

# Tarefa #4

Matheus Brito Faria

## PARTE 1

### Letra A

Para a parte um do exercício o sistema de primeira ordem escolhido possui  $K$  com valor de 1,  $\theta$  com valor de 5 e  $\tau$  com valor de 10. Ficando da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{10s + 1} \quad (1)$$

Também foi simulado um sinal PRBS com 300 amostras usando 6 bits e um  $T_b$  de 2. O valor do parâmetro  $T_b$  é condizente com a heurística mostrada na equação 4.20 de [1].

$$\frac{\tau_{min}}{10} \leq T_b \leq \frac{\tau_{min}}{3} \Rightarrow 1 \leq T_b \leq \frac{10}{3} \quad (2)$$

Usando o sinal PRBS como entrada, com um intervalo entre as amostras de  $T_s$  com valor 1 segundo, e simulando a resposta do sistema obtemos o seguinte resultado mostrado na figura 1.

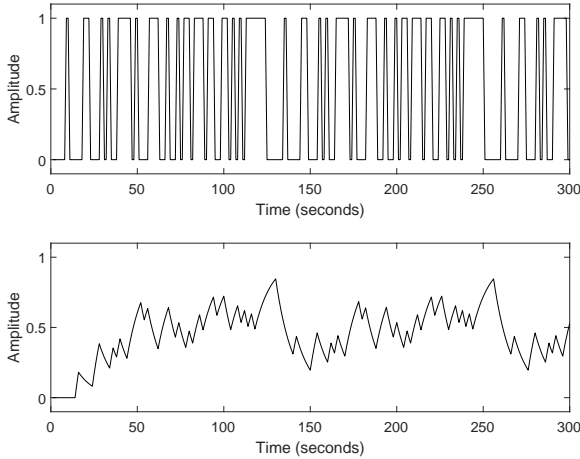


Figura 1. Entrada aleatória usando  $T_b$  com valor de 2 na parte superior e resposta do sistema da parte 1 letra A na parte inferior.

### Letra B

Para essa questão foi usada a função de correlação cruzada para estimar o atraso puro de tempo  $\theta$ . Observando um  $lag$  de 20 amostras foi possível chegar no seguinte resultado mostrado na figura 2.

O valor de  $lag$  onde o sistema começou a responder foi 5, valor exato de  $\theta$  que foi estipulado. Observa-se que apesar de baixo o valor, a correlação passa de valores bem baixo para valores mais consideráveis depois do valor estimado, ou seja, o sistema começou a responder à entrada.

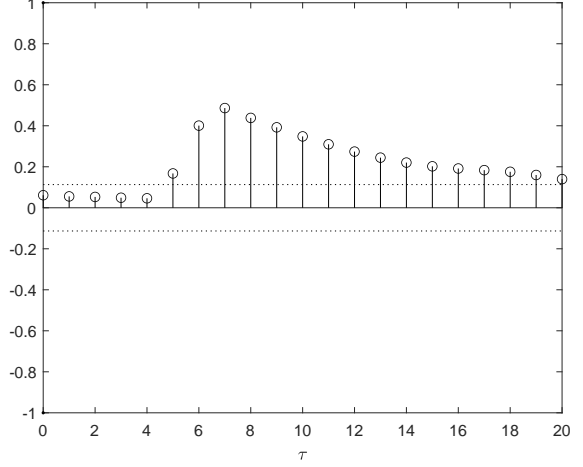


Figura 2. Função de correlação cruzada entre o sinal PRBS e o sistema da parte 1 letra b.

### Letra C

Para usar o algoritmo de mínimos quadrados (MQ) antes é preciso reescrever a função de transferência como uma equação de diferenças aproximadas na forma de um modelo ARX.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3)$$

Como o modelo a ser estimado é discreto é possível usar a seguinte aproximação para discretizar a equação anterior.

$$\dot{y} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T_s} \quad (4)$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (5)$$

$$a_1 = 1 - \frac{T_s}{\tau}; b_1 = \frac{T_s K}{\tau} \quad (6)$$

Dessa forma é possível obter o valor de  $\tau$  e  $K$  a partir dos valores de  $a_1$  e  $b_1$ .

$$a_1 = 1 - \frac{T_s}{\tau} \Rightarrow a_1 - 1 = -\frac{T_s}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{T_s}{1 - a_1} \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{T_s K}{\tau} \Rightarrow b_1 \tau = T_s K \Rightarrow K = \frac{b_1 \tau}{T_s} \quad (8)$$

Portanto ao fazer a estimação dos valores  $\hat{a}_1$  e  $\hat{b}_1$  é possível obter a estimação dos valores de  $\hat{\tau}$  e  $\hat{K}$

$$\hat{\tau} = \frac{T_s}{\hat{a}_1 - 1}; \hat{K} = \frac{\hat{b}_1 \hat{\tau}}{T_s} \quad (9)$$

Com o modelo ARX montado é possível começar a usar o algoritmo dos mínimos quadrados. Usando os dados gerados é necessário remover o transiente inicial que fica sobre influência de condições iniciais nulas, além de remover os valores médios dos dados tanto da entrada como da saída. A saída dos dados com esse processamento pode ser observado na figura 3.

