INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo IV

Ajuste de curvas: método dos mínimos quadrados, método polinomial e linearização

Parte II – Regressão Polinomial

Regressão Polinomial

- Quando uma reta não representa os dados de forma satisfatória, uma alternativa as transformações é ajustar polinômios aos dados. Seja o polinômio de seg. grau:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e \qquad (vi)$$

- Estendendo o procedimento dos mínimos quadrados para ajustar ao polinômio de segundo grau, a soma dos quadrados dos resíduos, obtém-se

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i^2 - a_2 x_i^2 \right)^2 \qquad (vii)$$

Regressão Polinomial

- Derivando-se (vi) com relação a cada um dos coeficientes desconhecidos:

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) x_i$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) x_i^2$$

Regressão Polinomial

- Igualando-se as derivadas parciais a zero e reorganizando, obtém-se um sistema de 3 equações lineares:

$$n\,a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,y_i$$

- Essa análise pode ser facilmente estendida para um polinômio de grau *m*, resultando em um sistema de *m+1* equações lineares simultâneas.

Regressão Polinomial

- Vimos que a soma dos quadrados dos resíduos para o polinômio de segundo grau foi definida por:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 \right)^2$$

- Equação similar a soma dos quadrados dos resíduos entre os pontos dados e a média

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y} \right)^2$$

- Assim, podemos determinar um "desvio padrão" para o polinômio de regressão :

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m+1)}}$$

Regressão Polinomial
Exemplo

- Ajuste um polinômio de segundo grau aos dados nas duas primeiras colunas da Tabela abaixo.

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$
0	2.1	544.44	0.14332
1	7.7	314.47	1.00286
2	13.6	140.03	1.08160
3	27.2	3.12	0.80487
4	40.9	239.22	0.61959
5	61.1	1272.11	0.09434
$\sum$	152.6	2513.39	3.74657

Regressão Polinomial
Exemplo

- A partir dos dados, calcula-se

$$m = 2 \qquad \sum x_i = 15 \qquad \sum x_i^4 = 979$$

$$n = 6 \qquad \sum y_i = 152{,}6 \qquad \sum x_i y_i = 585{,}6$$

$$\bar{x} = 2{,}5 \qquad \sum x_i^2 = 55 \qquad \sum x_i^2 y_i = 2488{,}8$$

$$\bar{y} = 25{,}433 \qquad \sum x_i^3 = 225$$

- Resultando nas seguintes equações lineares simultâneas:

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{Bmatrix}$$

Regressão Polinomial
Exemplo

- Usando o Scilab para calcular os coeficientes, resulta

```
-->A = [6 15 55 ; 15 55 225; 55 225 979];

-->b = [152.6 ; 585.6 ; 2488.8];

-->a = A \ b
 a  =

    2.4785714
    2.3592857
    1.8607143
```

