专题四　公共解

定义

求法(3个)

公共解的定义 若α既为线性方程组（I）的解，又为线性方程组（II）的解，则称α为线性方程组（I）与（II）的公共解.

公共解的求法

（1）已知线性方程组（I）与（II）的具体形式，则联立方程组（I）与（II），得到公共解；

（2）已知线性方程组（I）的具体形式与线性方程组（II）的通解，则将方程组（II）的通解代入方程组（I），确定通解中的参数，得到公共解；

（3）已知线性方程组（I）与（II）的通解，则令其相等，确定通解中的参数，得到公共解.

【例 4.11】（2007，数一、二、三）设线性方程组

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}
$$

与方程

$$
(\mathrm{II})\quad x_1+2x_2+x_3=a-1
$$

有公共解，求a的值及所有公共解.

【详解】

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & a & 0\\ 1 & 4 & a^2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & a-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0\\ 0 & 0 & 1-a & a-1\end{array}\right)$$

① 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，$r(A)=3<r(\overline{A})=4$，联立方程组无解即两个方程组无公共解

② 当$a=1$时 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，基础解系为$\xi=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

联立方程组的通解即两个方程组的公共解为$k\xi$，其中k为任意常数

③ 当$a=2$时 $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

联立方程组的解即两个方程方程组公共解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

专题五　同解

定义

通解(2个)

同解的定义　若线性方程组（I）的解均为线性方程组（II）的解，反之亦然，则称线性方程组（I）与（II）的同解.

同解的充要条件

设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $l\times n$ 阶矩阵，线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

$\Leftrightarrow A,B$ 的行向量组等价

$\Leftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$ $\triangle$ pr: $AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 与 BX 同解

三联相解方程组同解

【例 4.12】设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵.证明：

（I）线性方程组 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解；

（II）$r(A^TA)=r(A)$；　　$A^TA\alpha=0$

【证明】

(1) 易知 $AX=0$ 的解均为 $A^TAX=0$ 的解

设 α 为 $A^TAX=0$ 的解，即 $A^TA\alpha=0$

左乘 α^T，得 $\alpha^TA^TA\alpha=(A\alpha)^T\underbrace{(A\alpha)}_{m\times 1}=0$

$$(a_1 \cdots a_m)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = a_1^2 + \cdots + a_m^2 = 0$$

故 $A\alpha = 0$，即 α 为 $AX=0$ 的解

故 $A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解

(2) 由(1)得 $n-r(A^TA)=n-r(A)$，

故 $r(A^TA)=r(A)$.

【例 4.13】设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，且 $r(A)=n$.证明：

列满秩

（I）线性方程组 $ABx=0$ 与 $Bx=0$ 同解；

（II）$r(\underset{=}{A}B)=r(B)$；

$m\times s$

$AB\alpha=0$

【证明】

(1) 易知 $Bx=0$ 的解均为 $ABx=0$ 的解.

设 α 为 $ABx=0$ 的解，即 $A\underline{B\alpha}=0$.

逻辑错误：左乘 A^T ...... A^{-1} ✗

由 $r(A)=n$，知 $AX=0$ 只有零解，故 $B\alpha=0$.

从而 α 为 $BX=0$ 的解，故 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解

(2) 由(1)得 $n-r(AB)=n-r(B)$

$5-r(AB)=5-r(B)$

故 $r(AB)=r(B)$

进一步得 $r(B^T)=r(AB)^T=r(B^TA^T)$

$n\times m,\ r=n,$ 满秩

第五章　特征值与特征向量

特征
相似
相似对角化
实对称

专题一　特征值与特征向量的概念

定义

特征方程法

(2大步)

性质 (6条)

特征值与特征向量的定义　设 A 为 n 阶矩阵，若存在数 λ 与 n 维非零列向量 α，使得 $\boxed{A\alpha = \lambda\alpha\text{，则}}$ $\alpha \neq 0$

称 α 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

【评注】（1）设 A 为 n 阶矩阵，α 为线性方程组 $Ax=0$ 的非零解，则 α 为矩阵 A 属于特征值 0 的特征向量；

pr: $A\alpha=0=0\cdot\alpha,\ \alpha\neq 0$

（2）设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 λ，则 $(1,1,\cdots,1)^T$ 为矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

pr: $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$

【例 5.1】（2017，数二）设 $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 2 & a\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $(1,1,2)^T$，则 $a=$ ________

【详解】 设 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为特征值 λ 的特征向量，则

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 2 & a\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

得 $1=3+2a$，故 $a=-1$

【例 5.2】（2008，数一）设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，满足 $A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的~~非零~~特征值为________，对应的特征向量为________

【详解】

$A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，$\alpha_1\neq 0$（无关），故 α_1 为特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量

$A(2\alpha_1+\alpha_2)=2A\alpha_1+A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，$2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$（无关）

故 $2\alpha_1+\alpha_2$ 为特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量

特征多项式与特征方程的定义 设 A 为 n 阶矩阵，称

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(-1)^n\lambda^n+\cdots$$

$\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$

为 A 的特征多项式，称 $|A-\lambda E|=0$ 为 A 的特征方程.

特征值λ的n次多项式 …… n次方程

特征方程法

（1）解特征方程$|A-\lambda E|=0$，得A的n个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；例如 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$ 3×3 特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=2$

（2）解方程组$(A-\lambda_i E)x=0(i=1,2,\cdots,n)$，得基础解系，即特征值$\lambda_i$的$n-r(A-\lambda_i E)$个线性无关的特征向量.

Pr: $A\alpha=\lambda\alpha,\ \alpha\neq0$

$\Leftrightarrow (A-\lambda E)\alpha=0$ 即α为齐次方程组$(A-\lambda E)x=0$的非零向量

$\Leftrightarrow r(A-\lambda E)<n$

$\Leftrightarrow |A-\lambda E|=0$

【评注】（1）上（下）三角矩阵、主对角矩阵的特征值为主对角线元素；

证：
$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)=0$$

得特征值为 $\lambda_1=a_{11},\cdots,\lambda_n=a_{nn}$

（2）设 A 为 n 阶矩阵，若 $aA+bE(a\neq 0)$ 不可逆，即 $|aA+bE|=0$，则 $\lambda=-\dfrac{b}{a}$ 为 A 的特征值.

Pr: $|aA+bE|=0 \Leftrightarrow \cancel{a^n}\left|A+\frac{b}{a}E\right|=0$

$\Leftrightarrow \left|A-\left(-\frac{b}{a}\right)E\right|=0$

$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{b}{a}$ 为 A 的特征值

例如：$2A+3E$ 不可逆，则 $\lambda=-\frac{3}{2}$ 为 A 的特征值.

【例 5.3】设 A 为 n 阶正交矩阵，且 $|A|<0$，则 A 必有一个特征值为__________.

【详解】

由3.1 得 $|A+E|=0$，故 $\lambda=-1$ 为 A 的特征值.

$-(-1)$

【例 5.4】 求 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【详解】 (强化) 转圈化简