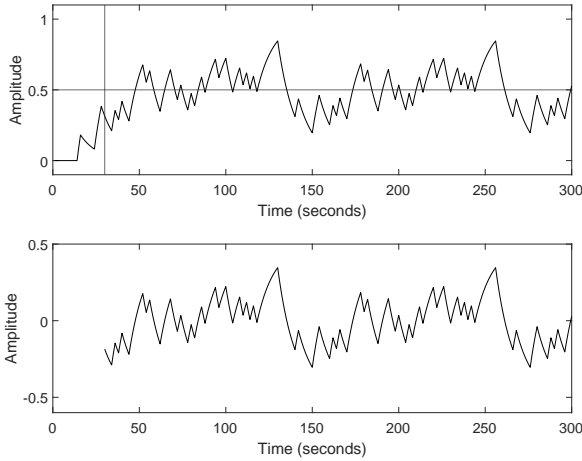


Figura 3. Resposta original do sistema na parte superior, onde a linha vertical representa onde termina o transiente inicial e a linha horizontal representa a média dos dados, junto da resposta com o pré-processamento realizado na parte inferior.

Sincronizando a entrada e a saída usando a estimação de atraso de tempo  $\hat{\theta}$  com valor de 5 é possível obter os seguintes resultados mostrados na tabela I.

Tabela I  
PARÂMETROS OBTIDOS VIA ALGORITMO DE MÍNIMOS QUADRADOS

$\hat{\theta}$	$\hat{a}_1$	$\hat{b}_1$	$\hat{\tau}$	$\hat{K}$
5	0.9048	0.0952	10.5083	1.0000

Dessa forma foi possível simular a resposta ao impulso do sistema e comparar com o resultado real como mostrado na imagem 4, nela é possível perceber que o sistema se comporta da mesma maneira que o sistema original, visto o erro de apenas 0.5083 do valor de  $\tau$  original e o erro nulo para o ganho K. Diante disso é possível perceber que o erro no infinito para esse sistema é nulo, visto que o ganho possui o valor idêntico. Portanto é possível perceber que o modelo ARX proposto junto do algoritmo de mínimos quadrados conseguiu chegar em um resultado satisfatório.

## PARTE 2

### Letra A

A simulação desse sistema utilizando 300 amostras PRBS com  $T_b$  com valor de 1, usando a mesma heurística do

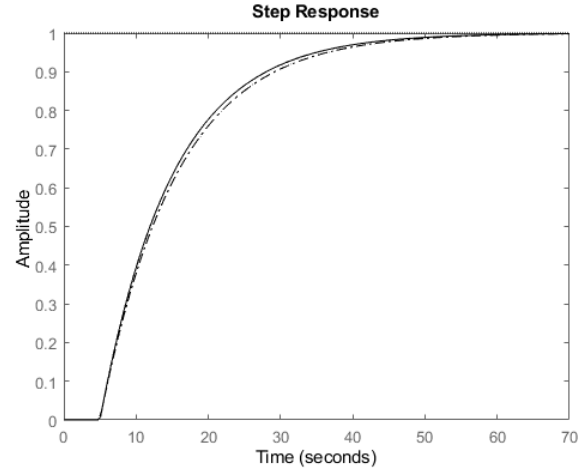


Figura 4. Saída (-) e saída estimada (-.-) usando o  $\hat{\theta}$  com valor de 5.

exercício anterior, pode ser visto na figura 5. Da mesma maneira foi feito o mesmo pré-processamento, removendo o transiente inicial e retirando a média dos dados, os resultados podem ser vistos na figura 6.

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^2 - 1.5z + 0.7} \quad (10)$$

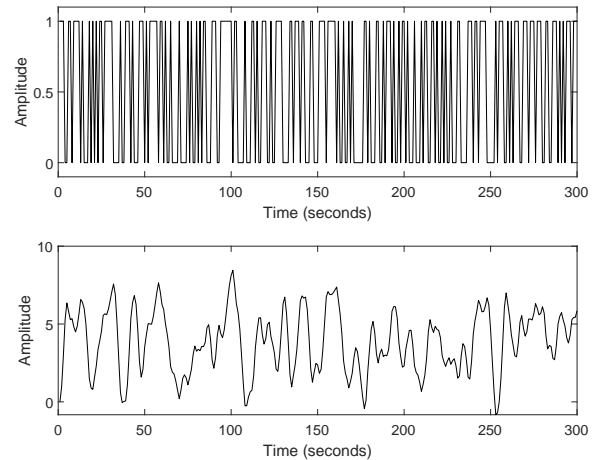


Figura 5. Entrada PRBS e saída do sistema da parte 2 letra B.

