INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo I

Erros em representações numéricas
e
aritmética em ponto flutuante

Parte II - Erros de truncamento e erro numérico total

Erros de truncamento
Definição

- Erros de truncamento são os erros resultantes do uso de uma aproximação no lugar de uma solução matemática exata.
- Conforme foi visto na aula anterior, a expansão em série de Maclaurin para e^x apresenta um número finito de termos, entretanto, quando a série é utilizada para calcular e^x, somente um número finito de termos pode ser utilizado. Usando três termos para calcular e^x, o erro de truncamento para tal aproximação vale

$$erro\,de\,truncamento = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Erros de truncamento
Definição

- Os erros de truncamento não se originam apenas do corte de uma parte de uma série, eles podem ocorrer em outros procecedimentos matemáticos.
- Um exemplo é o erro que ocorre quando um processo contínuo é substituido por uma aproximação discreta. Ao encontrar a derivada de uma função, definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Numericamente não se pode utilizar $\Delta x \to 0$, é necessário utilizar um valor finito de x, resultando em

Erros de truncamento
Definição

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nesse caso, portanto, o erro de truncamento é causado pela escolha de um valor finito de Δx. Por exemplo, ao se calcular a derivada de f(x) = x^2 , o erro de truncamento será

$$erro\, de\, truncamento = 2x - \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = -\Delta x$$

Exemplo

- A aceleração a que está submetido um saltador de *bungee jumping* é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} \cdot v^2$$

onde, v é a velocidade em m/s, t é o tempo em s, g é a aceleração da gravidade (9,80665 m/s^2), c_d é o coeficiente de arrasto concentrado em kg/m e m é a massa do saltador em kg.

A solução analítica da equação diferencial é

$$v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t\right) \quad (m/s)$$

Exercício

Para resolver numericamente a ED, utiliza-se a a aproximação por diferenças finitas:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{cd}{m} \cdot v^2$$

Isolando-se $v(t_{i+1})$ na equação acima, resulta:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{cd}{m} \cdot v(t_i)^2 \right] (t_{i+1} - t_i)$$

ou

$$v_{i+1} = v_i + \left[g - \frac{cd}{m} \cdot v(t_i)^2 \right] \Delta t$$

onde, Δt é o passo de cálculo

Exemplo

- Pede-se
  - Um script Scilab que plote o gráfico de v(t) usando as soluções analíticas e numéricas, do instante t = 0 até t = 12 s, com intervalos de 0,5 s.

    Considere m = 60 kg, g = 9,80665 m/s^2 e c_d = 0,25 kg/m
  - O erro relativo percentual verdadeiro em t = 12.

Exemplo
Solução

```
i = 1; c = 0.25; g= 9.80665; m = 60;
vex(1)= 0; // solução exata
vnum(1) = 0; // solução numérica
t(1) = 0; dt = 0.5;
while t(i)< 12 do
    t(i+1)=t(i)+dt
    vex(i+1)= sqrt(g*m/c)*tanh(sqrt(g*c/m)*t(i+1));
    vnum(i+1)=vnum(i)+(g - (c/m)*(vnum(i)^2))*dt;
    i=i+1;
end
```

Exemplo
Solução

```
printf("Soluçao exata de v(%d)= %f\n",t(i),vex(i));

printf("Soluçao numerica de v(%d)= %f\n",t(i),vnum(i));

e = abs((vex(i)-vnum(i))/vex(i))*100;

printf("O erro percentual relativo é  %f %%",e);

plot2d(t,vex,style=[color('blue4')]);

plot2d(t,vnum,style=[color('red4')]);

xgrid;
```

Exercício

- Demonstre a solução analítica de

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} \cdot v^2$$

Series de Taylor

- A função suave é uma função que tem derivadas contínuas até alguma ordem desejada sobre algum domínio.
- O Teorema de Taylor estabelece que qualquer função suave pode ser aproximada por um polinômio.
- As séries de Taylor fornece um meio para expressar essa ideia matematicamente.
- A série $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ chama-se série de Taylor da função f em torno de a, que no caso de a = 0, é chamada de série de Maclaurin da função f.

Series de Taylor

- A aproximação por série de Taylor de uma função, permite estimar o valor da função em um ponto x_{i+1}, conhecido o seu valor em x_i.

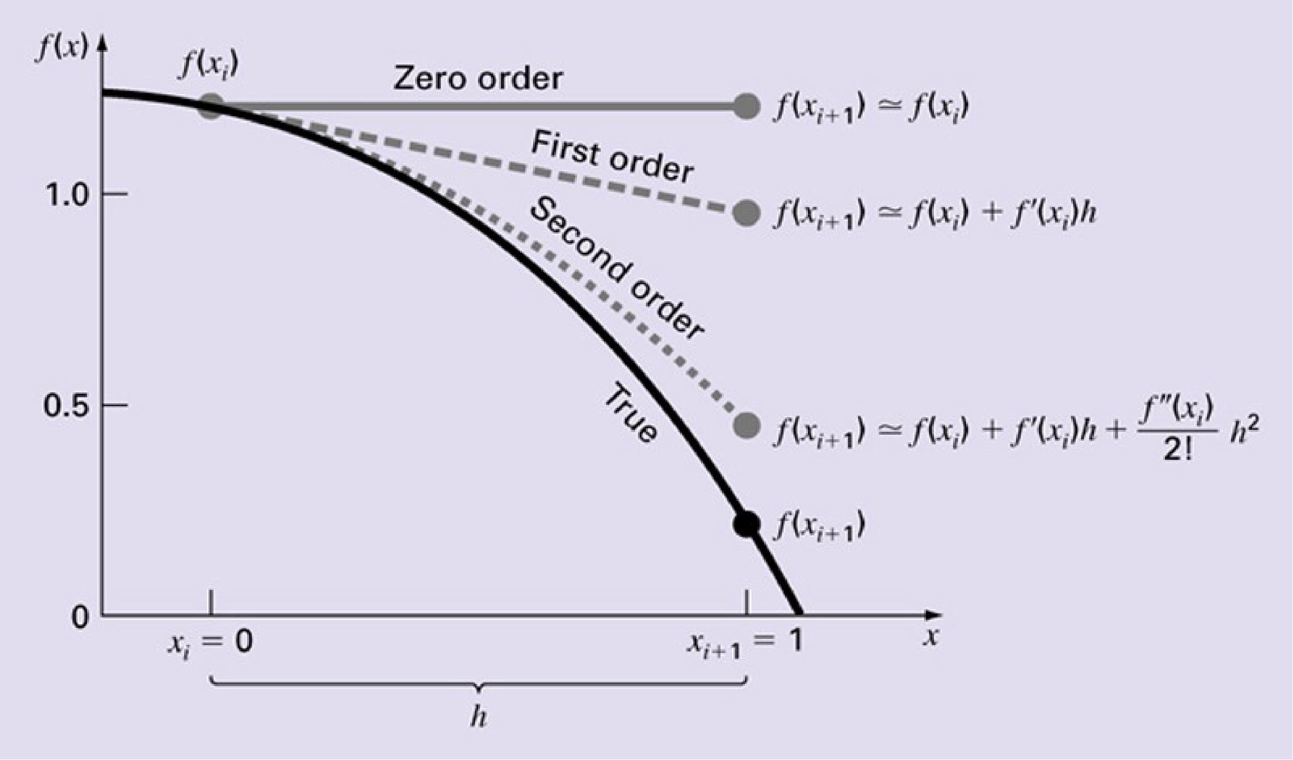
$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

