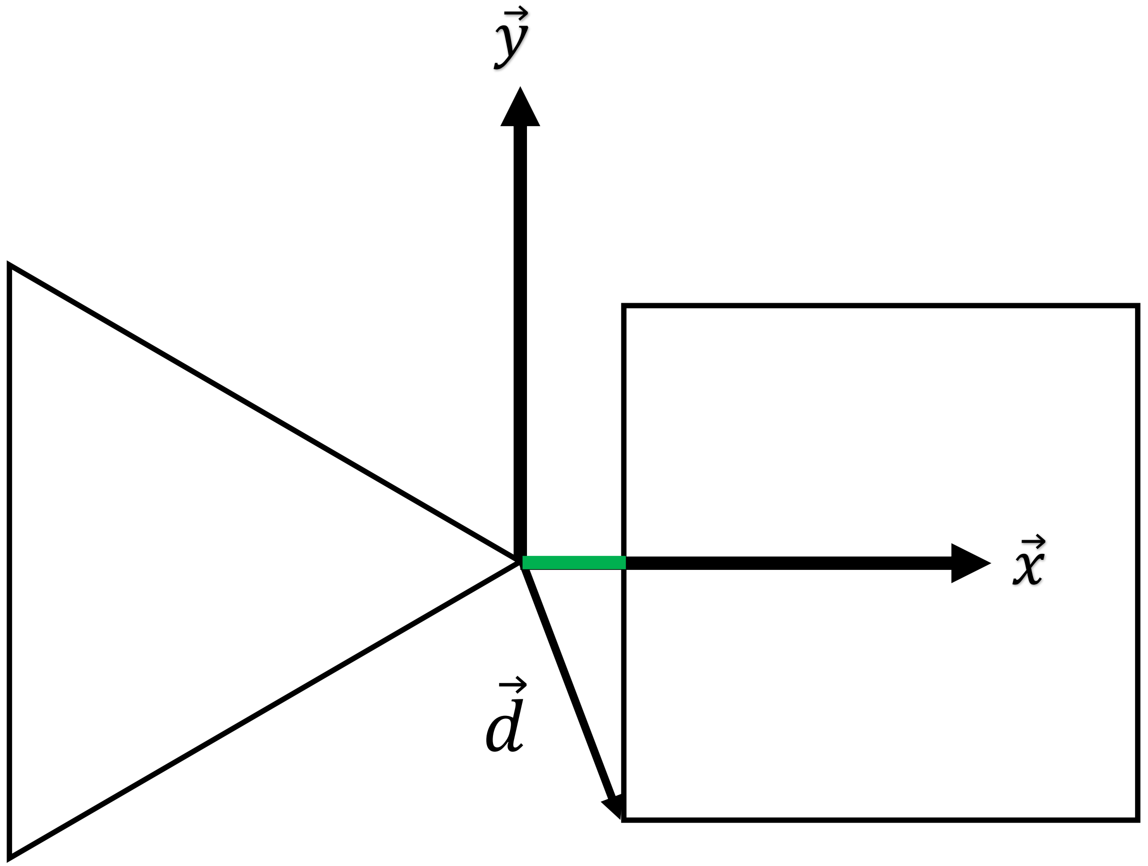
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

$$\vec{d} \cdot \vec{x} > 0$$

Ne postoji kontakt!



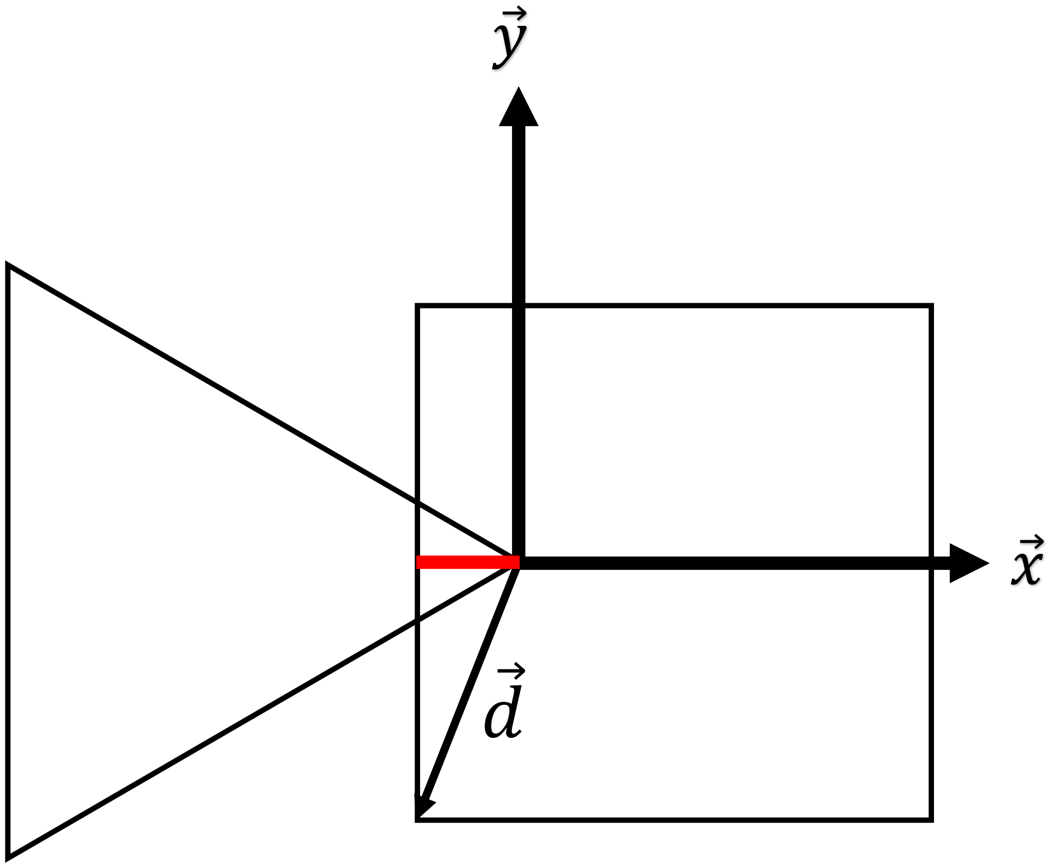
Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

Skalarni proizvod

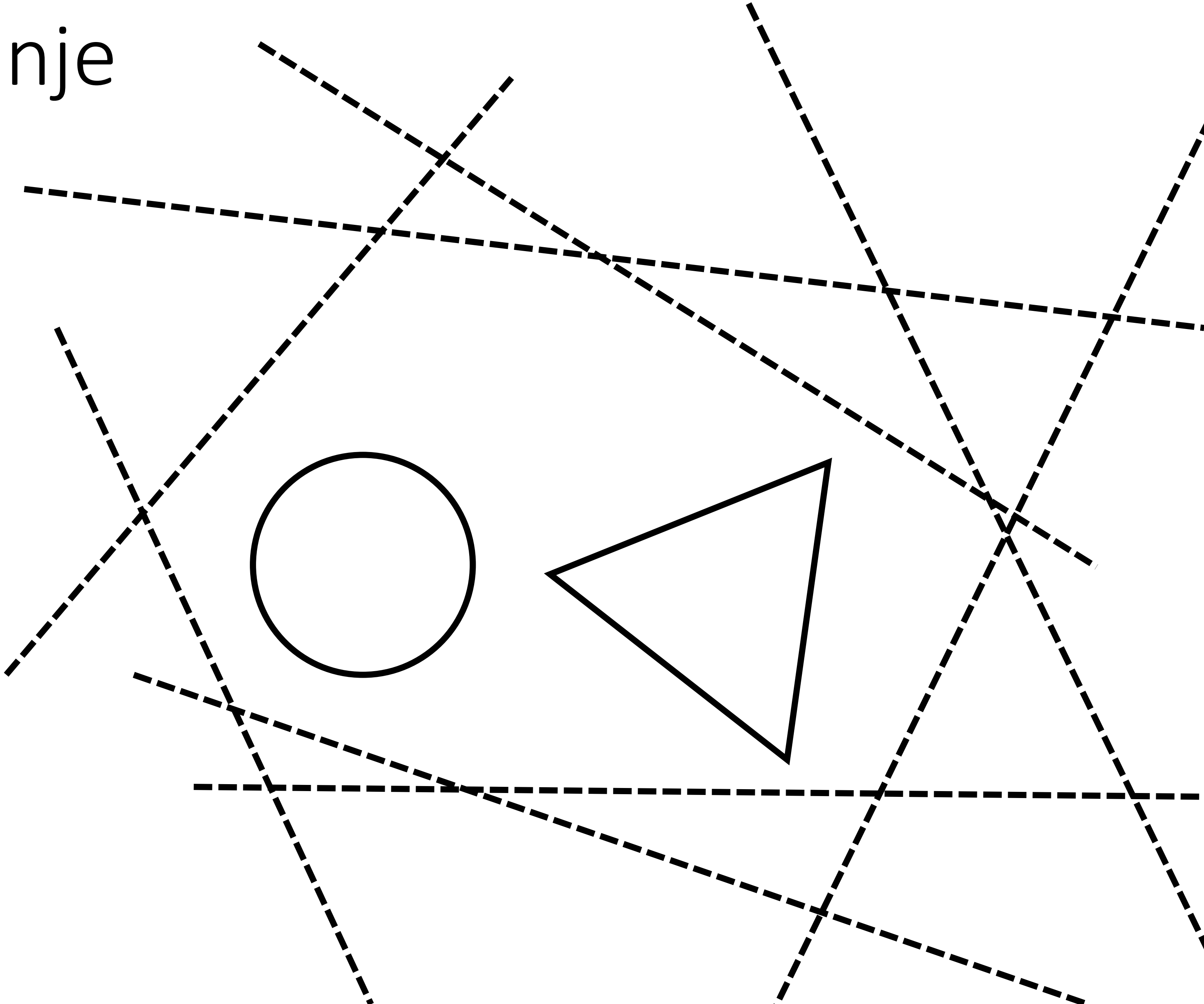
$$\vec{d} \cdot \vec{x} \leq 0$$

Postoji kontakt!



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
    - *Separating Axis Test*:

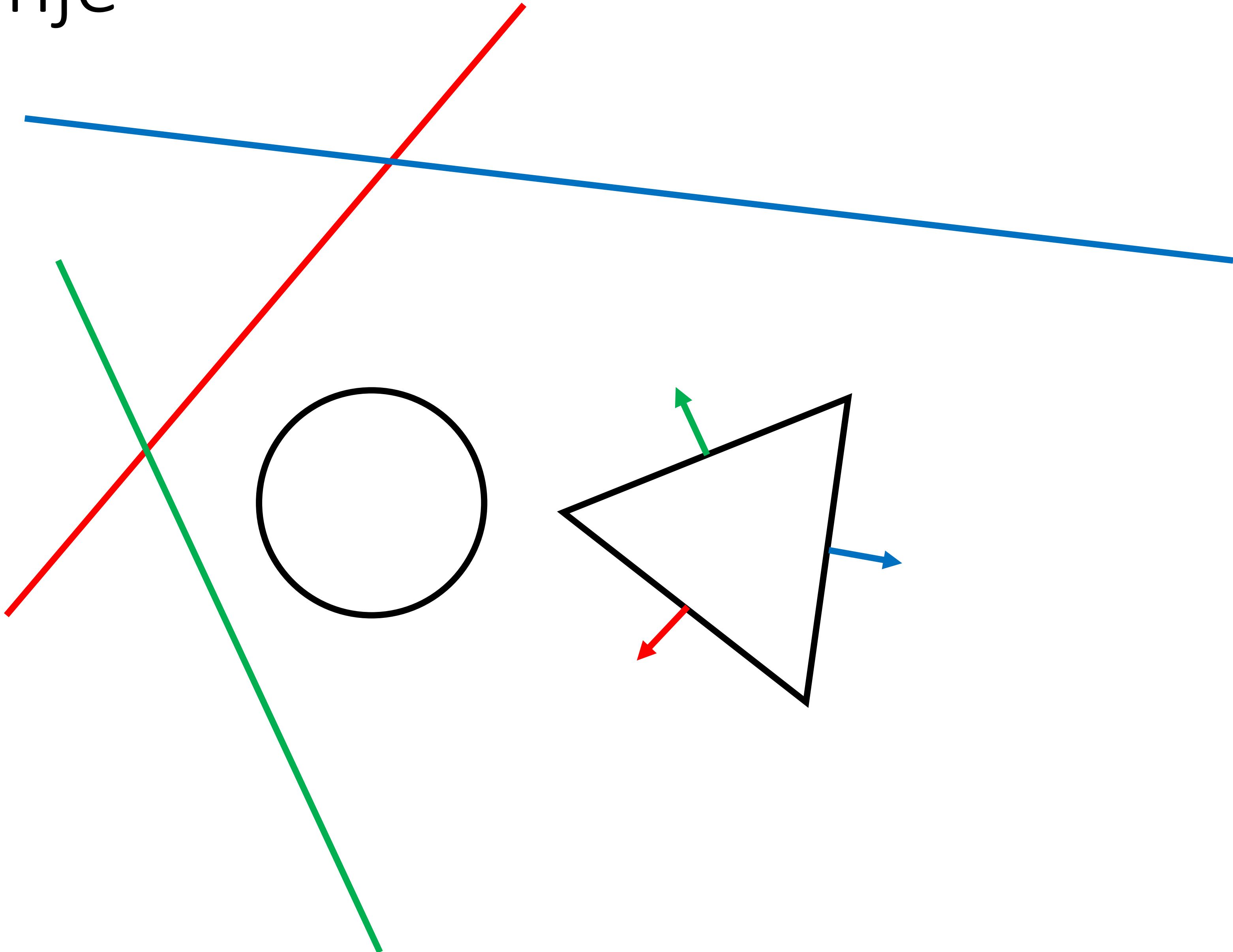


Koliko osa postoji?

Koliko osa treba ispitati?

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:



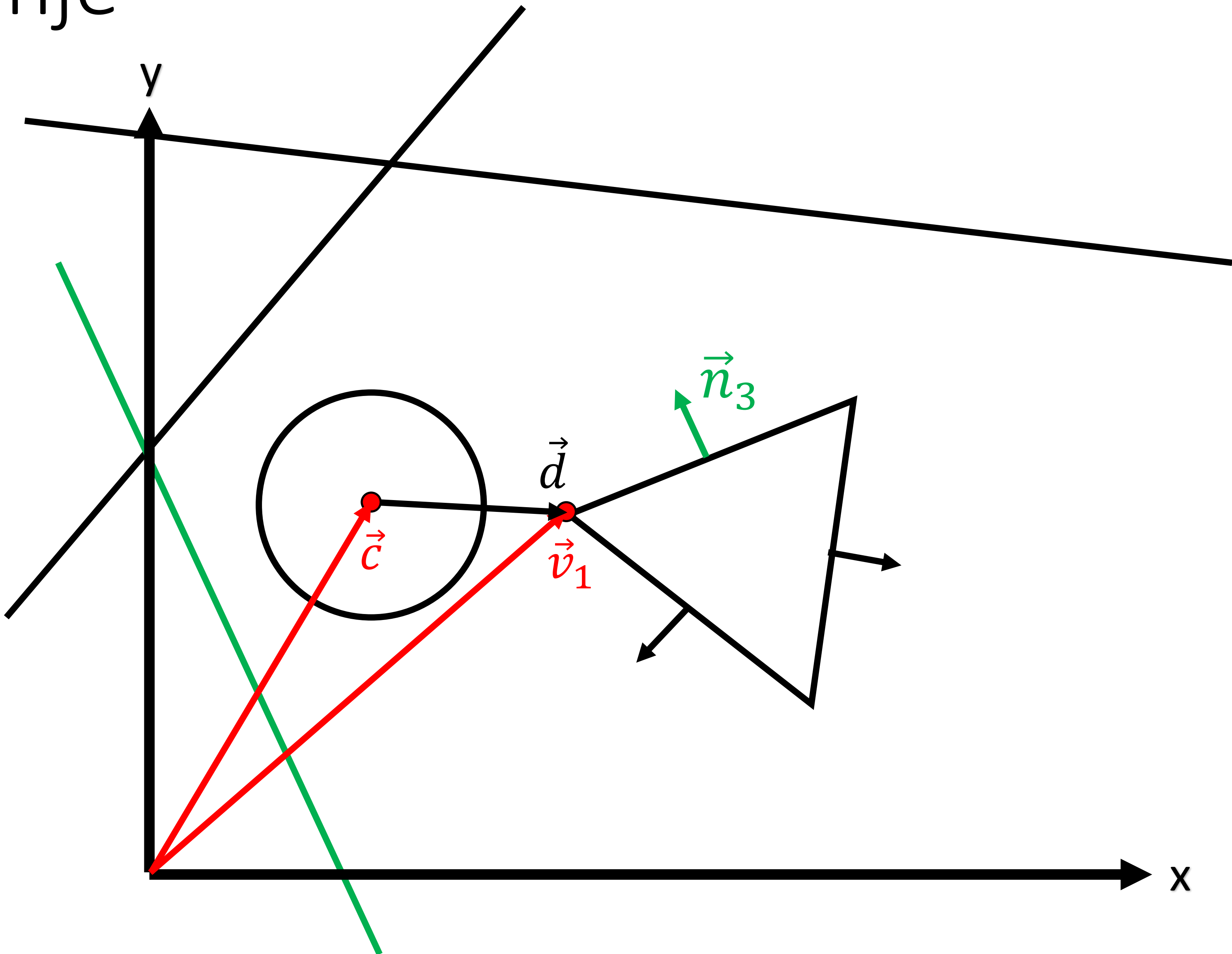
U 2D prostoru dovoljno je ispitati normale stranica konveksne ljuske!

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

Dovesti geometriju tela u isti prostor!

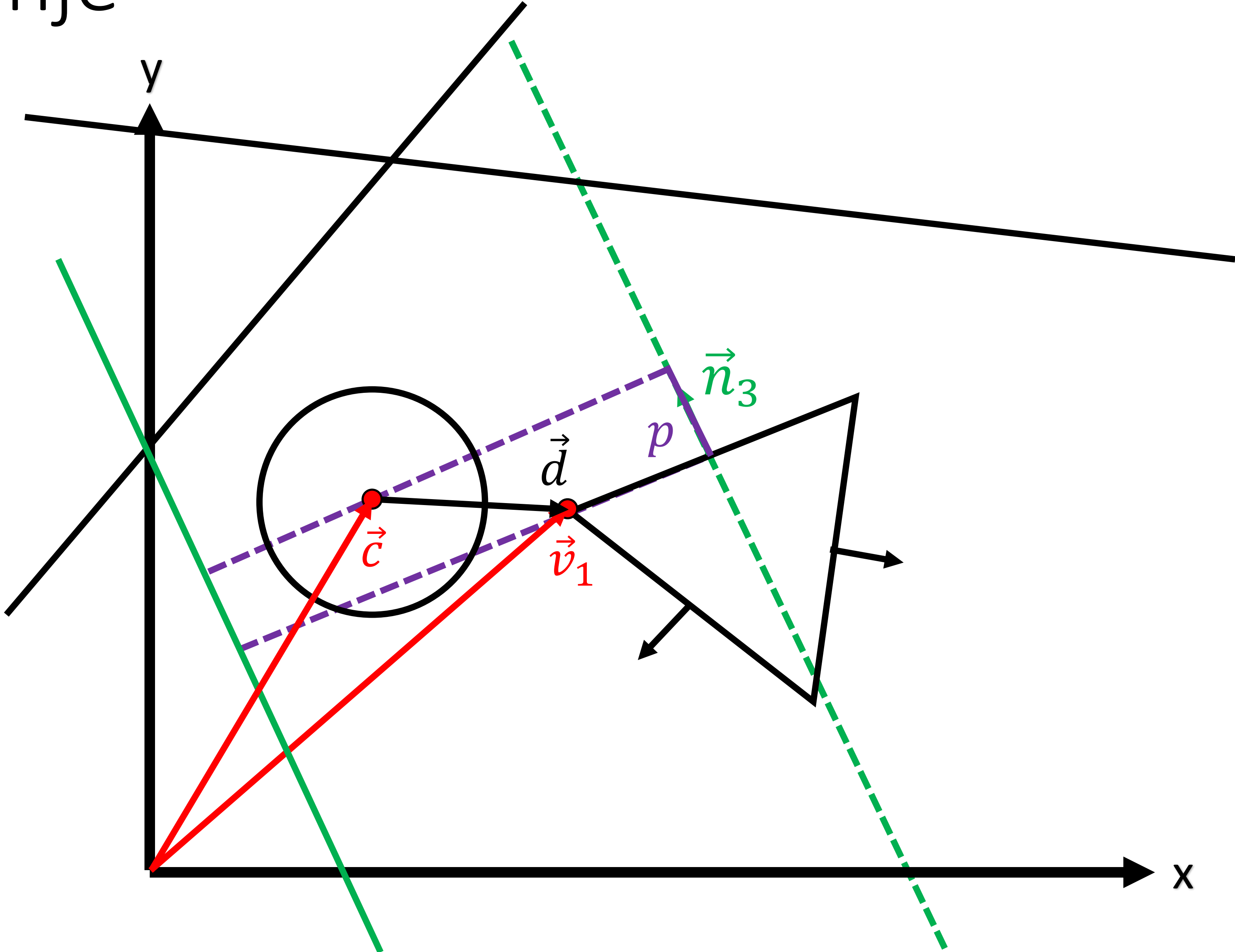


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_3 \cdot \vec{d}$$



Ograničeno kretanje

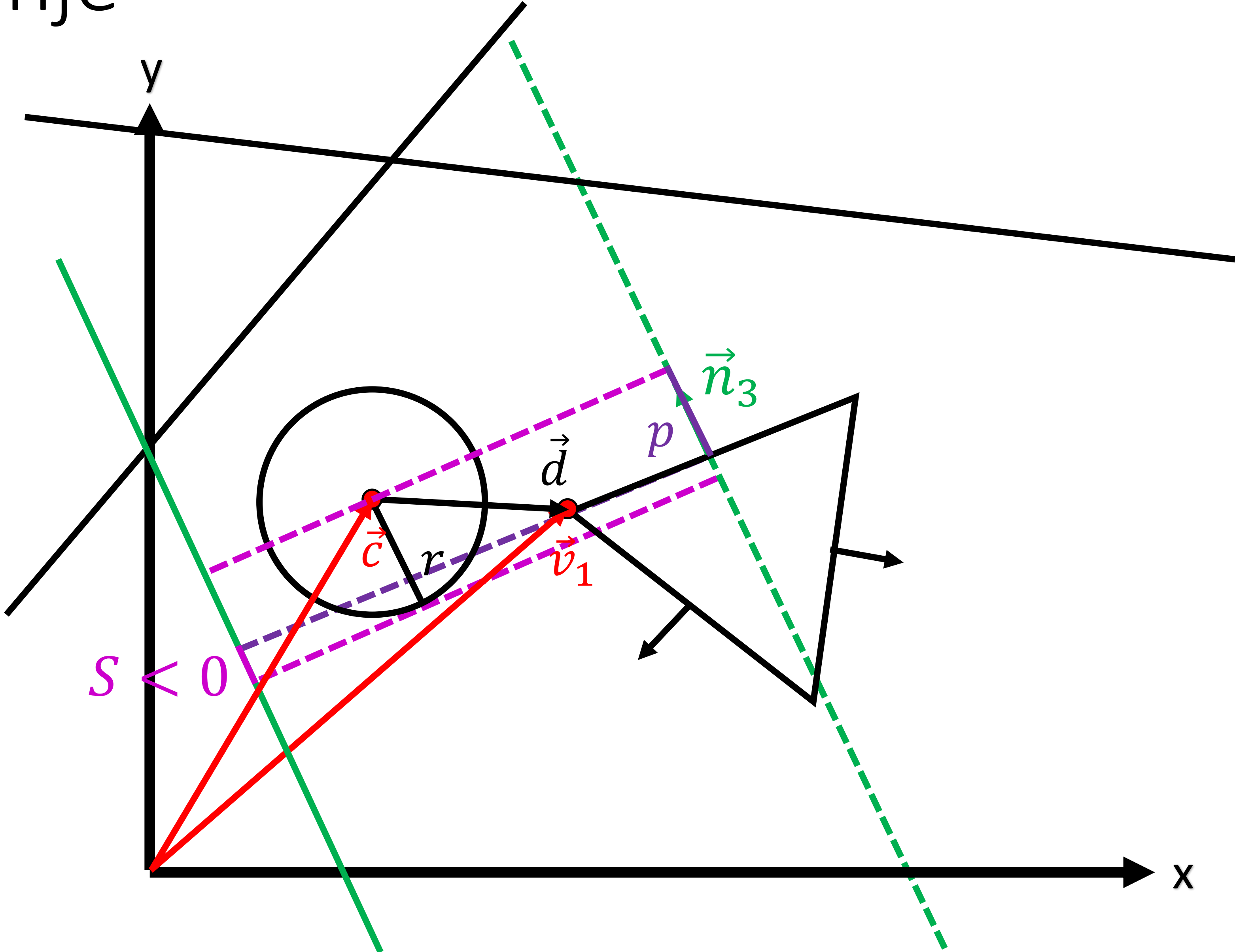
1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_3 \cdot \vec{d}$$