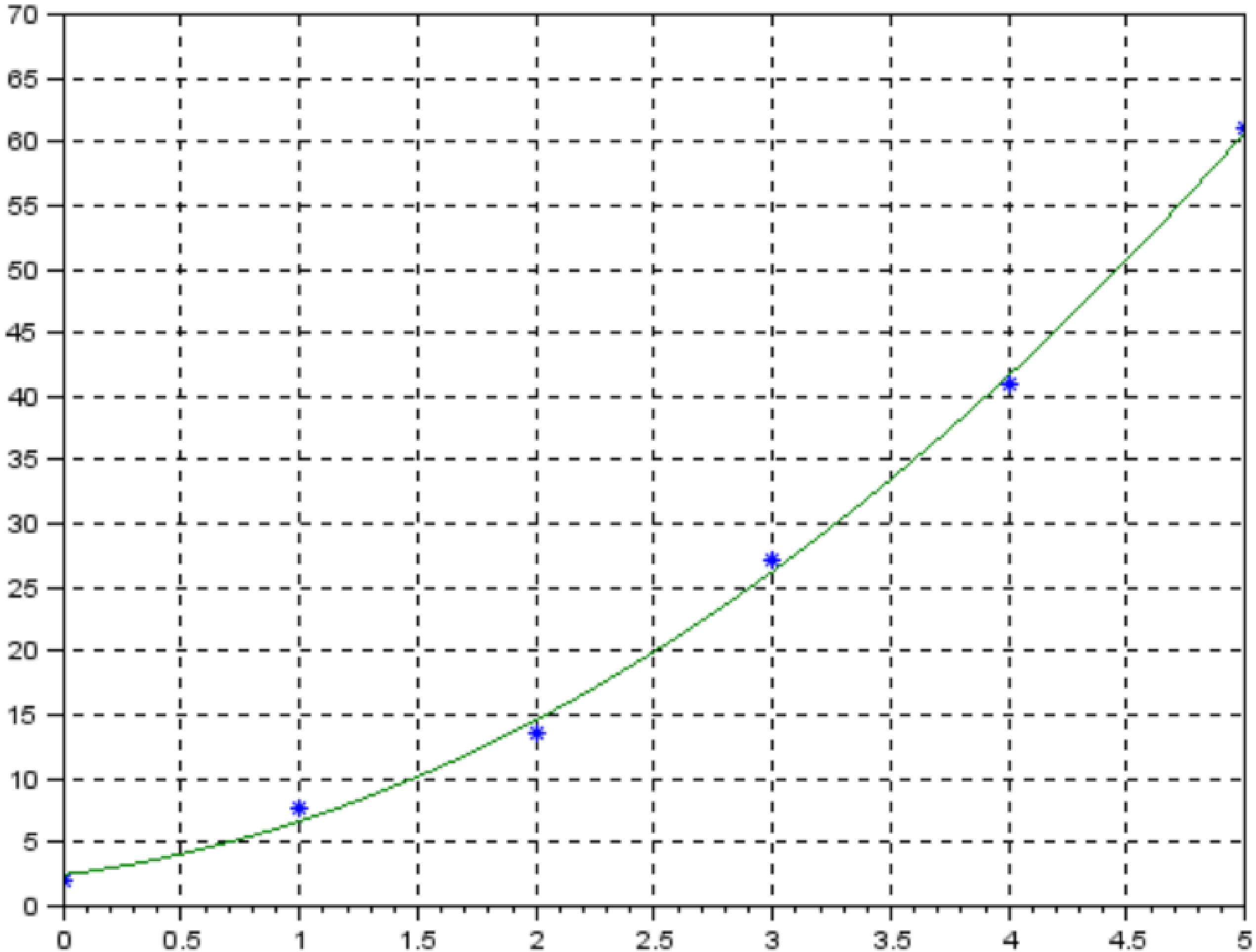
- Portanto, a eq. quadrática por mínimos quadrados será:

$$y = 2.4786 + 2.3593\,x + 1.8607\,x^2$$

- Com um coeficiente de determinação r^2 = 0,9985 (verifique).

Regressão Polinomial
Exemplo

- A figura abaixo ilustra o ajuste:



Capítulo IV

Interpolação

Parte I – Interpolação Polinomial

Interpolação Polinomial

- Interpolação é a técnica utilizada para estimar valores intermediários entre dados precisos
- O Método mais comum usado com essa finalidade é a interpolação polinomial:
  - Para n pontos dados, existe um, e somente um, polinômio de grau (n-1)

$$y = p_1 + p_2 x + p_3 x^2 + \cdots + p_n x^{n-1} \qquad (i)$$

    que passa por todos os pontos

Interpolação Polinomial

Determinação dos coeficientes do polinômio

- Como *n* pontos são necessários para determinar **n** coeficientes, geram-se n equações algébricas lineares que são resolvidas simultaneamente para calcular os coeficientes de (i).

