

# Tarefa #5

Daniela Amaral Sampaio - 2017074351

Matheus Brito Faria - 2017074386

## INTRODUÇÃO

Esta tarefa tem como objetivo abordar todas as cinco etapas do problema de identificação de sistemas: projeto de testes, escolha da representação matemática, seleção de estrutura, estimação de parâmetros e validação do modelo. Finaliza-se com a discussão e análise dos resultados obtidos.

## PARTE 1

### Letra A: Pré-processamento

Conforme visto na aula em [1] do professor Aguirre, normalmente se dividem os conjuntos de dados em duas partes: a primeira são dados de identificação, correspondente à 75% dos dados e a segunda os dados de validação, correspondente aos 25% restantes dos dados.

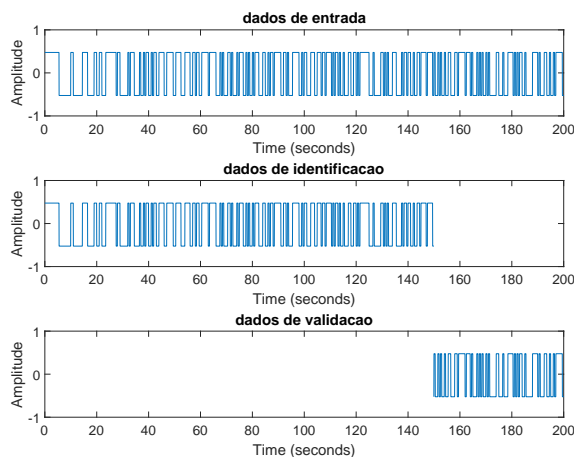


Figura 1. Entrada e sua separação dos dados de identificação e validação.

A escolha do tempo de amostragem é importante pois se as amostras forem muito espaçadas entre si, muitas informações são perdidas e se acontecer o outro extremo e amostrar rápido demais, o nível de redundância entre os valores amostrados é muito grande. Portanto, para escolher esse valor, foi utilizado o vídeo em [2] do professor Aguirre, e a princípio foi escolhida uma amostragem rápida. Foi medida uma série temporal sobre amostrada, uma segunda série que equivale a pegar cada valor desse elemento e elevar ao quadrado. Foi calculada a função de autocorrelação de cada uma das funções como mostrado nas figuras 3 e 4. Observando-se o gráfico das funções, procura-se o atraso para o qual a função é mínima. O menor valor foi encontrado em 33, como pode ser visto na figura 3, correspondente à FAC da primeira série gerada.

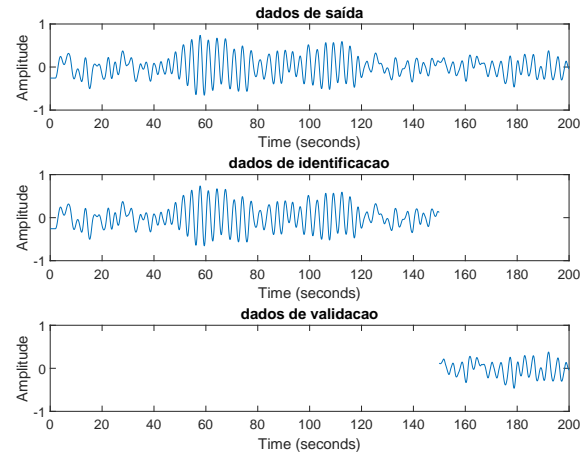


Figura 2. Saídas e sua separação entre dados de identificação e validação

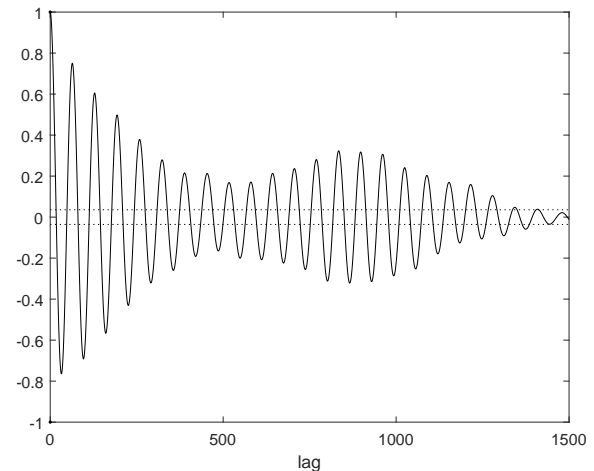


Figura 3. Função de autocorrelação da saída.

Sabendo dessa informação, deseja-se gerar o  $Y$  de trabalho, que é uma versão decimada de um fator delta do  $y^*$  tal que quando fizer o cálculo da função de FAC das séries linear e não linear do sinal decimado, o novo tau mínimo deve aparecer entre  $10 < T_m \leq 20$ . Como vê-se na figura 3, é preciso fazer uma decimação de 2, para que o novo tau mínimo de 17 atenda ao requisito imposto. Esse é um procedimento razoavelmente simples que funciona bem na prática, e não precisa utilizar domínios de frequência. As funções de autocorrelação com a nova entrada decimada podem ser vistas nas figuras 5 e 6.