$$s = p - \mathrm{r}$$

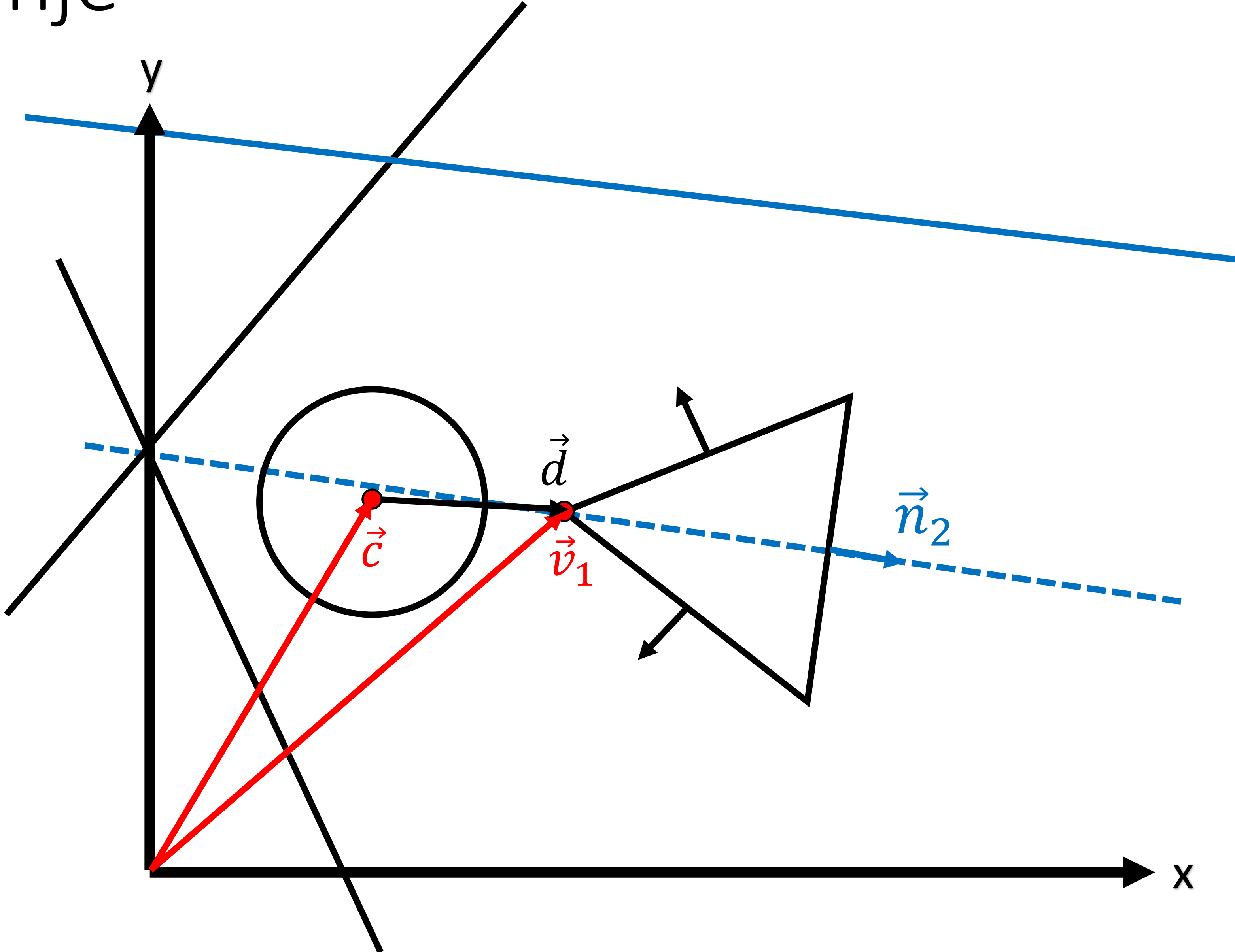
Nije razdvajajuća osa!



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

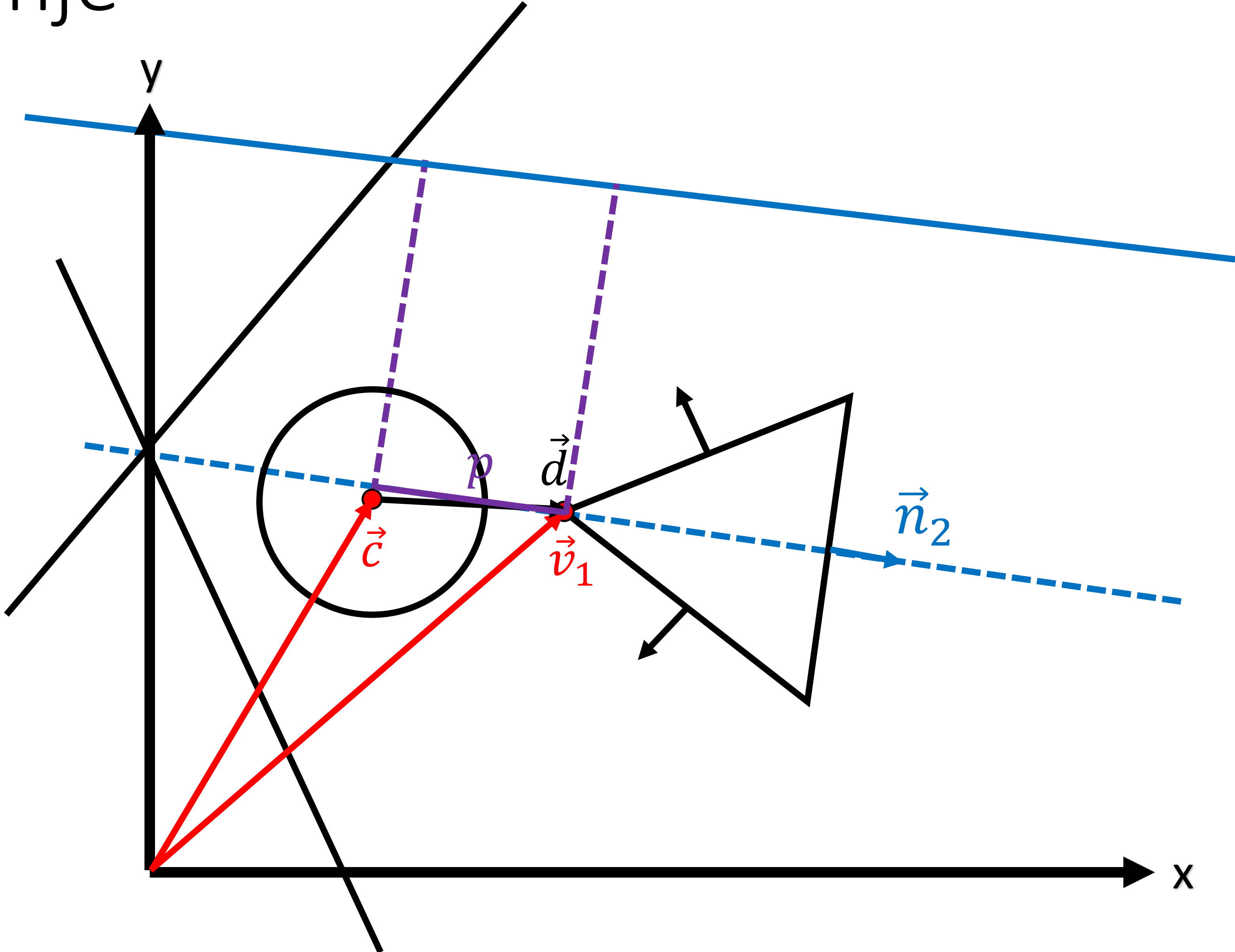


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$p = \vec{n}_2 \cdot \vec{d}$$



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

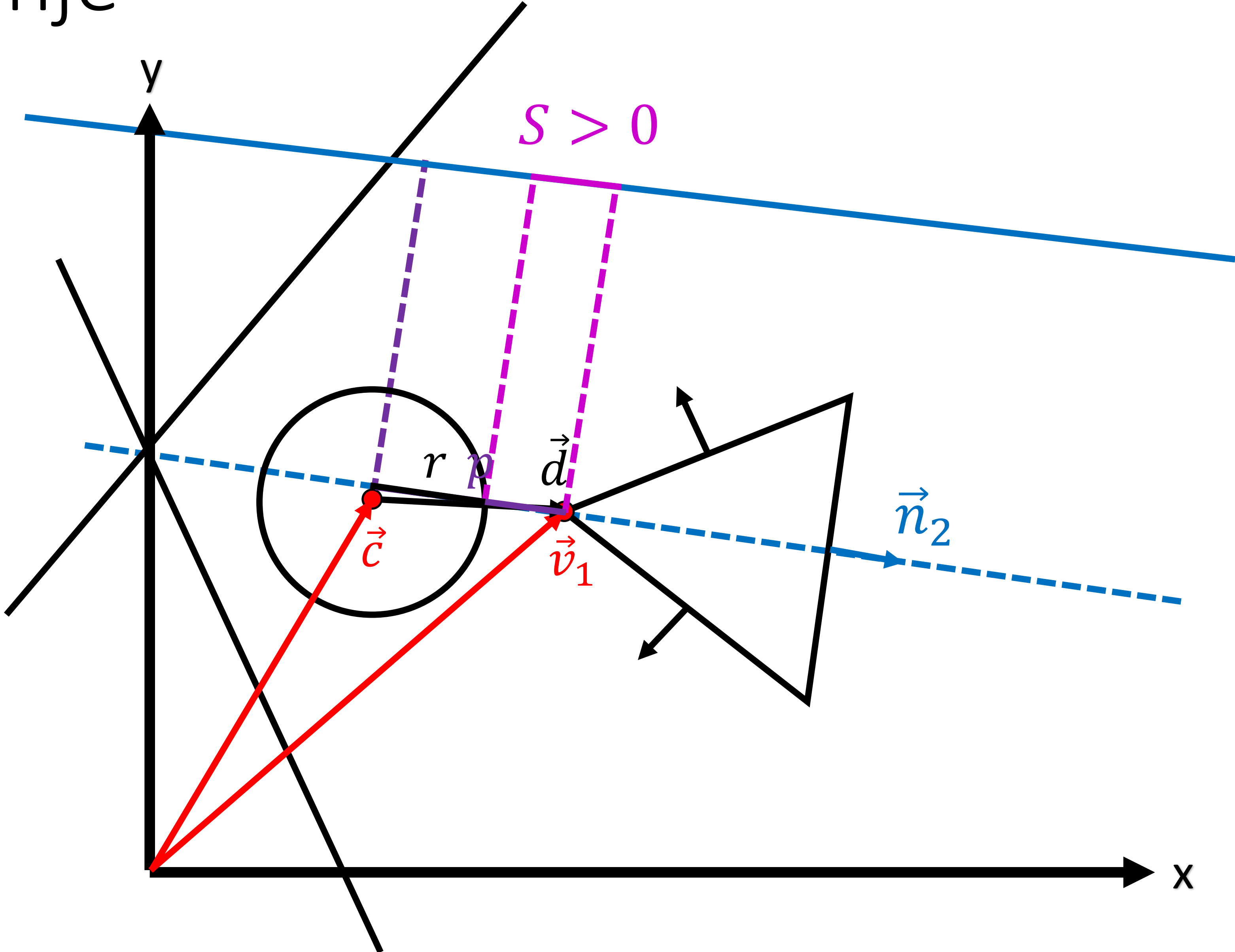
$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{c}$$

$$\vec{p} = \vec{n}_2 \cdot \vec{d}$$

$$s = p - \mathrm{r}$$

Jeste razdvajajuća osa!

Dalje provere nisu potrebne!

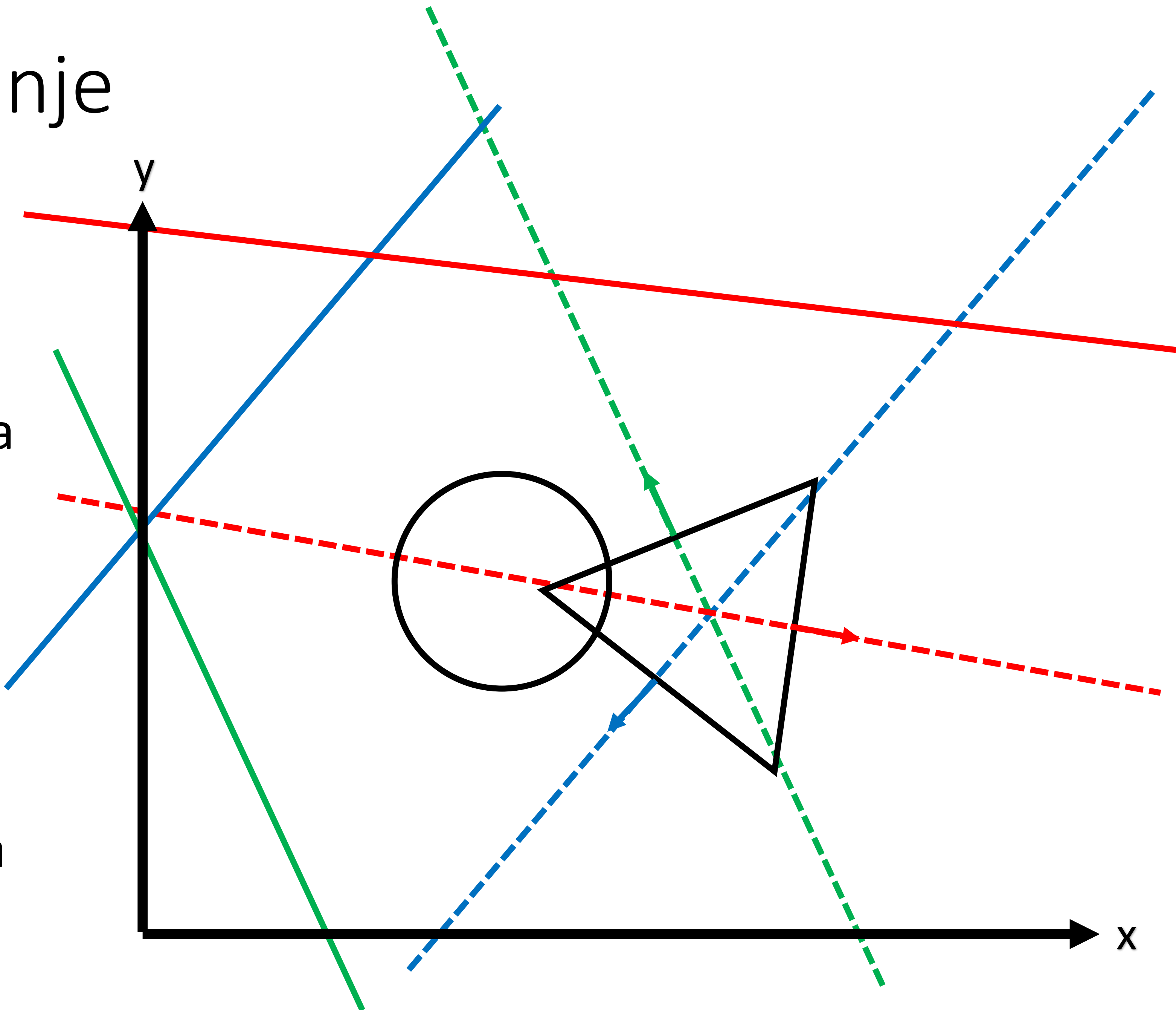


Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

Razdvajajuća osa se traži za sva temena jednog tela naspram svih temena drugih tela po svim normalama stranica oba tela.

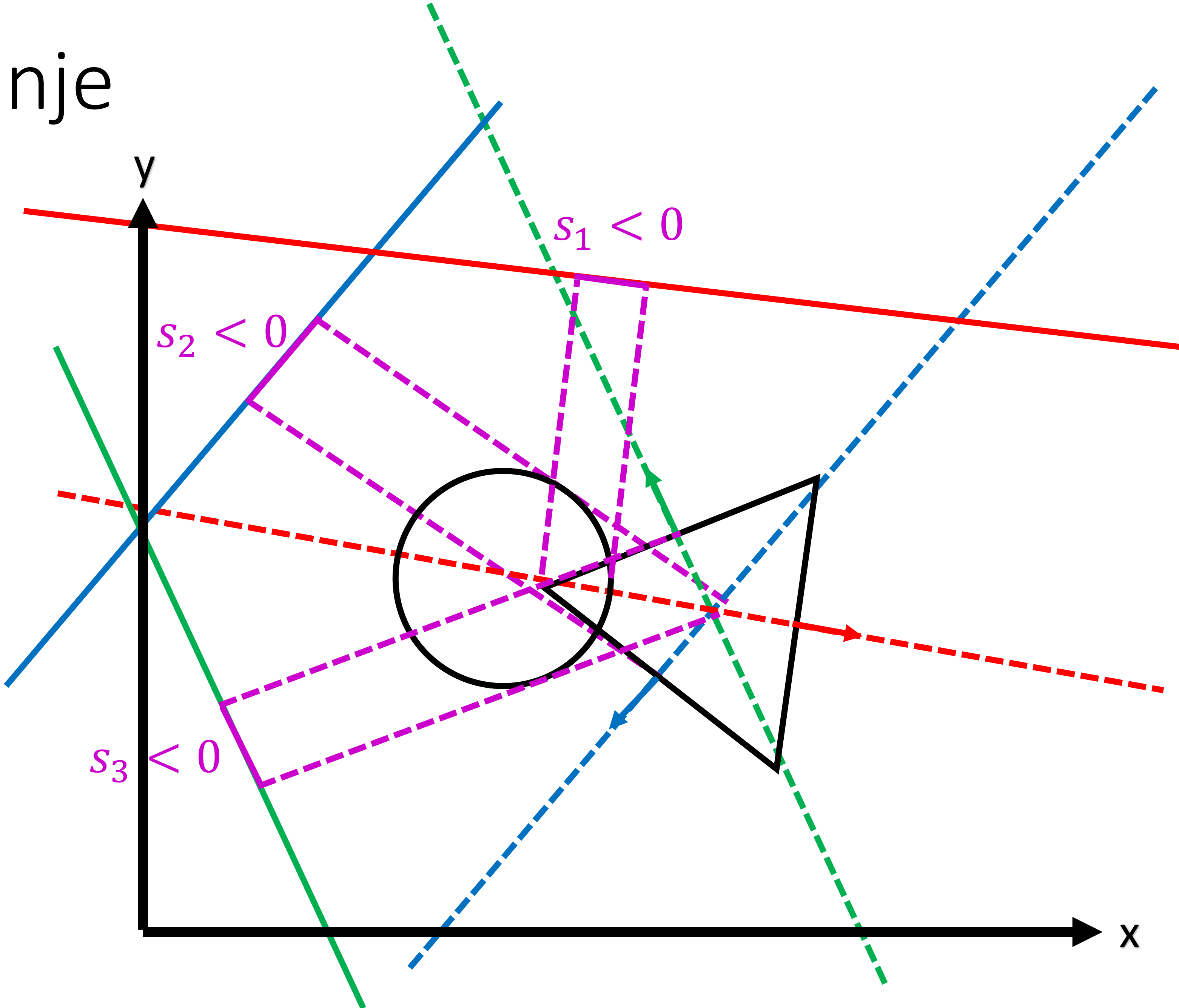
Šta ako se razdvajajuća osa ne nađe?



Ograničeno kretanje

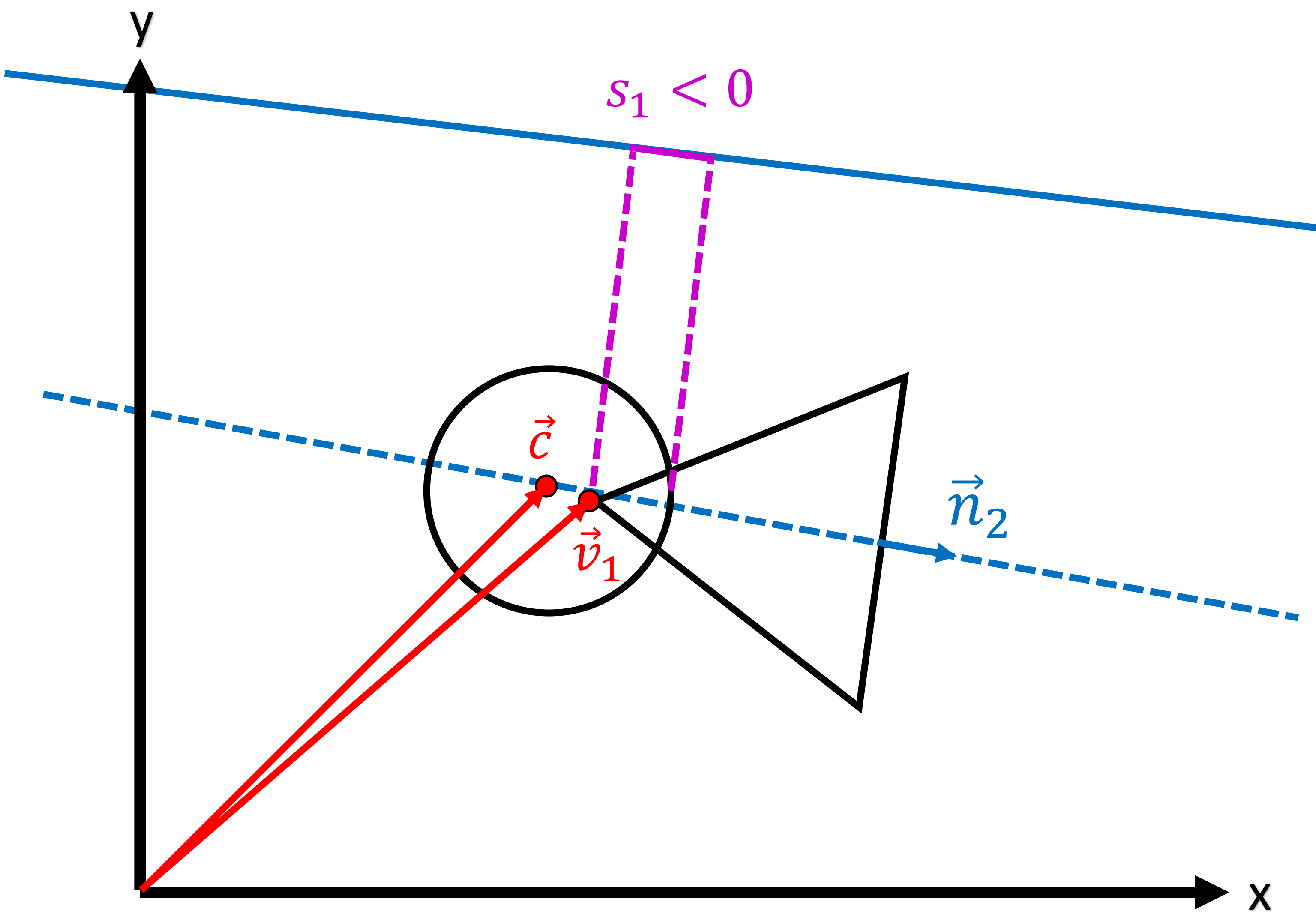
1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

1. Uzima se najveće negativno rastojanje s (najmanje po apsolutnoj vrednosti).



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

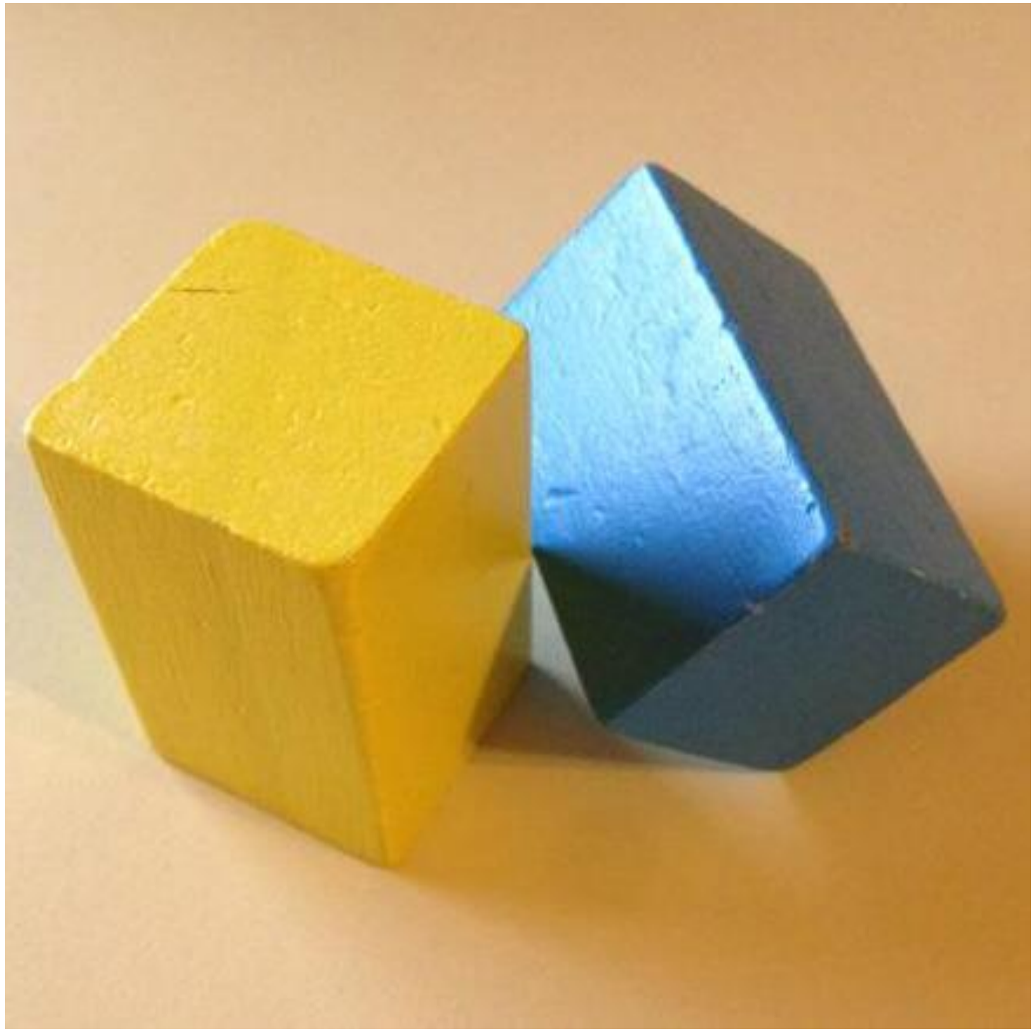


1. Uzima se najveće negativno rastojanje s (najmanje po apsolutnoj vrednosti).
2. Čuvaju se:
   - normala sudara
   - negativno rastojanje (upad)
   - temena oba tela

Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

Za 3D prostor, potrebno je tražiti i razdvajajuću osu među vektorskim proizvodima svih normala stranica!