  Exemplo 1:

- Considere que se queira determinar os coeficientes da parábola $y = p_1 + p_2 x + p_3 x^2$ que passa através dos últimos 3 valores da tabela abaixo

Tabela I – Densidade do ar em função da temperatura

T (^{0}C)	-40	0	20	50	100	150	200	250	300	400	500
P_r (kg/m^3)	1,52	1,29	1,20	1,09	0,946	0,835	0,746	0,675	0,616	0,525	0,457

Interpolação Polinomial
Determinação dos coeficientes do polinômio

- Assim
  $x_1 = 300 \rightarrow f(x_1) = 0,616$
  $x_2 = 400 \rightarrow f(x_2) = 0,525$
  $x_3 = 500 \rightarrow f(x_3) = 0,457$
- Cada um desses pares pode ser substituído na equação (i) para produzir um sistema de 3 equações:

$$p_1 + p_2 300 + p_3 300^2 = 0,616$$
$$p_1 + p_2 400 + p_3 400^2 = 0,525$$
$$p_1 + p_2 500 + p_3 500^2 = 0,457$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 300 & 90000 \\ 1 & 400 & 160000 \\ 1 & 500 & 250000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,616 \\ 0,525 \\ 0,457 \end{Bmatrix}$$

- Utilizando o Scilab para obter a solução:

Interpolação Polinomial

Determinação dos coeficientes do polinômio

```
-->A = [1 300 90000; 1 400 160000; 1 500 250000];
-->b = [0.616; 0.525; 0.457];
-->p = A\b
 p  =

    1.027
  - 0.001715
    0.000001
```

- Portanto, a parábola que passa exatamente através dos 3 pontos é

$$f(x)=1{,}027-0{,}001715\,x+0{,}0000011\,x^2$$

- Podemos agora calcular o valor da densidade para uma temperatura de 350^{0}C:

$$f(350)=1{,}027-0{,}001715\cdot 350+0{,}0000011\cdot 350^2=0{,}567625$$

Interpolação Polinomial
Determinação dos coeficientes do polinômio

- Embora essa abordagem forneça uma maneira fácil de interpolar, ela apresenta uma deficiência grave, que pode ser compreendida apresentando-se a matriz de coeficientes em termos gerais e com uma troca entre as colunas 1 e 3:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix}$$

- Essa matriz é conhecida como matriz de *Vandermonde,* matrizes muito mal condicionadas, ou seja, suas soluções são muito sensíveis a erros de arredondamento.

Interpolação Polinomial
Determinação dos coeficientes do polinômio

Para a matriz do exemplo:

```
-->cond(A)
ans  =

    5893156.8
```

Como *log 5893156.8 = 6.770348*, cerca de 6 dígitos da solução seriam questionáveis.

Por isso, existem abordagens alternativas que não apresentam essa deficiência e que serão apresentadas a seguir.

Polinômios interpoladores de Newton Interpolação linear

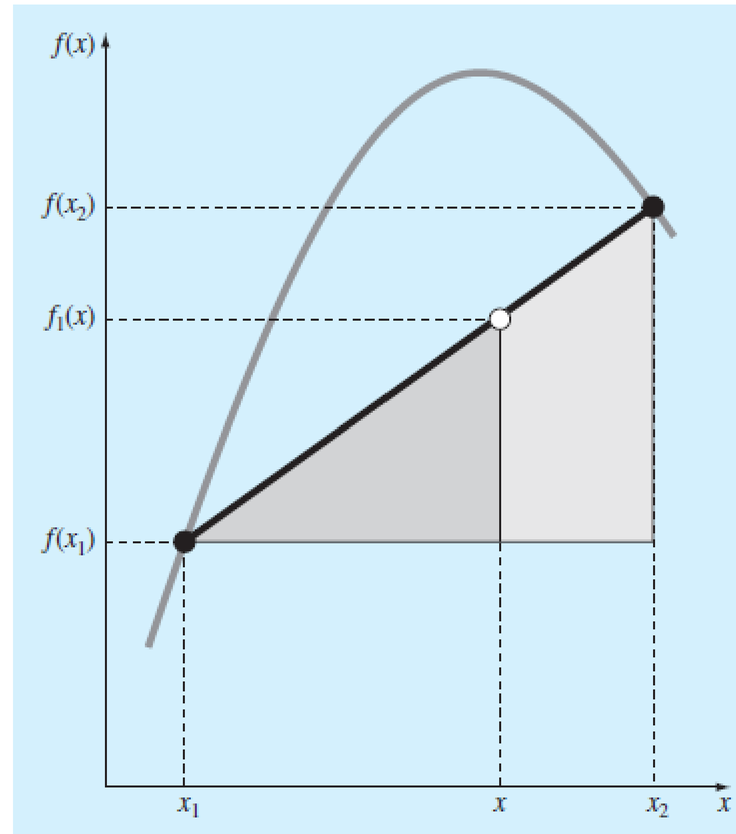
- A forma mais simples de interpolar é ligar 2 pontos dados como uma reta. Usando semelhança de triângulos:

$$\frac{f_1(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

- Reorganizando:

$$f_1(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad (ii)$$

que é a fórmula de interpolação linear de Newton.



