专题四　极大线性无关组与向量组的秩

定义

求法

专题四　极大线性无关组与向量组的秩

定义

求法

极大线性无关组的定义 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中存在$r$个向量$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关，再加入其余任意向量就线性相关（其余向量均可由其线性表示），则称$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组.

向量组的秩的定义　极大线性无关组中向量的个数称为向量组的秩.

【**评注**】(1) 极大线性无关组不唯一，若向量组的秩为 r，则任意 r 个线性无关的向量均为极大线性无关组；

(2) 矩阵的秩等于其列向量组的秩，也等于其行向量组的秩.

例如：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

α_1,α_2；α_3,α_4；α_1,α_4；α_2,α_3 均为极大无关组

向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 的秩为2.

矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\end{pmatrix}$ 的秩为2.

【例 3.10】设 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 α_1,α_2 线性无关，α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3$，则 $r(A^*)=$__________.

【详解】

由题设知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，且 $\alpha_4=\cdots$，从而

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_4$ 的极大无关组，故

$r(A)=3$，$r(A^*)=1$.

$4-1$

极大线性无关组的求法

对$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$作初等行变换，化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵中每行第一个非零元素对应的列向量构成极大线性无关组.

例如 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 极大无关组

【例 3.11】（2006，数三）

设 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$，当 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量由该极大线性无关组线性表示.

【详解】

(1) $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}$

$=(10+a)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=(10+a)a^3$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|=0 \Leftrightarrow a=0$ 或 -10

(2) 当 $a=0$ 时，α_1 为极大无关组，$\alpha_2=2\alpha_1,\ \alpha_3=3\alpha_1,\ \alpha_4=4\alpha_1$.

当 $a=-10$ 时，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为极大无关组，$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

第四章　线性方程组

概念
齐次
非齐次
矩阵方程（定义）
公共解
同解

专题一　解的性质与判定

齐次线性方程组的定义 含有 n 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 n 元齐次线性方程组，记作 $Ax = 0$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵 解向量

非齐次线性方程组的定义　含有 n 个未知数的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组，其中 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零，记作 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称 A 为系数矩阵，$(A \,\vdots\, b)$ 为增广矩阵，记作 $\overline{A}$.

解的定义　若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 满足线性方程组，则称 $x = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 为方程组的解向量.

主变量与自由变量的定义 对系数矩阵 A 作初等行变换，所得行阶梯形矩阵中每行第一个非零元素对应的未知数称为主变量，其余未知数称为自由变量.

例如: $A \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x_2 + 2\underline{x_3} + 3\underline{x_4} = 0$

因变量 自变量

解的性质 (3+2)

（1）若 ξ_1,ξ_2 为 $Ax=0$ 的解，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 为 $Ax=0$ 的解；pr: $A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)$

$=k_1A\xi_1+k_2A\xi_2=0$

（2）若 η_1,η_2 为 $Ax=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 为 $Ax=0$ 的解；pr: …

（3）若 ξ 为 $Ax=0$ 的解，η 为 $Ax=b$ 的解，则 $\xi+\eta$ 为 $Ax=b$ 的解. pr: …

a　　　　　　a+b

解的性质的推广

（1）若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 为 $\begin{cases} Ax=0 \text{ 的解} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} k_i = 0 \\ Ax=b \text{ 的解} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} k_i = 1 \end{cases}$

例如 η_1,η_2 为 $AX=b$ 的解，则

$\frac{\eta_1-\eta_2}{2}$ 为 $AX=0$ 的解，

$\frac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为 $AX=b$ 的解

（2）若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为 $Ax=b$ 线性无关的解，则 $\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1,\cdots,\eta_s-\eta_1$ 为 $Ax=0$ 的 $s-1$ 个线性无关的解.