Ograničeno kretanje

1. Otrkivanje sudara
   - *Separating Axis Test*:

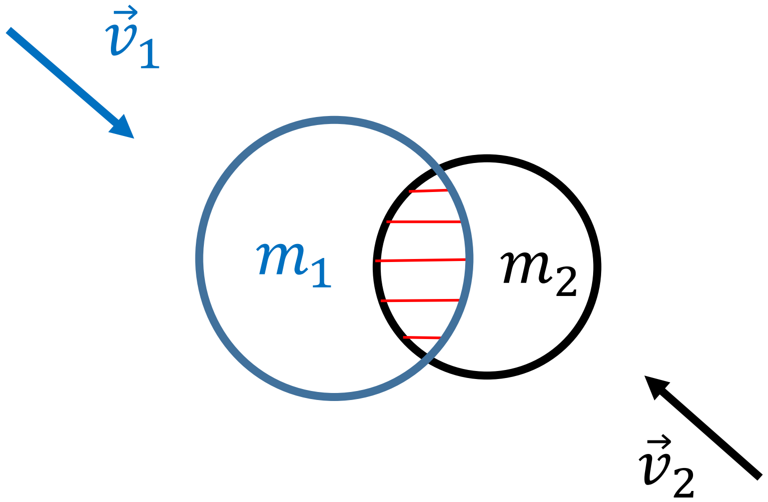
+ eksplicitan geometrijski pristup rešavanju
+ usput nalazi sve što je potrebno za opis sudara
+ čim se nađe razdvajajuća osa, pretraga se završava, a to se mnogo češće dešava od suprotnog slučaja (efikasnost).

- treba pokriti mnogo specijalnih slučajeva, naročito u 3D prostoru

Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1 (bez rotacije u ovom primeru):

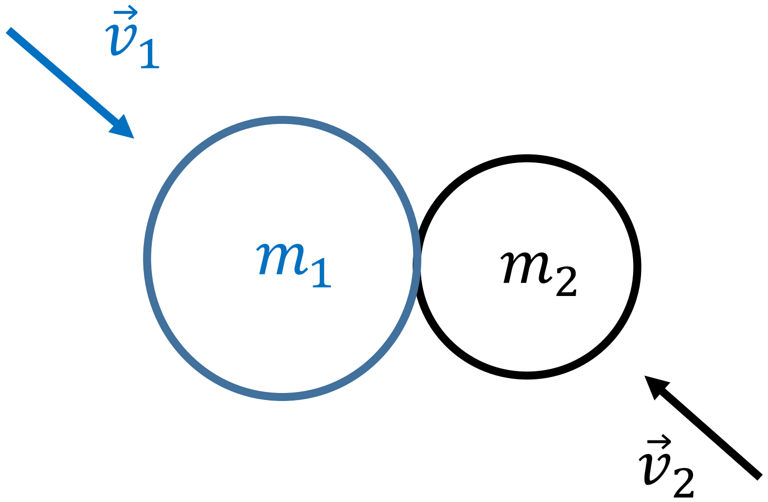


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1 (bez rotacije u ovom primeru):

1. korekcija pozicija



Ograničeno kretanje

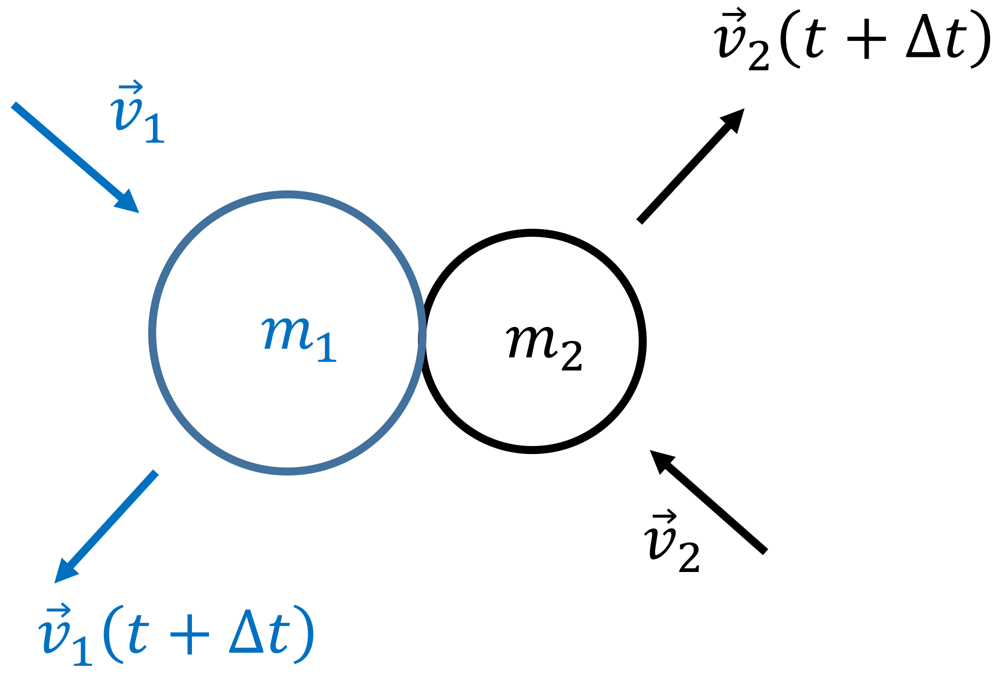
Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1 (bez rotacije u ovom primeru):

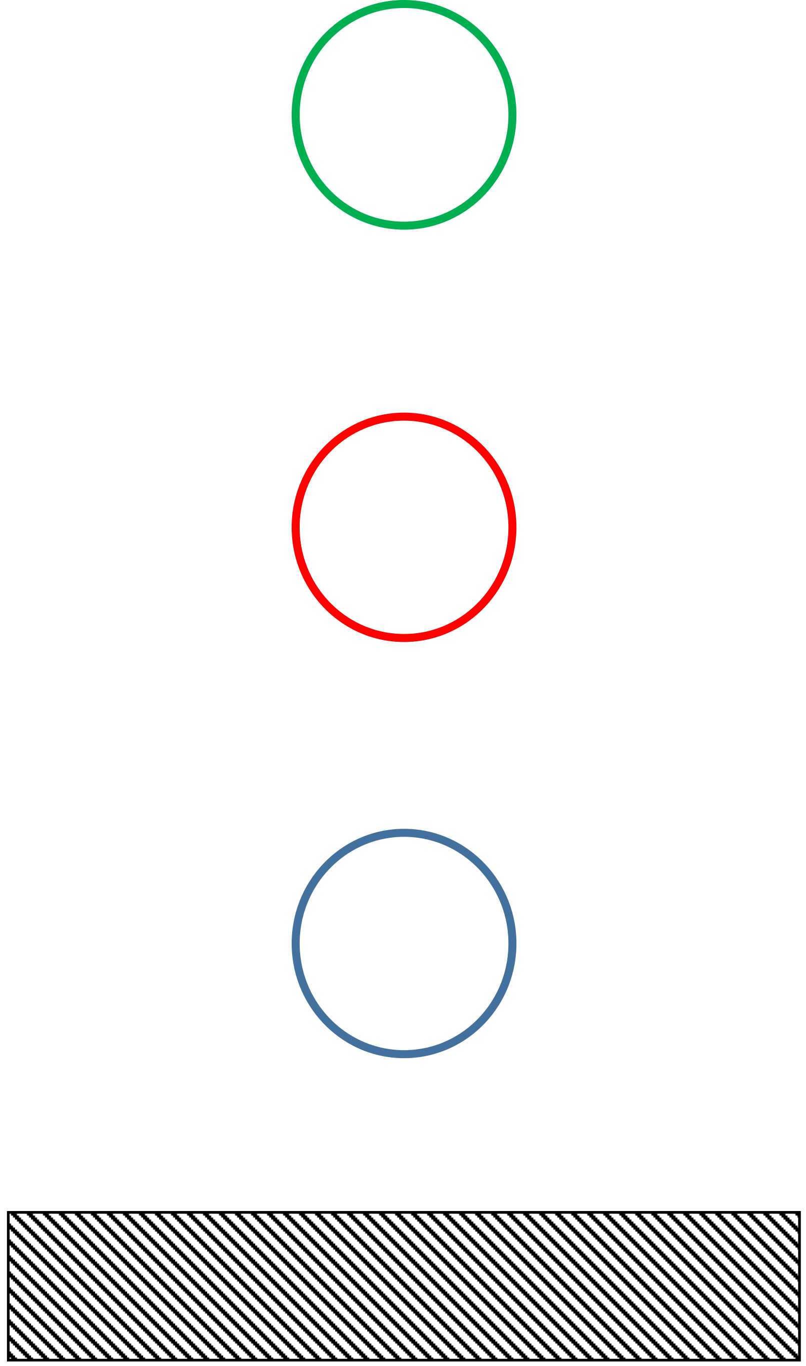
1. korekcija pozicija
2. izračunavanje brzina (zakon održanja impulsa)

$$\vec{v}_1(t+\Delta t) = \frac{\vec{v}_1(m_1 - m_2) + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2(t+\Delta t) = \frac{\vec{v}_2(m_2 - m_1) + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$



Ograničeno kretanje



Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

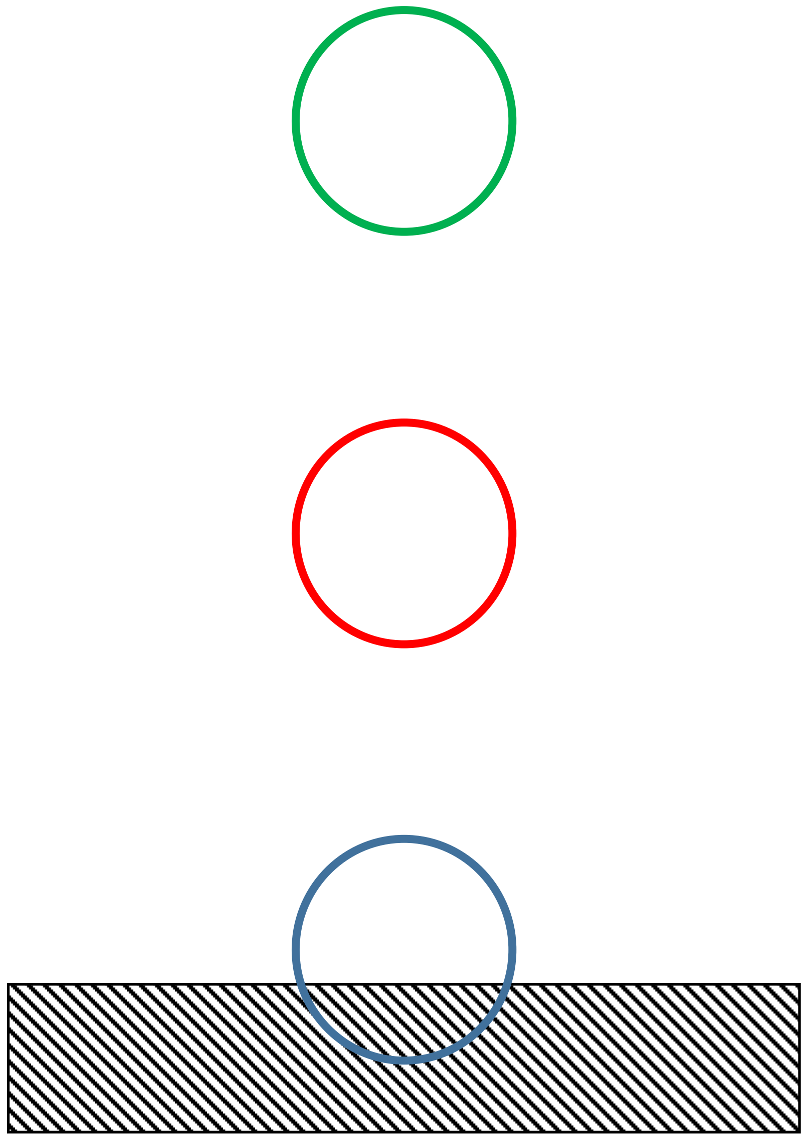
```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    if narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

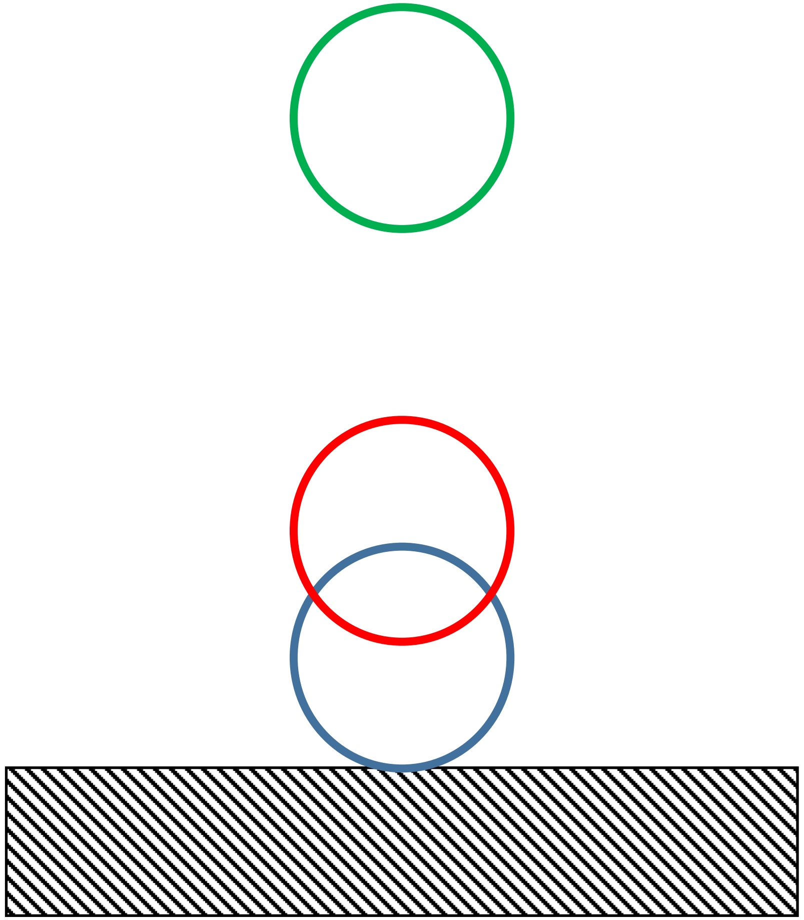


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
   primenaSile();
   integracija();
   if narusenaOgranicenja()
      resavanjeOgranicenja();
   end
   prikaz();
   pauza();
end
```

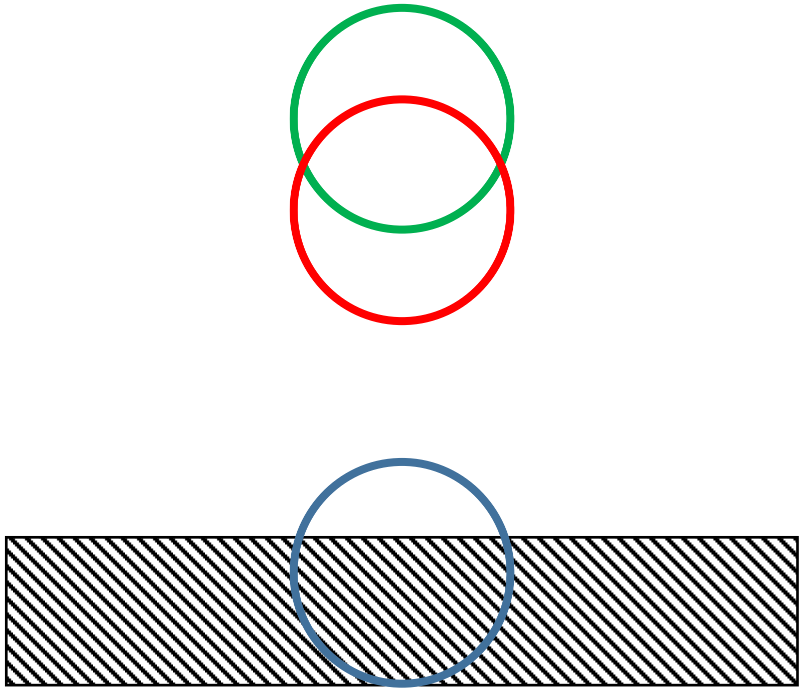


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
   primenaSile();
   integracija();
   if narusenaOgranicenja()
      resavanjeOgranicenja();
   end
   prikaz();
   pauza();
end
```

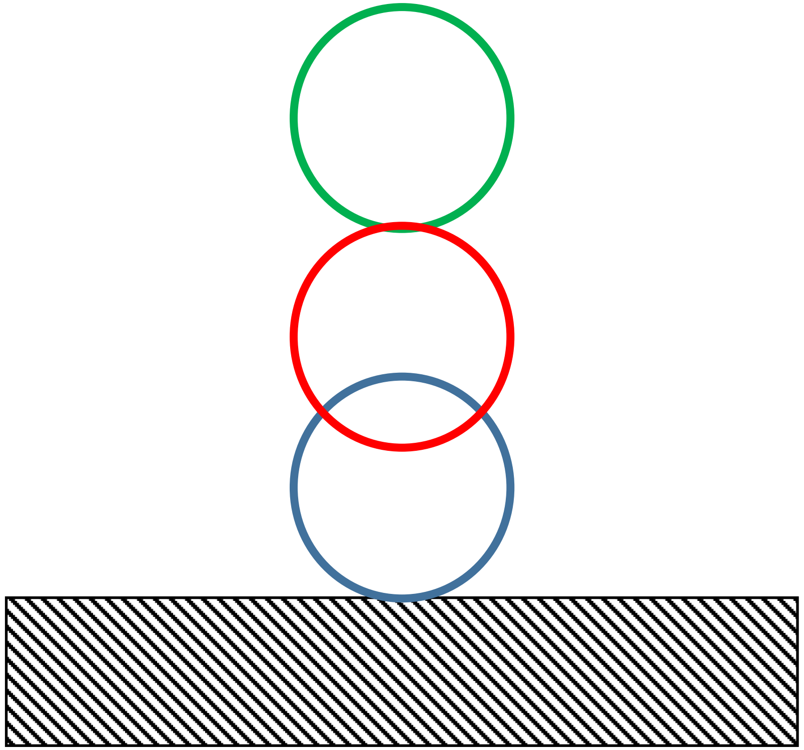


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
   primenaSile();
   integracija();
   if narusenaOgranicenja()
      resavanjeOgranicenja();
   end
   prikaz();
   pauza();
end
```

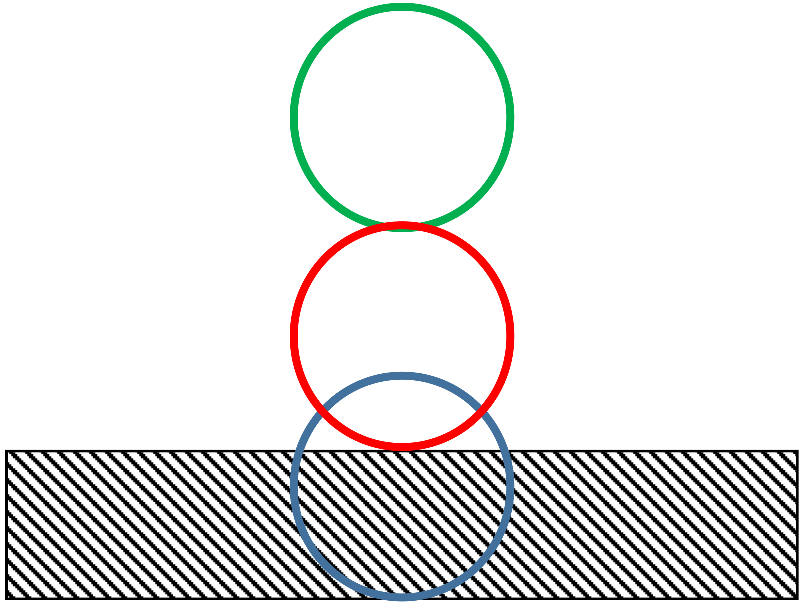


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

```
while true
   primenaSile();
   integracija();
   if narusenaOgranicenja()
      resavanjeOgranicenja();
   end
   prikaz();
   pauza();
end
```



Ograničeno kretanje

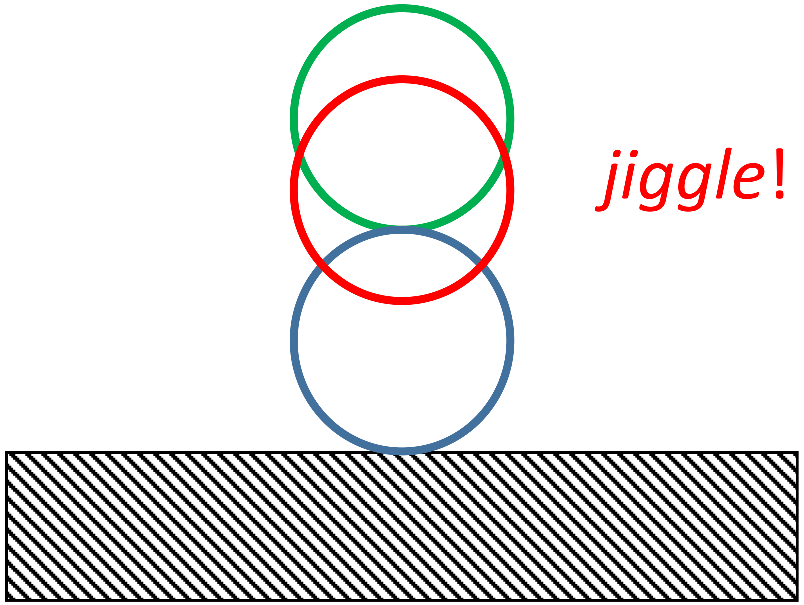
Rešavanje ograničenja

Pokušaj #1:

+ jednostavan za implementaciju

+ dovoljan za sporadične pojave sudara

- rešava se svako ograničenje za sebe, pa ne može da reši složen sistem ograničenja
- rešavanje ograničenja se izvodi na nivou položaja (nultog izvoda) – neprecizna simulacija

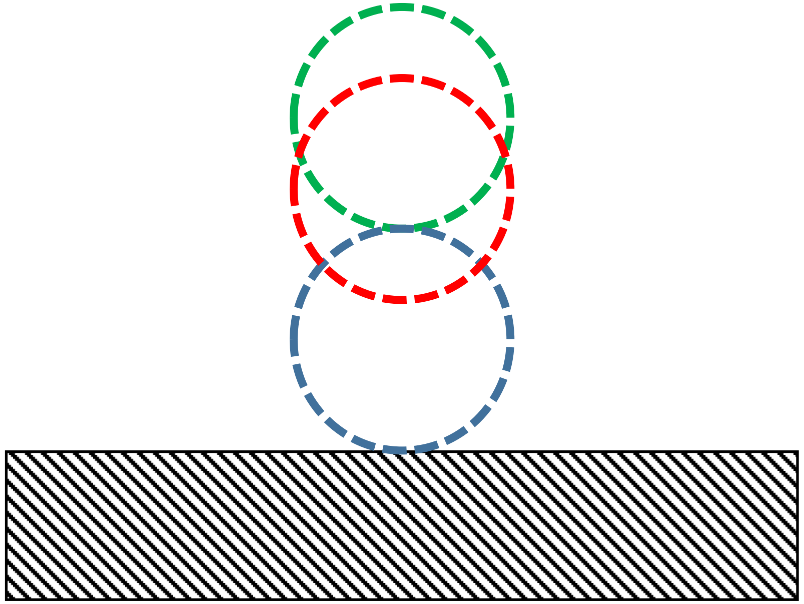


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

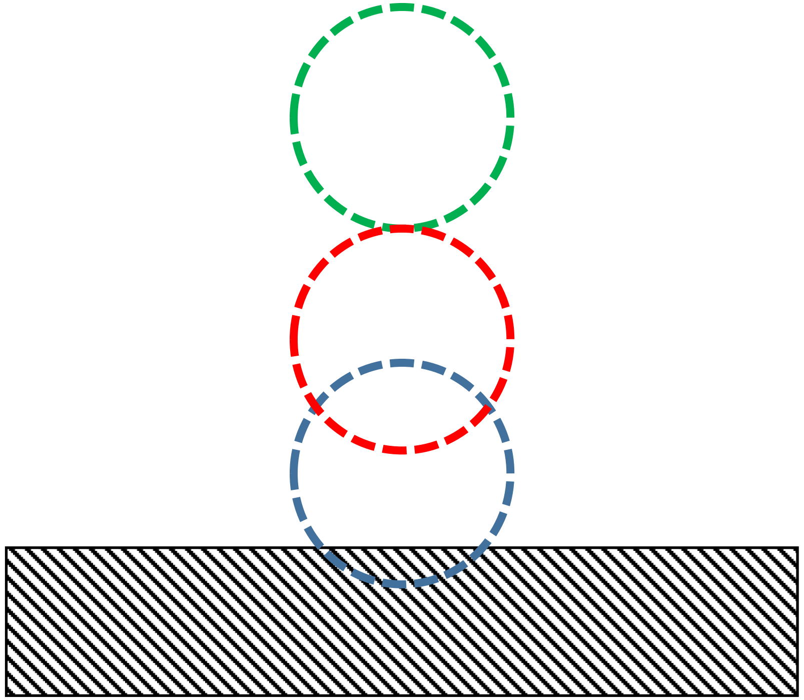


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

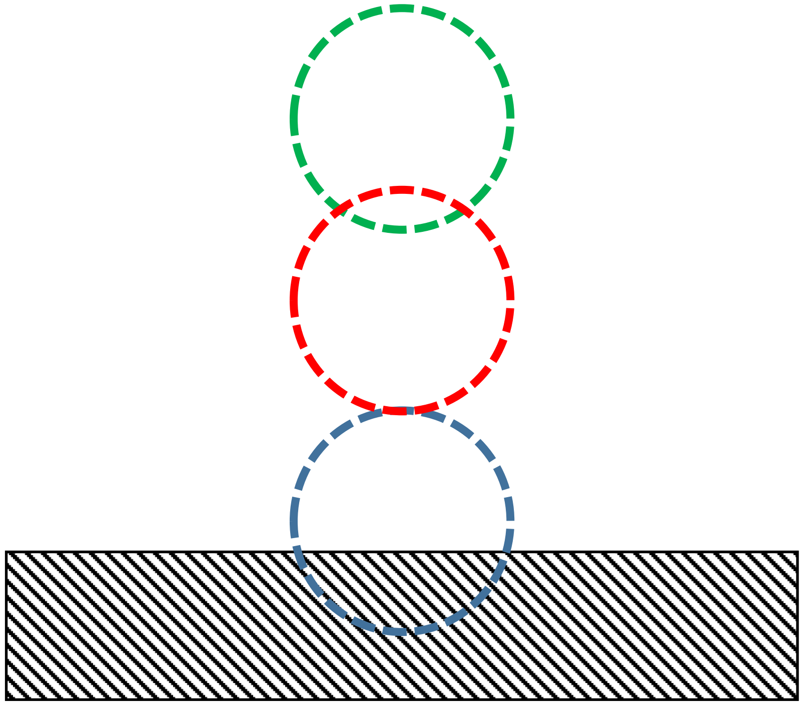


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

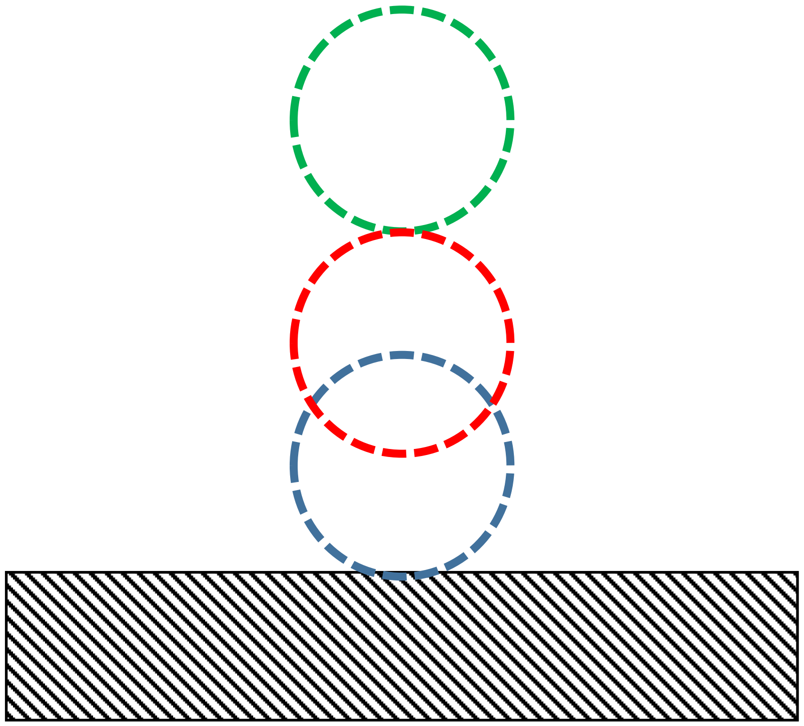


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

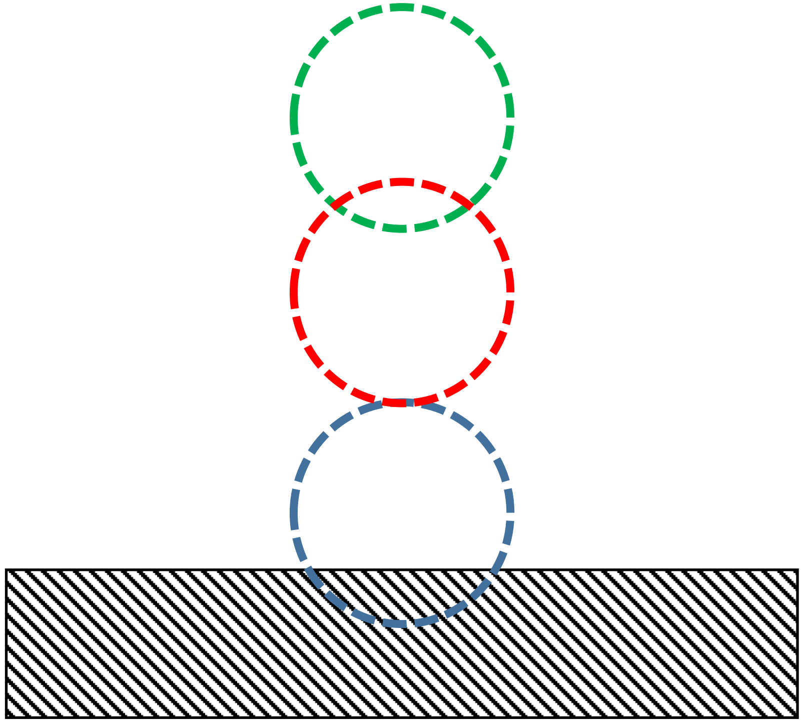


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

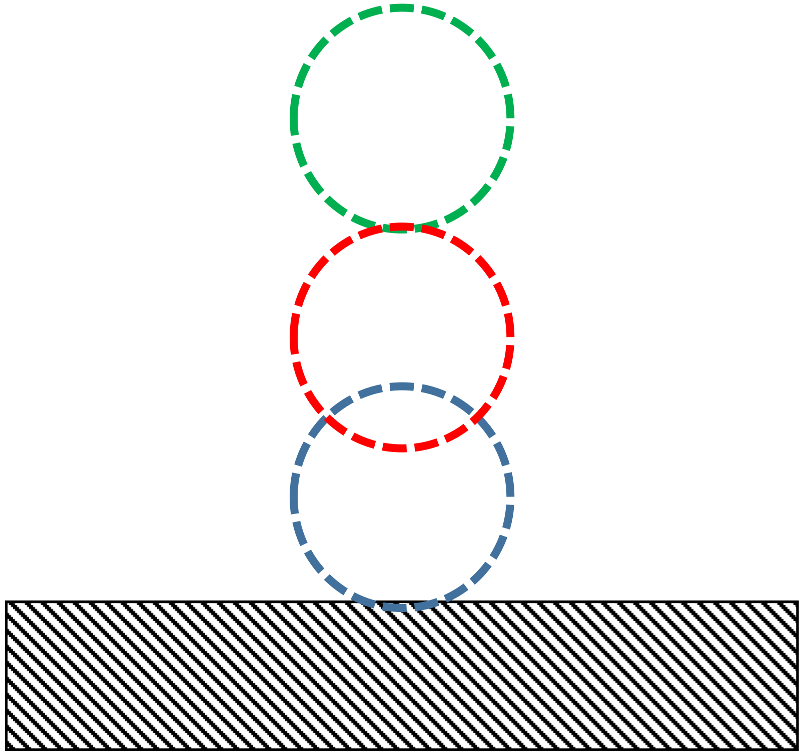


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

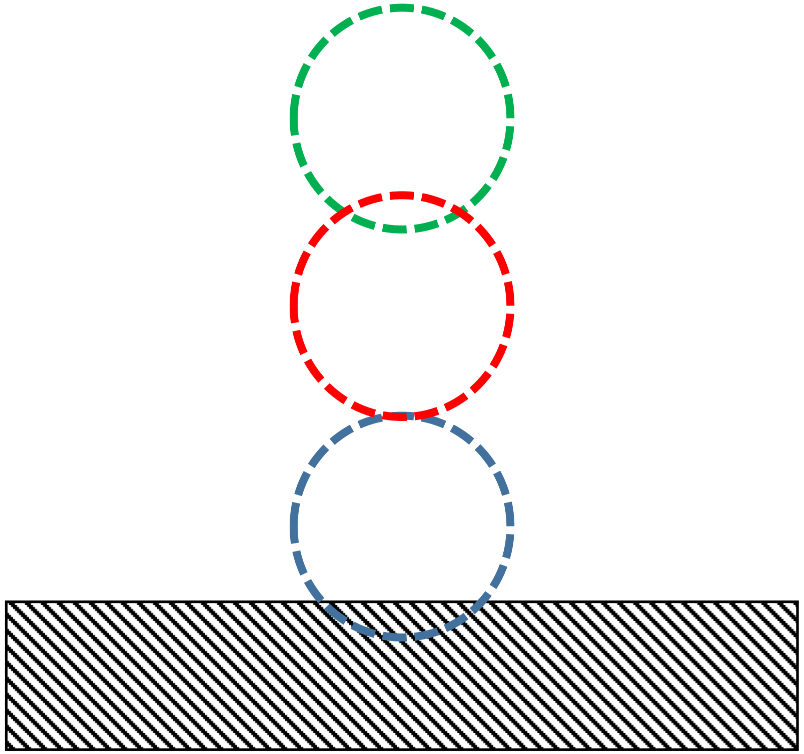


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

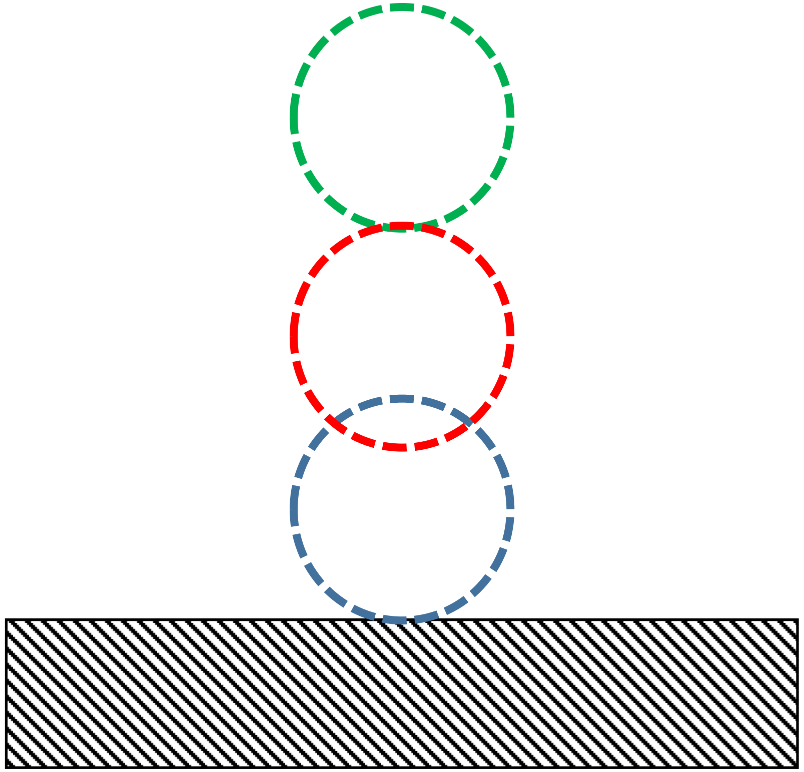


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

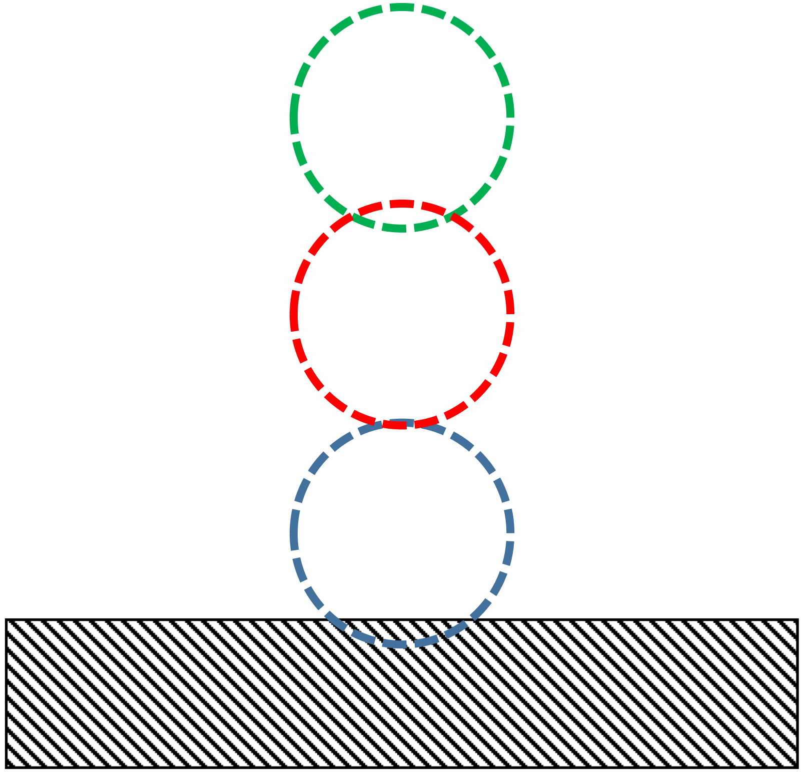


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

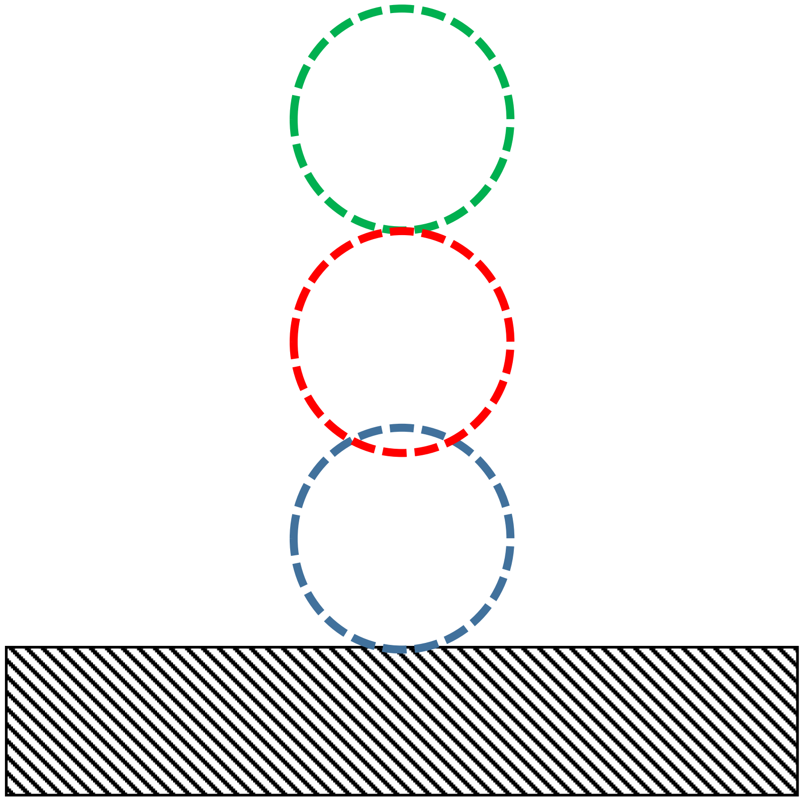


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
    primenaSile();
    integracija();
    while narusenaOgranicenja()
        resavanjeOgranicenja();
    end
    prikaz();
    pauza();
end
```

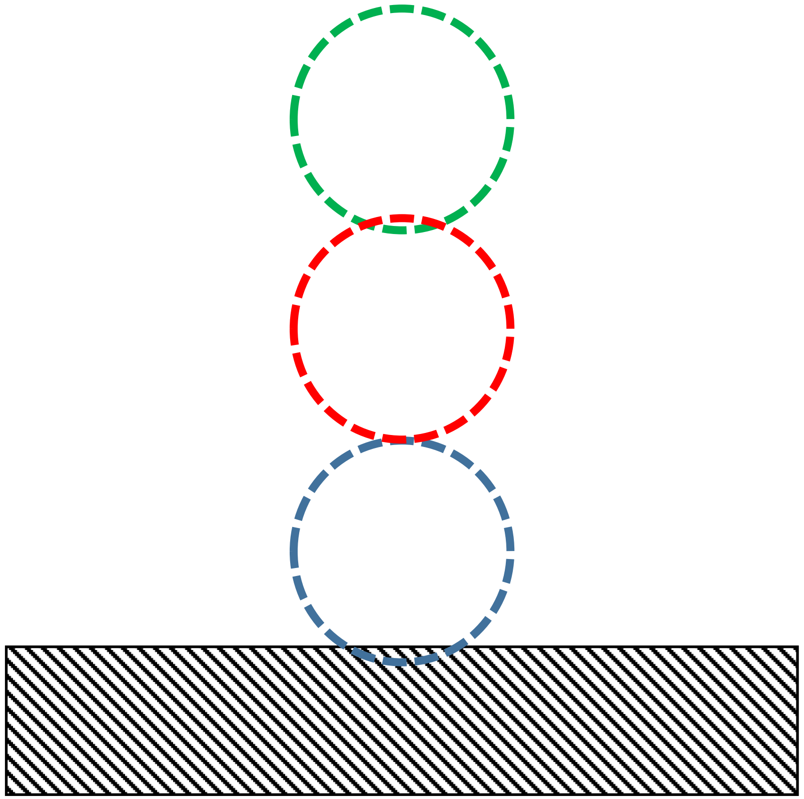


Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

Pokušaj #2:

```
while true
   primenaSile();
   integracija();
   while narusenaOgranicenja()
      resavanjeOgranicenja();
   end
   prikaz();
   pauza();
end
```



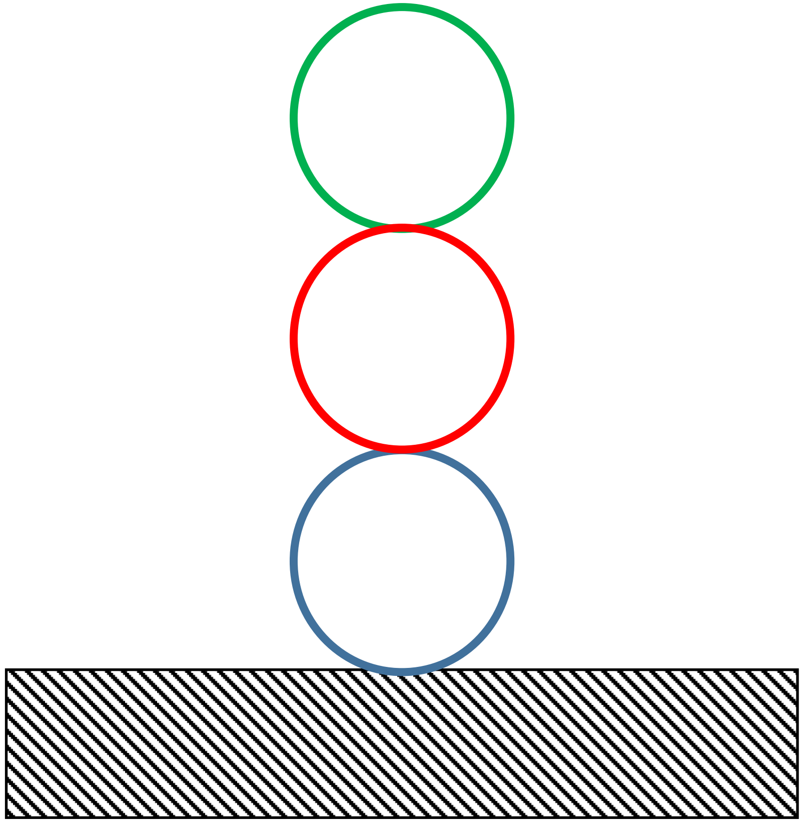
Ograničeno kretanje

Rešavanje ograničenja

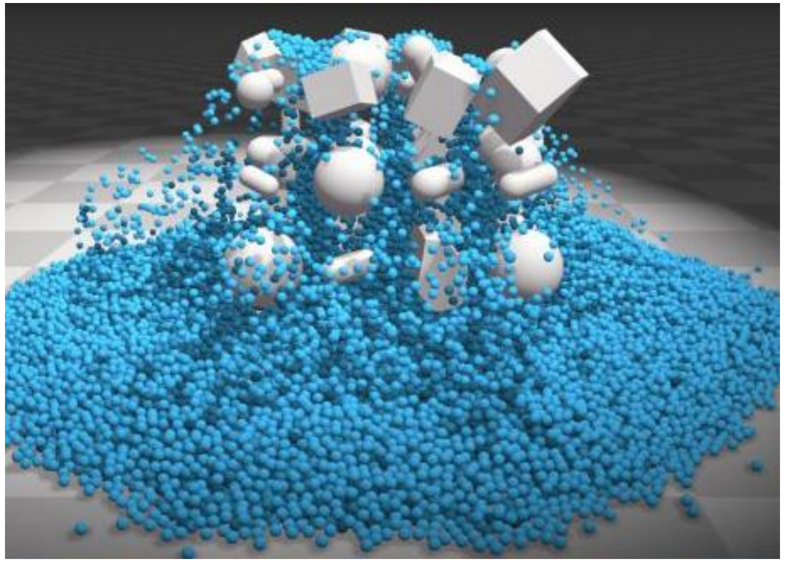
Pokušaj #2:

+ jednostavan za implementaciju
+ rešava složenije sisteme ograničenja

- spor (i za malo veći broj ograničenja)
- rešavanje ograničenja se izvodi na nivou položaja (nultog izvoda) – neprecizna simulacija



Ograničeno kretanje



Rešavanje ograničenja

Ideja:

1. definisati apstraktni model ograničenja (tako da različite vrste ograničenja imaju isti oblik)
2. napraviti sistem jednačina svih ograničenja
3. naći rešenje sistema (istovremeno rešiti sva ograničenja)
4. primeniti rešenje sistema modifikujući <u>silu</u> koja deluje na telo pre integracije
5. pri integraciji kretanje tela će odvijati na dozvoljen način tako da ne narušava ograničenja

Ograničeno kretanje

- postupak (*pipeline*):

Primena sile

Otkrivanje (narušenja) ograničenja

Rešavanje ograničenja

Integracija

Prikaz

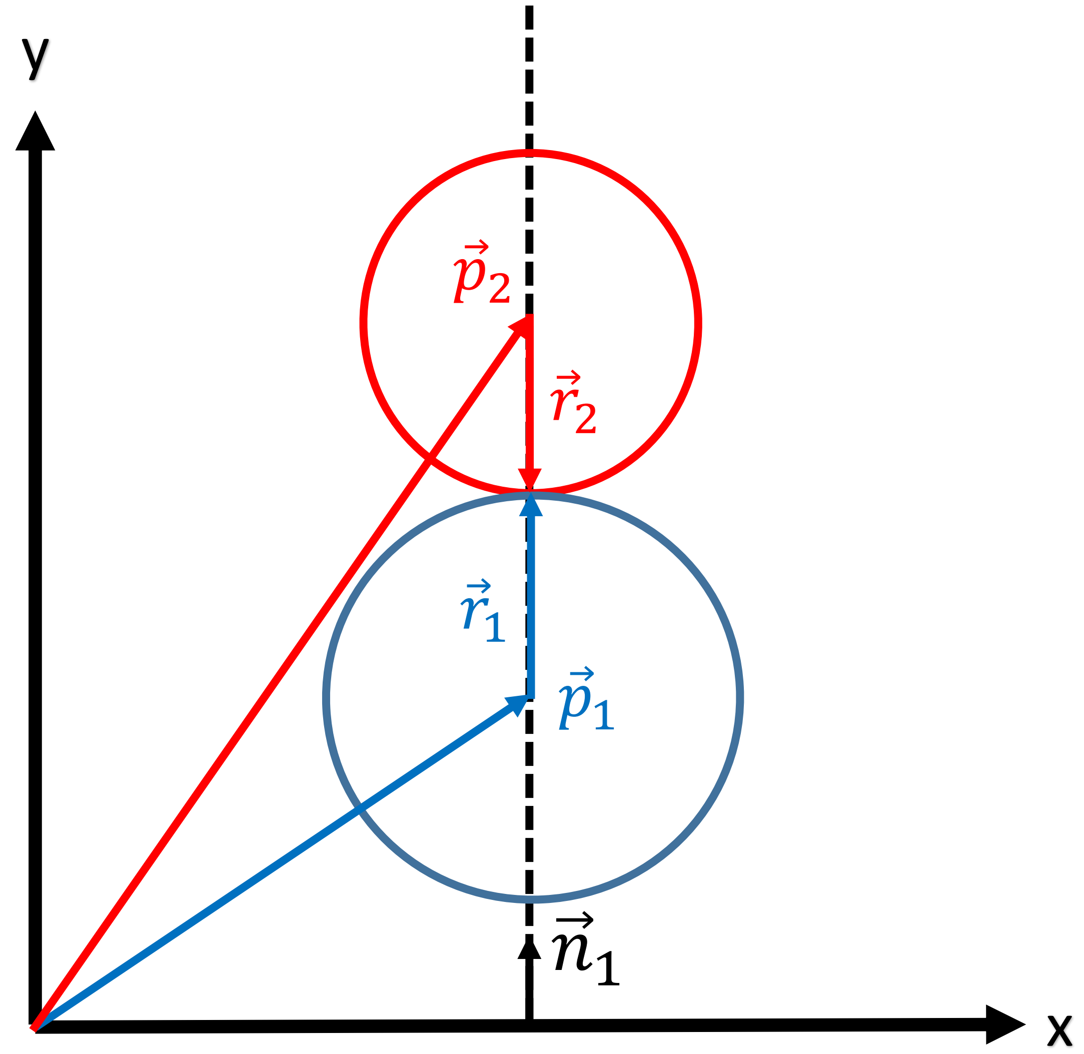
Pauza

Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Kontaktno ograničenje za 2 kruga (*pairwise*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$
$$\left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1 = 0$$



Ograničeno kretanje

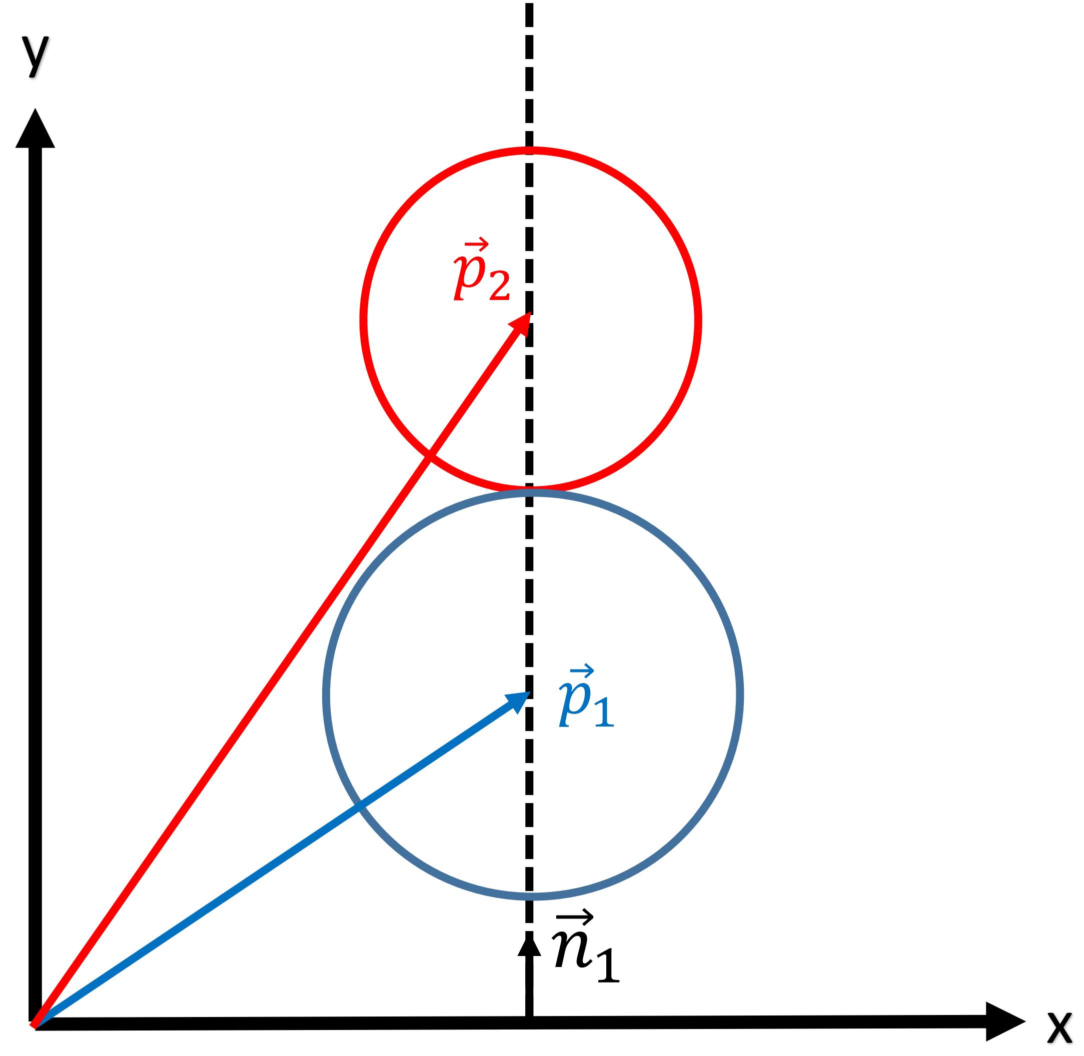
2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Da bi stanje ostalo nepromenjeno:

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

1. izvod ograničenja ne sme da se menja:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

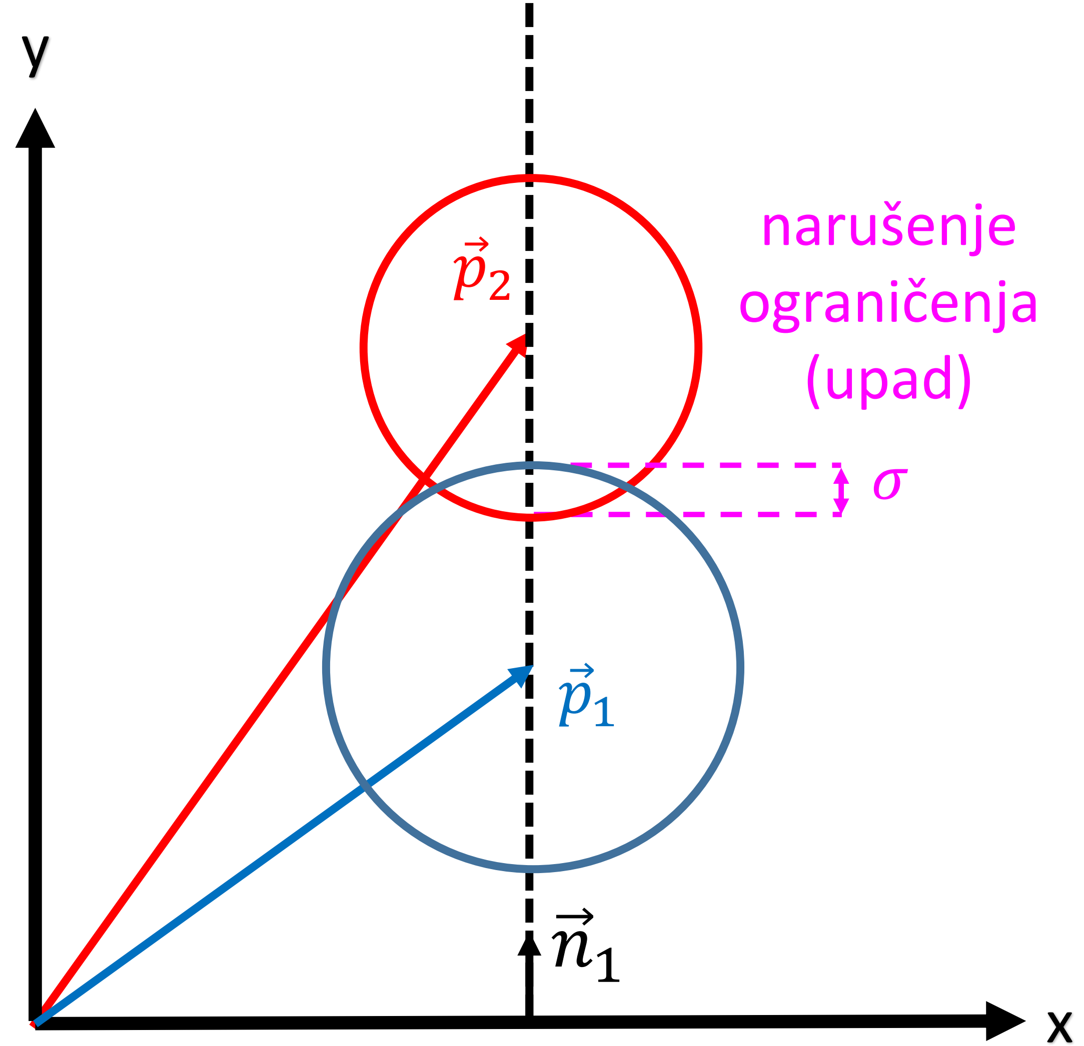


Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Ograničenja su već narušena:

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) < 0$$



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

pretpostavka:

ograničenja su zadovoljena

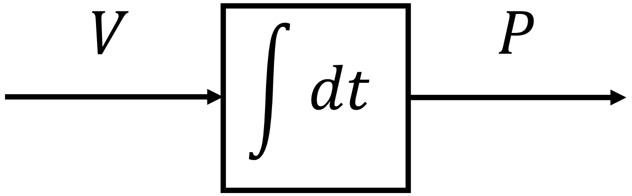
$$c = 0$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

rešenje će biti takve brzine da položaji ostanu nepromenjeni

neispravni položaji



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Baumgarte stabilization (J. Baumgarte):

pretpostavka:

ograničenja su narušena

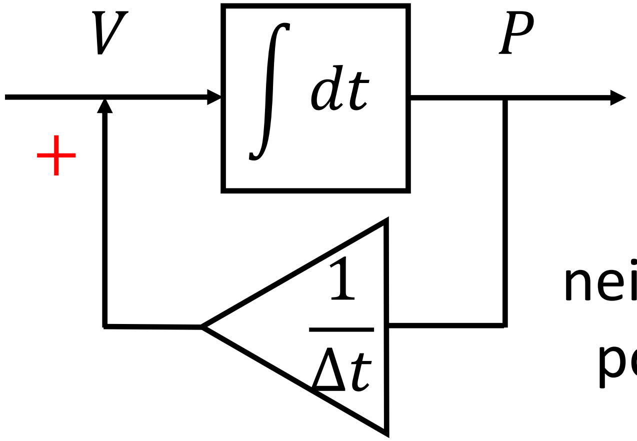
$$c < 0$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \frac{c}{\Delta t} = 0$$

rešenje će biti takve brzine da položaji budu korigovani

korigovani položaji



neispravni položaji

Ograničeno kretanje

pri integraciji se uvode greške, pa položaji neće biti u potpunosti korigovani onako kako je to određeno brzinama (*numerical drift*), tj. može doći do uvođenja energije u sistem

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Baumgarte stabilization:

pretpostavka:

ograničenja su narušena

$$c < 0$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \beta \frac{c}{\Delta t} = 0$$

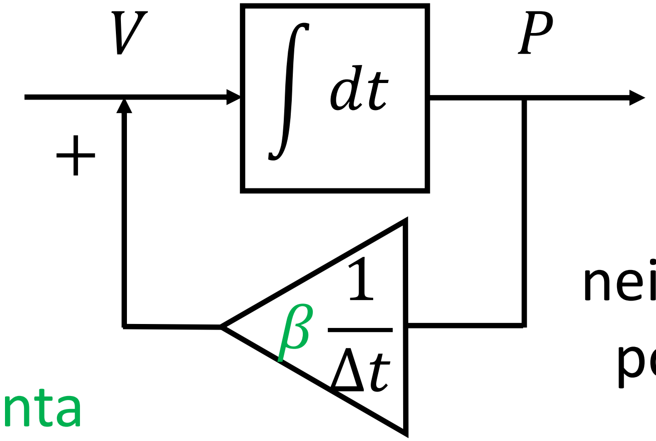
ograničiti uvođenje energije

$$0 \leq \beta \leq 1$$

unapred definisana konstanta

rešenje će biti takve brzine da položaji budu korigovani

korigovani položaji



neispravni položaji

Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1$$

rešavamo:

$$\frac{dc}{dt} + \beta\frac{c}{\Delta t} = 0$$

$$\frac{dc}{dt} = -\beta\frac{c}{\Delta t}$$

normala se ne menja

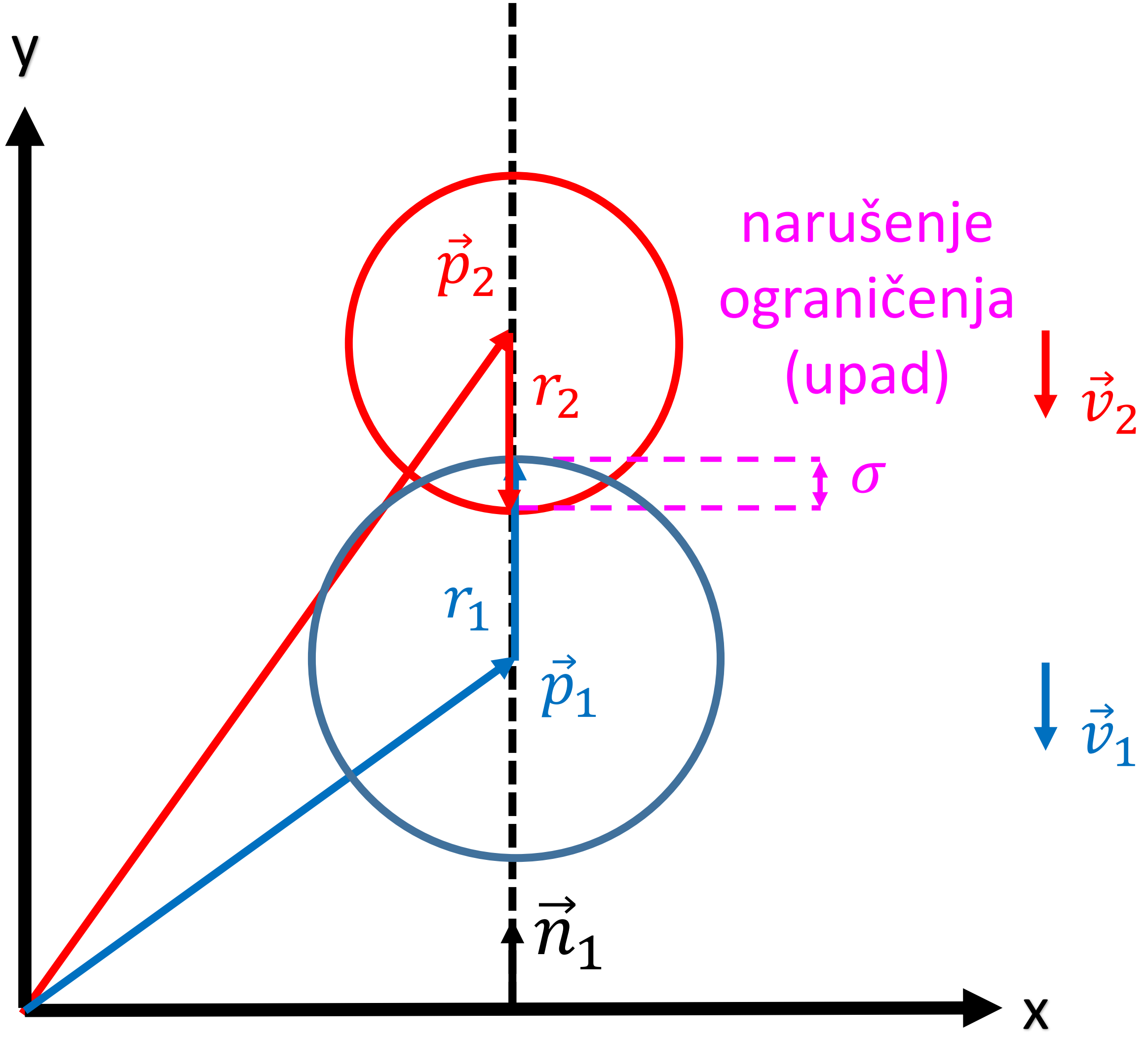
$$\frac{d}{dt}\left(\left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1\right) = -\beta\frac{c}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1 + \cancel{\left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \frac{d}{dt}\vec{n}_1} = -\beta\frac{c}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{p}_2 + \cancel{\frac{d}{dt}\vec{r}_2} - \frac{d}{dt}\vec{p}_1 - \cancel{\frac{d}{dt}\vec{r}_1}\right) \cdot \vec{n}_1 = -\beta\frac{c}{\Delta t}$$

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta\frac{c}{\Delta t}$$

poluprečnici se ne menjaju



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

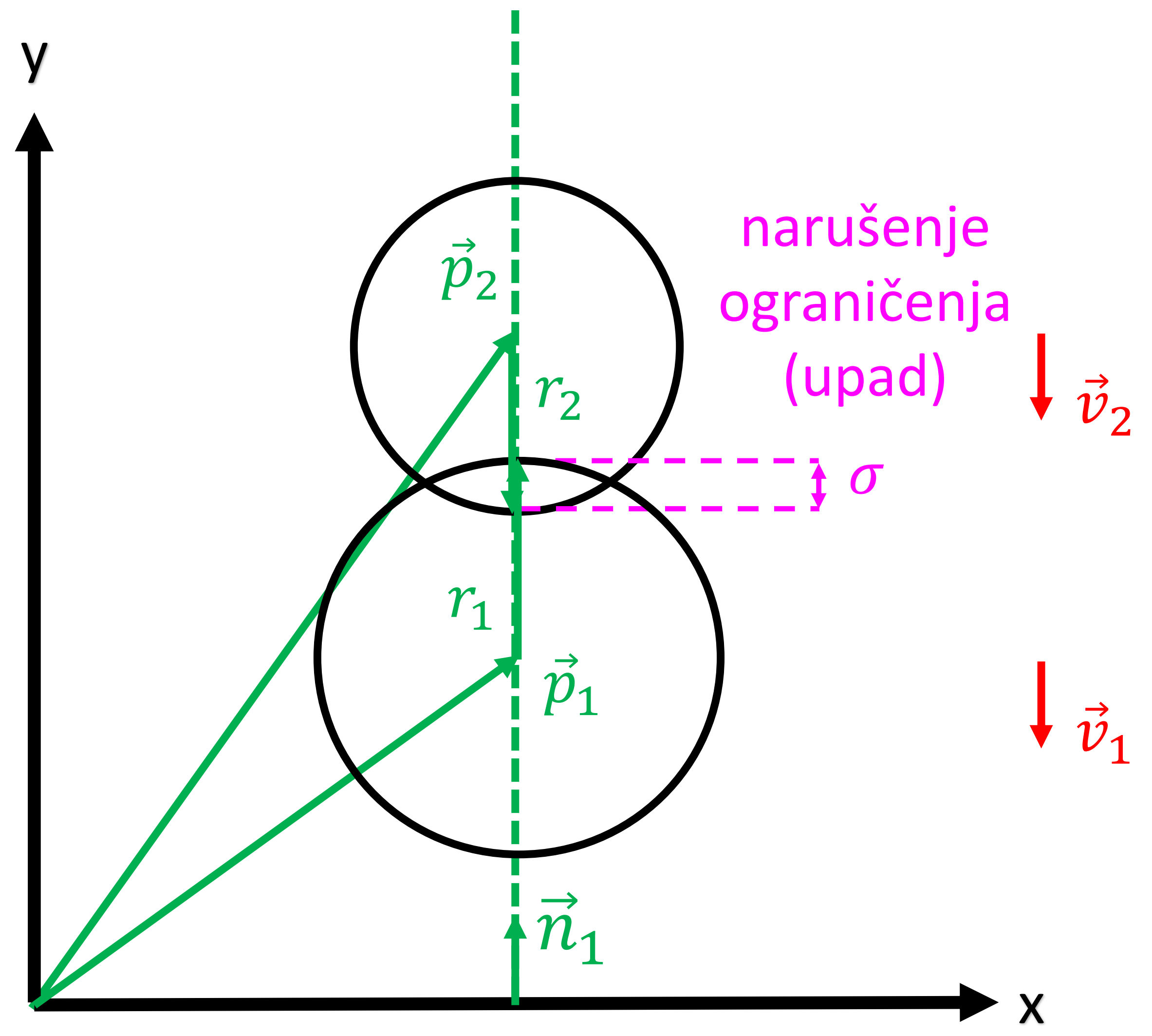
$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1$$

rešavamo:

?

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{c}{\Delta t}$$

tražimo poznato



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

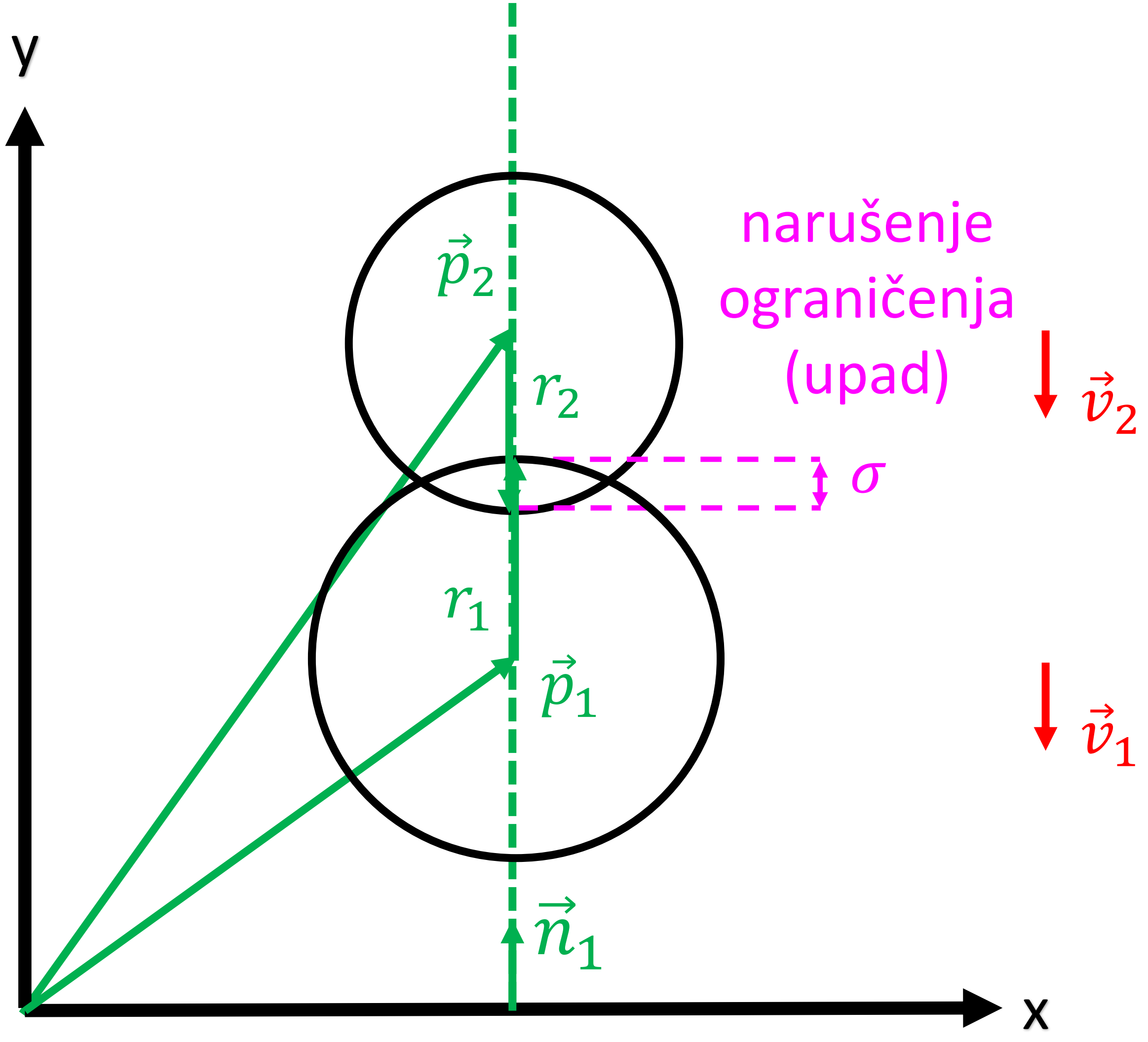
$$\sigma = (\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)) \cdot \vec{n}_1$$

izračunato pri otkrivanju sudara

rešavamo:

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

tražimo poznato



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \left(\vec{p}_2 + \vec{r}_2 - (\vec{p}_1 + \vec{r}_1)\right) \cdot \vec{n}_1$$

vektorski:

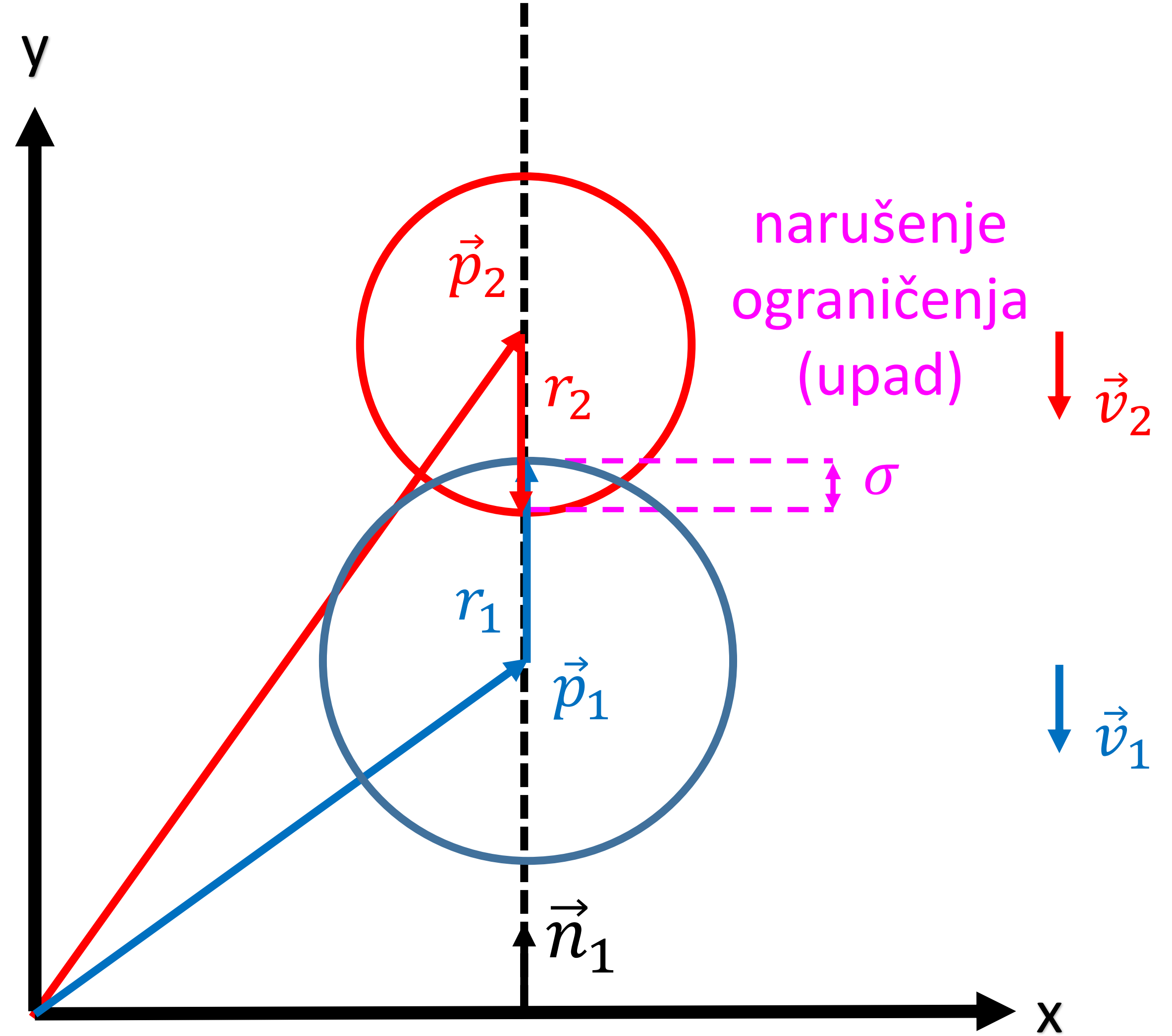
$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_1 = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

drugačiji oblik za različita ograničenja

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$

uvek isto

$$jv = -\beta \frac{\sigma}{\Delta t}$$



Ograničeno kretanje

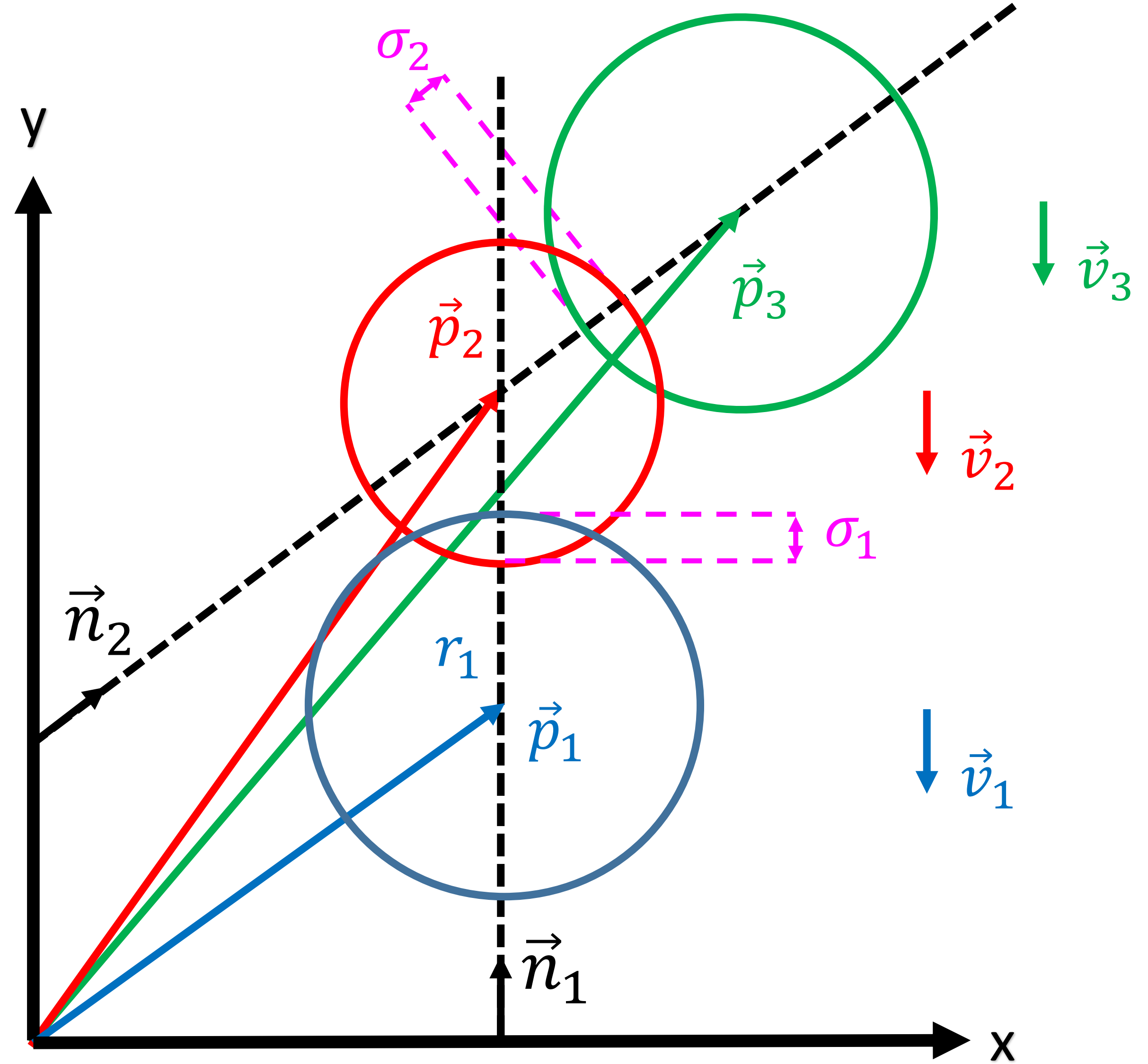
2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Za složen sistem:

$$[-\vec{n}_1 \quad \vec{n}_1]\begin{bmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\end{bmatrix} = -\beta\,\frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$[-\vec{n}_2 \quad \vec{n}_2]\begin{bmatrix}\vec{v}_2\\ \vec{v}_3\end{bmatrix} = -\beta\,\frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$$\vdots$$



Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Sistem 1. izvoda ograničenja:

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_2 & \vec{n}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}_n & \vec{n}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_n \\ \vec{v}_{n+1} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_n}{\Delta t}$$

Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Prošireno za svaku dimenziju vektora:

$$\begin{bmatrix} -n_{1x} & -n_{1y} & n_{1x} & n_{1y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_1}{\Delta t}$$

$$\begin{bmatrix} -n_{2x} & -n_{2y} & n_{2x} & n_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{3x} \\ v_{3y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_2}{\Delta t}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} -n_{nx} & -n_{ny} & n_{nx} & n_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{nx} \\ v_{ny} \\ v_{(n+1)x} \\ v_{(n+1)y} \end{bmatrix} = -\beta \frac{\sigma_n}{\Delta t}$$

Ograničeno kretanje

2. Modelovanje ograničenja (odabrani primer)

Jakobijan

brzine

narušenja ograničenja (upadi)