Polinômios interpoladores de Newton
Interpolação linear

- O termo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

além de representar a inclinação da reta ligando os pontos, é uma aproximação por diferenças divididas finitas.

- Exemplo 2

A partir do conhecimento de *ln(1)* = 0 e *ln(6)* = 1,791759,faça uma estimativa de *ln(2)* usando uma interpolação linear.

Repita o procedimento usando um intervalo menor de *ln(1)* = 0 e *ln(4)* = 1,386294.

Polinômios interpoladores de Newton
Interpolação linear

- Usando a equação (ii), para x_1 = 1 e x_2 = 6, resulta

$$f_1(2)=0+\frac{1,791759-0}{6-1}(2-1)=0,3583519$$

- Usando a equação (ii), para x_1 = 1 e x_2 = 4, resulta

$$f_1(2)=0+\frac{1,386294-0}{4-1}(2-1)=0,4620981$$

- Considerando que o valor verdadeiro de *ln(2)* é 0,6931472, a redução do intervalo reduz o erro percentual relativo verdadeiro de 48,4 % para 33,3%.

Polinômios interpoladores de Newton
Interpolação quadrática

- Uma estratégia que torna a estimativa melhor, é introduzir uma curvatura na curva ligando os dois pontos. Com 3 pontos disponíveis, isso pode ser obtido com um polinômio de segundo grau, convenientemente expresso por

$$f_2(x)=b_1+b_2(x-x_1)+b_3(x-x_1)(x-x_2) \qquad (iii)$$

- Fazendo-se x = x_1 em (iii) obtém-se:

$$b_1=f(x_1) \qquad (iv)$$

- Substituindo (iv) em (iii) e calculando-a para x = x_2,obtém-se:

$$b_2=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \qquad (v)$$

Polinômios interpoladores de Newton Interpolação quadrática

- Finalmente, substituindo (iv) e (v) em (iii) e calculando-a para x = x_3, obtém-se:

$$b_3 = \frac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1} \qquad (vi)$$

- O termo b_3, responsável pela introdução da curvatura, é similar a aproximação por diferença dividida finita da segunda, indicando que a interpolação de Newton, tal qual a série de Taylor, adiciona termos sequencialmente para capturar o comportamento de uma curvatura de ordem cada vez mais elevada.

Polinômios interpoladores de Newton
Interpolação quadrática

- Exercício 1

  Empregue um polinômio de segundo grau de Newton para estimar *ln 2* com os mesmos três pontos usados no exemplo 1.

  Resposta:

  $f_2(2) = 0,5658444$ ($\varepsilon_t = 18,4\%$)

Polinômios interpoladores de Newton
Forma geral

- Generalizando a equação (iii), para ajustar um polinômio de ordem (n-1) a n pontos, resulta:

$$f_{n-1}(x)=b_1+b_2(x-x_1)+\cdots+b_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (vii)$$

- Os coeficiente são determinados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} b_1 &= f(x_1) \\ b_2 &= f[x_2, x_1] \\ b_3 &= f[x_3, x_2, x_1] \\ &\vdots \\ b_n &= f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{2,} x_1] \end{aligned}$$

onde a função com colchetes corresponde a diferenças divididas finitas.