onde

- $h = x_{i+1} - x_i$
- O resto é incluído p/ representar todos os termos a partir de *n+1*

Series de Taylor

- $f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$
- $h = x_{i+1} - x_i$



Aproximação de $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ em $x = 1$ por expansão em séries de Taylor.
Fonte: Capra, 2013, p. 105

Séries de Taylor

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

- Se *f : [a,b]* → *R* é uma função com *n* derivadas contínuas até a ordem *n+1* Seja $x_0 \in [a,b]$ então existe ξ entre x_i e x_{i+1} tal que

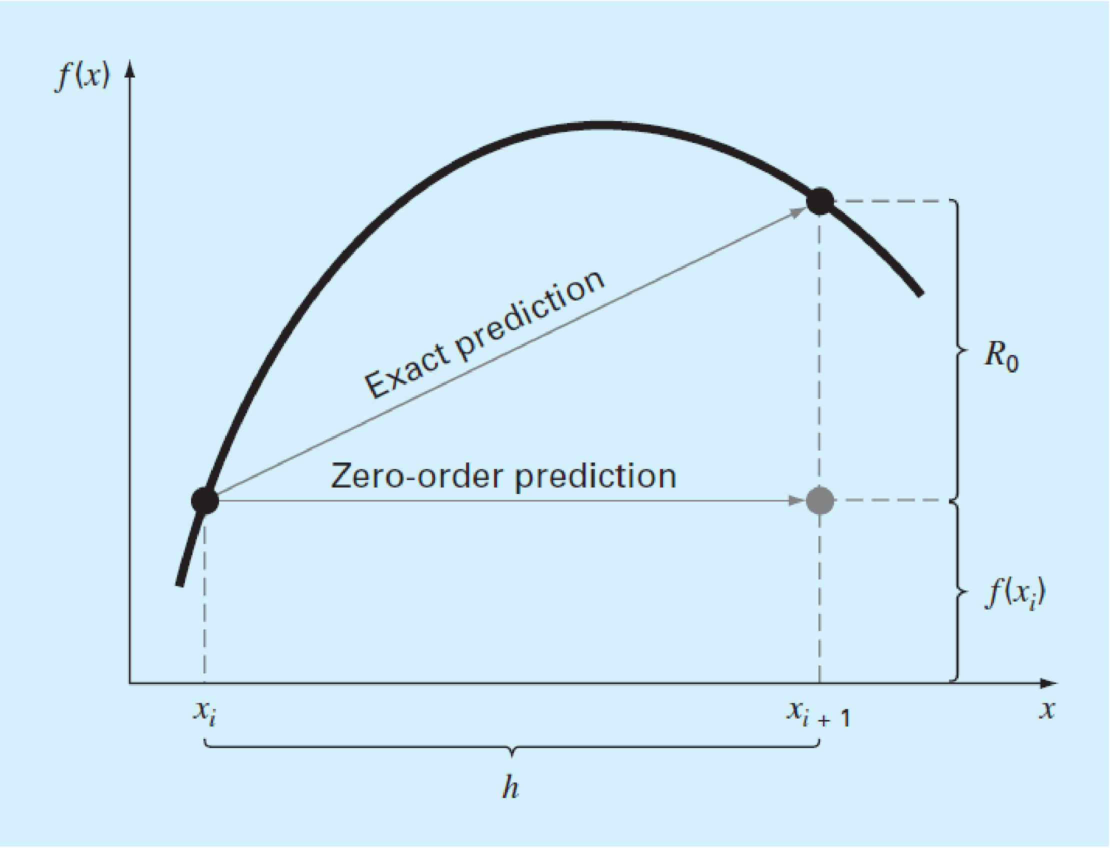
$$f(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} h^{n+1}$$

