INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo III

Resolução de sistemas de equações lineares por métodos diretos e iterativos

Parte II – Métodos diretos

B. Fatoração ou Decomposição LU (Lower Up)

Fatoração LU

- Embora seja um método seguro para resolver sistemas de equações lineares da forma [A] {x} = {b}, a *Eliminação de Gauss* se torna ineficiente ao resolver sistemas com a mesma matriz [A], mas com diferentes vetores {b}, pois manipula [A] e {b} juntos.
- A *Fatoração LU* separa a eliminação da matriz [A], das manipulações do vetor {b}. Assim, após [A] ser decomposta, ela pode ser utilizada na solução do sistema para múltiplos vetores {b}.

Fatoração LU

- Deseja-se resolver o sistema de equações *3 x 3*:

$$[A]\{x\}-\{b\}=0 \quad (i)$$

- Com o objetivo de resolver o sistema, a matriz A será fatorada como o produto de uma matriz triangular inferior L e uma matriz U triangular superior, levando o sistema a ser reescrito na seguinte sequência:

$$[L][U]\{x\}-\{b\}=0 \quad (ii)$$

$$[L]\ \{[U]\{x\}\}\ -\{b\}=0 \quad (iii)$$

$$[L]\{d\}=\{b\} \quad (iv)$$

$$e \quad [U]\{x\}=\{d\} \quad (v)$$

Fatoração LU

- Deseja-se resolver o sistema de equações *3 x 3*:

$$[A]\{x\}-\{b\}=0 \quad (i)$$

- Com o objetivo de resolver o sistema, a matriz A será fatorada como o produto de uma matriz triangular inferior L e uma matriz U triangular superior, levando o sistema a ser reescrito na seguinte sequência:

$$[L][U]\{x\}-\{b\}=0 \quad (ii)$$

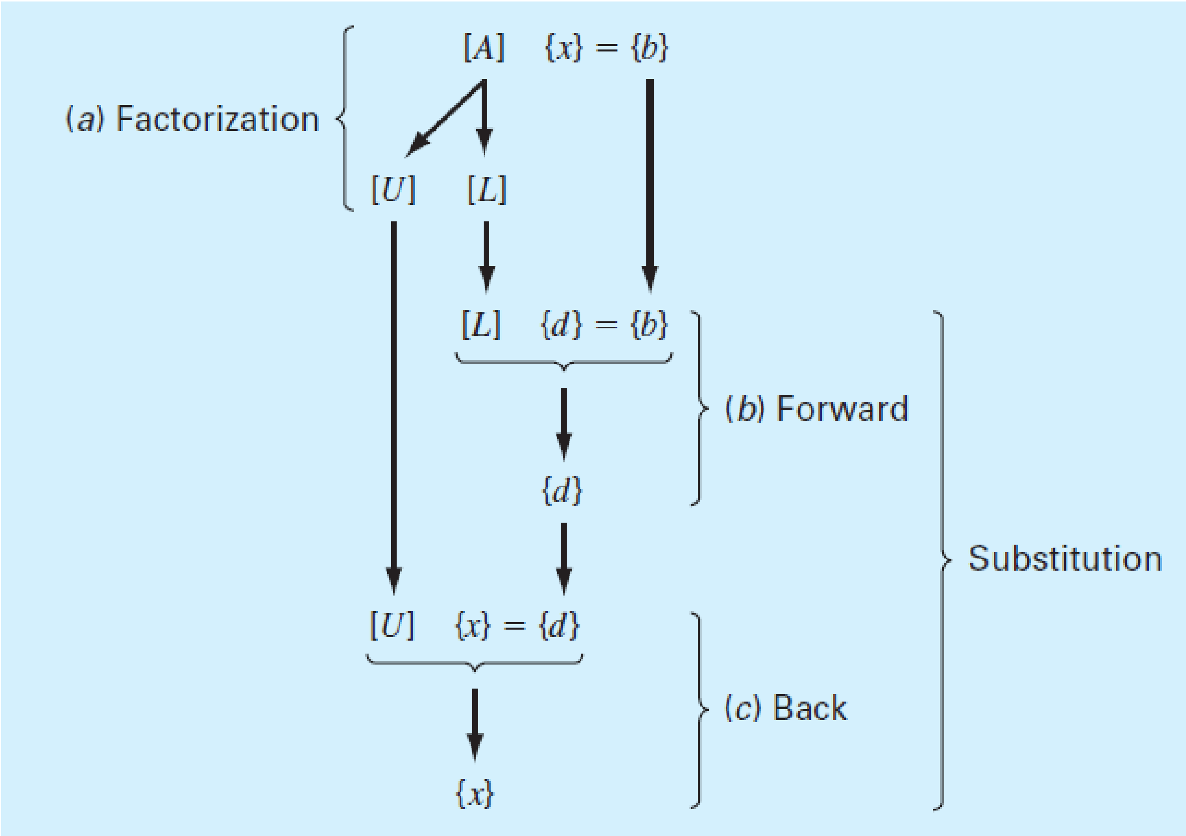
$$[L]\ \{[U]\{x\}\}\ -\{b\}=0 \quad (iii)$$