Polinômios interpoladores de Newton
Forma geral

- A primeira, a segunda e a n-ésima diferenças divididas finitas, são expressas em termos gerais, respectivamente por

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \qquad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

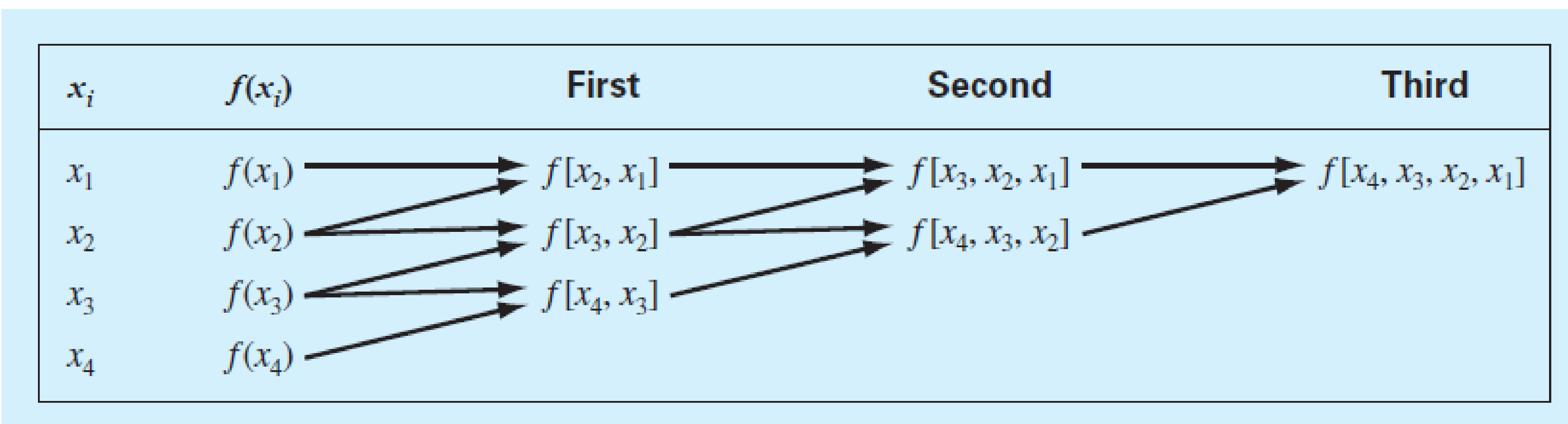
$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{2,} x_1] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1]}{x_n - x_1}$$

- Assim o polinômio interpolador de Newton expresso por (vii) pode ser reescrito

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x) &= f(x_1) + (x - x_1) f[x_{2,} x_1] + (x - x_1)(x - x_2) f[x_{3,} x_{2,} x_1] \\ &+ \cdots + (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{2,} x_1] \qquad (viii) \end{aligned}$$

Polinômios interpoladores de Newton
Forma geral

- Não é necessário que
  - Os dados usados em (viii) sejam igualmente espaçados;
  - ou que os valores de *x* sejam igualmente espaçados;
- Entretanto, os pontos devem ser ordenados de tal modo que estejam centrados em torno e próximos do valor procurado.
- As diferenças de ordem mais alta são calculadas usando as de ordem mais baixa, conforme mostra a figura:



Polinômios interpoladores de Newton Exemplo 2

- No exercício 1, dados em $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 6$ foram usados para fazer uma estimativa de *ln 2* com uma parábola. Utilize um quarto ponto [$x_4 = 5$; $f(x_4) = 1{,}609438$] faça uma estimativa de *ln 2* com um polinômio interpolador de Newton de 3^0 grau.

  O polinômio de terceiro grau de acordo com (vii) é

$$f_3(x)=b_1+b_2(x-x_1)+b_3(x-x_1)(x-x_2)+b_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Polinômios interpoladores de Newton
Exemplo 2

- As primeiras diferenças divididas são:

$$f[x_{2,}x_1]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1{,}386294-0}{4-1}=0{,}4620981$$

$$f[x_{3,}x_2]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_3}=\frac{1{,}791759-1{,}386294}{6-4}=0{,}2027326$$

$$f[x_{4,}x_1]3\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\frac{1{,}609438-1{,}791759}{5-6}=0{,}1823216$$

- As segundas diferenças divididas são:

$$f[x_{3,}x_{2,}x_1]=\frac{f[x_{3,}x_2]-f[x_{2,}x_1]}{x_3-x_1}=\frac{0{,}2027326-0{,}4620981}{6-1}=-0{,}05187311$$

$$f[x_{4,}x_{3,}x_2]=\frac{f[x_{4,}x_3]-f[x_{3,}x_2]}{x_4-x_2}=\frac{0{,}1823216-0{,}2027326}{5-4}=-0{,}02041100$$