Escrevendo o modelo desse sistema na forma de equação de regressão linear, obtemos:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0.5}{z^2 - 1.5z + 0.7} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} \quad (11)$$

Reescrevendo essa equação e aplicando a transformada Z.

$$Y(z) \cdot [1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}] = U(z) \cdot [1 + 0.5z^{-2}] \quad (12)$$

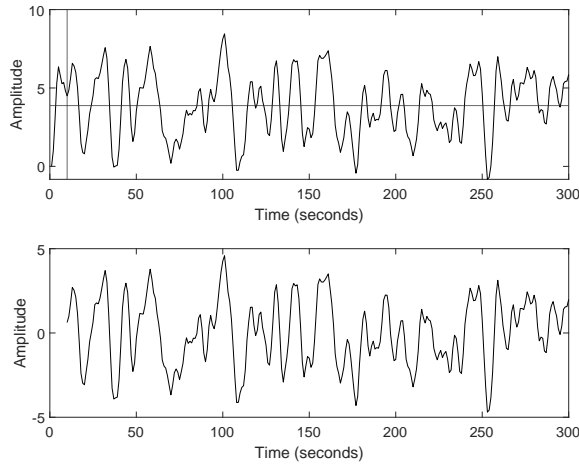


Figura 6. Resposta original do sistema na parte superior, onde a linha vertical representa onde termina o transiente inicial e a linha horizontal representa a média dos dados, junto da resposta com o pré-processamento realizado na parte inferior.

$$y[k] - 1.5y[k-1] + 0.7y[k-2] = u[k] + 0.5u[k-2] \quad (13)$$

$$y[k] = 1.5y[k-1] - 0.7y[k-2] + u[k] + 0.5u[k-2] \quad (14)$$

Aplicando o algoritmo de mínimos quadrados para esse sistema de segunda ordem é possível observar os resultados na figura 7 junto dos valores dos parâmetros na tabela II. Analisando esse resultado conclui-se que o algoritmo de mínimos quadrados chegou em um resultado muito próximo do real, com um erro ínfimo.

Tabela II  
RESULTADO DO ALGORITMO DE MÍNIMOS QUADRADOS DE SEGUNDA ORDEM

$\theta$	$\hat{\theta}$
1.5	1.5
-0.7	-0.7
1	0.99
0.5	0.49

#### Letra B

Também foram gerados os modelos de primeira e de terceira ordem usando os mesmos procedimentos e a mesma massa de dados. Os resultados podem ser observados nas figuras 8 e 9.

Observando o vetor de resíduos na figura 10 e suas respectivas médias e desvios padrões na tabela III é possível perceber o quão bem os modelos de segunda e terceira ordem foram, onde seus valores estão em um range muito baixo, ou seja, o erro é bem pequeno. No caso do modelo de primeira ordem os resíduos possuem tanto valores positivos quanto negativos tornando sua média bem baixa, porém é possível perceber que

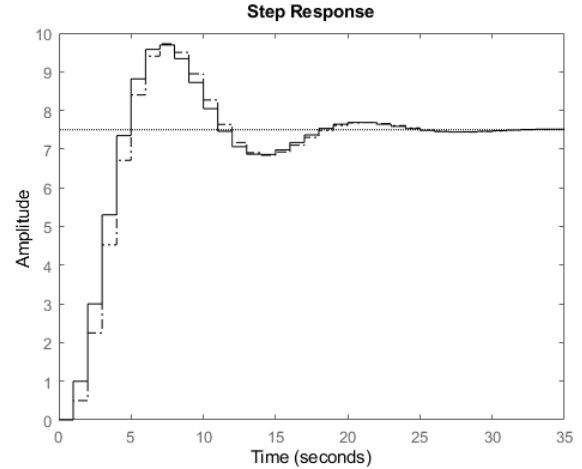


Figura 7. Saída nominal (-) saída estimada (-.-) do sistema de segunda ordem da parte 2 letra A.