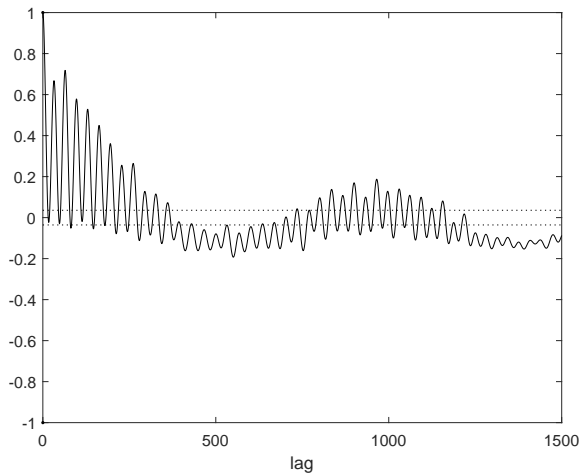


Figura 4. Função de autocorrelação da saída ao quadrado.

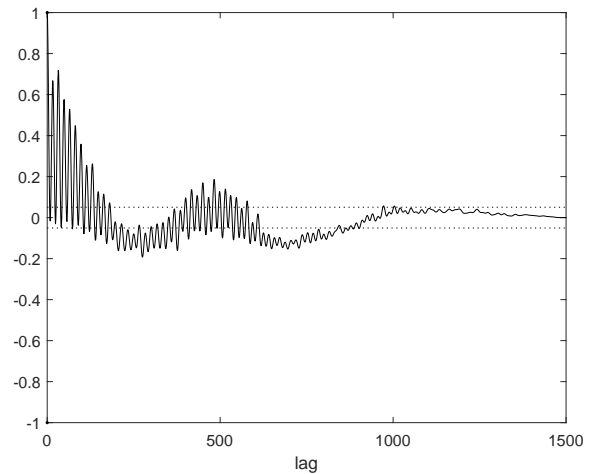


Figura 6. Função de autocorrelação da saída decimada ao quadrado.

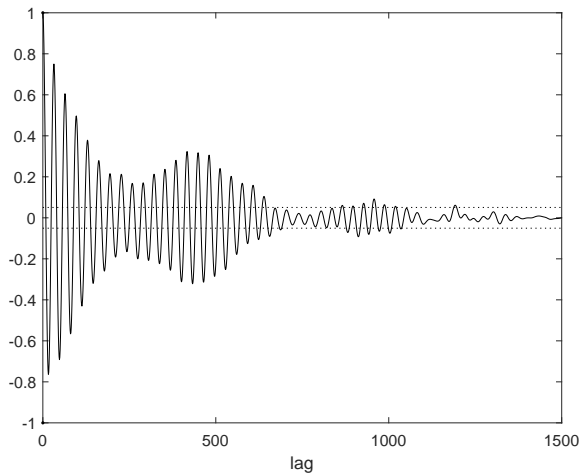


Figura 5. Função de autocorrelação da saída decimada.

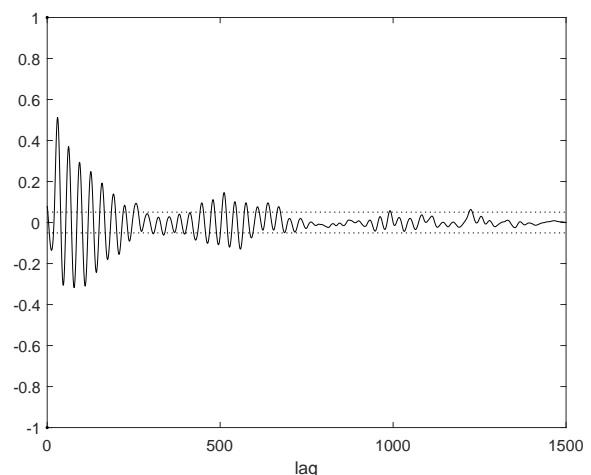


Figura 7. Função de correlação cruzada (FCC) da saída e entrada decimadas.

Após isso, foi utilizada a função de correlação cruzada (FCC) para verificar se os dados de entrada e saída estão suficientemente correlacionados. A FCC é uma medida da dependência temporal entre os sinais de entrada e saída. Se esses sinais forem independentes (no tempo), a função será pequena, estatisticamente zero, para todos os valores do atraso e diz-se que os sinais são não correlacionados. Portanto, observa-se que os valores encontrados na figura 7, principalmente até o tempo de 600 segundos, aproximadamente, existe correlação estatisticamente significativa, pois está fora da faixa de 95% de confiança. Assim, verifica-se que os dados estão de fato suficientemente correlacionados para que sejam usados para identificação de um modelo.