$$[L]\{d\}=\{b\} \quad (iv)$$

$$e \quad [U]\{x\}=\{d\} \quad (v)$$

Fatoração LU

- A figura abaixo apresenta a estratégia de 2 passos para obter a solução de *(i)* com o auxílio da Fatoração LU:



Fatoração LU

- A matriz U é obtida ao final do escalonamento da matriz A:

$$[U]=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (vi)$$

- A matriz L é obtida a partir da matriz identidade ao final do escalonamento da matriz A:

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (vii)$$

Fatoração LU

- Substituindo (vii) em (iv) e (vi) em (v), obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (viii)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (ix)$$

Fatoração LU

- Descrevendo a estratégia de 2 passos:

1. **Passo da Fatoração LU**:

    (a) A matriz A é fatorada ou decomposta nas matrizes triangulares L e U;

2. **Passo da substituição**, onde L e U são usadas para obter a solução de x:

    (b) A equação *(viii)* é usada para se obter o vetor d por substituição progressiva;

    (c) O resultado é substituído em *(ix)*, a qual é resolvida por substituição regressiva para x.

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU
Nota histórica

- O matemático britânico Alan Turing (1948) formulou a eliminação Gaussiana como uma *fatoração LU* de uma matriz e introduziu o *número de condicionamento de uma matriz*, ambos deles itens fundamentais da análise numérica moderna.

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- É fácil perceber que a matriz *U* é um produto direto do passo de eliminação progressiva da eliminação de Gauss (EG) sobre a matriz *A*:

$$[U]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \quad (viii)$$

- Embora não seja aparente, a matriz *L* também é obtida nesse passo, conforme veremos para um sistema *3 x 3*.

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- Seja o sistema 3 x 3: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$

- O primeiro passo da EG é multiplicar a linha 1 pelo fator

$$l_{21} = a_{21} / a_{11}$$

e subtrair o resultado da segunda linha para eliminar a_{21} .

- Similarmente, a linha 1 é multiplicada por

$$l_{31} = a_{31} / a_{11}$$

e subtrair o resultado da terceira linha para eliminar a_{31} .

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- O último passo da EG é multiplicar a linha 2 modificada pelo fator

$$l_{32} = a'_{32} / a'_{22}$$

e subtrair o resultado da terceira linha para eliminar a_{32}.

- Os elementos l_{21} , l_{31} e l_{32} podem ser armazenados na matriz A no lugar dos elementos a_{21} ,a_{31} e a_{32} os quais a eliminação busca anular:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ l_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ l_{22} & l_{32} & a''_{33} \end{bmatrix} \quad (ix)$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- A matriz representada em *(ix)* é uma forma eficiente de armazenar a fatoração LU da matriz A:

$$[A]=[L][U]$$

onde

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[U]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU
Exercício

- Dada as equações:

$$\begin{array}{rrrcr} 10x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 27 \\ -3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & = & -61,5 \\ x_1 & +x_2 & +6x_3 & = & -21,5 \end{array}$$

(a) Realize a Fatoração LU baseada na eliminação de Gauss.

