第二章 矩阵

概念
逆
秩
伴随
初等
分块

专题一　矩阵的基本运算

$+$
k
$\times$
T

矩阵的定义 由 $m \times n$ 个数构成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 阶矩阵，记作 $A = (a_{ij})$.当 $m = n$ 时，称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

元素均为零的矩阵称为零矩阵，记作 O .

n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为单位矩阵，记作 E .

若矩阵 A 与 B 有相同的行数和相同的列数，则称 A, B 为同型矩阵.

矩阵加法的定义 设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})$ 为 A 与 B 的和，记作 $A+B$.

矩阵数乘的定义 设矩阵 $A=(a_{ij})$，k 为常数，称矩阵 (ka_{ij}) 为 k 与 A 的数乘，记作 kA.

矩阵乘法的定义 设 $A=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$B=(b_{ij})$ 为 $n\times s$ 阶矩阵，称 $m\times s$ 阶矩阵 $C=(c_{ij})$ 为 A 与 B 的乘积，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，记作 $C=AB$.

前列后行相同

例如：

$$\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}\underset{4\times 3}{\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\\4&4&4\end{pmatrix}}=\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}}$$

【评注】（1）矩阵乘法满足结合律和分配律，即

$$(AB)C = A(BC)\text{，}\quad A(B+C) = AB + AC\text{，}\quad (B+C)A = BA + CA$$

（2）矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下 $AB \neq BA$.

例如：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

设 A,B 为 n 阶矩阵，则 从而因式分解公式不适用

$$(AB)^2=ABAB \neq A^2B^2，(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2-B^2$$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$$

$AA^*=A^*A=|A|E$

当且仅当 A 与 B 可交换，即 $AB=BA$ 时，$(AB)^2=A^2B^2$，$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

特别地 $B=0,E,A^{-1},A^*$.

（3）矩阵乘法不满足消去律，即在一般情况下 $AB=AC$ 且 $A\neq O \nRightarrow B=C$.

例如：设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$，则 $AB=O=AC$，但 $B\neq C$.

特别的，$AB=O \nRightarrow A=O$ 或 $B=O$.

例如：设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $AB=O$，但 $A\neq O$.

消去律的充分条件：

①若 A 为可逆矩阵，则 $AB=AC \Rightarrow B=C$，$BA=CA \Rightarrow B=C$；

pr: 左乘 A^{-1}，得 $B=C$

②若 A 为列满秩矩阵，则 $AB = AC \Rightarrow B = C$；

③若 A 为行满秩矩阵，则 $BA = CA \Rightarrow B = C$.

证：由 $AB=AC$ 得

$A(B-C)=\underline{\underline{O}}$,

从而 $r(\underline{\underline{B-C}})=r[A(B-C)]=0$,

故 $B-C=O$，即 $B=C$

【例 2.1】设 $\alpha=(1,2,1)^T$， $\beta=(1,\frac{1}{2},0)^T$， $A=\alpha\beta^T$ ，则 $A^4=$__________.

3X3 3X1 1X3

$A^{2024}=$__________.

【详解】

$$A^4=\alpha\underbrace{\beta^T\cdot\alpha}_{\substack{1\times3\ \ 3\times1 \\ 1\times1}}\beta^T\cdot\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T$$

$$\overset{\text{结合}}{=}(\beta^T\alpha)^3\cdot\alpha\beta^T=2^3\cdot A$$

$$A^{2024}=2^{2023}\cdot A$$

转置的定义 矩阵 A 行列互换得到的矩阵，称为 A 的转置矩阵，记作 A^T.

转置的性质

（1）$(A+B)^T = A^T + B^T$；

（2）$(kA)^T = kA^T$；

（3）$(AB)^T = B^T A^T$；

（4）$(A^T)^T = A$；

（5）$|A^T| = |A|$.

pr: 以2阶为例 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$(AB)^T = \cdots = B^T A^T$

对称矩阵与反对称矩阵的定义 设 A 为 n 阶矩阵，若 $A^T=A$，则称 A 为对称矩阵. 若 $A^T=-A$，则称 A 为反对称矩阵.

【**评注**】任意 n 阶矩阵均可分解为对称矩阵与反对称矩阵的和.

pr: $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$

$(A+A^T)^T=A+A^T$, 故 $A+A^T$ 为对称

$(A-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T)$, 故 $A-A^T$ 为反对称.

【例 2.2】设 A,B 为 n 阶反对称矩阵，则下列结论不正确的是【　　】

（A）$A+B$ 为反对称矩阵　　（B）kA 为反对称矩阵

（C）A^T 为反对称矩阵　　（D）AB 为反对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$

【详解】

$A^T=-A$，$B^T=-B$.