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{2x} & v_{2y} & \cdots & & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -n_{1x} & -n_{1y} & n_{1x} & n_{1y} & 0 & 0 & \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & -n_{2x} & -n_{2y} & n_{2x} & n_{2y} & & & & & & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \cdots & -n_{(n-1)x} & -n_{(n-1)y} & n_{(n-1)x} & n_{(n-1)y} & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & -n_{nx} & -n_{ny} & n_{nx} & n_{ny} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ \vdots \\ v_{nx} \\ v_{ny} \end{bmatrix} = -\beta \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

Da bi narušenje ograničenja bilo rešeno brzina u pravcu narušavanja ograničenja mora da poništi narušenje ograničenja.

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

poznati
pravac narušenja
ograničenja

poznato
narušenje
ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

tražena
brzina u narednom
vremenskom trenutku

Potrebno je izračunati silu
koja će poništiti narušenje ograničenja!

Ograničeno kretanje

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

matrično:

2. Njutnov zakon!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F \leftarrow \text{ukupna sila}$$

2. izvod položaja

Ograničeno kretanje

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

Ne uklapa se!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$

tražena korektivna sila

2. izvod položaja

poznata masa

poznata spoljašnja sila

Ograničeno kretanje

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

1. izvod položaja

1. rešenje: diferencirati još jednom

Rezultat: izvod Jakobijana se komplikuje!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M}(F_{ext} + F_c)$$

tražena korektivna sila

2. izvod položaja

poznata masa

poznata spoljašnja sila

Ograničeno kretanje

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

3. Rešavanje ograničenja:

poznati pravac narušenja ograničenja

poznato narušenje ograničenja

$$JV(t+\Delta t) = -\beta \frac{1}{\Delta t} S$$

brzina u narednom vremenskom trenutku

2. rešenje: konačna razlika

Rezultat: uvodi se aproksimacija!

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M} F$$
$$\frac{V(t+\Delta t) - V}{\Delta t} = \frac{1}{M}(F_{ext} + F_c)$$

tražena korektivna sila

poznata trenutna brzina

poznata masa

poznata spoljašnja sila

Ograničeno kretanje

$$\frac{d^2\vec{p}(t)}{dt^2} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

3. Rešavanje ograničenja:

matrično:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{M}F$$

$$V(t+\Delta t) = -\beta\frac{1}{dt}J^T S$$

$$V(t+\Delta t) - V = \Delta t\frac{1}{M}(F_{ext} + F_c)$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + F_c)$$

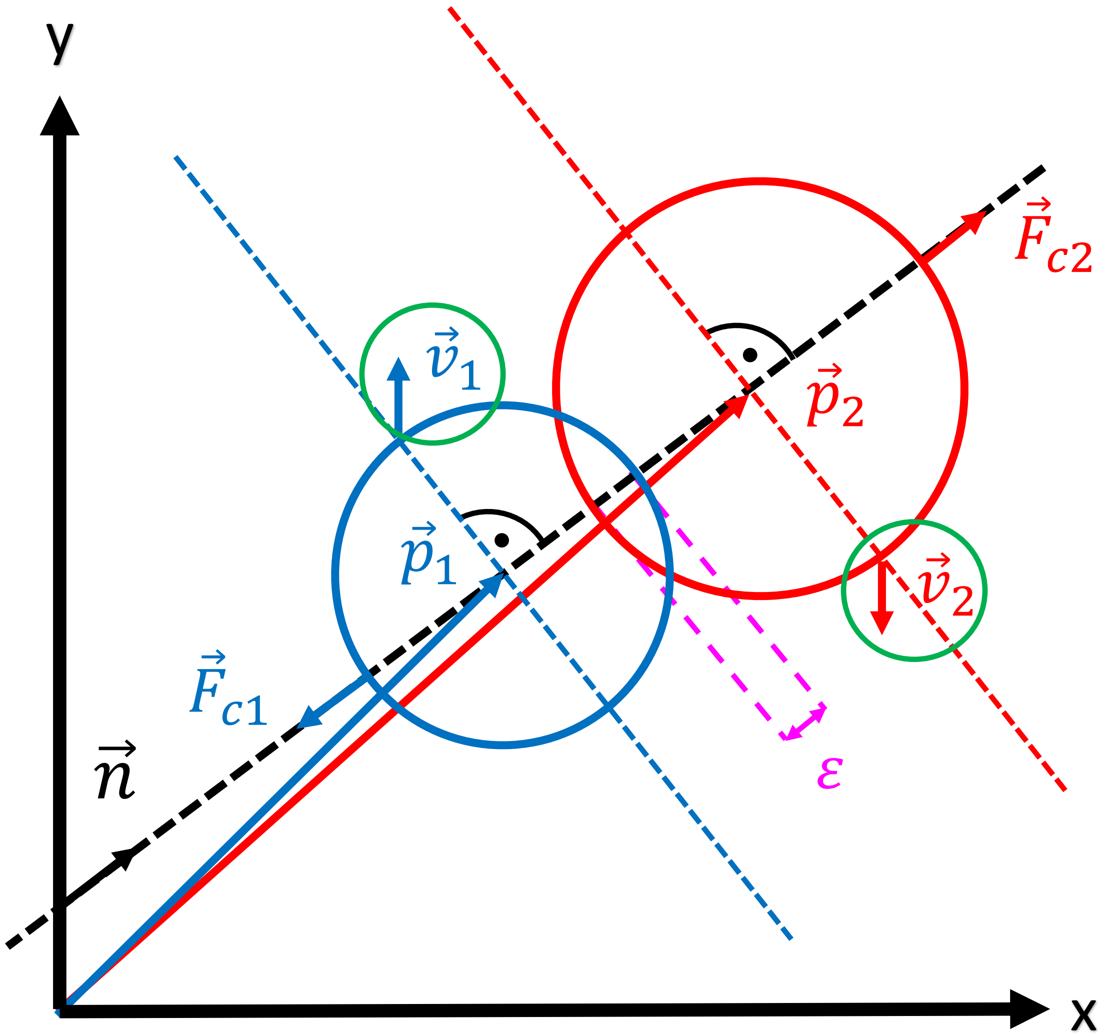
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Korektivne sile:

$$F_c \perp V(t + \Delta t)$$

- poništavaju deo trenutne brzine koji narušava ograničenje
- ne deluju duž pravca dozvoljene brzine, već normalno na njega
- ne dodaju energiju u sistem (vrše virtuelni rad)



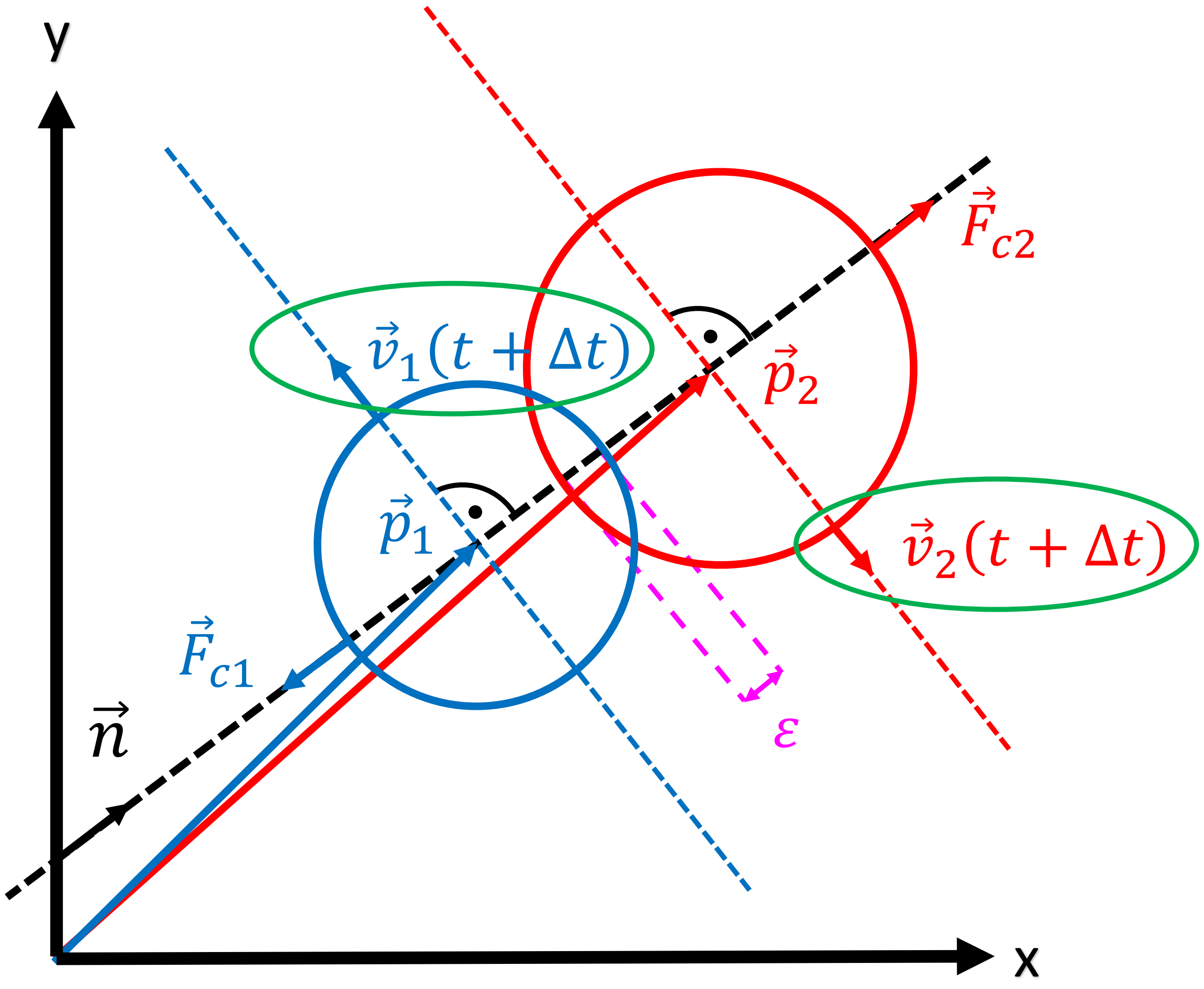
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Korektivne sile:

$$F_c \perp V(t+\Delta t)$$

- poništavaju deo trenutne brzine koji narušava ograničenje
- ne deluju duž pravca dozvoljene brzine, već normalno na njega
- ne dodaju energiju u sistem (vrše virtuelni rad)



Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

svaka vrsta Jakobijana je normalna na rezultujuće brzine

$$JV(t + \Delta t) = 0$$

Ako je:

$$F_c \perp V(t + \Delta t)$$

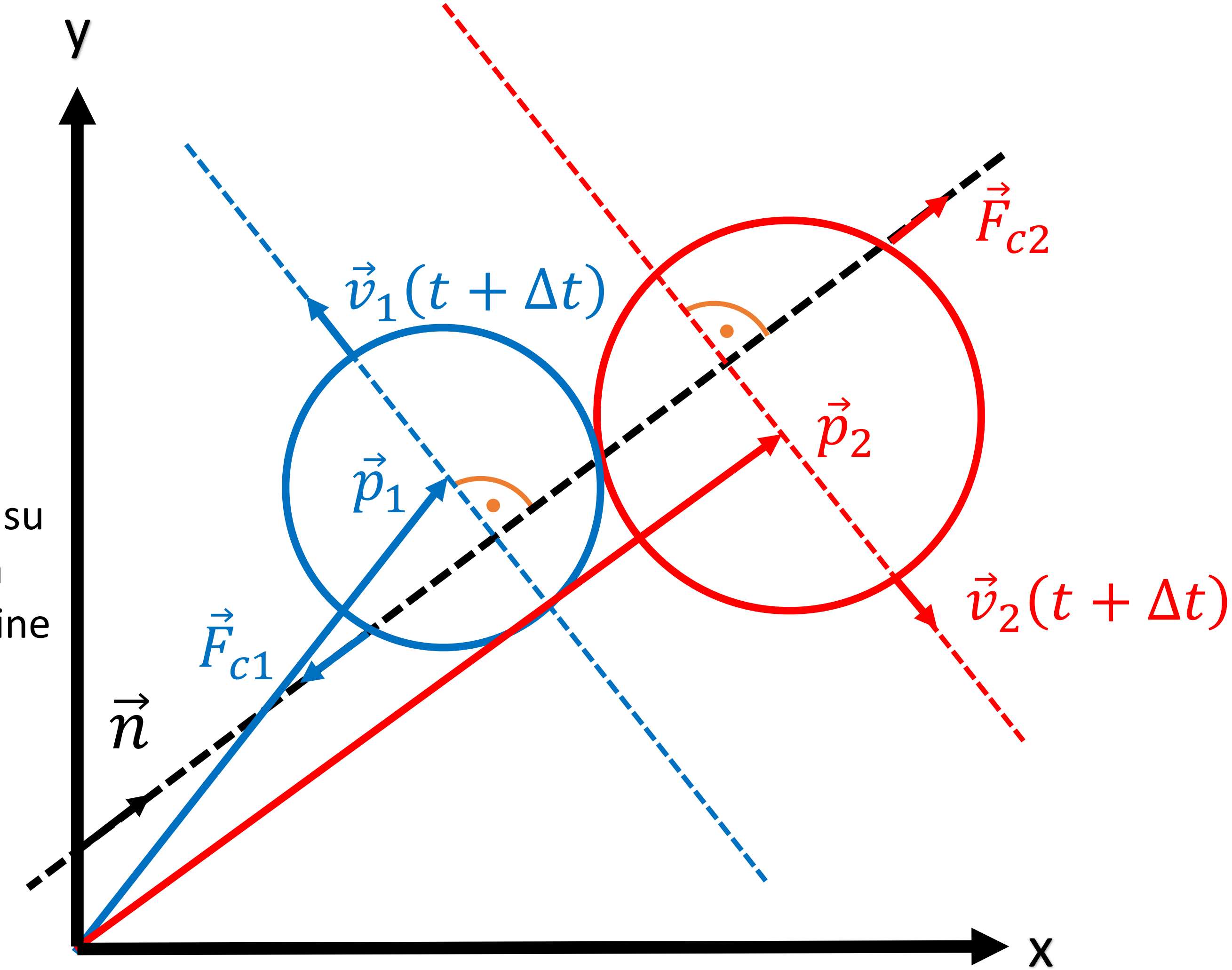
korektivne sile su normalne na rezultujuće brzine

Tada važi:

$$F_c = J^T \lambda$$

pravac intenzitet

korektivne sile tada moraju biti paralelne sa vrstama od J^T



Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta\frac{1}{\Delta t}J^T S - V = \Delta t\frac{1}{M}(F_{ext} + F_c)$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + J^T \lambda)$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} (F_{ext} + J^T \lambda)$$

$$-\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V = \Delta t \frac{1}{M} F_{ext} + \Delta t \frac{1}{M} J^T \lambda$$

$$\Delta t \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t} J^T S - V - \Delta t \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} J V - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

Šta je poznato a šta nepoznato?

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

efektivna inverzna masa

koliko ubzanje je potrebno da reši trenutno narušenje ograničenja?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem trenutne brzine?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem spoljašnje sile?

$\frac{1}{kg}$

$\frac{m}{s^2}$

$\frac{m}{s^2}$

$\frac{1}{kg}\frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{m}{s^2}$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

efektivna inverzna masa

koliko ubzanje je potrebno da reši trenutno narušenje ograničenja?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem trenutne brzine?

koliko ubzanje je potrebno da spreči dalje narušavanje ograničenja pod uticajem spoljašnje sile?

$\frac{1}{kg}$

matrica $n \times n$!

$\frac{m}{s^2}$

vektor n × 1!

$\frac{m}{s^2}$

vektor n × 1!

$\frac{1}{kg}\frac{kg \cdot m}{s^2} = \frac{m}{s^2}$

vektor n × 1!

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^{T}\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^{2}}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

$$\lambda = \mathrm{A}\backslash\mathrm{b}$$

rešavanje sistema liearnih
algebarskih jednačina

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J \frac{1}{M} J^T \lambda = -\beta \frac{1}{\Delta t^2} S - \frac{1}{\Delta t} JV - J \frac{1}{M} F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

$$\lambda = \mathrm{A} \backslash \mathrm{b}$$

$$F_c = J^T \lambda$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Na 1. korektivu silu utiče
množilac samo 1. ograničenja!

$$
\begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \\ F_{c3x} \\ F_{c3y} \\ \vdots \\ F_{cnx} \\ F_{cny} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{l}
\quad \lambda_1 \\
\begin{bmatrix}
-n_{1x} & 0 & & & \\
-n_{1y} & 0 & & & \\
n_{1x} & -n_{2x} & \cdots & & \\
n_{1y} & -n_{2y} & & & \\
0 & n_{2x} & & & \\
0 & n_{2y} & & & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \\
 & & & -n_{(n-1)x} & 0 \\
 & & & -n_{(n-1)y} & 0 \\
 & & \cdots & n_{(n-1)x} & -n_{nx} \\
 & & & n_{(n-1)y} & -n_{ny} \\
 & & & 0 & n_{nx} \\
 & & & 0 & n_{ny}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}
$$

Lagranžovi množioci
(intenzitet korektivih sila)

predstavljaju
rešenje problema

$$F_c = J^T \lambda$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Na 2. korektivu silu utiču množioci 1. i 2. ograničenja!

$$
\begin{bmatrix} F_{c1x} \\ F_{c1y} \\ F_{c2x} \\ F_{c2y} \\ F_{c3x} \\ F_{c3y} \\ \vdots \\ F_{cnx} \\ F_{cny} \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-n_{1x} & 0 & & & \\
-n_{1y} & 0 & & & \\
n_{1x} & -n_{2x} & \cdots & & \\
n_{1y} & -n_{2y} & & & \\
0 & n_{2x} & & & \\
0 & n_{2y} & & & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \\