#### Letra B: Seleção de estrutura

Nessa questão, foi utilizado o critério de Akaike para selecionar a ordem do modelo ARX. Monitoramos o AIC (Critério de informação de Akaike) para um número crescente

de parâmetros, e a partir do momento que o índice deixa de ter uma mudança significativa, então supõe-se que esse é o ponto que se deve parar de incluir regressores no modelo. Então, percebe-se, pela figura 8, que a melhor ordem escolhida é 5, pois a partir dele, deixa-se de ter uma mudança significativa. Apesar desse valor é importante notar que, ao adicionar um regressor referente aos valores da entrada  $u$ , o nível de informação adicionada foi praticamente zero, isso pode ser percebido pelos patamares existentes quando o número de regressões é (1, 2), (3, 4), (5, 6). A fim de manter o método mostrado nos vídeos e comparar com outros métodos, será mantido o número de 5 regressores.

Foi utilizado o método do agrupamento de termos para comparar e confirmar essa escolha da ordem. Nesse método basicamente ignoramos o atraso. Quando o indicador  $|\Sigma_y - 1|$  chegar perto de 0, provavelmente o modelo estará com a estrutura adequada. O valor obtido foi 5, subtraindo o um devido ao polo adicional acrescido na hora de fazer a conta

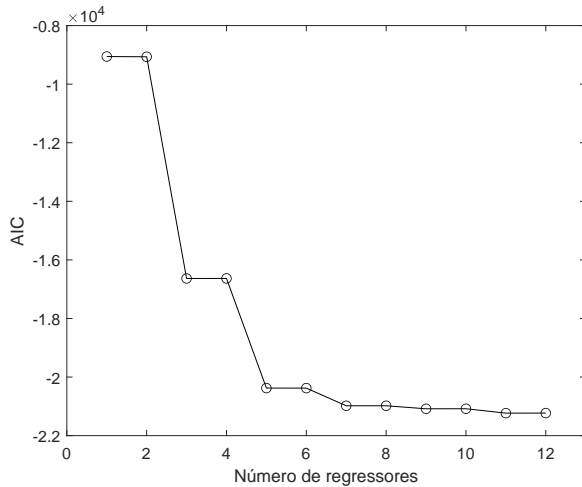


Figura 8. Critério de informação de Akaike.

do modelo, obtém-se 4, como é visto na figura 9. Portanto, avaliando junto ao critério de Akaike é possível concluir que 5 regressores é um valor condizente.

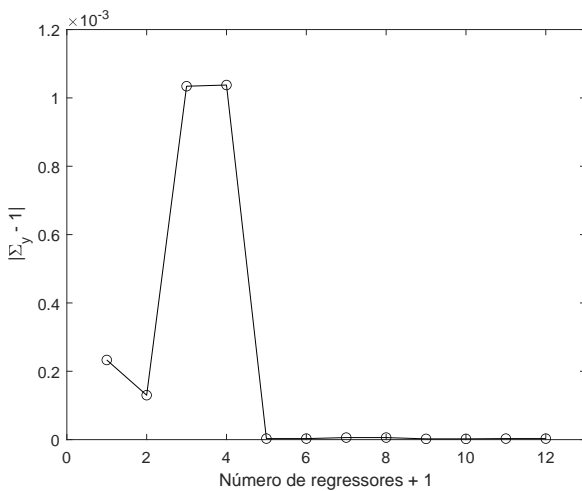


Figura 9. Método do agrupamento de termos.

### Letra C: Estimação de parâmetros

Foi utilizado o estimador de mínimos quadrados para achar os parâmetros do modelo ARX de 5ª ordem. A matriz de regressores  $\psi$ , que são os dados de estimação, foi montada da seguinte forma, considerando a 5 ordem encontrada na letra anterior:

```
1 psi = [y_id_dec(3:end-1) u_id_dec(3:end-1) ...
        y_id_dec(2:end-2) u_id_dec(2:end-2) ...
        y_id_dec(1:end-3)];
```

A razão pela qual pode-se separar variáveis conhecidas, de valores não conhecidos, que nesse caso é o vetor  $\theta$ , é que a estrutura é linear nos parâmetros.

Tabela I  
VALORES DOS PARÂMETROS  $\hat{\theta}$  ENCONTRADOS

$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	$\hat{\theta}_4$	$\hat{\theta}_5$
2.9168	-1.9330e-04	2.8753	1.3346e-04	0.95702

### Letra D: Validação

Validação do modelo para os seguintes casos:

- (i) *simulação um passo a frente*

Nesse tipo de simulação, como sempre voltamos nos dados e a única ação do modelo é dar um passo à frente, ele não tem tempo para errar, no máximo um passo. Portanto, mesmo um modelo instável pode apresentar uma aparência razoável, pois como só irá dar um pulo na direção da instabilidade em um passo, resetar e assim sucessivamente. Portanto, pode-se perceber, na figura 10, como a simulação, representada pela linha tracejada, se ajusta muito bem ao valor real, representado pela linha contínua em preto.

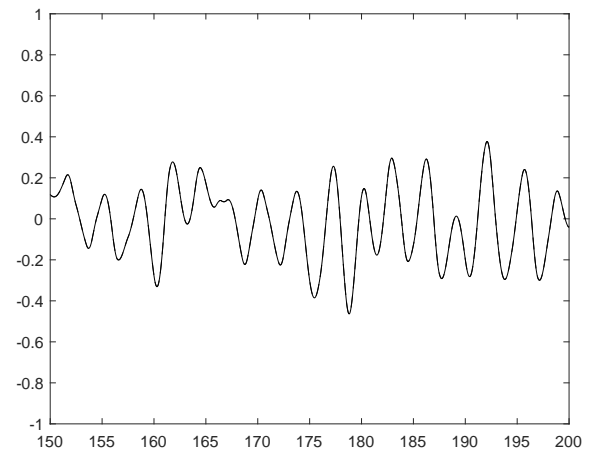


Figura 10. Simulação de um passo a frente, onde em (-) está a curva real e em (---) está a curva predita.

