INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo III

Resolução de sistemas de equações lineares por métodos diretos e iterativos

Parte II – Métodos diretos

C. Matriz inversa e condicionamento

Eliminação de Gauss x Fatoração LU

- Embora seja um método seguro para resolver sistemas de equações lineares da forma [A] {x} = {b}, a *Eliminação de Gauss* se torna ineficiente ao resolver sistemas com a mesma matriz [A], mas com diferentes vetores {b}, pois manipula [A] e {b} juntos.
- A *Fatoração LU* separa a eliminação da matriz [A], das manipulações do vetor {b}. Assim, após [A] ser decomposta, ela pode ser utilizada na solução do sistema para múltiplos vetores {b}.
- O cálculo eficiente da matriz inversa de [A] utiliza essa vantagem da Fatoração LU.

A Matriz inversa

- Se a matriz [A] é quadrada, existe uma outra matriz $[A]^{-1}$, chamada inversa de [A] tal que:

$$[A]\,[A]^{-1} = [\,I\,]$$

- A inversa pode ser calculada coluna a coluna, gerando soluções para vetores unitários como constantes do lado direito:
  - Se o vetor do lado direito tem *1* na primeira linha e *0* nas restantes a solução será a primeira coluna da matriz inversa.
  - Ou seja, se um vetor com um *1* na *i-ésima* linha e zero nas demais for usado, o resultado será a *i-ésima* coluna da matriz inversa.

A Matriz inversa

[A] [A]$^{-1}$ = [I]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Matriz inversa
Exercício

7.1 A matriz inversa pode ser calculada com o uso da decomposição LU. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- Utilize a decomposição LU para determinar a sua inversa:
  - Manualmente (em sala);
  - Faça uma função Scilab para obter $[A]^{-1}$ (em casa).

    Confira os resultados usando $[A]^{-1}$ no console do Scilab.

A Matriz inversa e as respostas a estímulos

- Em um sistema *[A] {x} = {b}*
  - A matriz [A] contém os parâmetros que expressam como as partes do sistema interagem;
  - {x} representa o estado ou respostas do sistema
  - {b} representam os estímulos externos que conduzem o sistema.

A Matriz inversa e as respostas a estímulos

- A matriz inversa pode ser utilizada para fornecer a resposta de *[A] {x} = {b}*:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\}$$

ou

$$x_1 = a_{11}^{-1} b_1 + a_{12}^{-1} b_2 + a_{13}^{-1} b_3$$
$$x_2 = a_{21}^{-1} b_1 + a_{22}^{-1} b_2 + a_{23}^{-1} b_3$$
$$x_3 = a_{31}^{-1} b_1 + a_{32}^{-1} b_2 + a_{33}^{-1} b_3$$

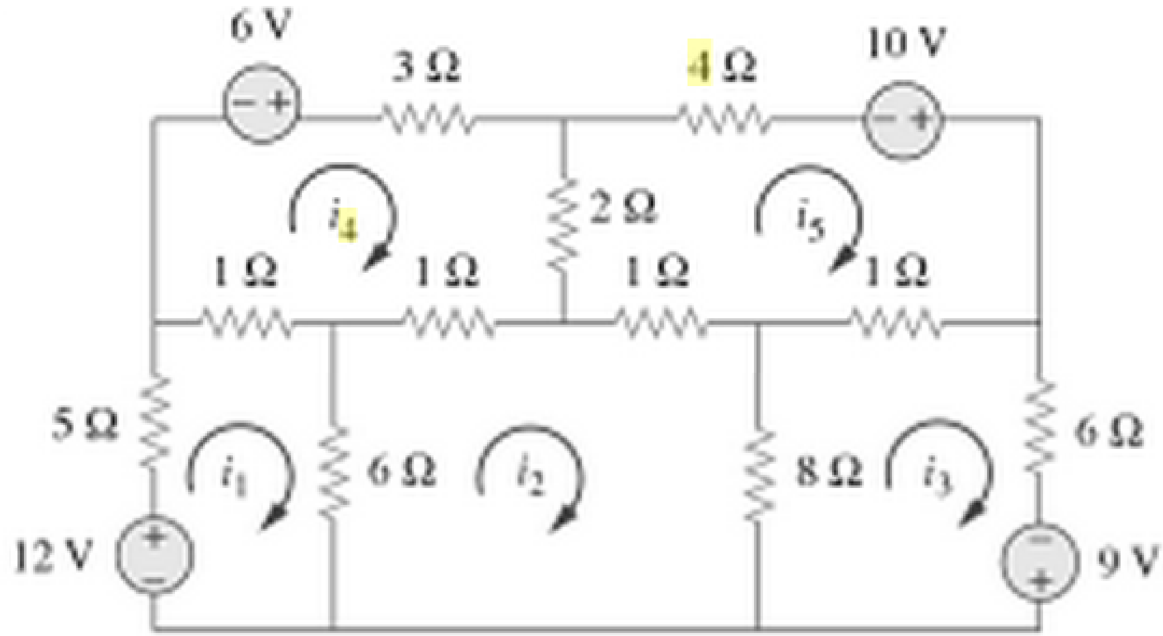
- Percebe-se que cada elemento da matriz inversa representa resposta de uma parte do sistema a um estímulo unitário de outra parte do sistema.