 & & & -n_{(n-1)x} & 0 \\
 & & & -n_{(n-1)y} & 0 \\
 & & \cdots & n_{(n-1)x} & -n_{nx} \\
 & & & n_{(n-1)y} & -n_{ny} \\
 & & & 0 & n_{nx} \\
 & & & 0 & n_{ny}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{bmatrix}
$$

Lagranžovi množioci (intenzitet korektivih sila)

predstavljaju rešenje problema

$$F_c = J^T \lambda$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

$$\lambda = \mathrm{A\backslash b}$$

$$F_c = J^T\lambda$$

rešavanje sistema liearnih algebarskih jednačina

integracija:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t\frac{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_c}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t\vec{v}_i$$

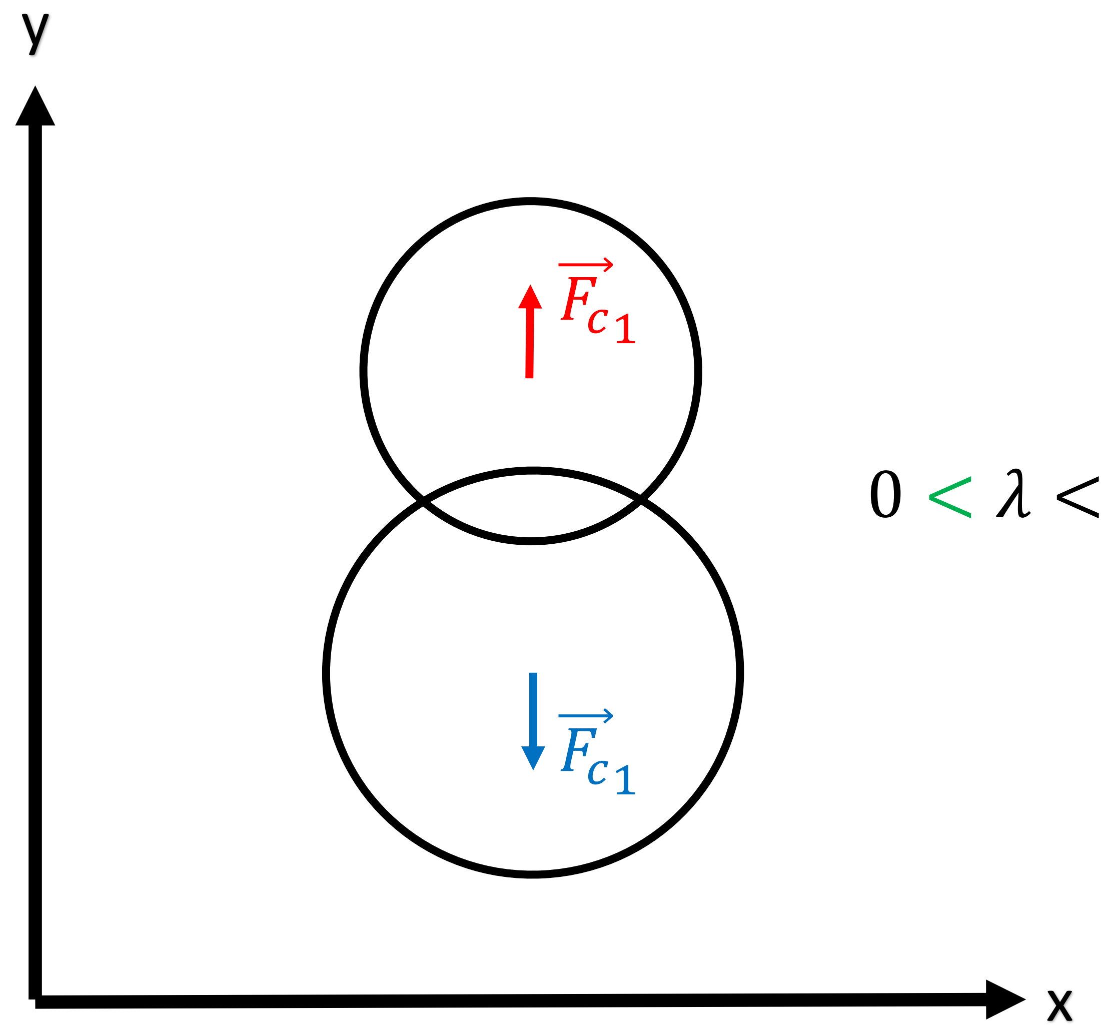
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

rezultujuća pozitivna (odgurujuća) sila F_c



$$0 < \lambda < \infty$$

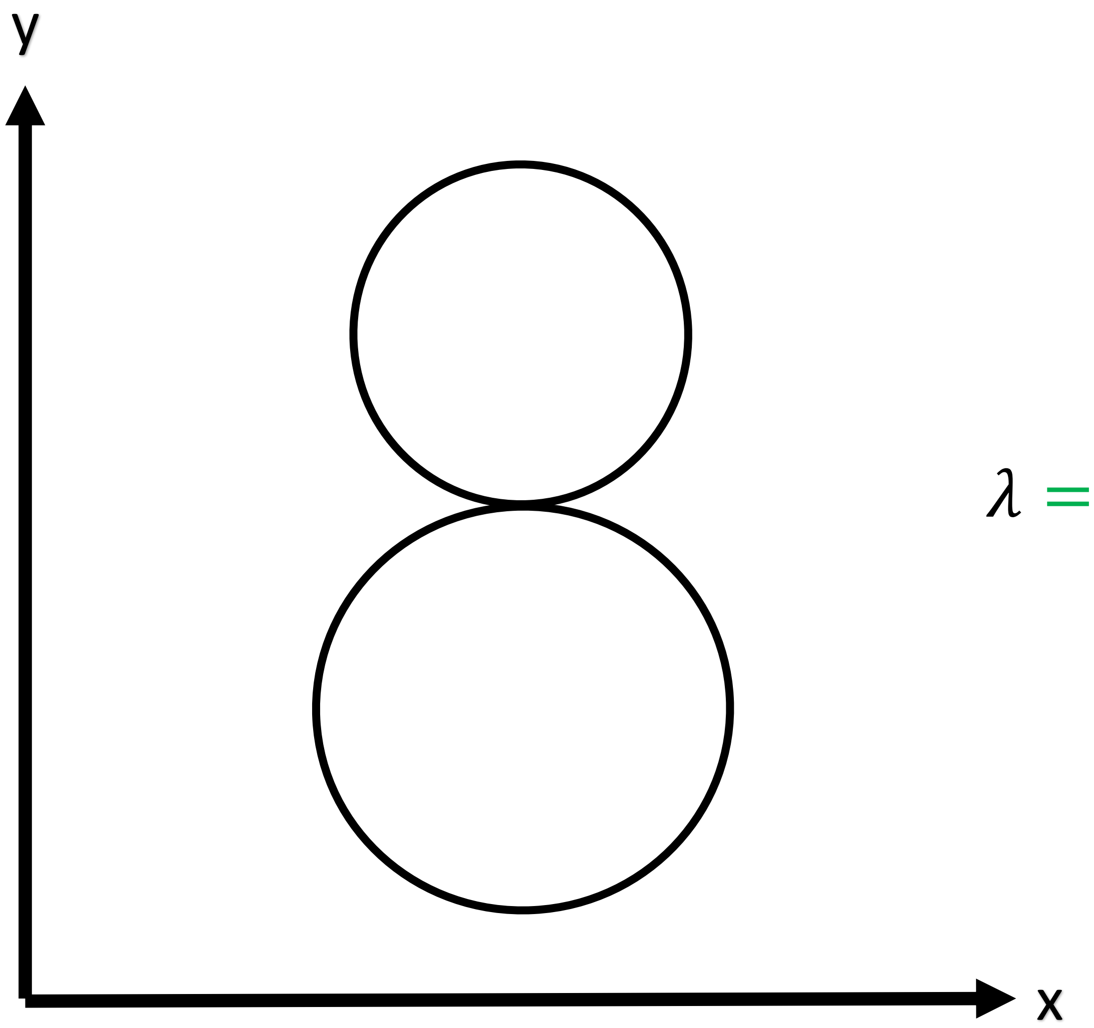
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečen upad!



$\lambda = 0$

Ograničeno kretanje

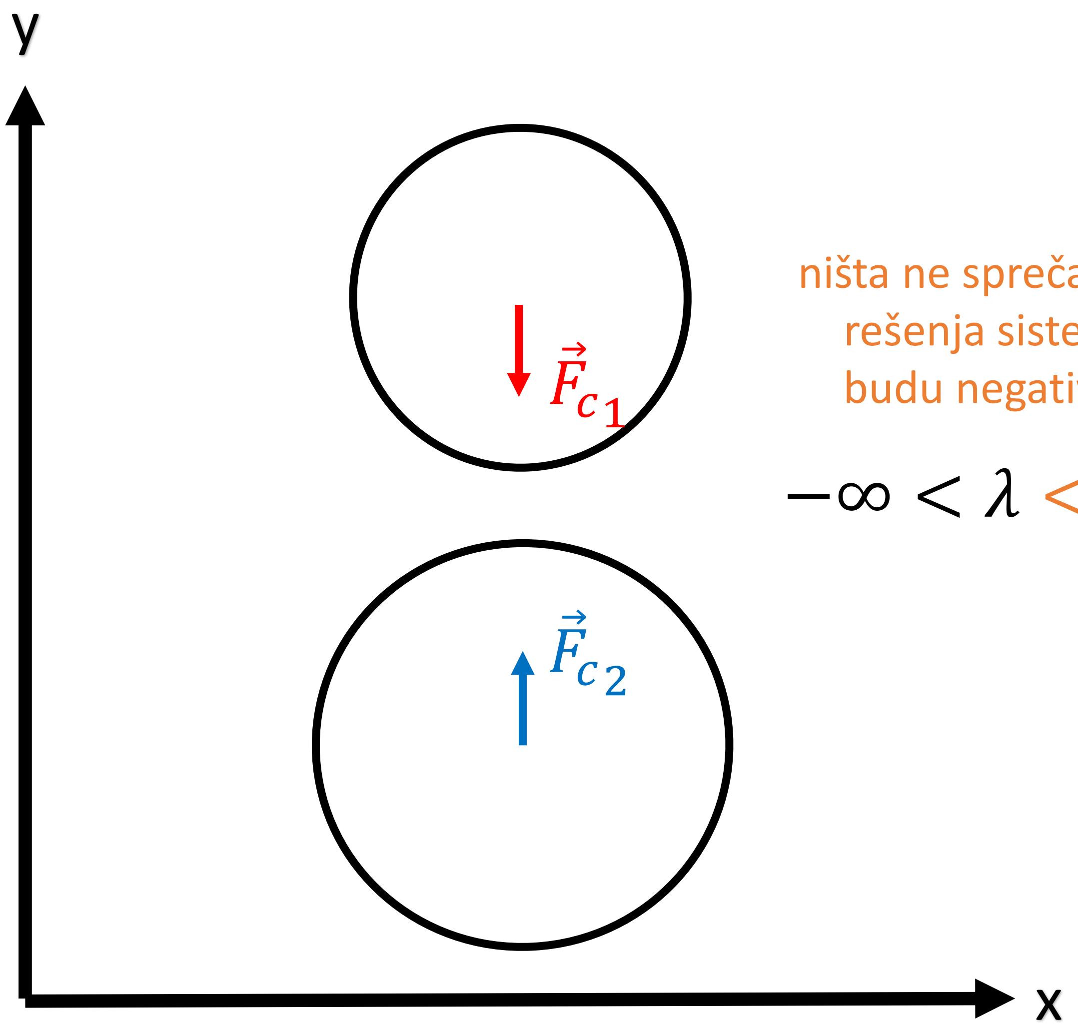
3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečeno i odvajanje!

rezultujuća negativna (privlačeća) sila F_c



ništa ne sprečava da rešenja sistema budu negativna

$$-\infty < \lambda < 0$$

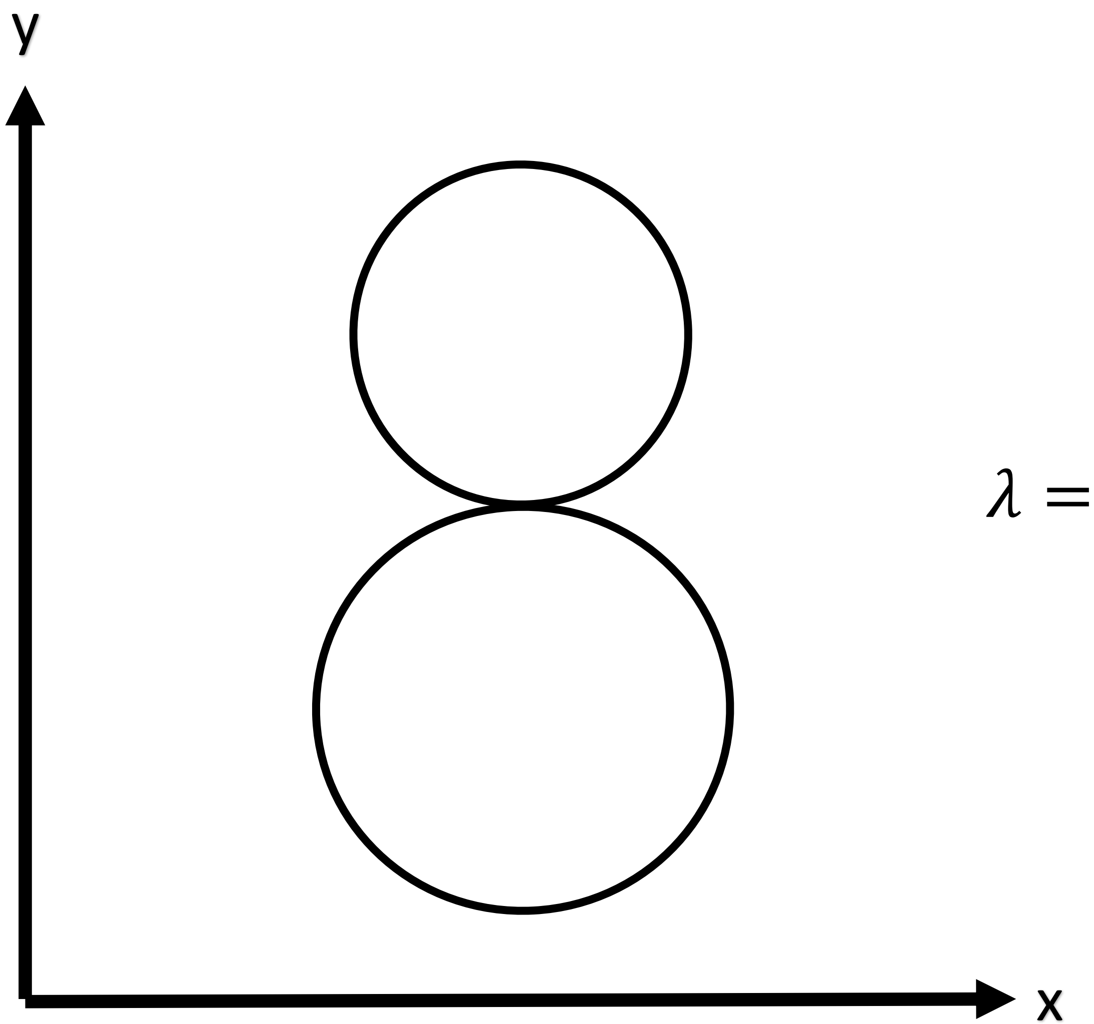
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

Sprečeno i odvajanje!



$$\lambda = 0$$

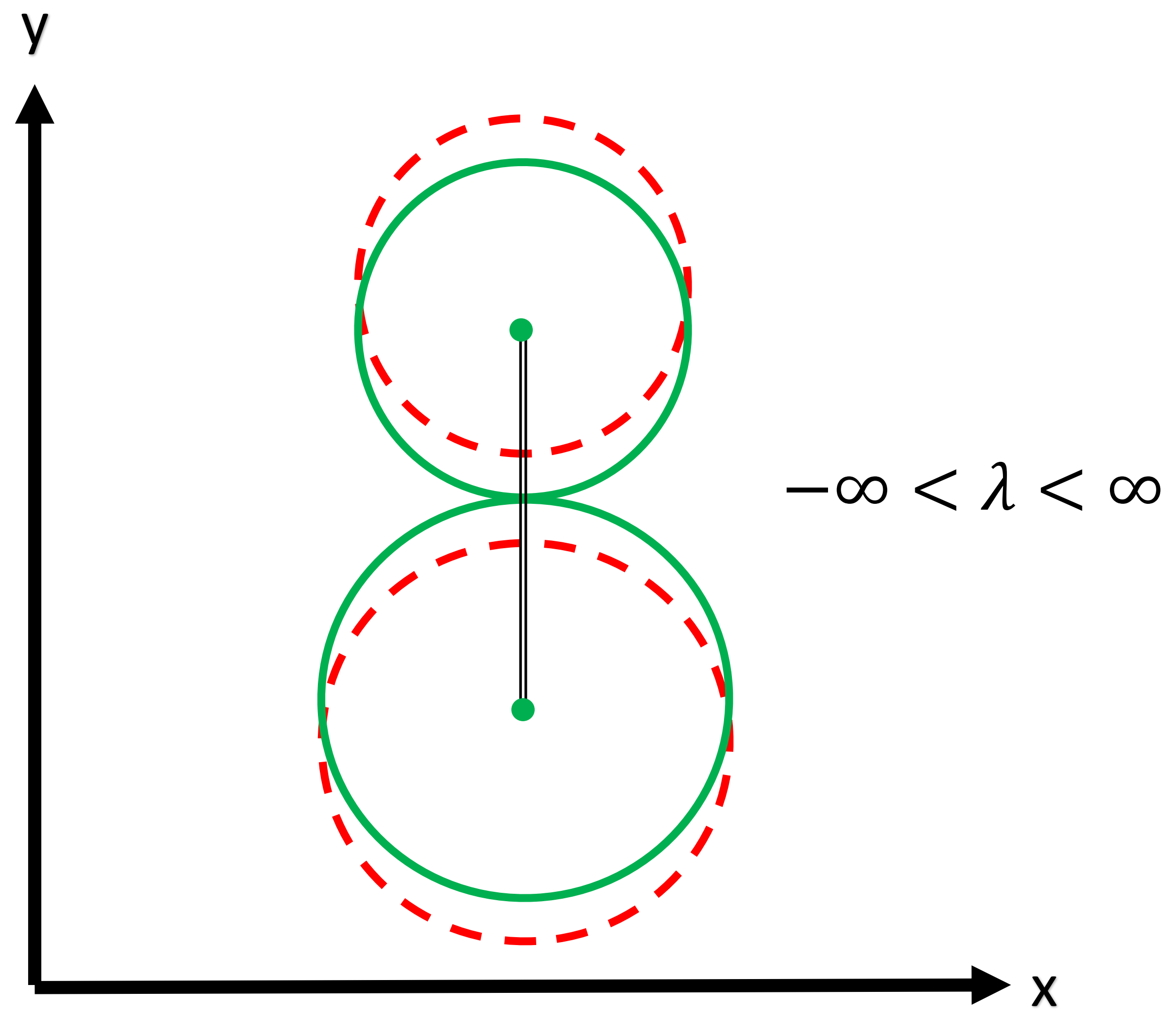
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

npr. krute veze (*distance joints*)!



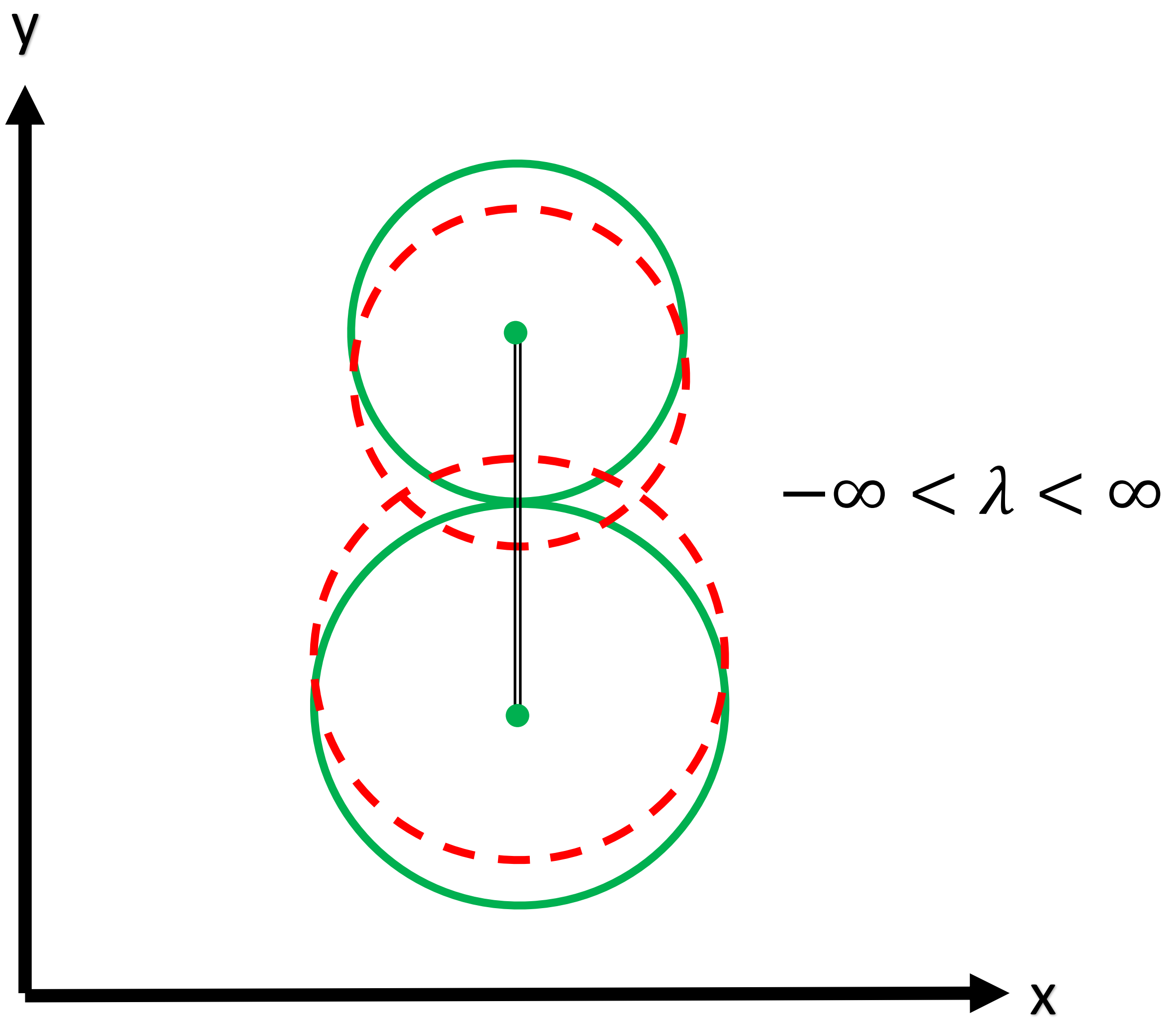
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa jednakosti (*equality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

npr. krute veze (*distance joints*)!



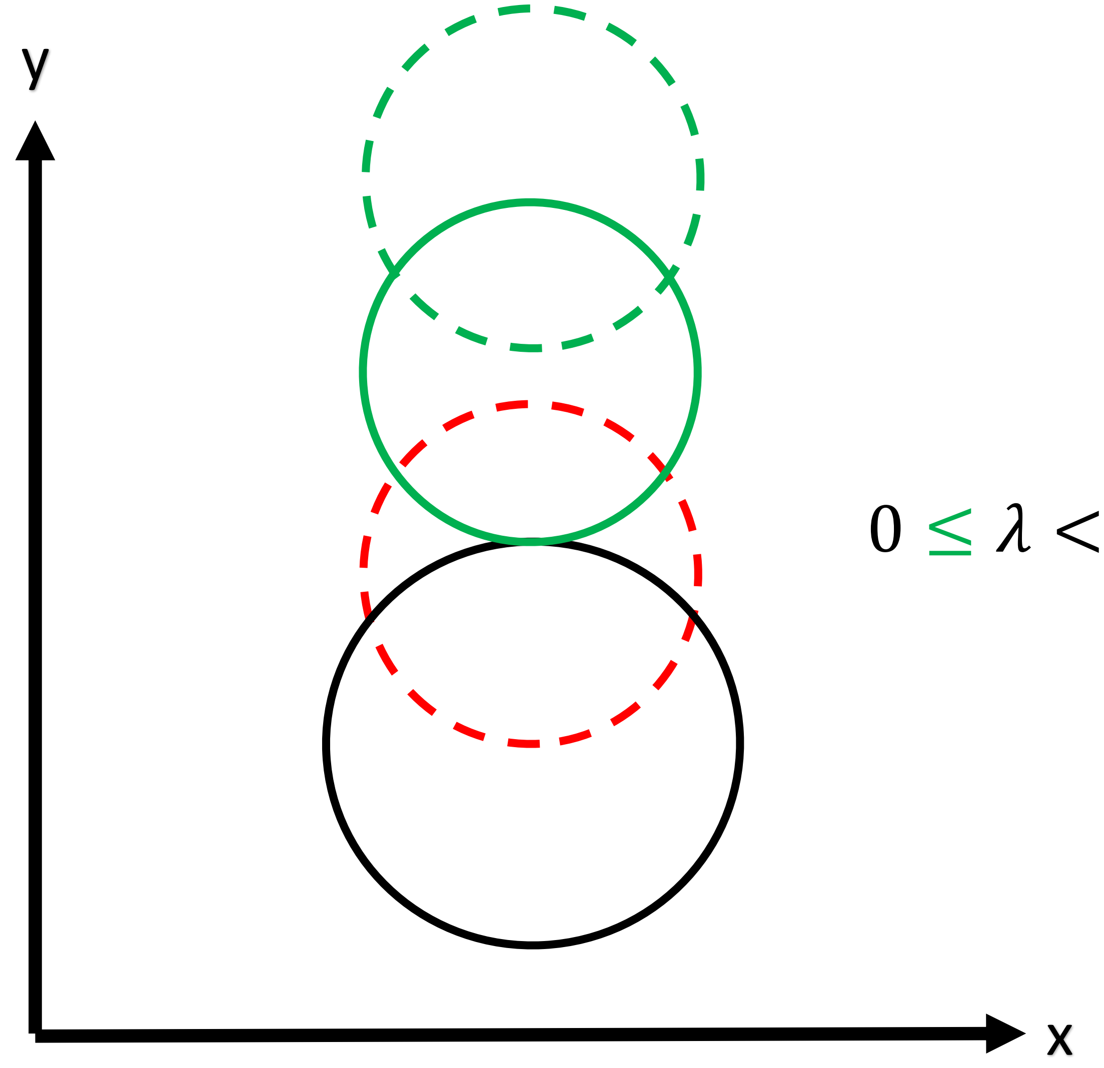
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa nejednakosti (*inequality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \geq 0$$

npr. kontaktna ograničenja!



$$0 \leq \lambda < \infty$$

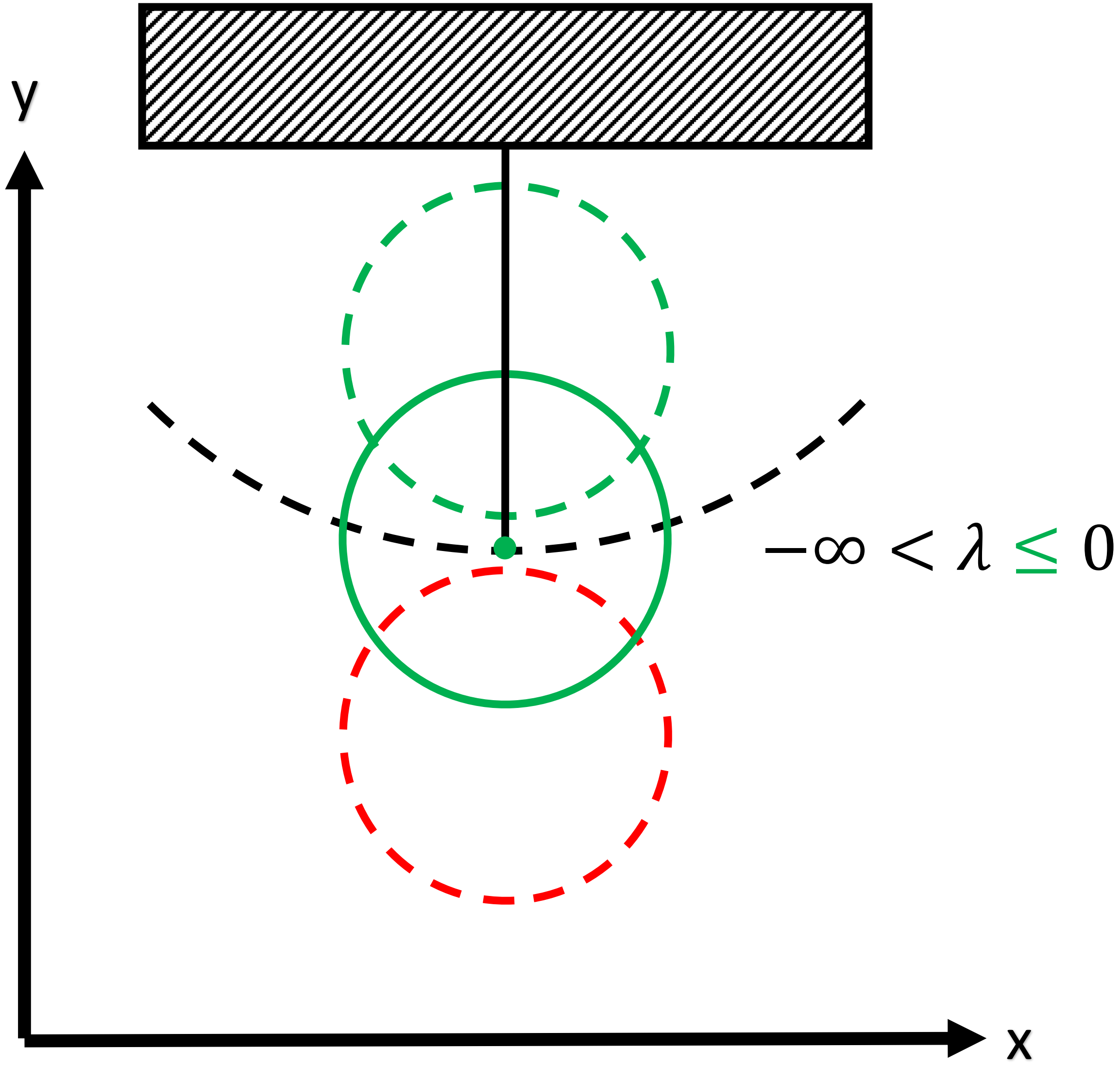
Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Ograničenja tipa nejednakosti (*inequality constraints*):

$$c(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \leq 0$$

npr. klatna (*pendulums*)!



Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - sistem linearnih algebarskih jednačina

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

- Rešava samo sistem ograničenja tipa jednakosti!

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Jednakost:	$c(\dots) = 0$
Nejednakost tipa $\geq$:	$c(\dots) \geq 0$
Nejednakost tipa $\leq$:	$c(\dots) \leq 0$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

Jednakost: $A\lambda = b$

Nejednakost tipa $\geq$: $A\lambda \geq b$

Nejednakost tipa $\leq$: $A\lambda \leq b$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   I. prevođenje nejednakosti u jednakosti

traži se (teži da proizvede F_c) *slack* promenljiva (opisuje nejednakosti kao jednakosti)

Jednakost: $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0$

Nejednakost tipa $\geq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c \leq 0$

Nejednakost tipa $\leq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c \geq 0$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   I. prevođenje nejednakosti u jednakosti

nađeno (proizvodi F_c) *slack* promenljiva (sada je višak)

Jednakost:	$A\lambda + F_c = b$	$F_c = 0$	$-\infty \le \lambda \le \infty$
Nejednakost tipa $\geq$:	$A\lambda + F_c = b$	$F_c = 0$	$0 \le \lambda \le \infty$
Nejednakost tipa $\leq$:	$A\lambda + F_c = b$	$F_c = 0$	$-\infty \le \lambda \le 0$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je λ u svojim granicama (nema sile F_c koja bi trebalo da deluje)

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   I. prevođenje nejednakosti u jednakosti
   II. uopštenje graničnih vrednosti λ da bi bile izmenljive

nađeno (proizvodi F_c) slack promenljiva (sada je višak)

Jednakost: $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad \lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max}$

Nejednakost tipa $\geq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad \lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max}$

Nejednakost tipa $\leq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c = 0 \quad \lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max}$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je λ u svojim granicama (nema sile F_c koja bi trebalo da deluje)

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   I. prevođenje nejednakosti u jednakosti
   II. uopštenje graničnih vrednosti λ da bi bile izmenljive
   III. komplementarnost

dostiglo granice (ne može da proizvede F_c) *slack* promenljiva (jednakost i nejednakosti više ne važe)

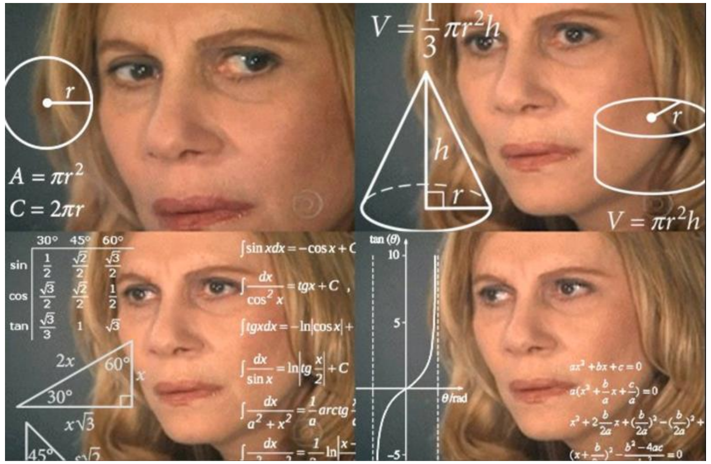
Jednakost: $A\lambda + F_c = b \quad F_c \neq 0 \quad \lambda_{min} = \lambda \quad \vee \quad \lambda = \lambda_{max}$

Nejednakost tipa $\geq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c \geq 0 \quad \lambda_{min} = \lambda$

Nejednakost tipa $\leq$: $A\lambda + F_c = b \quad F_c \leq 0 \quad \lambda = \lambda_{max}$

- ograničenja su narušena ako i samo ako je λ dostiglo svoje granice (postoji sila F_c koja bi trebalo da deluje)

Ograničeno kretanje



3. Rešavanje ograničenja:
   - (mešoviti) linearni komplementarni problem (MLCP)

mixed linear complementarity problem

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda + F_c = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda + F_c = b$$

$$F_{c_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{min_i} \le \lambda_i \le \lambda_{max_i} \quad ,\forall i \in N$$

$$F_{c_i} \ge 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_{min_i} \quad ,\forall i \in N$$

$$F_{c_i} \le 0 \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_{max_i} \quad ,\forall i \in N$$

- ograničenja su zadovoljena ako i samo ako je λ u svojim granicama (nema sile F_c koja bi trebalo da deluje)
- ograničenja su narušena ako i samo ako je λ dostiglo svoje granice (postoji sila F_c koja bi trebalo da deluje)

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - (mešoviti) linearni komplementarni problem (MLCP)

$c(\dots) = 0$	$c(\dots) \geq 0$	$c(\dots) \leq 0$
$-\infty < \lambda < \infty$	$\lambda \geq 0$	$\lambda \leq 0$

$$\begin{gathered} c_1(\dots) = 0 \\ c_2(\dots) \geq 0 \\ c_3(\dots) \leq 0 \\ \vdots \\ c_n(\dots) = 0 \end{gathered} \qquad \lambda_{min} = \begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix} \lambda_{max} = \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ 0 \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix}$$

Drugim rečima:

Traži se λ samo u opsezima u kojima dati tip ograničenja treba zadovoljiti!

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - *Gauss-Seidel* metoda (rešava sistem linearnih algebarskih jednačina):