- (ii) *simulação livre*

Uma outra forma de simular um modelo é reutilizar previsões passadas para compor o vetor de regressores a fim de continuar fazendo previsão. Ao simular modelos para validação, o sinal de entrada usado sempre será o sinal de entrada medido. Portanto, esse procedimento é, ao contrário da previsão de um passo à frente, uma boa maneira de testar se o modelo consegue explicar as observações feitas. Nesse modelo, se ocorrer um erro ele será acumulado a cada iteração, então nesse caso o modelo tem tempo para mostrar que não é o modelo adequado. Dessa forma, na simulação anterior, parecia se ajustar perfeitamente aos dados, linha contínua, porém na realidade, confirmado pela simulação livre, o modelo não se ajusta não bem assim, obtendo um desempenho muito

abaixo do esperado, como visto pela linha tracejada, na figura 11.

Ao fazer a comparação entre as duas simulações, percebe-se que as previsões de um passo à frente não conseguem evidenciar claramente as deficiências do modelo linear, ao passo que a simulação livre mostra claramente que o modelo tem dificuldades em explicar os dados observados. Portanto, isso tem relação com o explicado em [3] que, via de regra, ao usar simulações na validação de modelos, não usar previsões de um passo à frente.

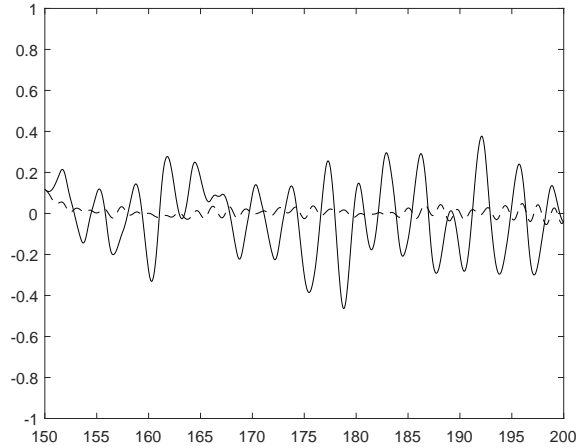


Figura 11. Simulação livre, onde em (-) está a curva real e em (-.-) está a curva predita.

- (iii) índice RMSE

O índice RMSE, visto pela equação 1, é usado na quantificação de previsões, sendo que  $\hat{y}(k)$  é a simulação livre do sinal e  $\bar{y}$  é o valor médio do sinal medido  $y(k)$ , sendo que a média é calculada na janela de identificação. O índice compara as previsões do modelo com a média temporal do sinal e os valores menores do que a unidade indicam um melhor desempenho em relação ao preditor padrão considerado (média ou um passo à frente). Os valores de RMSE em cada caso são mostrados na tabela II.

$$RMSE = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

Tabela II  
VALOR DE RMSE DAS SIMULAÇÕES

RMSE	
Simulação de um passo à frente	Simulação livre
5.3202e-04	1.7549e-01

- (iv) verificação dos resíduos

Tanto na função de autocorrelação dos resíduos, quanto na função de correlação cruzada entre a entrada e os

resíduos, vistas nas figuras 12 e 13, respectivamente, grande parte dos valores dessas funções se encontram dentro da faixa de confiança, ou seja, não existe nenhuma correlação significativa, indicando que do ponto de vista estatístico o modelo conseguiu descrever todas as linearidades presentes nos dados.

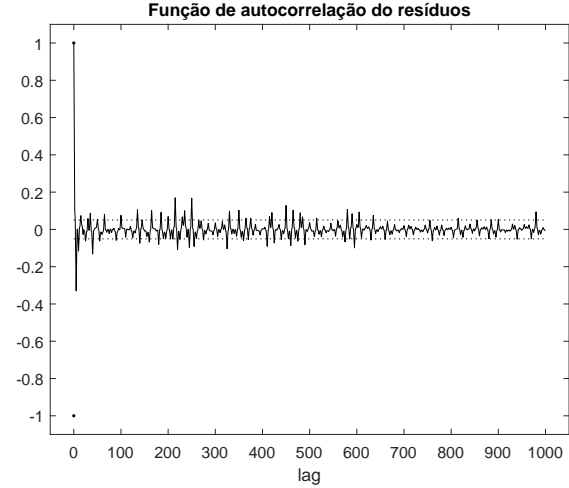


Figura 12. Função de autocorrelação entre as entradas e o resíduo.

