第六章 二次型

(实对称应用)

标准形
合同
正定

专题一　二次型与标准形

定义

求法

二次型的定义 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\cdots+2a_{n-1,\,n}x_{n-1}x_n$$

称为 n 元二次型，记作 $f=x^TAx$，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $A=(a_{ij})$ 为实对称矩阵，称 A 为二次型的矩阵，称 A 的秩为二次型的秩，记作 $r(f)$.

【评注】二次型与实对称矩阵一一对应，二次型的矩阵 A 的主对角线元素为平方项的系数，其余元素 $a_{ji}=a_{ij}$ 为交叉项 x_{ij} 系数的一半.

例如：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-3&-2\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

【例 6.1】(2004，数三)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

【详解】

$$f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初行}}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$r(A)=2$，故……2

标准形的定义　只含平方项的二次型，即 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，称为二次型的标准形.

可逆线性变换的定义 关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

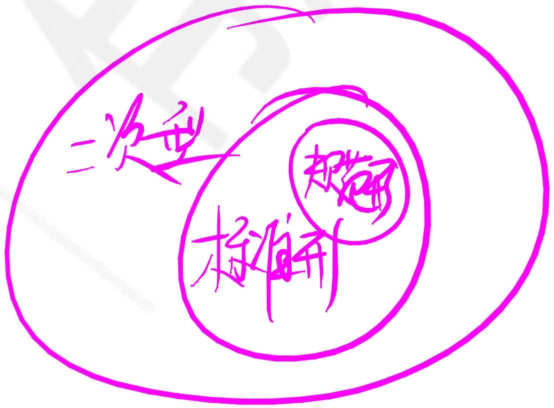
即 $x = Cy$，其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性变换. 若 C 为可逆矩阵，则称 $x = Cy$ 为可逆线性变换.

正负惯性指数的定义 标准形中系数为正的个数称为二次型的正惯性指数，记作 p，系数为负的个数称为二次型的负惯性指数，记作 q.

规范形的定义　若标准形的系数为 1，-1 或 0，即 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$，称为二次型的规范形.



标准形的求法

（一）拉格朗日配方法（以三元二次型为例）

（1）若二次型含有平方项，不妨设含有 x_1^2，先将含有 x_1 的项配方，再将含有 x_2 的项配方，换元得标准形 $f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 及所用的可逆线性变换 $x=Cy$；

（2）若二次型不含平方项，不妨设含有 x_1x_2，令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，则二次型化为（1）的形式.

☆（二）正交变换法 (3大步)

（1）求二次型的矩阵 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$；

（2）求 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$；

（3）将不同特征值的特征向量分别 Schmidt 正交化，得 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$，得到正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$.

经过正交变换 $x=Qy$，二次型化为标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

pr: $f=x^TAx \overset{x=Qy}{=\!=\!=} (Qy)^TA(Qy)$

$= y^TQ^TAQy = y^T\Lambda y$

$$= (y_1, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 y_1, \cdots, \lambda_n y_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

专题二 合同矩阵

定义

定理(2个)

合同的定义　设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，若存在 n 阶可逆矩阵 C，使得 $B=C^TAC$，则称 A 与 B 合同.

合同的充要条件

n 阶实对称矩阵 A 与 B 合同

$\Leftrightarrow$ 二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数（惯性系）

$\Leftrightarrow$ A,B 有相同的正、负特征值的个数

注：正、负惯性指数即正负特征值个数

【例 6.2】设 A 为 n 阶实对称矩阵，则下列矩阵与 A 合同的是【　　】

（A）$A-E$　　（B）$A+E$　　（C）A^3-A　　（D）A^3+A

设A的特征值为λ，则

$A-E$，$\lambda-1$

$A+E$，$\lambda+1$

A^3-A，$\lambda^3-\lambda=\lambda\underline{(\lambda^2-1)}$

A^3+A，$\lambda^3+\lambda=\lambda\underline{(\lambda^2+1)}>0$

专题三　正定二次型与正定矩阵

定义

定理(4个)

正定的定义 设 n 元二次型 $f = x^T Ax$，若对任意的 $x \neq 0$，有 $x^T Ax > 0$，则称 f 为正定二次型，称实对称矩阵 A 为正定矩阵.

$x_1,\cdots,x_n$ 不全为0

正定的充要条件

n 元二次型 $f = x^T Ax$ 正定

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n　　例如: $f = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1 < 0$, 不正定

x: 0 …… 0 1

$\Leftrightarrow$ A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使得 $C^T AC = E$　　pf: 正~~特征~~值 1, …, 1

正惯性指数 n

故 A 与 E 合同

$\Leftrightarrow$ A 的特征值均大于零

$\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式均大于零

k阶…: 前k行前k列…

一阶…: a_{11}; n阶…: $|A|$

【例 6.3】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+ax_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则 a 的取值范围是__________.

【详解】

$$A=\begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

由 $a>0$, $\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4a-9>0$, 得 $a>\frac{9}{4}$

$|A|=\cdots>0$, 得 $a>\frac{5}{2}$.

【例 6.4】证明：（I）若 A,B 为 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 正定；

（II）若 A 为 n 阶正定矩阵，则 $kA(k>0), A^m(m$为正整数$), A^T, A^{-1}, A^*$ 均正定.

【详解】 先证口均为实对称，以A+B为例

$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$，故A+B为实对称

(1) 正定定义. $\forall X\neq 0$, 有 $X^T(A+B)X$

$$=\underbrace{X^TAX}_{>0}+\underbrace{X^TBX}_{>0}>0$$, 故 $A+B$ 正定

(2) 说法错误: 举反例

$$A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix},\quad A+B=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$$

(2) 特征值

设 A 的 $\forall$ 特征值为 λ，则 $\lambda > 0$.

$$kA\ (k>0),\quad A^m,\quad A^T,\quad A^{-1},\quad A^*$$

$$k\lambda,\quad \lambda^m,\quad \lambda,\quad \frac{1}{\lambda},\quad \frac{|A|>0}{\lambda>0}$$

$$>0 \quad >0 \quad >0 \quad >0 \quad >0$$

故…均正定.

O总结: A正定, 则 $2A^T+3A^{-1}+4A^*$ 正定