```
function [x, it] = gs(A, b, x0, itMax, errMax)
    rows = length(A);

    x = x0;
    for it = 1:itMax
        for row = 1:rows
            x(row) = 1/A(row,row)*(b(row) - A(row,1:row - 1)*x(1:row - 1) - A(row,row + 1:end)*x0(row + 1:end));
        end
        if abs(x - x0) < errMax
            return
        end
        x0 = x;
    end
end
```

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - *Projected Gauss-Seidel* metoda (rešava MLCP):

```
function [x, it] = projectedGS(A, b, x0, xMin, xMax, itMax, errMax)
    rows = length(A);

    x = x0;
    for it = 1:itMax
        for row = 1:rows
            x(row) = 1/A(row,row)*(b(row) - A(row,1:row - 1)*x(1:row - 1) - A(row,row + 1:end)*x0(row + 1:end));
            % projection
            if x(row) < xMin(row)
                x(row) = xMin(row);
            end
            if x(row) > xMax(row)
                x(row) = xMax(row);
            end
        end
        if abs(x - x0) < errMax
            return
        end
        x0 = x;
    end
end
```

postoje i drugi algoritmi, među kojima je najpoznatiji Lemke algoritam (*Carlton E. Lemke*)

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda = b$$

$$\lambda = \mathrm{A}\backslash\mathrm{b}$$

rešavanje MLCP sa poznatim λ_{min} i λ_{max}

$$F_c = J^T\lambda$$

integracija:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{i-1} + \Delta t\frac{\vec{F}_{ext} + \vec{F}_c}{m}$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{i-1} + \Delta t\vec{v}_i$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
    - keširanje kontakata (*contact caching*):

\+ velika je verovatnoća da će rešenje u narednom trenutku biti blizu rešenja u prošlom. Keširanjem se dramatično smanjuje broj potrebnih iteracija.

\+ ako je sistem ograničenja preodređen, ima beskonačno mnogo rešenja. Bez keširanja se u svakom trenutku nalazi novo rešenje. Ovo prouzrokuje *jiggle* efekat.

\- ograničenja se formiraju u svakom vremenskom trenutku. Vektor λ u narednom vremenskom trenutku može imati više ili manje elemenata, a elementi se mogu javiti u drugačijem redosledu. Potrebno je za svako ograničenje pronaći odgovarajući element vektora λ iz prošlog vremenskog trenutka. Problem se svodi na pretragu.

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - keširanje kontakata (*contact caching*):

trenutak Δt:

$\vdots$

```
lambda1 = projectedGS(A, b, 0, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

$\vdots$

trenutak $2\Delta t$:

$\vdots$

```
lambda2 = projectedGS(A, b, lambda1, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

$\vdots$

trenutak $3\Delta t$:

$\vdots$

```
lambda3 = projectedGS(A, b, lambda2, lambdaMin, lambdaMax, iterations, 10^-4);
```

$\vdots$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

- deo sile koji postoji isključivo da bi poništio narušenje ograničenja biva integrisan u brzinu
- brzina biva integrisana i položaj i već u tekućoj iteraciji se narušenje poništava
- “višak” brzine (koji nije potekao od spoljašnje sile) se prenosi u narednu iteraciju (energija se akumulira) i prouzrokuje nestabilnost

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S - \frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

“veštački” uveden faktor da bi poništio narušenje ograničenja jer:

1. ono biva otkriveno nakon što se desi
2. čak i da 1. nije slučaj, desilo bi se usled numeričkih grešaka

$$A\lambda = b$$

$$\lambda = A\backslash b$$

$$F_c = J^T\lambda$$

integracija:

$$V(t+\Delta t) = V + \Delta t\frac{F_{ext} + F_c}{m}$$

$$P(t+\Delta t) = P + \Delta t V(t+\Delta t)$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:

ista vrednost!
(prostor za optimizaciju)

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda_v = -\frac{1}{\Delta t}JV - J\frac{1}{M}F_{ext}$$

$$A\lambda_v = b_v$$

$$\lambda_v = A\backslash b_v$$

$$F_{c_v} = J^T\lambda_v$$

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda_p = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S$$

$$A\lambda_p = b_p$$

$$\lambda_p = A\backslash b_p$$

$$F_{c_p} = J^T\lambda_p$$

Razdovjiti problem:

I. integrisati deo sile koja vrši korekciju brzine kao i do sada

II. integrisati deo sile koja vrši korekciju položaja direktno u položaj

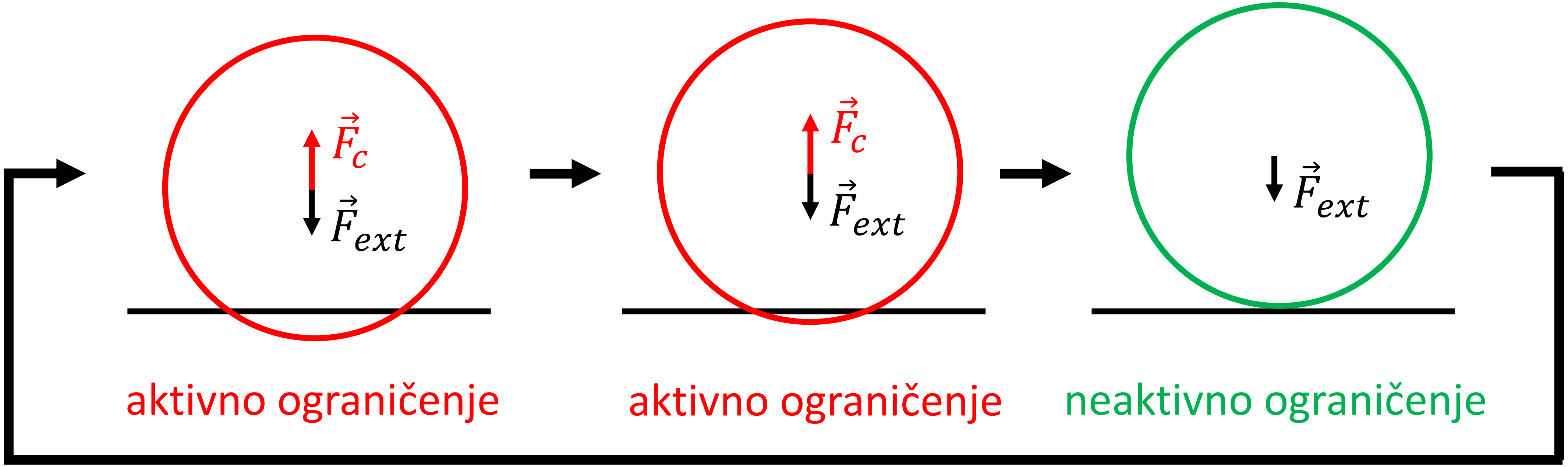
integracija:

$$V(t+\Delta t) = V + \Delta t\frac{F_{ext} + F_{c_v}}{m}$$

$$P(t+\Delta t) = P + \Delta t\left(V(t+\Delta t) + \Delta t\frac{F_{c_p}}{m}\right)$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - kontaktna ograničenja:



Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
    - kontaktna ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda_p = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S$$

Sprečiti razrešavanje malog dela upada (ograničenje se održava aktivnim):

$$S = \sigma + \sigma_{slop}$$

realni upad
(negatvna vrednost)

$$0 < \sigma_{slop} \ll 1$$

Ograničeno kretanje

3. Rešavanje ograničenja:
   - kontaktna ograničenja:

$$J\frac{1}{M}J^T\lambda_p = -\beta\frac{1}{\Delta t^2}S$$

sprečiti da suma bude pozitivna:

$$S = min(\sigma + \sigma_{slop}, 0)$$

Demo

https://github.com/mbeocanin/MLCP-Particle-Phyiscs-Sandbox

Pitanja

https://github.com/mbeocanin