Polinômios interpoladores de Newton
Exemplo 2

- A terceira diferença dividida é:

$$f[x_{4,}x_{3,}x_{2,}x_1] = \frac{f[x_{4,}x_{3,}x_2] - f[x_{3,}x_{2,}x_1]}{x_4 - x_1}$$

$$= \frac{-0{,}02041100 - (-0{,}05187311)}{5-1} = 0{,}007865529$$

- Assim, a tabela de diferenças divididas é

x_i	$f(x_i)$	First	Second	Third
1	0	0.4620981	−0.05187311	0.007865529
4	1.386294	0.2027326	−0.02041100	
6	1.791759	0.1823216		
5	1.609438			

Polinômios interpoladores de Newton Exemplo 2

- Os resultados para $f(x_1)$, $f[x_2,x_1]$, $f[x_3,x_2,x_1]$ e $f[x_4,x_3,x_2,x_1]$ (primeira linha da tabela) representam os coeficientes b_1, b_2, b_3 e b_4 respectivamente. Assim, a interpolação cúbica de Newton é:

$$f_3(x) = 0{,}4620981(x-1) - 0{,}05187311(x-1)(x-4) + \\ + 0{,}007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$

- Calculamos *ln 2* com o auxílio do Scilab e encontramos $f_3(2) = \ln(2) = 0{,}6287686$, que representa um erro verdadeiro relativo $\varepsilon_t = 9{,}3\%$

Polinômios interpoladores de Newton
Comandos Scilab para o exemplo 2

```
-->x = poly(0,'x');

-->p = 0.4620981*(x-1)-0.05187311*(x-1)*(x-4) +
0.007865529*(x-1)*(x-4)*(x-6);

-->f3 = horner(p,2)
 f3  =

    0.6287686
```

Polinômios interpoladores de Newton
Função Scilab

- Desenvolva uma função Scilab para implementar a interpolação de Newton.
- Use `ye = pi_Newt(x, y, xe)`

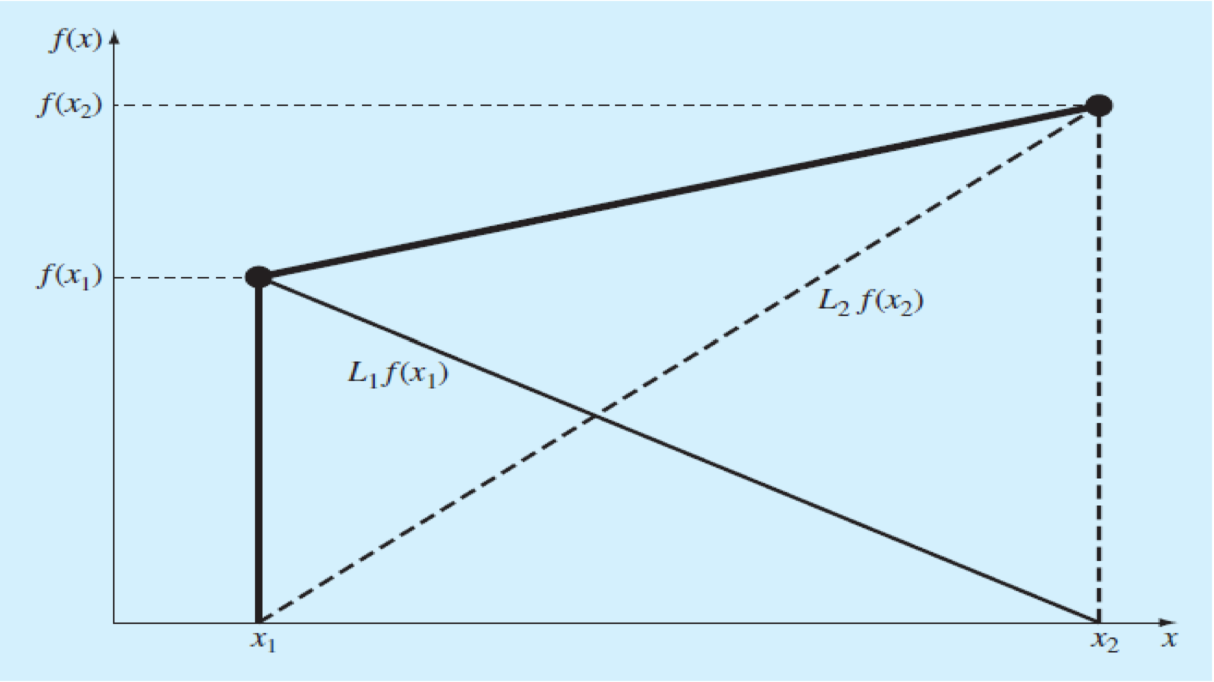
  onde:
  ye é o valor interpolado da variável dependente;
  x é um vetor com os valores conhecidos da var. independente;
  y é um vetor com os valores conhecidos da var. dependente;
  xe é o valor da variável independente onde a interpolação é calculada.