sendo

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!} h^{n+1} = R_n$$

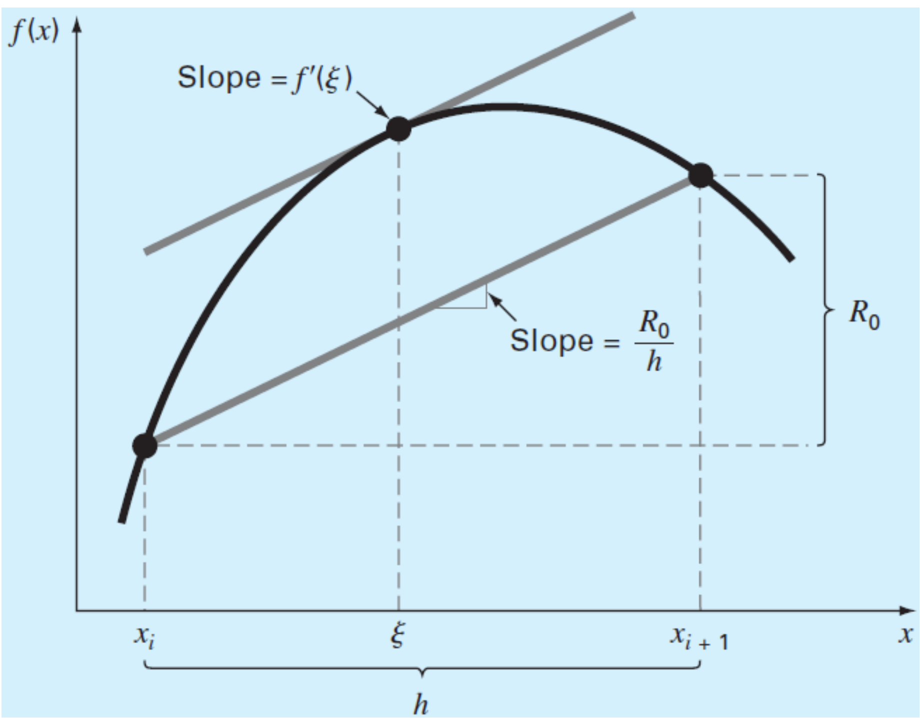
Séries de Taylor
Análise do resto

- Se $f\left(x_{i+1}\right) \approx f\left(x_i\right)$,
- O resto será $R_0 = f^{'}\left(x_i\right)h + \frac{f^{''}\left(x_i\right)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}\left(x_i\right)}{3!}h^3 + \ldots$



Séries de Taylor
Análise do resto

- Segundo o Teorema do Valor Médio, se uma função f(x) e sua derivada primeira forem contínuas em um intervalo entre x_i e x_{i+1}, então pelo menos um ponto em f(x), denotado por f ' (ξ), tem uma inclinação paralela a reta que une f(x_i) e f(x_{i+1}).



Assim, para a aprox. de ordem 0:

$$f'(\xi) = \frac{R_0}{h} \longrightarrow R_0 = f'(\xi)\, h$$

Estendendo, para ordens superiores

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1\,!} h^{n+1}$$

Séries de Taylor

- Se h for suficientemente pequeno, poucos termos serão suficientes para se obter uma estimativa adequada, conforme pode-se visualizar no exemplo a seguir.

- Exemplo: Com o auxílio de um script Scilab, use expansões em série de Taylor com n = 0 até 6 para aproximar f(x) = cos x em $x_{i+1} = \pi/3$ com base no valor de f(x) e suas derivadas em $x_i = \pi/4$

  Note que $h = \pi/3 - \pi/4$

  Calcule o erro relativo para cada expansão.

Séries de Taylor
Exemplo – script Scilab

```
x1 = %pi/3;  x0 = %pi/4;
fx = cos(x0);
i = 0; j = 0;
vreal = cos(x1);
while i<=6 do
    e = abs((vreal-fx)/vreal)*100
    printf("Ordem = %d, f(x_i+1)= %.10f, erro = %.2e\n",i,fx,e);
    i=i+1;
    j=j+1;
    if j==1 then
        der = -sin(x0);
    elseif j==2 then
        der = -cos(x0);
    elseif j==3 then
        der = sin(x0);
    elseif j==4 then
        der = cos(x0);
        j = 0;
    end
    fx = fx + der*((x1-x0)^i)/factorial(i);
end
```

Séries de Taylor
Exemplo – execução do Script

```
Ordem = 0, f(x_i+1)= 0.7071067812 , erro = 4.14e+01
Ordem = 1, f(x_i+1)= 0.5219866588 , erro = 4.40e+00
Ordem = 2, f(x_i+1)= 0.4977544914 , erro = 4.49e-01
Ordem = 3, f(x_i+1)= 0.4998691469 , erro = 2.62e-02
Ordem = 4, f(x_i+1)= 0.5000075508 , erro = 1.51e-03
Ordem = 5, f(x_i+1)= 0.5000003040 , erro = 6.08e-05
Ordem = 6, f(x_i+1)= 0.4999999878 , erro = 2.44e-06
```

Observação: erros percentuais.

Séries de Taylor
Estimativa do erro de truncamento

- Seja a expansão em série de Taylor de f(x):

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

Truncando-se a partir do termo de primeira ordem:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

Isolando-se f '(x):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{R_1}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Aproximação de primeira ordem

Erro de truncamento

Séries de Taylor
Estimativa do erro de truncamento

$$f^{'}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{R_1}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Como

$$R_1 = \frac{f^{('')}(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

O erro de truncamento pode ser expresso por

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f^{('')}(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)$$