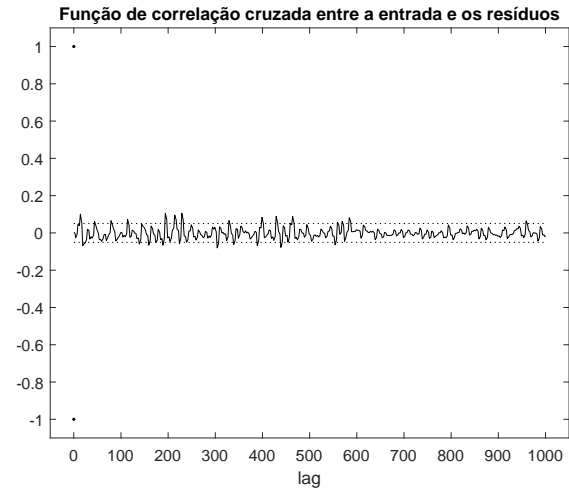


Figura 13. Função de correlação cruzada entre as entradas e o resíduo.

## PARTE 2

### Letra A: Projeto de teste

Os valores dos parâmetros foram definidos de tal forma a obter um sistema assintoticamente estável, resultando na função de transferência mostrada em 2, porém para esse problema é necessário usar a função de forma discreta e para isso foi feita a conversão resultando na equação mostrada em 3. A resposta ao degrau dos sistemas podem ser observadas na figura 14.

$$H(s) = \frac{0.2s + 2}{s^2 + s + 0.2} \quad (2)$$

$$H(z) = \frac{0.8468z + 0.3969}{z^2 - 1.244z + 0.3679} \quad (3)$$

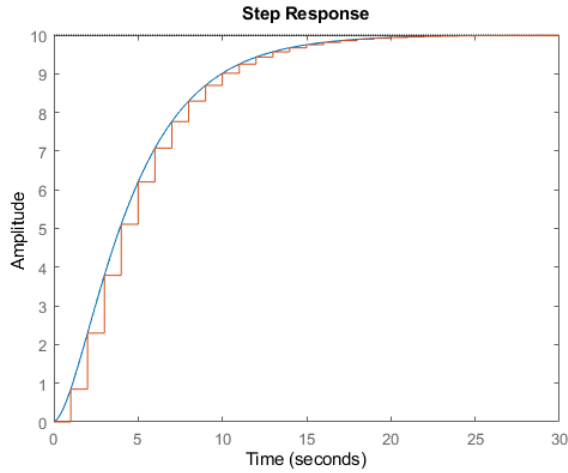


Figura 14. Resposta ao degrau das funções  $H(s)$  e  $H(z)$

Além disso, nesse exercício foi solicitado que simulasse a resposta a um sinal PRBS. Para a escolha adequada dos parâmetros para esse, foi utilizado como base a seção 4.3.1 do livro texto, que aborda sobre Sinais binários pseudo-aleatório (PRBS). O sinal prbs escolhido foi:

```
1 u=prbs(300,10,1)
```

Explicando a escolha de cada um dos termos:

- Primeiro termo  
é o comprimento do sinal. Foi escolhido 300 de forma aleatória.
- Segundo termo  
é o número de bits, que determina a periodicidade do sinal gerado. Ela não deve ser menor do que o tempo de acomodação do sistema. Caso contrário, o sistema notará a periodicidade do sinal PRBS reduzindo, assim, o caráter de aleatoriedade do teste. Por outro lado, se o período for suficientemente longo, o sistema perceberá o sinal de excitação como sendo aleatório. Visto essas questões, foi escolhido o número de bits 10 por se encaixar nas especificações desejadas.
- Terceiro termo  
é o intervalo entre bits  $T_b$ , que deve ser compatível com a menor constante de tempo de interesse. Se  $T_b$  for muito grande, o sistema interpretará o sinal PRBS como um degrau, sinal de características pobres para a maioria dos métodos de identificação. Por outro lado, se  $T_b$  for muito curto, o sistema não terá tempo de responder a uma transição antes de chegar a próxima. Por isso, um resultado heurístico que o livro apresentou na fórmula 4

que normalmente fornece bons resultados sugere que  $T_b$  seja escolhido conforme:

$$\frac{\tau_{min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{min}}{3} \quad (4)$$

Sendo que  $\tau_{min}$  é a menor constante de tempo de interesse. Calculando 63.2% do ganho que é 10 e procurando o tempo correspondente na resposta ao degrau chegamos a um  $\tau$  (constante de tempo) de 5.21. Como o valor  $T_b$  do sinal PRBS precisa atender à requisição da fórmula 4, então deve estar de acordo com 5.

$$\frac{\tau}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau}{3} \Rightarrow 0.521 \leq T_b \leq 1.7367 \quad (5)$$

Logo o  $T_b$  escolhido será igual a 1. Tendo em vista essas explicações, o sinal PRBS escolhido pode ser visto na figura 15.