$(A+B)^T=A^T+B^T=-A-B=-(A+B)$，故 $A+B$ 为反对称

$(kA)^T=kA^T=k(-A)=-(kA)$，故 kA 为反对称

$(A^T)^T = A = -A^T$，故 A^T 为反对称

$(AB)^T = B^T A^T = (-B)(-A) = BA$，故 $-(AB)$

AB 为反对称 $\Leftrightarrow -AB = BA$.

专题二　矩阵的逆

定义
性质(1条)
定理(6个)
求法(4个)

逆的定义　设 A 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=E$ 或 $BA=E$，则称 A 可逆，B 为 A 的

方阵

逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$.

【例 2.3】（2001，数一）设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$，则 $\boxed{(A-E)}^{-1}=$ ________

$(A-2E)^{-1}=$ ________

【详解】

$X^2+X-4=0$

$(X-1)\cdot\frac{1}{2}(X+2)=1$，故 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$

$(X-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(X+3)=1$，故 $(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{2}(A+3E)$

逆的性质

（1）$\boxed{(kA)}^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}(k\neq 0)$；

（2）$\boxed{(AB)}^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

（3）$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$；

（4）$\boxed{(A^{T})}^{-1}=(A^{-1})^{T}$；

（5）$\boxed{(A^{-1})}^{-1}=A$.

pr:

$kA\cdot\frac{1}{k}\cdot A^{-1}=E$

$AB\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=E$

$A^{T}\cdot(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}=E^{T}=E$

【例 2.4】（2022，数一）设 n 阶矩阵 A 与 $E-A$ 可逆，矩阵 B 满足 $(E-(E-A)^{-1})B=A$，则 $B-A=$__________.

【详解】

由 $[(E-A)(E-A)^{-1}-(E-A)^{-1}]B=-A(E-A)^{-1}B=A$,

得 $B=-(E-A)=A-E$, 故 $B-A=-E$.

可逆的充要条件

n 阶矩阵 A 可逆

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow r(A) = n$

$\Leftrightarrow A$ 的列（或行）向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解

$\Leftrightarrow A$ 的特征值均不为零

逆的求法

（1）定义法：$AB=E$ 或 $BA=E$；

（2）初等变换法：A^{-1} $(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$ 或 $\begin{pmatrix} A \\ \hdashline E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \hdashline A^{-1} \end{pmatrix}$；

（3）伴随矩阵法：$A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$；

（4）分块矩阵法：$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

【例 2.5】设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $A^2-AB=E$，则 $B=$________.

【详解】

由 $A^2-AB=A(A-B)=E$，得 $A-B=A^{-1}$

故 $B=A-\underline{\underline{A^{-1}}}$

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{2} & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{3} & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

E $\qquad$ A^{-1}

专题三　矩阵的秩

定义
性质(9条)
求法(2个)

k 阶子式的定义 在 $m\times n$ 阶矩阵 A 中任取 k 行与 k 列（$k\le m,k\le n$），位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素构成一个 k 阶行列式，称为 A 的一个 k 阶子式.

一阶子式：元素

$A_{n\times n}$，n阶子式：$|A|$

秩的定义 若矩阵 A 有个 r 阶子式非零，所有的 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）均为零，则称 r 为 A 的秩，记作 $r(A)$，并规定零矩阵的秩为零.

即非零子式的最高阶数

例如：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$r(A)=$ ~~3~~

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\3&3&3\end{vmatrix}=0$$

$\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\neq 0$，故 $r(A)=2$.

【评注】（1）若矩阵 A 有个 r 阶子式非零，则 $r(A) \geq r$；

（2）若矩阵 A 所有的 $r+1$ 阶子式均为零，则 $r(A) < r+1$；

（3）$A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1$.

$A=0 \Leftrightarrow r(A)=0$

例：$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$|A|=0$, $1\neq 0$, $r(A)=1$.

满秩的定义　设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若 $r(A)=m$，则称 A 为行满秩矩阵；若 $r(A)=n$，则称 A 为列满秩矩阵. 设 A 为 n 阶矩阵，若 $r(A)=n$，则称 A 为满秩矩阵.

【**例 2.6**】（2001，数三）设

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

且 $r(A)=3$，则 $k=$__________.

【**详解**】 由 $r(A)=3$，知 A 有个3阶子式非零且 $|A|=0$

由 $|A| = (k+3)(k-1)^3 = 0$，得 $k=1$ 或 -3

当 $k=1$ 时，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$r(A)=1$，矛盾，故 $k=-3$.

$1 \neq 0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$