A Matriz inversa e as respostas a estímulos

- Observe que a formulação anterior é linear, valendo:
  - **A superposição** – em um sistema submetido a vários estímulos diferentes, as respostas podem ser calculadas individualmente e os resultados somados para se obter a resposta total.
  - **A proporcionalidade** – a multiplicação de um estímulo por um valor faz com que a resposta a esse estímulo seja multiplicada pelo mesmo valor.
- Assim, a solução pela matriz inversa fornece um meio para se compreender as inter-relações das partes de um sistema.

A Matriz inversa e as respostas a estímulos

7.2 Encontre o sistema de equações *[R] {i} = {E}* que representa o circuito abaixo e calcule a contribuição de cada fonte de tensão para a corrente i_1, com o auxílio de $[R]^{-1}$.

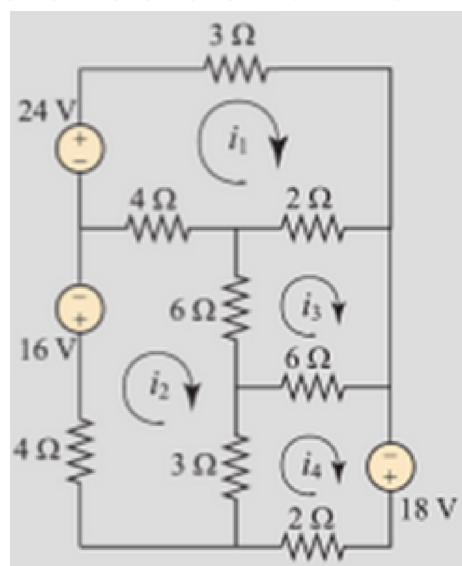


Matriz inversa e estímulos
Exercício

7.3. Encontre o sistema de equações [R] {i} = {E} que representa o circuito abaixo e

a) calcule cada uma das correntes de malha;

b) calcule o novo valor de cada uma das fontes de tensão tal que a corrente i2 seja de 1,5 A com uma contribuição de 0,5 A de cada uma das fontes.



Análise de erro e condicionamento de um sistema

- Dizemos que um sistema linear representado por

$$[A]\ \{x\} = \{b\}$$

é mal condicionado quando pequenas alterações nos elementos da matriz [A] ou do vetor {b} causam grandes alterações no vetor solução {x}.

- Em geral, o determinante da matriz [A] de um sistema mal condicionado é, numericamente, muito próximo de zero.

Matriz inversa e o condicionamento de um sistema

- A matriz inversa também fornece uma maneira de avaliar se um sistema é mal condicionado. Um método pode aplicado para essa avaliação:
  - Faça uma mudança de escala na matriz [A] de modo que o maior elemento em cada linha seja 1;
  - Inverta a nova matriz;
  - Se existirem elementos de $[A]^{-1}$ que sejam muito maiores que 1, é provável que o sistema seja mal condicionado.