ou

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i)$$

Séries de Taylor
Derivação numérica

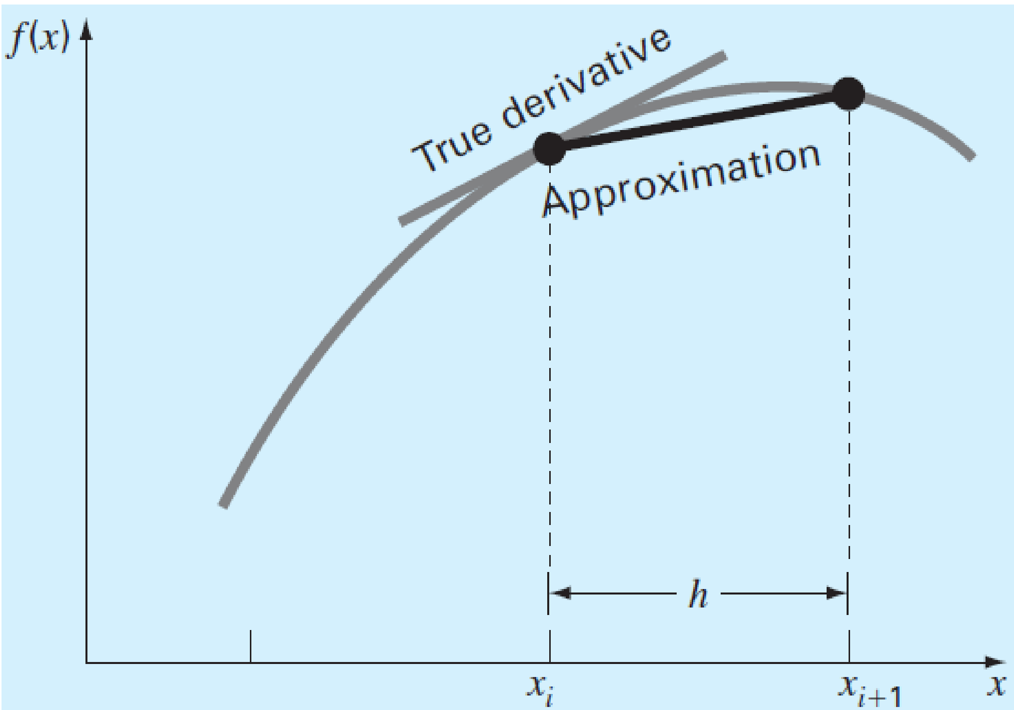
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{R_1}{(x_{i+1} - x_i)}$$

- A expressão acima é chamada de *diferença finita dividida* e é representada em geral por

