专题二　齐次线性方程组

定义

求法(2个)

基础解系的定义 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的解.若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关，且 $Ax=0$ 的任意解均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示，则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系.

基础解系即 $Ax=0$ 解的极大线性无关组，基础解系不唯一，但基础解系中解的个数 $n-r(A)$ 唯一，任意 $n-r(A)$ 个线性无关的解均为基础解系.

未知数个数 − 主变个数 = 自由变个数

【例 4.4】（2001，数一、二、三）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为线性方程组$Ax=0$的基础解系，

$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$. 当$t_1,t_2$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$也为$Ax=0$的基础解系.

由题设知 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 $AX=0$ 的解.

由 $(\beta_1,\cdots\beta_s)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)_{n\times s}\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{pmatrix}_{s\times s}$

无关, $r=s$, 列满秩

C

得 $r(\beta_1\cdots\beta_s)=r(C)$

$$|C| = k_1^s + \underline{\underline{(-1)}}^{1+s} k_2^s$$

当 s 为奇数时，$k_1 \neq -k_2$，$|C| \neq 0$，$r(\beta_1, \cdots, \beta_s) = r(C) = s$，

$\beta_1, \cdots, \beta_s$ 无关，为基础解系，

当 s 为偶数时，$k_1 \neq \pm k_2$，……

【例 4.5】设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，满足 $AB=O$.证明：

（I）B 的列向量均为线性方程组 $Ax=0$ 的解；

（II）$r(A)+r(B)\le n$.

【证明】 (1) 将B按列分块，得

$A(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,\cdots,A\beta_s)=(0,\cdots,0)$,

从而 $A\beta_i=0$, $i=1,\cdots,s$, 故B的列向量……

(2) 由(1)知 $\underline{\underline{r(\beta_1,\cdots,\beta_s)}} \leq \underline{\underline{n-r(A)}}$,

s个解的极大无关组　所有解的极大无关组中有这个数

中有这个数

故 $r(A)+r(B) \leq n$.

基础解系的求法

（1）A 为数字矩阵：对 A 作初等行变换，化为行最简形矩阵，自由变量分别取 $1,0,0,\cdots$、$0,1,0,\cdots$、$0,0,1,\cdots$，解得主变量，得到基础解系.

例如：

$$\underset{3\times 4}{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

令 $x_3=1$，$x_4=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-2$；令 $x_3=0$，$x_4=1$，得 $x_1=2$，$x_2=-3$，得到基础解系 $\xi_1=(1,-2,1,0)^T,\xi_2=(2,-3,0,1)^T$.

（2）A 为抽象矩阵：①先求 $r(A)$，②再利用解的定义或性质凑 $n-r(A)$ 个线性无关的解.

$$\begin{cases} A\alpha=0 \\ AB=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1-\eta_2 \\ \sum k_i\eta_i \ (\sum k_i=0) \end{cases}$$

【例 4.6】 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，且 $r(A)=n-1$.

（I）若 A 的各行元素之和均为零，则线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为__________；

（II）设 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，若 $A_{11}\neq 0$，则线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为__________.

【详解】 由 $r(A)=n-1$，知 $AX=0$ 的基础解系有 $n-r(A)=1$ 个解

(I)
$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=0$$

故 $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.

(2) $A\underline{\underline{A^*}} = |A|E = 0\cdot E = 0$

故 $\begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{1n} \end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系.

齐次线性方程组的通解 (所有解)

设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，$r(A) = r$，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数.

【例 4.7】（2019，数一）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为 3 阶矩阵，其中 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为__________.

【详解】

由题设知 α_1,α_2 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的极大无关组，得 $r(A)=2$,

故 $AX=0$ 的基础解系有 $3-r(A)=1$ 个解

由 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，即 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$，得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$,

故 $\xi=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的基础解系，通解为 $k\xi$，k为常数

【例 4.8】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}$， B 为 4 阶矩阵，满足 $AB=O$，且 $r(B)=2$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【详解】 由 $AB=0$，得 $r(A)+r(B)\le 4$，$r(A)\le 4-r(B)=2$.

又 $\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\ne 0$，从而 $r(A)\ge 2$，故 $r(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&-(a-1)^2&-(a-1)^2\end{pmatrix}$$，得 $a=1$.

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$，基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 k_1,k_2 为任意常数

专题三　非齐次线性方程组

定义

求法(2个)

非齐次线性方程组的通解 所有解

设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，$r(A)=r(\overline{A})=r<n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，η 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的特解，则 $Ax=b$ 的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

特解的求法

（1）$\overline{A}$ 为数字矩阵：对 $\overline{A}$ 作初等行变换，化为行最简形矩阵，自由变量均取零，解得主变量，得到特解；

(简单)

（2）$\overline{A}$ 为抽象矩阵：利用解的定义或性质凑一个特解.

$A\eta=b$ $\sum k_i\eta_i$ $(\sum k_i=1)$

【例 4.9】（2011，数三）设 A 为 4×3 阶矩阵，η_1,η_2,η_3 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为【　　】

（A）$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　（B）$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$

（C）$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$　　（D）$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

【详解】

由题设知 $\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$ 为 $AX=0$ 的2个无关解，得

$3-r(A)\geq2$，故 $r(A)\leq1$.

若 $r(A)=0$，则 $A=0$，矛盾，从而 $r(A)\geq 1$，故 $r(A)=1$，

从而 $AX=0$ 的基础解系有 $3-r(A)=2$ 个无关的解.

故 $\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_1$ 为 $AX=0$ 的基础解系

又 $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}$ 为 $AX=\beta$ 的特解，故通解为 $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)+\frac{\eta_2+\eta_3}{2}$

【例 4.10】（2006，数一、二）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

（I）证明系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；

（II）求 a,b 的值及方程组的通解.

【详解】

(1) 设 η_1,η_2,η_3 为 $AX=b$ 的3个无关的解，则

$\eta_2-\eta_1,\ \eta_3-\eta_1$ 为 $AX=0$ 的2个无关的解，从而

$4-r(A)\geq 2$, $r(A)\leq 2$.

又 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}\neq 0$, 从而 $r(A)\geq 2$, 故 $r(A)=2$

(2) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array}\right)$，得 $a=2, b=-3$.

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，特解为 $\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$，其中 k_1, k_2 为任意常数.

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$，特解为 $\eta=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$

通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$，其中 k_1, k_2 为常数.