INSTITUTO FEDERAL
SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo III

Resolução de sistemas de equações lineares por métodos diretos e iterativos

Parte III – Métodos iterativos

A. GAUSS-SEIDEL

Método de Gauss-Seidel

- Por simplicidade, considere o conjunto de equações *3 x 3* :

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

- Se os elementos da diagonal principal forem todos não nulos, é possível isolar x_1 na 1ª equação, x_2 na 2ª e x_3 na 3ª, resultando:

$$x_1^j=\frac{b_1-a_{12}x_2^{j-1}-a_{13}x_3^{j-1}}{a_{11}} \quad (i)$$
$$x_2^j=\frac{b_2-a_{21}x_1^{j}-a_{23}x_3^{j-1}}{a_{22}} \quad (ii)$$
$$x_3^j=\frac{b_3-a_{31}x_1^{j}+a_{32}x_2^{j}}{a_{33}} \quad (iii)$$

onde *j* e *j-1* representam a iteração atual e a anterior.

Método de Gauss-Seidel

- O processo iterativo inicia supondo aproximações iniciais para os x's;
- Esses zeros são substituídos na equação (i), resultando um novo valor para x_1;
- Esse novo valor de x_1 é usado junto com as aproximações anteriores em *(ii)* e *(iii)* para calcular os novos valores de x_2 e x_3 .
- Então volta-se para a primeira equação e o processo é repetido até que a solução convirja segundo o critério de parada para todo *i*:

$$\varepsilon_{a,i} = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| x\,100 \;\leq\; \varepsilon_s \quad (iv)$$

Método de Gauss-Seidel

- Calcule as duas primeiras iterações do método de Gauss-Seidel aplicado ao sistemas de equações abaixo, sabendo que a solução exata é $x_1 = 3$, $x_2 = -2{,}5$ e $x_3 = 7$.
- Ao final, calcule as estimativas de erro.

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 &= 7{,}85 \\
0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 &= -19{,}3 \\
0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 &= 71{,}4
\end{aligned}
$$

Método de Gauss-Seidel
Iteração de Jacob

- À medida que cada novo valor é calculado, ele é imediatamente usado na próxima equação para se determinar outro valor de x. Dessa forma se a solução estiver convergindo, a melhor estimativa disponível será empregada.

- Uma abordagem alternativa, chamada iteração de Jacob, não utiliza imediatamente os valores gerados, eles são guardados para a próxima iteração.

(a) Método de Gauss-Seidel *versus* (b) Iteração de Jacob

First iteration

(a)	(b)
$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$	$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$
$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$	$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$
$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$	$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

Second iteration

(a)	(b)
$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$	$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$
$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$	$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$
$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$	$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

(*a*) (*b*)

Método de Gauss-Seidel
Convergência

- Pode-se mostrar que se a condição abaixo for satisfeita, o Método de Gauss-Seidel irá convergir:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

- Isto é, se o valor absoluto do coeficiente da diagonal em cada uma das equações deve ser maior que a soma do valor absoluto dos outros coeficientes da equação.
- Muitos problemas práticos da engenharia são sistemas que obedecem tal condição, ou seja, **são sistemas de diagonal dominante.**
- Porém, a dominância da diagonal não é uma condição necessária para o Método de Gauss-Seidel convergir.

Método de Gauss-Seidel
Convergência

Exercício

- Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= -4 \\ 7x_1 - 1x_2 &= 6 \end{aligned}$$

usando a aproximação inicial $(x_1, x_2) = (0,0)$.

Realize 3 iterações, sabendo que a solução é $(x_1, x_2) = (1,1)$.

- Realize as mesmas três iterações trocando as linhas do sistema.
- Explique os resultados.

Método de Gauss-Seidel
Forma matricial

- As equações (i), (ii) e (iii) podem ser expressas na forma:

$$x_1^{novo} = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{velho} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{velho}$$

$$x_2^{novo} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{novo} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{velho}$$

$$x_3^{novo} = \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{novo} - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{novo}$$

que pode ser expressa de forma concisa como

$$\{x\} = \{d\} - [C]\{x\} \qquad (v)$$

Método de Gauss-Seidel Forma matricial

onde:

$$d = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & a_{23}/a_{22} \\ a_{31}/a_{33} & a_{32}/a_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel Relaxamento

- Criado para melhorar a convergência;
- Nele, cada valor de x calculado é modificado por uma média ponderada dos resultados da iteração atual e anterior:

$$x_i^{novo} = \lambda\, x_i^{novo} + (1-\lambda)\, x_i^{velho}$$

onde λ é um fator de ponderação, escolhido entre 0 e 2:

  - Se $0 < \lambda < 1$: sub-relaxamento, em geral usado para que sistemas não convergentes convirjam, ou para apressar a convergência, amortecendo as oscilações;
  - Se $1 < \lambda < 2$: sobre relaxamento, usado para acelerar a convergência de um sistema que converge a uma taxa muito lenta;

Método de Gauss-Seidel Relaxamento

- Geralmente desnecessário para uma única solução de um conjunto de equações;
- Útil quando o mesmo sistema precisa ser resolvido repetidamente.

Método de Gauss-Seidel Relaxamento

Exercício

- Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned}$$

usando a aproximação inicial $(x_1,x_2) = (0,0)$.

Realize 3 iterações, sabendo que a solução é $(x_1,x_2) = (-18,-14)$.

- Realize as mesmas três iterações usando um fator de ponderação de 1,3
- Explique os resultados.

Método de Gauss-Seidel Relaxamento

Exercício

- Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema

$$\begin{aligned} -0{,}5\,x_1 \; - x_2 &= -4 \\ 2\,x_1 \; -3\,x_2 &= 6 \end{aligned}$$

usando a aproximação inicial $(x_1,x_2) = (0,0)$.

Realize 3 iterações, sabendo que a solução é $(x_1,x_2) = (5{,}1428571;\ 1{,}4285714)$.

- Realize as mesmas três iterações usando um fator de ponderação de 0,8
- Explique os resultados.

Método de Gauss-Seidel
Exercícios

1. Desenvolva uma função Scilab para o Método Gauss-Seidel com relaxamento:

```
function [x, iter] = gauss_seidel(A,b,lam,es,maxi)
```

- Quando o usuário não entrar com:
  - o valor de λ, deve-se definir λ = 1 por default.
  - o valor de ε_s, deve-se definir ε_s = 0,00001% por default;
  - o valor de número máximo de iterações, deve-se definir maxi = 50 por padrão (*default*);

Método de Gauss-Seidel
Exercício

2. (a) Utilize a sua função Scilab:

```
function [x, iter] = gauss_seidel(A,b,lam,es,maxi)
```

para resolver o sistema com $\varepsilon_s = 0{,}00001\%$

$$\begin{aligned} 0{,}8\,x_1 - 0{,}4\,x_2 \quad\quad\quad &= 41 \\ -0{,}4\,x_1 + 0{,}8\,x_2 - 0{,}4\,x_3 &= 25 \\ -0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3 &= 105 \end{aligned}$$

(b) Repita (a), mas use sobre relaxamento com λ = 1,2. Compare o número de iterações necessárias para cada solução.

Método de Gauss-Seidel Exercício

3. (a) Utilize a sua função Scilab:

```
function [x, iter] = gauss_seidel(A,b,lam,es,maxi)
```

para resolver o sistema com ε_s = 0,00001%

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= -20 \\ 4x_1 - 4x_2 + 10x_3 &= 70 \end{aligned}$$

(b) Repita (a), mas use sub relaxamento com λ =0,93. Compare o número de iterações necessárias para cada solução.

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.