专题三　相似对角化

定义
定理(2个)
结论(2个)

相似对角化的定义　设 A 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则称 A 可相似对角化.　相似于对角矩阵

进一步分析：由 $P^{-1}AP=\Lambda$，得 $AP=P\Lambda$.将 P 按列分块，得

$$
\begin{aligned}
AP &= A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)\\
&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\\
&=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
P & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\Lambda & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\
 & 1 & 1 & 2
\end{array}
$$

从而 $\underline{A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i}(\alpha_i\neq 0),i=1,2,\cdots,n$，即 P 的第 i 列 α_i 为矩阵 A 属于特征值 λ_i 的特征向量，故

P 是由 A 的 n 个线性无关的特征向量构成的可逆矩阵，Λ 是由 A 的 n 个特征值构成的对角矩阵.

【评注】若 A, B 均可相似对角化，则 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow$ A, B 有相同的特征值.

pr: $\Rightarrow$

$\Leftarrow$ $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = P_2^{-1}BP_2$

由传递性知 $A \sim B$

相似对角化的充要条件

n 阶矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量

☆ 设 λ_i 为 k_i 重，则

$$n-r(A-\lambda_i E)\begin{cases} =k_i \Leftrightarrow A\text{可相似对角化} \\ <k_i \Leftrightarrow A\text{不能相似对角化} \end{cases}$$

【例 5.9】(2017，数一、二、三) 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则【　　】

Λ

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

【详解】

A的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ (二重根)

特征值2对应特征向量个数为 $3-r(A-2E)=3-1=2$

故A可相似对角化.

B ···

$3 - r(B-2E) = 3-2 = 1 < 2$

故B不能 ···

7LS

【例 5.9】（2023，数一）下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是【　　】

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

【详解】

相似对角化的充分条件

（1） A 有 n 个不同的特征值；(不同……关)

（2） A 为实对称矩阵. ($A^T=A$)

【评注】若 A 可相似对角化，特别地 A 为实对称矩阵，则 $r(A)$ 等于非零特征值的个数.

pr: $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$r(A)=r(P^{-1}AP)=r(\Lambda)=$ 非零特征值个数

【例 5.10】（2010，数一、二、三）设 4 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A=O$，且 $r(A)=3$，则 A 相似于

【　】

Pr. $O\cdot\alpha=\lambda\cdot\alpha,\ \alpha\neq 0 \Rightarrow \lambda=0$

（A）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

【详解】 设 A 的特征值为 λ，则 λ 满足

$\lambda^2+\lambda=0$，得 $\lambda=0$ 或 -1.

又 $r(A)=3$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\ \lambda_4=0$

【例 5.11】（2014，数一、二、三）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【证明】 (强化) 秩为1.

专题四　实对称矩阵

性质（$\underline{6}+\underline{4}$）

求法（3大步）

Th

实对称矩阵的性质

（1）特征值均为实数；

（2）不同特征值的特征向量正交；

$\alpha_1^T\alpha_2=0$

△ pr: $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$, $A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$ (*), $\lambda_1\neq\lambda_2$

(*)式左乘 α_1^T，得 $\lambda_2\alpha_1^T\alpha_2=\alpha_1^TA\alpha_2=\alpha_1^TA^T\alpha_2$

$=(A\alpha_1)^T\alpha_2=(\lambda_1\alpha_1)^T\alpha_2=\lambda_1\alpha_1^T\alpha_2$

从而 $(\underbrace{\lambda_1-\lambda_2}_{\neq 0})\alpha_1^T\alpha_2=0$，故 $\alpha_1^T\alpha_2=0$，α_1,α_2 正交.

（3）k 重特征值有 k 个线性无关的特征向量；

即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}$

（4）A 可正交相似对角化，即存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$QQ^T=E$ 或 $Q^TQ=E$

$\Leftrightarrow Q^{-1}=Q^T$

$\Leftrightarrow Q$ 的列向量单位正交.

$A=Q\Lambda Q^T$

【例 5.12】设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^4+2A^3+A^2+2A=O$，且 $r(A)=r$，则 $|A+3E|=$________.

【详解】

设 A 的特征值为 λ，则 λ 满足

$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+2\lambda=0$，即 $\underbrace{(\lambda^2+1)}_{\Delta<0}\lambda(\lambda+2)=0$

得 $\lambda=0$ 或 -2.

又 $r(A)=r$，故 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_r=-2$，

$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$

从而 $A+3E$ · · · · · 1 · · · · 3

故 $|A+3E|=3^{n-r}$

正交矩阵 Q 的求法

（1）求 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$； $\Rightarrow \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

（2）求 A 的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$； $\Rightarrow P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

（3）将不同特征值的特征向量分别 Schmidt 正交化，得 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，得到正交矩阵 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$.

实对称矩阵的分解定理

设 A 为 n 阶实对称矩阵，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 为矩阵 A 分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的单位正交的特征向量，

则 $A=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T+\lambda_2\gamma_2\gamma_2^T+\cdots+\lambda_n\gamma_n\gamma_n^T$.特别的，若 $r(A)=1$，则 $A=tr(A)\gamma_1\gamma_1^T$.

pr: $Q^{-1}AQ=\Lambda$, $A=Q\Lambda Q^T=(\gamma_1\cdots\gamma_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\\vdots\\\gamma_n^T\end{pmatrix}$

$$=(\lambda_1\gamma_1,\cdots,\lambda_n\gamma_n)\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\\vdots\\\gamma_n^T\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\gamma_1\gamma_1^T+\cdots+\lambda_n\gamma_n\gamma_n^T$$

【例 5.13】（2011，数一、二、三）设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ \alpha_1 \quad \alpha_2\end{array}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$.

（I）求 A 的特征值与特征向量；

（II）求矩阵 A.

【详解】

(1) $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，故 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为特征 $\lambda_1=-1$ 的特征

$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为… $\lambda_2=1$ …

又 $r(A)=2$，故 $\lambda_3=0$ 为 A 的特征值

法一：设特征值 $\lambda_3=0$ 特向为 $\alpha_3=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{cases} \alpha_3^T\alpha_1 = x_1 - x_3 = 0 \\ \alpha_3^T\alpha_2 = x_1 + x_3 = 0 \end{cases}，得 \ \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

法二：知二求一 向量积

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} - 2\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

故 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) 法一：令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$，

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$(P|E)\xrightarrow{\text{初行}}(E|P^{-1})$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

法二：由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$已正交，只需单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则$Q^TAQ=\Lambda$，故

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

法三：分解7h

$$A = -\gamma_1\gamma_1^T + \gamma_2\gamma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$