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

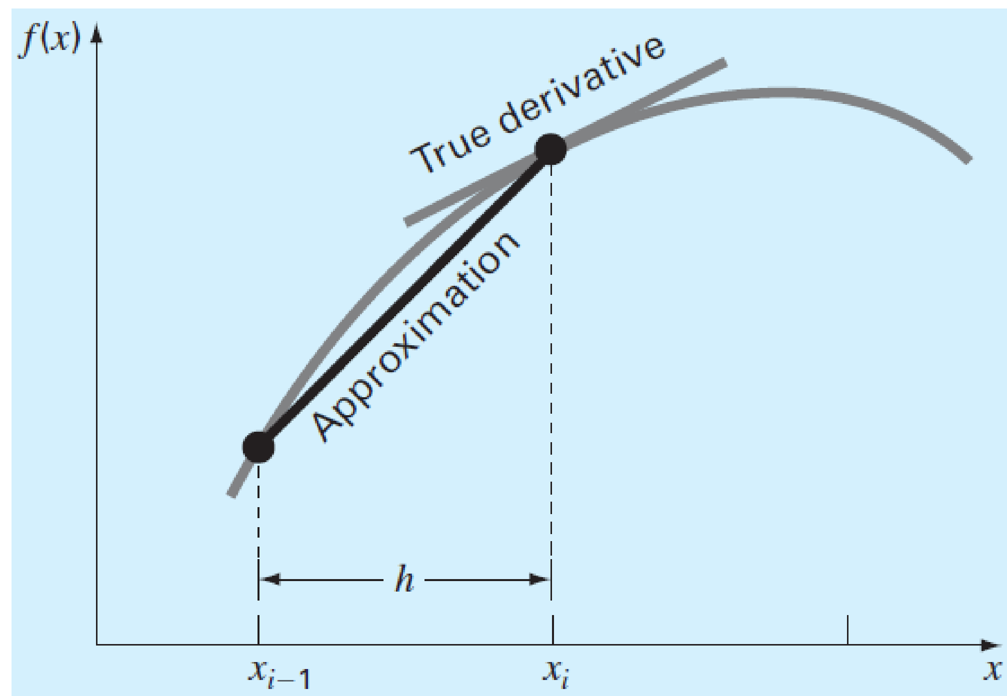
onde h é chamado de *tamanho do passo*

Séries de Taylor
Derivação numérica



Aproximação da derivada primeira por diferenças regressiva

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

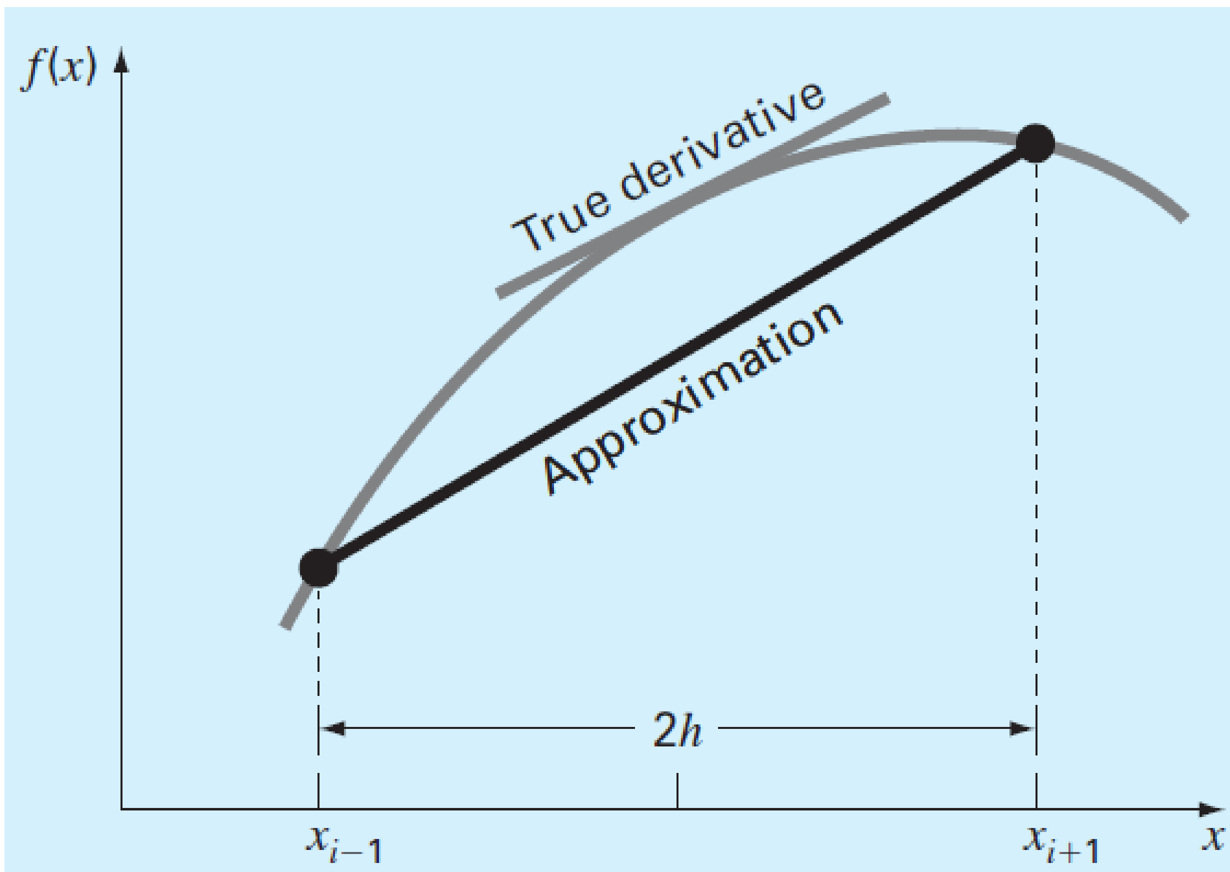


Aproximação da derivada primeira por diferenças progressiva

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximação da primeira
derivada por diferença centrada



Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximação da primeira derivada por diferença centrada

- Expansão da série de Taylor progressiva

$$f\left(x_i+h\right)=f\left(x_i\right)+f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}\left(x_i\right)}{3!}h^3+\ldots$$

- Expansão da série de Taylor regressiva

$$f\left(x_i-h\right)=f\left(x_i\right)-f'\left(x_i\right)h+\frac{f''\left(x_i\right)}{2!}h^2-\frac{f^{(3)}\left(x_i\right)}{3!}h^3+\ldots$$

Subtraindo a primeira equação da segunda

$$f\left(x_i+h\right)-f\left(x_i-h\right)=2f'\left(x_i\right)h\ \ +2\frac{f^{(3)}\left(x_i\right)}{3!}h^3+\ldots$$

Séries de Taylor
Derivação numérica

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x_i)h \;+2\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3+...$$

- Como $f(x_i+h)=f(x_{i+1})$ e $f(x_i-h)=f(x_{i-1})$, isolando-se

  f '(x) na expressão acima, obtém-se:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})\;-f(x_{i-1})}{2\mathrm{h}}\;-\frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2+...$$

ou

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})\;-f(x_{i-1})}{2\mathrm{h}}\;-O(h^2)$$

Nesse caso, o erro de truncamento é da ordem de h^2 em oposição as aproximações regressiva e progressiva que eram da ordem de h, sendo assim mais exata.

Séries de Taylor
Derivação numérica

- Exemplo

  Use a aproximação por diferenças progressiva e regressiva de *O(h)* e uma aproximação por diferença centrada de $O(h^2)$ para estimar a derivada primeira de

  $$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

  Avalie a derivada em x = 2 usando o passo de cálculo de 0,5 e 0,25. Compare as suas estimativas com o valor real da derivada. Interprete seus resultados com base no resto da expansão em séries de Taylor.

- Calcule manualmente e com o auxilio de um script Scilab

Séries de Taylor
Derivação numérica - exemplo

- Solução:

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$
$$f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$$
$$f'(2) = 75 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 7 = 283$$

- Passo de cálculo h = 0,5
  - Diferença progressiva

$$f(2{,}5) = 25 \cdot 2{,}5^3 - 6 \cdot 2{,}5^2 + 7 \cdot 2{,}5 - 88 = 282{,}625$$
$$f(2) = 25 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 88 = 102$$

$$f'(2) = \frac{282{,}625 - 102}{0{,}5} = 361{,}25$$

$$e_t = \left| \frac{283 - 361{,}25}{283} \right| x100 = 27{,}65\%$$

Séries de Taylor
Derivação numérica - exemplo

– Diferença regressiva

$$f(1{,}5) = 25 \cdot 1{,}5^3 - 6 \cdot 1{,}5^2 + 7 \cdot 2{,}5 - 88 = -6{,}625$$

$$f'(2) = \frac{102 + 6{,}625}{0{,}5} = 217{,}25$$

$$e_t = \left| \frac{283 - 217{,}25}{283} \right| x\, 100 = 23{,}23\,\%$$

– Diferença centrada

$$f'(2) = \frac{282{,}625 + 6{,}625}{2 \cdot 0{,}5} = 289{,}25$$

$$e_t = \left| \frac{283 - 289{,}25}{283} \right| x\, 100 = 2{,}21\,\%$$

Séries de Taylor
Derivação numérica exemplo

- Respostas para passo de cálculo h = 0,25
  - Diferença progressiva
    $$f'(2) = 320{,}56248 \qquad e_t = 13{,}27\%$$
  - Diferença regressiva
    $$f'(2) = 248{,}5625 \qquad e_t = 12{,}17\%$$
  - Diferença centrada
    $$f'(2) = 284{,}56249 \qquad e_t = 0{,}55\%$$
- Conclusão: Para ambos os tamanhos de passo, a aproximação por diferença centrada é mais exata que as outras. Além disso, conforme previsto pela análise por Séries de Taylor, dividir o passo de cálculo por 2, divide o erro por aproximadamente 2 para as diferenças progressiva e regressiva e por 4 na diferença centrada.