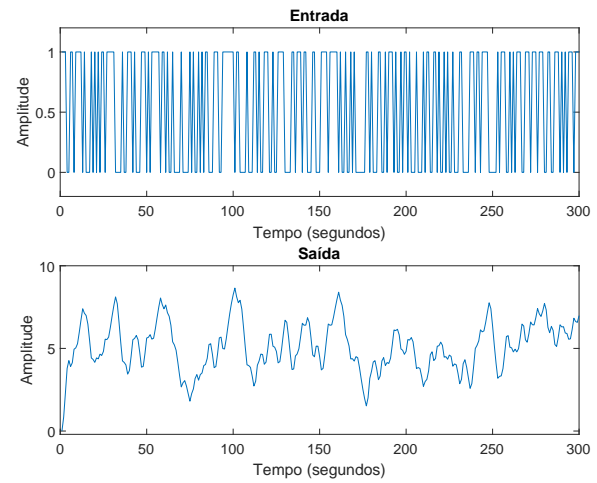


Figura 15. Sinal PRBS gerado e reposta do sistema a essa entrada.

Foi gerado um ruído para os dados de saída de maneira que a relação sinal-ruído seja maior que 10dB, usando a equação 6, onde  $\sigma(y)$  é o desvio padrão do sinal e  $\sigma(noise)$  é desvio padrão do ruído, foi obtido uma relação de aproximadamente 11dB que pode ser vista e comparada na figura 16.

$$20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma(y)}{\sigma(noise)}\right) \quad (6)$$

#### Letra B: Estimação de parâmetros

A matriz de regressores é uma matriz não quadrada, cresce enquanto tiver dados e os parâmetros a estimar estão agrupados no vetor  $\theta$ . A razão pela qual pode-se separar variáveis conhecidas da parte desconhecida se deve pelo fato de que essa estrutura é linear nos parâmetros, que é uma condição para aplicar a condição de mínimos quadrados. Os dados utilizados para construir a matriz de regressores e o vetor de parâmetros  $\theta$  são chamados de dados de estimação, pelo fato de que utilizamos esses dados para estimar os parâmetros na validação do modelo.

Passando a equação  $H(z)$  para o modelo ARX de segunda ordem podemos definir a matriz  $\Psi$  de regressores como

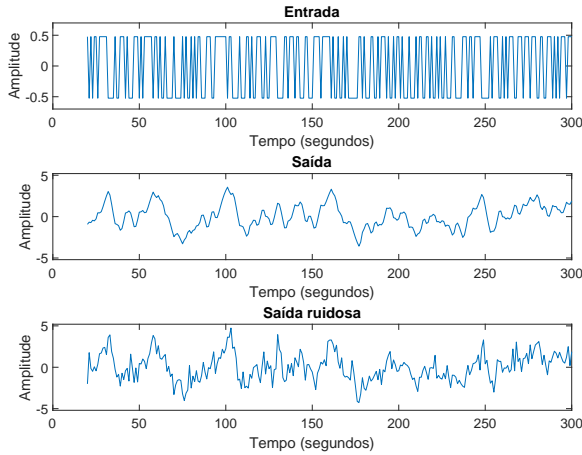


Figura 16. Sinal PRBS gerado, resposta do sistema a essa entrada e resposta à entrada somada a um ruído.

mostrada em 7 e resolver o algoritmo de mínimos quadrados conforme as equações 8 e 9.

$$\Psi = [y(k-2)u(k-2)y(k-1)u(k-1)] \quad (7)$$

$$\hat{\theta} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \cdot \mathbf{y} \quad (8)$$

$$\mathbf{y} = \Psi \hat{\theta} + \xi \quad (9)$$

### Letra C

- *Simulação um passo a frente*

Na figura 17, é possível ver as informações da simulação de um passo à frente com a resposta ao degrau do sistema verdadeiro, representado pela linha contínua azul, e pelas simulações dos modelos estimado sem ruído, visto pela sequência de círculos maiores e pelo modelo com ruído, representados pela sequência de círculos menores. O que pode ser concluído é que o modelo estimado sem ruído se ajustou perfeitamente à resposta real do sistema, enquanto o modelo com ruído apresenta um certo desvio, porém não tão acentuado.

- *Simulação livre*

Na figura 18, é possível ver as informações da simulação livre e as conclusões são que o modelo estimado sem ruído se ajustou relativamente bem, porém não tão preciso quanto o da simulação um passo à frente, enquanto o modelo estimado com ruído apresenta uma variação muito maior, podendo ser visto um desvio acentuado em relação à resposta real do sistema.

Essa análise das diferenças entre os resultados das duas simulações já foi feita anteriormente neste trabalho e se deve ao fato de que as previsões de um passo à frente não conseguem evidenciar claramente as deficiências do modelo linear, ao passo que a simulação livre mostra claramente que o modelo tem dificuldades em explicar

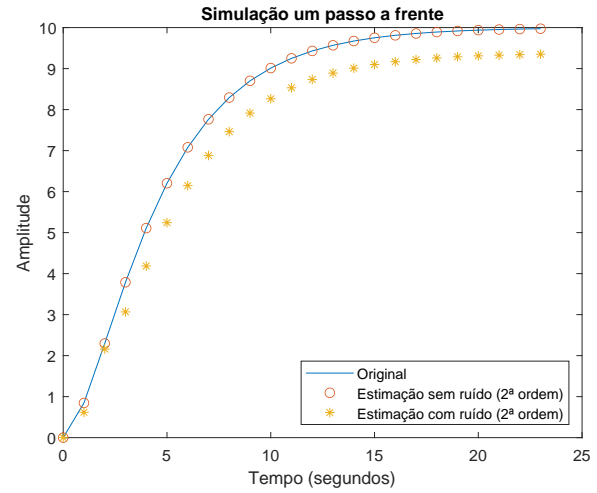


Figura 17. Comparação da simulação de um passo a frente do sistema de segunda ordem com e sem ruído com a resposta original.