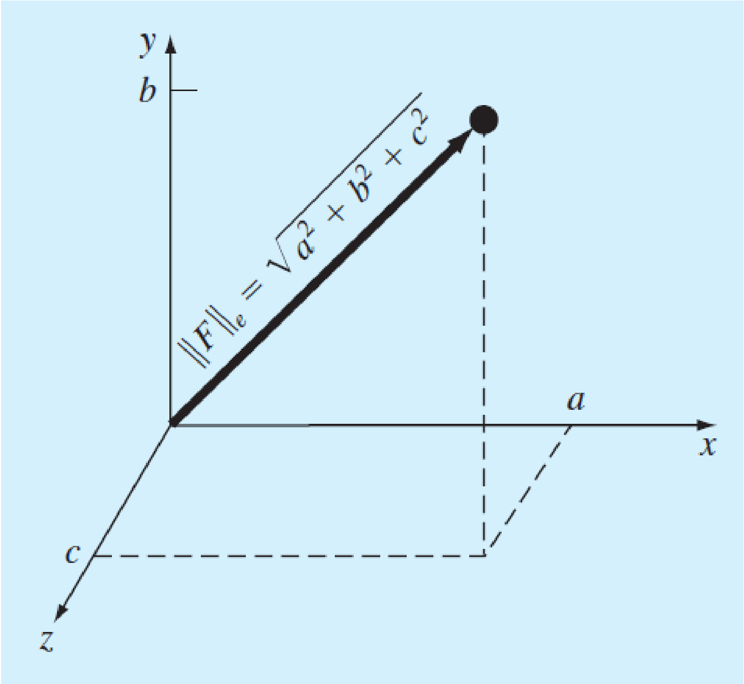
Norma de vetores e Matrizes

- Uma norma é uma função de valores reais que fornece uma medida do tamanho de entidades matemáticas com muitos componentes, como vetores e matrizes.
- Um exemplo simples é um vetor no espaço euclidiano tridimensional que pode ser representado por:

  $$\{ F \} = [\, a \ b \ c \,]$$

  sendo o seu comprimento ou norma euclidiana:

  $$\|F\|_e = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



Norma de vetores e Matrizes

- Para um vetor {X} de dimensão n:

$$\|X\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Estendendo o conceito de norma para matrizes:

$$\|A\|_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

norma que recebe o nome especial de norma de *Frobenius*.

- A seguir, serão apresentadas normas alternativas às normas euclidiana e de *Frobenius*.

Normas de vetores

- Normas-p

$$\left\| X \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^p \right)^{1/p}$$

  - Se p = 2, coincide com a norma euclidiana.
  - Se p = 1, tem-se a norma como a soma absoluta dos elementos:

$$\left\| X \right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|$$

  - Se p = ∞, tem-se o módulo máximo ou norma uniforme do vetor:

$$\left\| X \right\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i \right|$$

  que define a norma como o elemento de maior valor absoluto.

Normas de matrizes

- Norma da soma das colunas:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i\,j}|$$

ou seja, a soma dos valores absolutos dos coeficientes é calculado para cada coluna e a maior dessas somas é considerada a norma.

- Norma da soma das linhas ou norma uniforme da matriz:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i\,j}|$$

ou seja, a soma dos valores absolutos dos coeficientes é calculado para cada linha e a maior dessas somas é considerada a norma.

Número de condição da matriz

- Ao resolver um sistema

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

  podem ocorrer problemas de condicionamento e de estabilidade numérica.
- Os problemas de estabilidade numérica estão relacionados com o algoritmo que utilizamos para resolver o sistema. Por exemplo, para evitar os problemas de instabilidade numérica, utiliza-se o método de eliminação de Gauss com pivotamento.
- No entanto, se o problema for mal condicionado, essas técnicas de pesquisa de pivô deixam de ser úteis, já que um problema mal condicionado será sempre numericamente instável. **É importante, portanto, identificar quais os sistemas que nos podem trazer problemas de condicionamento.**

Número de condição da matriz

- Supondo ser dado, não o vetor b exato, mas apenas uma aproximação b~, é preciso analisar a influência desse erro nos resultados obtidos, já que em vez do valor exato, obtém-se um valor aproximado x~, solução do sistema:

$$[A]\ \{\tilde{x}\} = \{\tilde{b}\}$$

- As normas apresentadas, permitem estabelecer uma medida de comparação entre os erros vetoriais, definindo-se, de forma semelhante ao caso escalar:

$$\text{Erro relativo de } \tilde{x} : \|e_r\| = \|x - \tilde{x}\| \,/\, \|x\|$$

relativamente a uma certa norma || . ||

- Para estabelecer a relação entre os erros relativos dos dados e os erros relativos dos resultados vai ser importante estabelecer a noção de número de condição.