Séries de Taylor
Derivação numérica exemplo

- Script Scilab:

```
xi=input('Entre com o valor de xi: ');
h=input('Entre com o passo de cálculo: ');
disp('Entre com os coef da f. polinomial entre ');
vetor=input(' no formato [a0 a1 . . . an]:');
f = poly(vetor,'x','c');
disp(f, 'f(x)');
flinha = derivat(f);
disp(flinha,'f´(x)');
vreal = horner(flinha,xi);
printf( ”O valor real da derivada em x = %f é %f\ n“,xi,vreal);
a = horner(f,xi-h); b = horner(f,xi); c = horner(f,xi+h);
diferenca = 'progressiva'
dfdt = (c - b)/h;
```

Séries de Taylor
Derivação numérica exemplo

- Script Scilab:

```
for i=1:3
    printf("Diferença %s :\ n",diferenca);
    et = 100*abs((vreal - dfdt)/vreal) ;
    printf("O valor aprox. da derivada em x = %f é %f \n",xi,dfdt);
    printf("Com erro relativo percentual de %f %%\ n\ n",et);
    if i==1 then
        diferenca = 'regressiva';
        dfdt = (b - a)/h;
        elseif i==2 then
        diferenca = 'centrada';
        dfdt = (c - a)/(2*h);
    end
end
```

Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximações por diferenças finitas de derivadas superiores

- Expansão da série de Taylor progressiva para $f(x_{i+2})$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)2\mathrm{h} + \frac{f''(x_i)}{2!}(2\mathrm{h})^2 + \dots$$

- Lembrando que

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots$$

Subtraindo a primeira equação da segunda multiplicada por 2

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + \ f''(x_i)h^2 + \dots$$

Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximações por diferenças finitas de derivadas superiores

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + \; f''(x_i)h^2 + \ldots$$

- Truncando-se a partir do termo de segunda ordem e isolando-se *f ''(x), obtém-se*

$$f''(x_i) \;=\; \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \;+\; O(h)$$

relação chamada de *segunda diferença dividida finita progressiva*

Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximações por diferenças finitas de derivadas superiores

$$f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)=-f\left(x_i\right)+\ f''\left(x_i\right)h^2+\ldots$$

- Truncando-se a partir do termo de segunda ordem e isolando-se *f ''(x), obtém-se*

$$f''\left(x_i\right)\ =\ \frac{f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)}{h^2}\quad+\quad O\left(h\right)$$

relação chamada de *segunda diferença dividida finita progressiva*

Séries de Taylor
Derivação numérica

Aproximações por diferenças finitas de derivadas superiores

- *Segunda diferença dividida finita regressiva*

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

- *Segunda diferença dividida finita centrada*

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

que pode ser expressa pela diferença de duas diferenças divididas da 1ª derivada

$$f''(x_i) \approx \frac{\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}{h}$$

Séries de Taylor
Derivação numérica

- Exemplo

  Use uma aproximação por diferença centrada de $O(h^2)$ para estimar a derivada segunda da função

  $$f(x) = -0,1x^4 - 0,15x^3 - 0,5x^2 - 0,25x + 1,2$$

- Faça o cálculo em $x = 0,5$, utilizando os passos de cálculo $h = 0,5$ e $0,25$ e compare as estimativas com o valor verdadeiro da derivada. Interprete os resultados com base no termo do resto da expansão em série de Taylor.

Séries de Taylor
Derivação numérica - exemplo

- Solução:

$$f(x) = -0{,}1\,x^4 - 0{,}15\,x^3 - 0{,}5\,x^2 - 0{,}25\,x + 1{,}2$$
$$f'(x) = -0{,}4\,x^3 - 0{,}45\,x^2 - 1\,x - 0{,}25$$
$$f''(x) = -1{,}2\,x^2 - 0{,}9\,x - 1$$
$$f''(0{,}5) = -1{,}2 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}9 \cdot 0{,}5 - 1 = -1{,}75$$

- Passo de cálculo h = 0,5

$$f(1) = -0{,}1 \cdot 1^4 - 0{,}15 \cdot 1^3 - 0{,}5 \cdot 1^2 - 0{,}25 \cdot 1 + 1{,}2 = 0{,}2$$
$$f(0{,}5) = -0{,}1 \cdot 0{,}5^4 - 0{,}15 \cdot 0{,}5^3 - 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 - 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 1{,}2 = 0{,}925$$
$$f(0) = 1{,}2$$
$$f''(0{,}5) = \frac{0{,}1 - 2 \cdot 0{,}925 + 1{,}2}{0{,}5^2} = -1{,}8$$
$$e_t = \left| \frac{-1{,}75 + 1{,}8}{-1{,}75} \right| x\,100 = 2{,}86\,\%$$