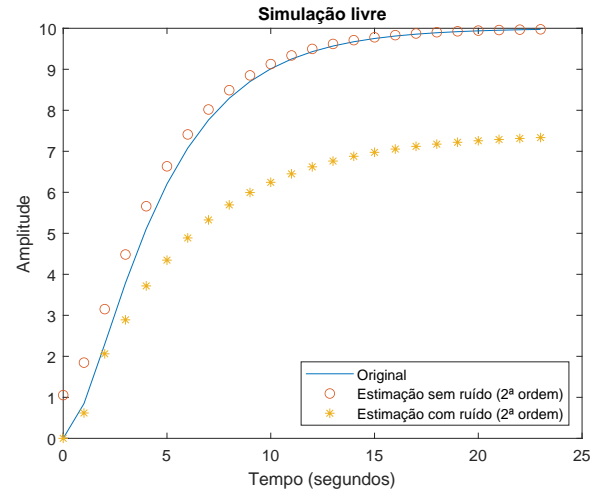


Figura 18. Comparação da simulação livre do sistema de segunda ordem com e sem ruído com a resposta original.

os dados observados. Observando essa questão é possível observar que os dados sem ruído conseguiram atingir um bom desempenho na simulação livre mostrando que o modelo se ajustou bem, porém a interferência do ruído prejudicou bastante sua performance.

### Letra D: Estrutura do modelo

- (i) *modelo estimado de primeira ordem*

A estimação de parâmetros da primeira ordem pode ser vista na figura 19, na figura 20 é possível ver as informações da simulação de um passo à frente do sistema de primeira ordem e na figura 21 pode-se ver as informações da simulação livre do sistema de primeira ordem.

- (ii) *modelo estimado de terceira ordem*

A estimação de parâmetros da terceira ordem pode ser vista na figura 22, na figura 23, é possível ver as infor-

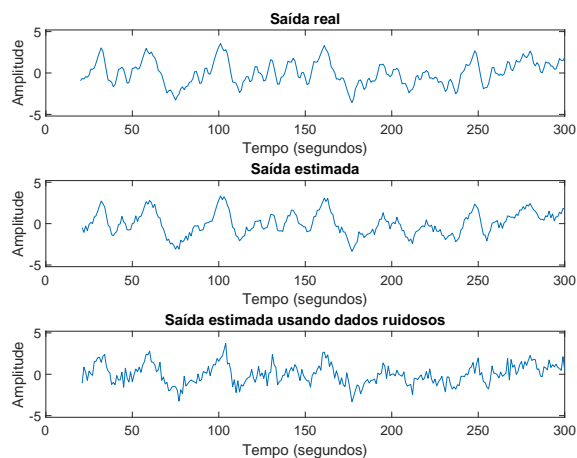


Figura 19. Comparação dos modelos de primeira ordem gerados com os dados de origem.

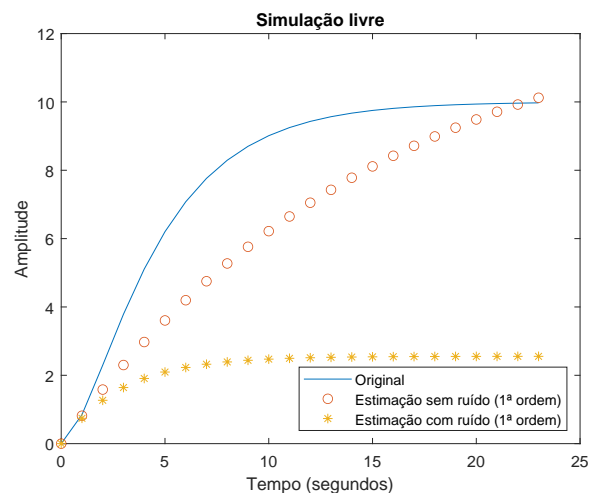


Figura 21. Comparação da simulação livre do sistema de primeira ordem com e sem ruído com a resposta original.

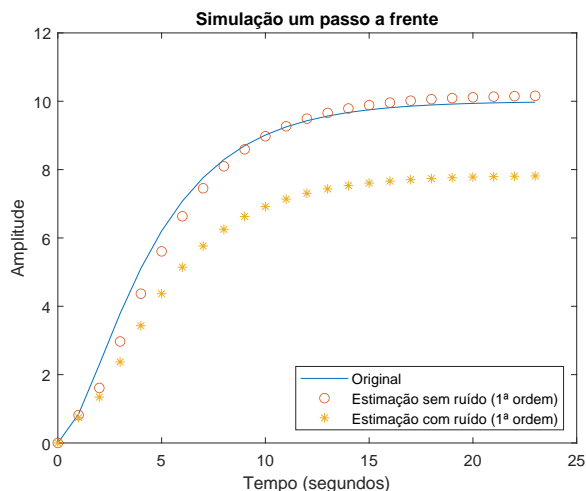


Figura 20. Comparação da simulação de um passo a frente do sistema de primeira ordem com e sem ruído com a resposta original.