- Use a sua função para estimar para calcular a densidade do ar em uma temperatura de 15^0C com base nos quatro primeiros valores da Tabela I.

Polinômios interpoladores de Lagrange

- Considere um polinômio interpolador linear definido pela média ponderada de dois valores ligados por uma reta:

$$f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$



Polinômios interpoladores de Lagrange

- Da definição de declividade:

$$\frac{L_1 f(x_1)-0}{x-x_2}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2} \quad e \quad \frac{L_2 f(x_2)-0}{x-x_1}=\frac{f(x_2)-0}{x_2-x_1}$$

- Assim:

$$L_1=\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \quad e \quad L_2=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

- Substituindo os 2 coeficientes em

$$f(x)=L_1 f(x_1)+L_2 f(x_2)$$

resulta

$$f_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

Polinômios interpoladores de Lagrange

- Observe que L_1 é uma reta igual a 1 em x_1 e 0 em x_2 e L_2 é uma reta igual a 1 em x_2 e 0 em x_1

$$f_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

- A mesma estratégia pode ser empregada para ajustar uma parábola através de 3 pontos. Nesse caso, 3 parábolas são usadas, cada uma passando por um dos pontos e valendo zero nos outros dois:

$$f_2(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)$$

Polinômios interpoladores de Lagrange

- A análise anterior pode ser generalizada para se obter os polinômios de Lagrange de ordem superior, representados concisamente por

$$f_{n-1}=\sum_{i=1}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

sendo

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$f_2(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\, f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\, f(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\, f(x_3)$$

Polinômios interpoladores de Lagrange
Exercício

- Use um polinômio interpolador de Lagrange de primeiro e segundo graus para calcular a densidade do óleo de motor em $T = 15^0C$ com base nos seguintes dados:

T (^{0}C)	0	20	40
ρ_r (kg/m^3)	3,85	0,800	0,212

Respostas: $f_1(x) = 1{,}5625$ e $f_2(x) = 1{,}3316875$

Polinômios interpoladores de Lagrange
Função Scilab

- Desenvolva uma função Scilab para implementar a interpolação de Lagrange.
- Use `ye = pi_Lagr(x, y, xe)`

  onde:
  ye é o valor interpolado da variável dependente;
  x é um vetor com os valores conhecidos da var. independente;
  y é um vetor com os valores conhecidos da var. dependente;
  xe é o valor da variável independente onde a interpolação é calculada.

- Use a sua função para estimar para calcular a densidade do ar em uma temperatura de 15^0C com base nos quatro primeiros valores da Tabela I.

Interpolação Inversa

- Seja a Tabela II com os valores deduzidos para a função $f(x) = 1/x$

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	1	0,5	0,3333	0,25	0,2	0,1667	0,1429

- Imagine que ao invés de usar os dados para estimar um valor f(x), deseja-se encontrar um valor de x a partir de um valor fornecido para f(x). Esse problema é chamado interpolação inversa, ou seja, considera-se x como uma função de f(x).
- Infelizmente, quando as variáveis são invertidas, não há nenhuma garantia de que os valores ao longo da nova abcissa são regularmente espaçados, como é o caso da Tabela II.