(b) Confira o resultado utilizando a função *lu* do *Scilab*.

```
[L, U] = lu(A);
```

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU

- Após a matriz A ser decomposta, a solução de um sistema de equações lineares pode ser encontrado, em 2 passos:

  1. Uma substituição progressiva é executada resolvendo a equação *(vii)* para {d}: $$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \quad para \quad i = 1,2,\ldots,n$$

  2. Uma substituição regressiva idêntica a fase de substituição regressiva da EG é executada para resolver (ii) para {x}:

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad para \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU
Exercício

- Complete o exercício anterior gerando a solução do sistema de equações realizando as substituições progressiva e regressiva.

Fatoração LU com pivotamento

- Utiliza-se uma matriz de permutação [P] para manter o controle das linhas pivotadas.
- Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada binária que tem o efeito de gerar uma permutação dos elementos de um vetor ou entre linhas ou colunas de uma matriz. É formada apenas de zeros e uns, sendo que apenas um elemento por linha e por coluna apresenta valor igual a um.
- A Matriz identidade é uma matriz de permutação.

Fatoração LU com pivotamento

1. Eliminação

A matriz [U] é gerada por eliminação com pivotamento, enquanto armazenam-se os fatores de multiplicação em [L].

A matriz [P] e os fatores de multiplicação devem acompanhar o pivotamento, de modo que

$$[P]\,[A] = [L]\,[U]$$

Fatoração LU com pivotamento

2. Substituição Progressiva

$$[L]\ \{d\} = [P]\ \{b\}$$

3. Substituição regressiva

   A solução é obtida da mesma forma que no passo equivalente da eliminação de Gauss:

$$[U]\ \{x\} = \{d\}$$

Fatoração LU com pivotamento

2. Substituição Progressiva

$$[L]\ \{d\} = [P]\ \{b\}$$

3. Substituição regressiva

   A solução é obtida da mesma forma que no passo equivalente da eliminação de Gauss:

$$[U]\ \{x\} = \{d\}$$

Eliminação de Gauss como uma Fatoração LU
Exercício

- Dadas as equações

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad -6x_2 \quad -x_3 \quad &= \quad -38 \\ -3x_1 \quad -x_2 \quad +6x_3 \quad &= \quad -34 \\ -8\mathrm{x}_1 \quad +x_2 \quad -2x_3 \quad &= \quad -40 \end{aligned}$$

- Resolva o sistema manualmente, utilizando a Fatoração LU com pivotamento.
- Para conferir, utilize a função *lu* e o operador ' \ ' para obter a solução.
- Faça uma função *Scilab* que obtenha a solução do sistema utilizando a eliminação de Gauss por *fatoração LU* com pivotamento (Geração das matrizes, substituições progressiva e regressiva).

Decomposição de Cholesky

- A decomposição LU pode ser aplicada a qualquer matriz não singular.
- Fatorações alternativas podem ser usadas em matrizes especiais.
- A fatoração de *Cholesky* pode ser usada para matrizes simétricas positivas definidas.
- Se A é uma matriz simétrica definida positiva, sempre existe uma matriz triangular superior de mesma dimensão tal que $A = [U]^T[U]$ *(x)*

Decomposição de Cholesky

- Matrizes simétricas:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

- Matriz positiva definida:

$$x^T A x > 0 \text{ qualquer que seja } x$$

- Critérios de Sylvester: Uma matriz simétrica A é positiva definida se e somente se todos os menores principais tem determinante positivo.

- Menores Principais: determinantes de todas as submatrizes de A cujas diagonais coincidem ou fazem parte da diagonal de A.

Decomposição de Cholesky

- Por exemplo, para uma matriz 3 x 3 os menores principais são:

$$a_{11} \quad , \quad a_{22} \quad , \quad a_{33}$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

Decomposição de Cholesky

Menores Principais Líderes: determinantes das submatrizes de A obtidas ao se eliminarem as últimas k colunas e k linhas, com k = *n - 1*, *n* – 2, …, 0:

$$a_{11} \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

- Se todos os menores principais líderes são positivos → todos os menores principais são positivos

Decomposição de Cholesky

Menores Principais Líderes: determinantes das submatrizes de A obtidas ao se eliminarem as últimas k colunas e k linhas, com k = n - 1, n – 2, …, 0:

$$a_{11} \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

- Se todos os menores principais líderes são positivos → todos os menores principais são positivos

Decomposição de Cholesky

- Se todos os elementos da diagonal principal de uma matriz simétrica *A* tiverem o mesmo sinal **e**
- se em cada uma de suas linhas o valor absoluto do elemento da diagonal principal é maior que a soma dos valores absolutos de todos os demais elementos da linha

A é positiva definida.