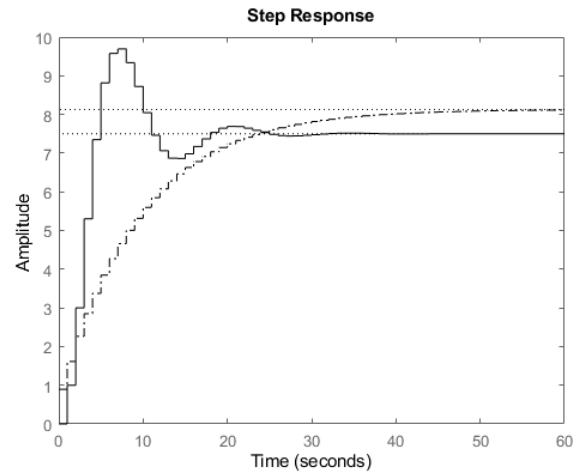


Figura 8. Saída nominal (-) saída estimada (-.-) do sistema de primeira ordem da parte 2 letra B.

ele possui uma variação bem grande desses valores, ou seja, o erro é bem mais alto.

Tabela III  
MÉDIA E DESVIO PADRÃO DOS VETORES DE RESÍDUOS.

	1ª	2ª	3ª
Média	5.3610e-03	4.3464e-03	4.3457e-03
Desvio Padrão	7.6143e-01	5.6556e-05	7.9413e-05

#### Letra C

As respostas ao impulso corroboram com essa afirmação onde o modelo de segunda ordem é o que mais se assemelha ao modelo original, de fato pois o modelo é de segunda ordem, depois o modelo de terceira ordem consegue representar bem

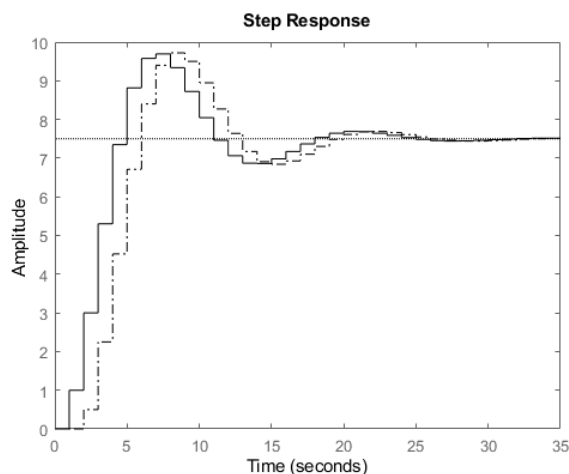


Figura 9. Saída nominal (-) saída estimada (-.-) do sistema de terceira ordem da parte 2 letra B.

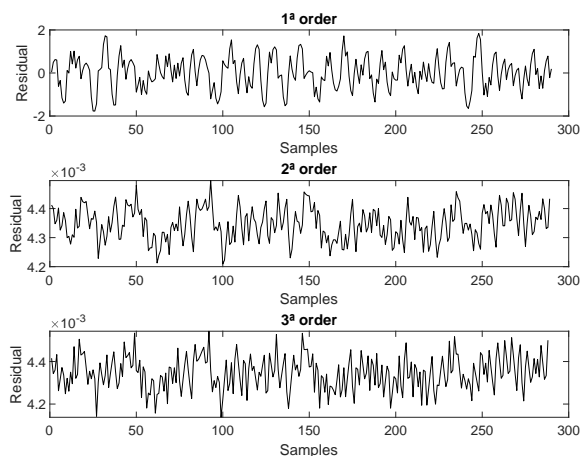


Figura 10. Vetor de resíduos de cada estimação.

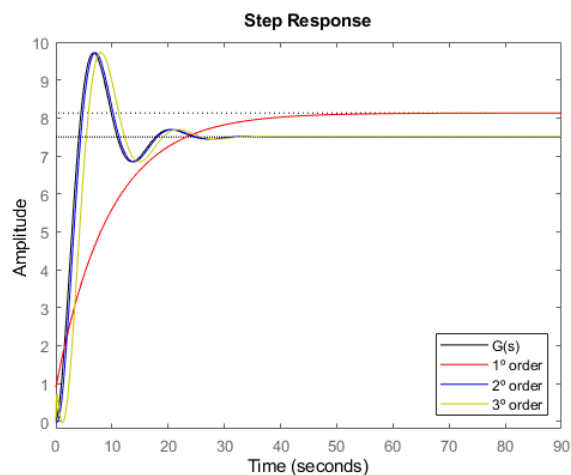


Figura 11. Comparação dos modelos convertido para modelos contínuos.

o sistema salvo uma pequena defasagem. Já o modelo de primeira ordem possui o pior desempenho, onde nem mesmo o ganho em regime permanente chegou a ser o mesmo.

Para comparar todos os modelos eles foram plotados em um mesmo gráfico e foi feita uma conversão desses modelos para modelos em tempo contínuo para facilitar a visualização, como mostrado na figura 11. Dessa maneira é possível perceber o quão parecido o modelo original e o modelo de segunda ordem realmente são pois eles estão praticamente sobrepostos, da mesma maneira é possível observar a defasagem no modelo de terceira ordem e o modelo de primeira ordem se ajustando muito mal ao original.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas-Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG, 2007.