秩的性质

$A_{2\times 3}$　1×5

（1）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $r(A)\le \min\{m,n\}$； 秩小于行数和列数

（2） $r(A+B)\le r(A)+r(B)$； 和的秩…

pr: Ch3

（3）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵， B 为 $n\times s$ 阶矩阵，则 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$； 积秩…

（4） $\max\{r(A),r(B)\}\le r(\underline{A \,\vdots\, B})\le r(A)+r(B)$； 秩之…

秩的性质

$A_{2\times 3}$ 1×5

（1）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，则 $r(A)\le \min\{m,n\}$；秩小于行阶数和列数

（2）$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；和的秩…

pr: Ch3

（3）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，则 $r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$；乘秩…

（4）$\max\{r(A),r(B)\}\le r(\underline{A \mid B})\le r(A)+r(B)$；取之…

（5）$r(A)=r(kA)(k\neq 0)$；乘非零常数…

（6）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则 乘可逆…

$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；

Pr: $r(A)\geq r(PA)$

$r(A)=r(EA)=r(P^{-1}PA)\leq r(PA)$

故 $r(A)=r(PA)$

(7) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若 $r(A)=n$，则 $r(AB)=r(B)$；若 $r(A)=m$，则 $r(CA)=r(C)$；

左乘… 右乘…

pr: Ch4

(8) $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$；乘转置…

(9) 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，满足 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

乘积为0…

【例 2.7】（2010，数一、二、三）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times m$ 阶矩阵，满足 $AB=E$，则【　】

2×2　2×3　$(n>m)$　$m\times m$

$|E|=1$

（A）$r(A)=m$，$r(B)=m$　　　（B）$r(A)=m$，$r(B)=n$

（C）$r(A)=n$，$r(B)=m$　　　（D）$r(A)=n$，$r(B)=n$

【详解】

经典错误. 由 $AB=E$，知 A 可逆 ×

$r\left(\substack{A\\B}\right)\le \substack{m\\n}$

$r\left(\substack{A\\B}\right)\ge r(AB)=r(E)=m$

故 $r\left(\substack{A\\B}\right)=m$.

【例 2.8】设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(ABC)=$________.

【详解】

法一：先求 ABC

法二：由 $|A|=|E|=1$，$|C|=6$，得 $r(A)=r(C)=3$

又 $|B|=0$ 且 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$，从而 $r(B)=2$

故 $r(ABC)=r(B)=2$

秩的求法

（1）A 为数字矩阵：对 A 作初等行变换，化为行阶梯形矩阵，则 $r(A)$ 等于行阶梯形矩阵中非零行的行数；

（$n\geq 3$）

每行第一个非零元素下面元素均为0

（2）A 为抽象矩阵：利用秩的定义或性质.

$A_{10\times 10}$

$|A|=0$, 9×9 100个

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{初等} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$

【例 2.9】设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

且 $r(A)=2$，则 $a=$__________，$b=$__________.

【详解】

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & b\\ 2 & a & 3 & 4\\ 3 & 1 & 5 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & b\\ 0 & 0 & a-1 & ab-2b+2\\ 0 & 0 & 0 & 4-2b\end{pmatrix}$$

由 $r(A)=2$, 得 $a=1, b=2$

专题四　伴随矩阵

定义

性质(8条)

伴随矩阵的定义 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，由 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，记作 A^*.

【评注】设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

主对角互换
副对角变号

若 A 可逆，则

$A^*=|A|A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

伴随矩阵的性质

（1） $AA^* = A^*A = |A|E \xrightarrow{|A|\neq 0} A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*, \boxed{A^* = |A|A^{-1}}$; △

pr: $AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & & A_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$

$= |A|E$

同理 $A^*A = |A|E$

若$|A|\neq 0$，则 $A\cdot\dfrac{A^*}{|A|}=E$，故 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，即 $A^*=|A|A^{-1}$

（2） $(kA)^* = k^{\boxed{n-1}}A^*$；(98)

证：$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A| \cdot \frac{1}{k}A^{-1}$

$= k^{n-1}A^*$

(3) $(AB)^* = B^* A^*$;

证: $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B| \cdot B^{-1}A^{-1}$

$= B^* \cdot A^*$

（4） $|A^*| = |A|^{\boxed{n-1}}$；

证: $|A^*| = \left| \underline{|A|} A^{-1} \right| = |A|^n \cdot |A^{-1}| = |A|^{n-1}$

△ 总结: 三个 $n-1$ 次 $\begin{cases} |A^*| \\ (kA)^* \\ ab\text{型} \end{cases}$

（5）$(A^T)^* = (A^*)^T$；

证：$(A^T)^* = |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T$.

$(A^*)^T = (\underline{|A|}A^{-1})^T = |A|(A^{-1})^T$

（6）$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \boxed{\frac{A}{|A|}}$;

Pf: $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}$

$(A^*)^{-1} = (\underline{|A|}A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}$

① 总结：上标运算 n, T, -1, $*$ 可交换

高次幂

(7) $(A^*)^* = |A|^{\boxed{n-2}} A$;

kA

Pr. $\boxed{(A^*)}^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \frac{A}{|A|}$

$((A^*)^*)^* = |(A^*)^*| ((A^*)^*)^{-1}$ $= |A|^{n-2} A$

补例 设 A 为 4 阶矩阵，且 $r(A)=3$，则 $\left[(A^*)^T\right]^*=$ ________.

$$\text{原式}=\left((A^*)^*\right)^T=\left(\underbrace{|A|}_{0}{}^{n-2}A\right)^T=0$$

（8）$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$. 互补

【证明】当 $r(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，从而 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，故 $r(A^*)=n$.

(强化)

当 $r(A)<n-1$ 时，A 所有的 $n-1$ 阶子式均为零，即 A 所有的余子式均为零，亦即 A 所有的代数余子式均为零，从而 $A^*=O$，故 $r(A^*)=0$.

当 $r(A)=n-1$ 时，A 有个 $n-1$ 阶子式非零，即 A 有个余子式非零，亦即 A 有个代数余子式非零，从而 $A^*\neq O$，故 $r(A^*)\geq 1$.又 $AA^*=|A|E=0$，故 $r(A)+r(A^*)\leq n$，从而 $r(A^*)\leq 1$，故 $r(A^*)=1$.

【例 2.10】（2003，数三）设 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，且 $r(A^*)=1$，则【　　】

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$　　（B）$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

（C）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

【详解】由 $r(A^*)=1$，得 $r(A)=2$，故 A 有 2 阶行列式非零且 $|A|=0$.

由 $|A|=(a+2b)(a-b)^2=0$，得 $a=b$ 或 $a+2b=0$

当 $a=b$ 时，$A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$，$r(A)\leq 1$ 矛盾，故 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$