- Sistemas de equações lineares resultantes das aplicações das leis de *Kirchhoff* apresentam essas características, podendo assim serem resolvidos com o auxílio da decomposição de Cholesky

Decomposição de Cholesky

- Os termos da equação *(x)* podem ser multiplicados e igualados, resultando nas seguintes equações de recorrência:

$$u_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}}{u_{ii}} \quad para \quad j=i+1,\dots,1$$

Decomposição de Cholesky
Vantagens

- Corte nos requisitos de armazenamento já que somente a matriz U é necessária;
- Estável mesmo sem pivotamento;
- Mais rápida que a fatoração LU por um fator de 2.

Decomposição de Cholesky
Exercícios

1. Dada as equações:

$$
\begin{array}{llll}
6x_1 & +15x_2 & +55x_3 & = 76 \\
15x_1 & +55x_2 & +225x_3 & = 295 \\
55x_1 & +225x_2 & +979x_3 & = 1259
\end{array}
$$

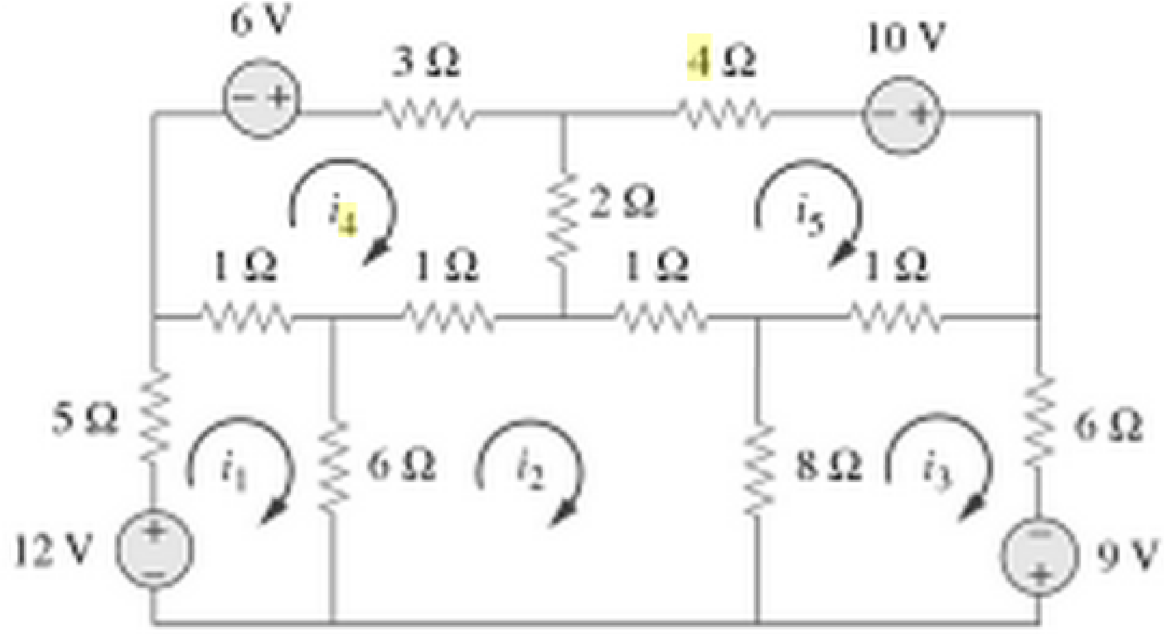
(a) Caso seja possível, obtenha a decomposição de Cholesky para a Matriz do lado esquerdo.

(b) Obtenha uma solução para o sistema a partir da decomposição

(c) Implemente uma função Scilab para obter (a) e (b).

Decomposição de Cholesky
Exercício

2. Encontre as correntes de malhas do circuito da figura abaixo, utilizando a decomposição de Cholesky



Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.
- TURING, Alan. Rounding-off errors in matrix processes. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, vol. I, pp. 287 – 308,set. de 1948.