Séries de Taylor
Derivação numérica exemplo

- Respostas para passo de cálculo h = 0,25

$$f''(2) = -1{,}7625 \qquad e_t = 0{,}714\%$$

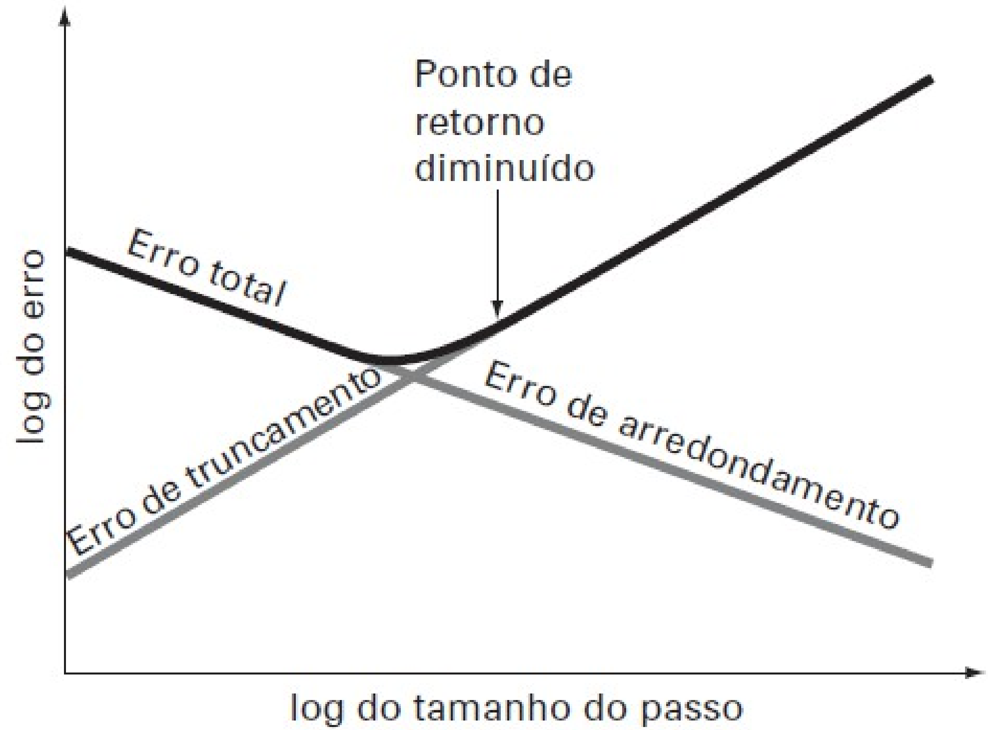
- Conclusão: Conforme previsto pela análise por Séries de Taylor, dividir o passo de cálculo por 2, divide o erro por aproximadamente 4 na diferença centrada.

Erro numérico total
(Erro total)

- Erro total = erro truncamento + erros arredondamento
- Erro de arredondamento:
  - Minimiza-se com o aumento do número de algarismos significativos;
  - Podem aumentar por:
    - Cancelamentos na subtração;
    - Número de cálculos da análise
- Erro de truncamento:
  - Minimiza-se com a diminuição do passo, o que leva a aumentar o erro de arredondamento

Erro numérico total
(Erro total)

- O gráfico abaixo mostra que existe um passo de cálculo apropriado, chamado de ponto de retorno diminuído, onde o erro de arredondamento começa a neutralizar as vantagens de uma redução do passo de cálculo.



Erro numérico total
(Erro total)

- Uma aproximação por diferença centrada para a derivada primeira pode ser escrita como:

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\mathrm{h}}}_{\text{Aproximação de primeira ordem}} \underbrace{- \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} h^2}_{\text{Erro de truncamento}}$$

Devido ao uso de computadores digitais, os valores da função incluem o erro de arredondamento, como em:

$$f(x_{i-1}) = \tilde{f}(x_{i-1}) + e_{i-1}$$
$$f(x_{i+1}) = \tilde{f}(x_{i+1}) + e_{i+1}$$

onde os $\tilde{f}\,'s$ são os valores arredondados e os *e's* são os erros de arredondamento associados

Erro numérico total
(Erro total)

- Acrescentando os erros de arredondamento a equação da aproximação, resulta

$$f'(x_i) = \underbrace{\frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2\mathrm{h}}}_{\text{Aproximação de primeira ordem}} + \underbrace{\frac{e_{i+1} - e_{i-1}}{2\mathrm{h}}}_{\text{Erro de arredondamento}} - \underbrace{\frac{f^{(3)}(\xi)}{6} h^2}_{\text{Erro de truncamento}}$$

- Assumindo que:
  - O valor absoluto de cada componente do erro de arredondamento tenha um limite superior ε, o valor máximo de $e_{i+1} - e_{i-1}$ será 2ε;
  - O valor da derivada terceira tenha um valor absoluto máximo de M.

Erro numérico total
(Erro total)

- Um limite superior do valor absoluto do erro total pode ser representado por

$$ERRO\quad TOTAL = \left| f'(x_i) - \frac{\tilde{f}(x_{i+1}) - \tilde{f}(x_{i-1})}{2\mathrm{h}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M}{6} h^2$$

- Derivando – se a equação acima e igualando a zero (ponto de mínimo), obtém um tamanho de passo ótimo (prove) :

$$h_{otm} = \sqrt[3]{\frac{3\,\varepsilon}{M}}$$

Erro numérico total
Exemplo

- Utilize uma aproximação por diferença centrada de $O(h^2)$ para estimar a derivada primeira da função a seguir em x= 0,5.

$$f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

- Utilizando o Scilab, faça o cálculo iniciando com h = 2 e divida progressivamente o tamanho do passo por um fator 8 para demonstrar que o erro de arredondamento torna-se dominante à medida que o tamanho do passo é reduzido.
- Com o auxílio de um gráfico *erro total x h*, relacione os resultados obtidos com a equação de h_{otm}.

Erro numérico total
Exemplo - script

```
clear;  j=1;
xi = input('Entre com o valor de xi: ');
h = input('Entre com o passo de cálculo inicial: ');
disp('Entre com os coef da f. polinomial entre ')
vetor = input(' no formato [a0 a1 ... an] : ');
f = poly(vetor,'x','c');
disp(f, 'f(x)');
flinha = derivat(f);
disp(flinha,‘f´(x)‘);
vreal = horner(flinha,xi);
printf(”O valor real da derivada em x = %f é %f\ n“,xi,vreal);
printf(”tamanho do passo | diferenca finita |   erro total\ n “);
while h >= 1.0D-10
    H(j)=h;
    dfdt(j) = (horner(f,xi+h)-horner(f,xi-h))/(2*h);
    e(j) = 100*abs((vreal - dfdt(j))/vreal);
    printf(”%16.10f | %16.10f | %16.10f\ n “,h,dfdt(j),e(j));
    h = h/8;
    j=j+1;
end
```

Erro numérico total
Exemplo - script

```
xlabel('Tamanho do passo');
ylabel('Erro total');
plot2d(H,e,style=[color('blue4')],logflag='ll');
xgrid;
f2linha = derivat(flinha);
f3linha = derivat(f2linha);
M = abs(horner(f3linha,xi));
disp(M,‘M‘);
hotm = (3*%eps/M)^(1/3.);
disp(hotm,'hotm');
```