Pr: 设存在 $k_1,\cdots,k_s$, 使

$$k_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots k_s(\eta_s-\eta_1)=0$$

即 $(-k_2\cdots-k_s)\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s=0$

由 $\eta_1\cdots\eta_s$ 无关, 得 $k_2=\cdots=k_s=0$, 故 $\eta_2-\eta_1,\cdots,\eta_s-\eta_1$ 无关

类似地：

$$y_1-y_i,\ \cdots,\ y_s-y_i;$$

$$y_2-y_1,\ \cdots,\ y_s-y_{s-1};$$

$$y_1-y_2,\ \cdots,\ y_{s-1}-y_s.$$

【例 4.1】 设 $\xi_1=(1,-2,3,2)^T,\xi_2=(2,0,5,-2)^T$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的解，则下列向量必为方程组解的是**【　　】**

（A）$\alpha_1=(1,-3,3,3)^T$　　（B）$\alpha_2=(0,0,5,-2)^T$

（C）$\alpha_3=(-1,-6,-1,10)^T$　　（D）$\alpha_4=(1,6,1,0)^T$

【详解】

$$(\xi_1,\xi_2 \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\left(\begin{array}{cc:cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cccc} 1 & 0 & 1 & 10 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & \underline{\underline{0}} & 10 \end{array}\right)$$

$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$ ✓

齐次线性方程组解的判定

$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$

(无穷多解)

例如: $A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$

$r(A)=2<3$, $x_2+2\underline{\underline{x_3}}=0$

自由变量

推论　$Ax = 0$ 有非零解的充分条件为 $m < n$. (行数小于列数 即方程个数小于未知数)

pr: $r(A) \le m < n$

【例 4.2】（2002，数三）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，则线性方程组 $\underline{\underline{AB}}x=0$

$m\times m$

（A）当 $n>m$ 时，只有零解　　（B）当 $n>m$ 时，有非零解

（C）当 $m>n$ 时，只有零解　　（D）当 $m>n$ 时，有非零解

【详解】

当 $m>n$ 时，$r(AB)\le r(A)\le n<m$，有非零解

当 $n>m$ 时，$r(AB)\le r(A)\le m$

非齐次线性方程组解的判定

$\alpha_1, \cdots \alpha_n, \underline{\underline{b}}$

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) < r(\overline{A}) \Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) - 1$

$= \{3\}$ x.

$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

$r(A) = 2 < r(\overline{A}) = 3$

$0x_1 + \cdots = 3$

$Ax = b$有唯一解$\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = n$

$Ax = b$有无穷多解$\Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A}) < n$

例: $\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$

$x_2 + 2\underline{x_3} = 2$

自由变量

推论（1） $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$；

（2） $Ax=b$ 有解的充分条件为 $r(A)=m$.（行满秩）

pf: 由 $m=r(A)\le \underbrace{r(\overline{A})}_{m\times(n+1)}\le m$，得 $r(A)=r(\overline{A})=m$.

【评注】（1）若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $Ax=0$ 只有零解；若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解；

pr: $r(A)=n$　　$r(A)<n$

（2）若 A 为 n 阶矩阵，则线性方程组解的判定或求解可以利用 Cramer 法则.

【例 4.3】（2022，数二、三）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $Ax=\beta$ 解的情况为【　　】

（A）无解　　（B）有解　　（C）有无穷多解或无解　　（D）有唯一解或无解

【详解】

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2 & 2\\ 1 & b & b^2 & 4\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\end{vmatrix}=(a-1)(b-1)(b-a).$$

① 当 $a\neq b\neq 1$ 时，$|A|\neq 0$，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有唯一解.

② 当 $a=1$ ~~或~~ $b=1$ 时 $(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&b&b^2&4\\0&0&0&1\end{array}\right)$，$r(A)<r(\bar{A})$，无解

③ 当 $a=b\neq 1$ 时，$(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\0&0&0&2\end{array}\right)$，$r(A)<r(\bar{A})$，无解

① 当 $a\neq b\neq 1$ 时，$|A|\neq 0$，$r(A)=r(\bar{A})=3$，方程组有唯一解.

② 当 $a=1$ ~~或~~ $b=1$ 时 $(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&b&b^2&4\\0&0&0&1\end{array}\right)$，$r(A)<r(\bar{A})$，无解

③ 当 $a=b\neq 1$ 时，$(A,\beta)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&a&a^2&2\\0&0&0&2\end{array}\right)$，$r(A)<r(\bar{A})$，无解