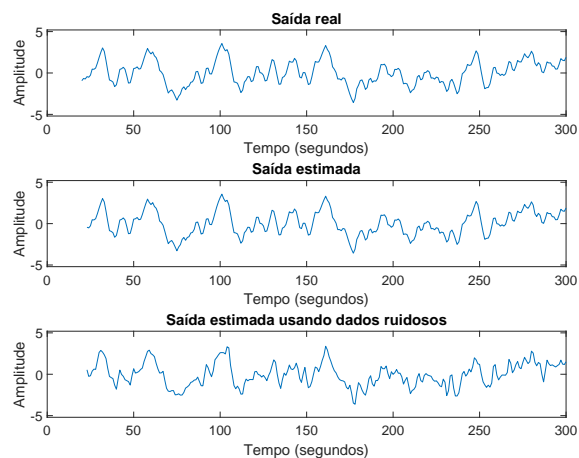


Figura 22. Comparação dos modelos de terceira ordem gerados com os dados de origem.

mações da simulação de um passo à frente do sistema de terceira ordem e na figura 24 pode-se ver as informações da simulação livre do sistema de terceira ordem. Fazendo a comparação entre as ordens do modelo, percebe-se que, em ambos os casos, as simulações de um passo à frente tiveram uma resposta melhor do que a simulação livre. Além disso, um fator interessante para destacar é que no modelo de terceira ordem, o modelo aparentemente se ajustou relativamente bem em ambos os casos com e sem ruído. Porém, quando é feita a simulação livre, percebe-se na verdade que nenhum dos dois casos se ajustou da forma adequada. Portanto, mais uma comprovação de que, via de regra, ao usar simulações na validação de modelos, não usar previsões de um passo à frente, pois podem trazer informações não correspondentes à resposta real do modelo.

## CONCLUSÕES

Com este trabalho foi possível entender melhor, na prática, os conceitos e ideias apresentados durante o curso até o momento. Acredita-se que os resultados tenham sido satisfatórios e bem detalhados em cada um dos exercícios feitos.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. A. Aguirre, “Validação: Escolha de Dados.” <https://www.youtube.com/watch?v=AJeMx4q3VAo>. [Online; acessado em 19 de agosto de 2021].
- [2] L. A. Aguirre, “Duração do Teste e Escolha do Tempo de Amostragem.” <https://www.youtube.com/watch?v=8z0u7sBmxPg>. [Online; acessado em 23 de agosto de 2021].
- [3] L. A. Aguirre, “Validação: Predição de Um Passo à Frente x Simulação Livre.” <https://www.youtube.com/watch?v=bZWNRRZ4XhsQ>. [Online; acessado em 23 de agosto de 2021].

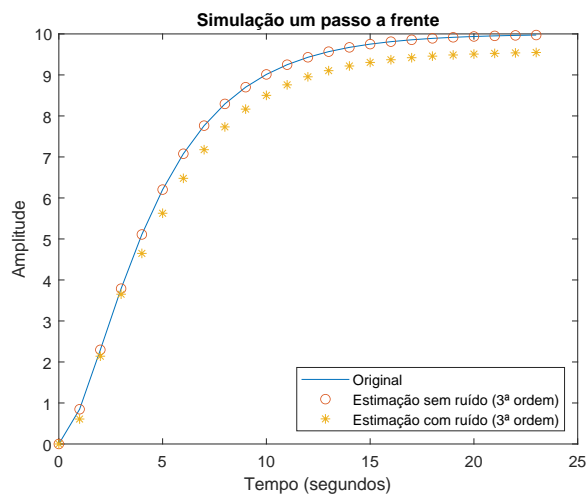


Figura 23. Comparação da simulação de um passo a frente do sistema de terceira ordem com e sem ruído com a resposta original.

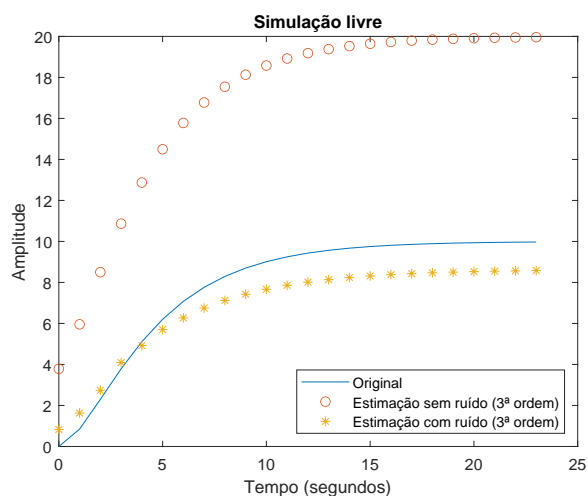


Figura 24. Comparação da simulação livre do sistema de terceira ordem com e sem ruído com a resposta original.