Erro numérico total
Exemplo – execução do script

```
Entre com o valor de xi:
0.5

Entre com o passo de cálculo inicial:
2

Entre com os coef da f. polinomial entre
no formato [a0 a1 ... an] :
[1.2 -0.25 -0.5 -0.15 -0.1]

f(x)
                  2       3      4
   1.2 -0.25x -0.5x  -0.15x  -0.1x

f´(x)
                2      3
  -0.25 -x -0.45x  -0.4x

O valor real da derivada em x = 0.500000 é -0.912500
```

Erro numérico total
Exemplo – execução do script

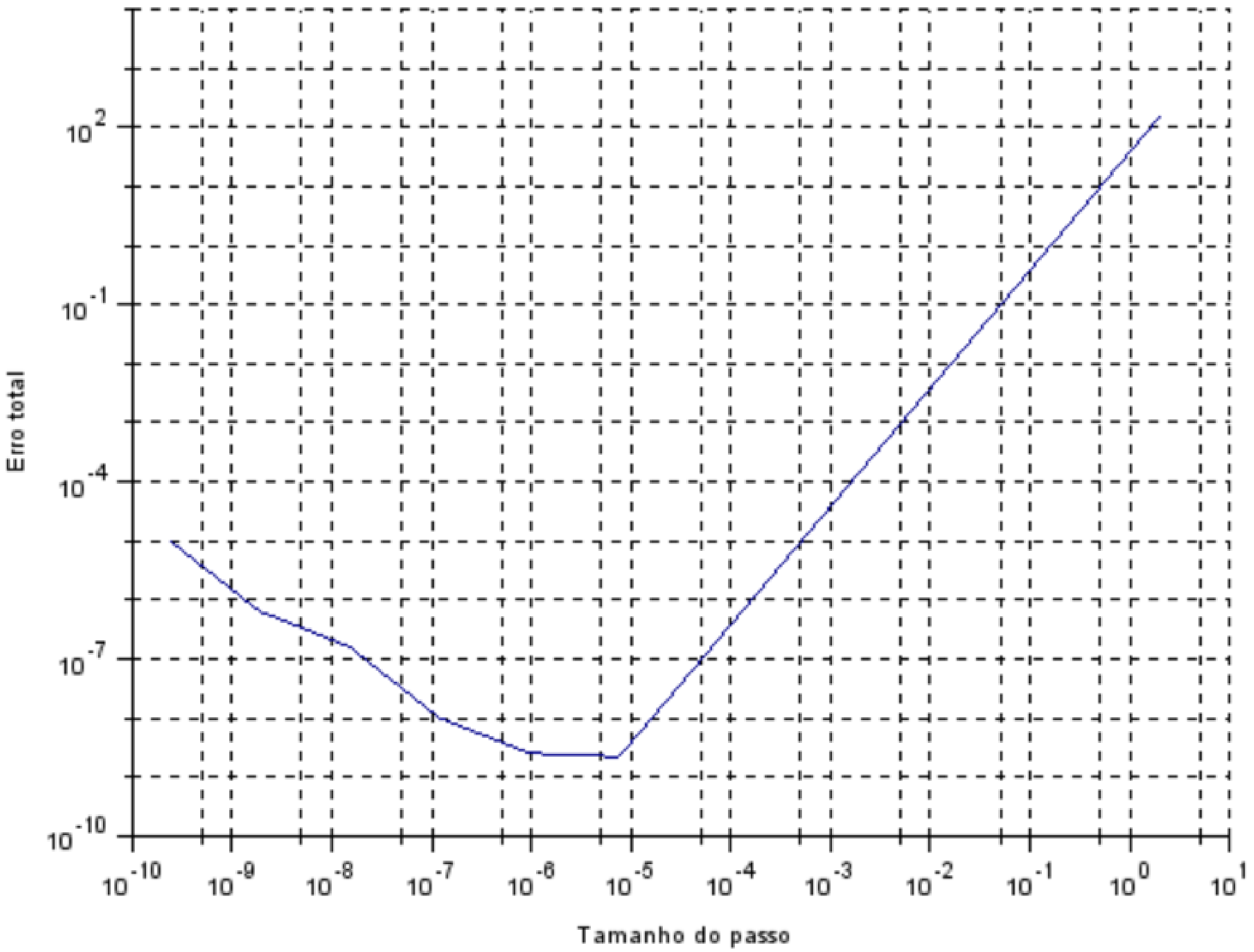
```
tamanho do passo | diferenca finita |   erro total
     2.0000000000 |    -2.3125000000 |   153.4246575342
     0.2500000000 |    -0.9343750000 |     2.3972602740
     0.0312500000 |    -0.9128417969 |     0.0374571918
     0.0039062500 |    -0.9125053406 |     0.0005852686
     0.0004882813 |    -0.9125000834 |     0.0000091448
     0.0000610352 |    -0.9125000013 |     0.0000001428
     0.0000076294 |    -0.9125000000 |     0.0000000022
     0.0000009537 |    -0.9125000000 |     0.0000000026
     0.0000001192 |    -0.9125000001 |     0.0000000102
     0.0000000149 |    -0.9125000015 |     0.0000001633
     0.0000000019 |    -0.9124999940 |     0.0000006532
     0.0000000002 |    -0.9124999046 |     0.0000104512

 M
   2.1

 hotm
   0.0000068
```

Erro numérico total
Exemplo – execução do script

- Gráfico



Outras fontes de erro
(externas a computação)

- Enganos – atribuídos ao ser humano, podem ocorrer em qualquer estágio do processo de modelagem, afetando todas as outras componentes de erro.
- Erros de formulação ou inerentes ao modelo – atribuídos a modelos matemáticos incompletos, levando a resultados inapropriados
- Erros inerentes aos dados – As incertezas (ou erros) cometidas nas leituras das grandezas diretas, relacionadas com a precisão dos instrumentos de medida e com o próprio método experimental, podem ter grande repercussão no resultado final.

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists. McGrawHill, 2012.