Número de condição da matriz

- Designa-se por número de condição de uma matriz [A] relativamente à norma || ||, o valor :

$$Cond[A] = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$$

- Pode-se mostrar (Cheney e Kincaid, 2008, p. 321) que:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq Cond[A] \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

isto é, o número de condição mede a sensibilidade do sistema a erro nos dados.

Número de condição da matriz

- Segundo (Ralston e Rabinowitz, 1978 e Gerald e Wheatley, 1989 apud Chapra, 2012, p. 275) :

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq Cond[A] \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

  isto é, o erro relativo da norma da solução calculada pode ser tão grande quanto o erro relativo da norma de [A] multiplicada pelo número de condição de [A].

- Exemplificando,

  se os coeficientes de [A] são conhecidos com uma precisão de t dígitos (erros de arredondamento da ordem de 10^{-t}) *e cond[A]* = 10^{c}, a solução {x} pode ser válida para apenas $t - c$ dígitos (erros de arredondamento da ordem de 10^{c-t}).

Número de condição da matriz

- Assim, o fato de um sistema ser bem ou mal condicionado depende:
  - da exatidão dos dados;
  - de quanto mais de erro na solução pode ser tolerado.

Determinação do condicionamento de uma matriz

- Exemplo – A matriz de Hilbert, notoriamente mal condicionada, pode ser representada genericamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2\mathrm{n}-1} \end{bmatrix}$$

- Usar a norma da soma das linhas para fazer uma estimativa de condicionamento da matriz de Hilbert *3 x 3*:

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Determinação do condicionamento de uma matriz

- Primeiro, a matriz pode ser normalizada tal que o máximo elemento em cada linha seja 1

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

- A soma dos elementos da terceira linha será a norma das linhas:

$$\|A\|_{\infty}=1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}=2{,}35$$

Determinação do condicionamento de uma matriz

- A inversa da matriz normalizada será (verifique):

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -18 & 10 \\ -36 & 96 & -60 \\ 30 & -90 & 60 \end{bmatrix}$$

- Observe que os elementos dessa matriz são maiores que os da original, o que se reflete na sua normas das linhas:

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty}=\left|-36\right| + \left|96\right| + \left|-60\right| = 192$$

- Assim, o número de condição da matriz [A] será:

$$Cond[A]=\left\|A\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|=2{,}35 \cdot 192=451{,}2$$

- O número de condição consideravelmente maior que um aponta para um sistema mal condicionado.

Determinação do condicionamento de uma matriz

- A extensão desse mal condicionamento pode ser quantificada calculando-se

$$c = \mathit{log}\ 451{,}2 = 2{,}65$$

- Relembrando, os dígitos significativos no padrão IEEE de precisão simples são

$$t = \mathit{log}\ 2^{24} = 7{,}2$$

- Logo, a solução poderá apresentar erros de arredondamento de até

$$10^{(2{,}65 - 7{,}2)} = 3 \times 10^{-5}$$

Normas e número de condicionamento no Scilab

O Scilab possui funções implícitas para calcular as normas e o número de condição de uma matriz:

- `norm(A [,flag]);`
- `cond(A [,flag]);`

onde

x é o vetor ou matriz e

flag é uma string representando o tipo de norma: (1, 2, 'inf' ou 'fro');

Condicionamento de uma matriz no Scilab Exercício

7.4 Calcule para a matriz normalizada de Hilbert

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(a) A norma de soma das linhas e o número de condição de A baseado nessa norma.

(b) A norma de *Frobenius* e o número de condição de A baseado nessa norma. Confira manualmente os resultados.

Condicionamento de uma matriz no Scilab Exercício

7.5 Calcule para a matriz [R] do exercício 7.3:

(a) A norma de soma das linhas e o número de condição de R baseado nessa norma. Confira manualmente os resultados.

(b) A norma de *Frobenius* e o número de condição de A baseado nessa norma. Confira manualmente os resultados.

(c) Caracterize o sistema quanto ao condicionamento.

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.
- CHENEY, Ward e KINCAID, David. **Numerical Mathematics and Computing.** 6. ed. · Cengage Learning, 2008.