Interpolação Inversa

f(x)	1	0,5	0,3333	0,25	0,2	0,1667	0,1429
x	1	2	3	4	5	6	7

- Esse espaçamento não uniforme da abcissa leva geralmente a oscilações no polinômio interpolador.
- Uma estratégia alternativa é ajustar um polinômio interpolador aos dados originais, reduzindo a resposta ao problema da determinação do valor de x que torna o polinômio igual ao f(x) dado
- Como exemplo, vamos ajustar um polinômio quadrático

$$y = p_1 + p_2 x + p_3 x^2$$

a três pontos: (2, 0,5), (3, 0,3333) e (4, 0,25).

Interpolação Inversa

```
-->A = [1 2 4 ; 1 3 9; 1 4 16];

-->b= [0.5; 0.3333; 0.25];

-->p = A\b
 p  =

    1.0836
  - 0.3752
    0.0417

-->f2 = poly(p,"x","coeff")
 f2  =
                              2
    1.0836 - 0.3752x + 0.0417x
```

Interpolação Inversa

- A resposta do problema da interpolação inversa de encontrar o x que corresponde a f(x) = 0,3 envolve, portanto a determinação da raiz de

$$0{,}3 = 1{,}08333 - 0{,}375\,x + 0{,}041667\,x^2$$

- Novamente, usando o Scilab

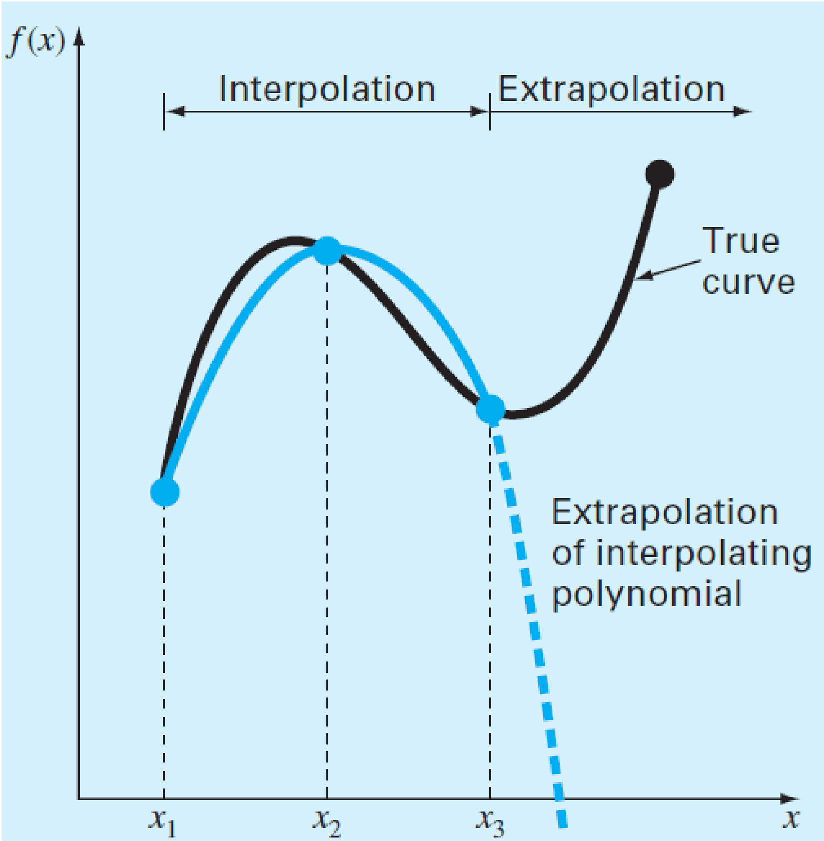
```
-->y = roots(P-0.3)
 y  =


    5.7020645
    3.2955374
```

- Logo, a segunda raiz, *3,2944* , é uma boa aproximação do valor verdadeiro de 3,3333 (1 / 0,3).

Extrapolação

- **Extrapolação** é o processo de fazer uma estimativa de um valor de f(x) que está fora do intervalo dos pontos conhecidos.
- Ela representa "um passo no desconhecido", pois estende a curva além da região conhecida, o que pode fazer com que a curva verdadeira divirja da previsão, conforme ilustra a figura ao lado.



Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.