INSTITUTO FEDERAL SANTA CATARINA

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo IV

Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias

Métodos de Euler e Runge-Kutta

Visão geral

- Este capítulo se dedica à solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (i)$$

- No Capítulo I, parte II, usou-se um método numérico para resolver uma EDO, mais especificamente a velocidade do saltador de *bungee jumping* em queda livre:

Novo valor = *valor antigo* + *inclinação x tamanho do passo*

ou em termos matemáticos

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (ii)$$

onde a inclinação ϕ é chamada de função incremento.

Visão geral

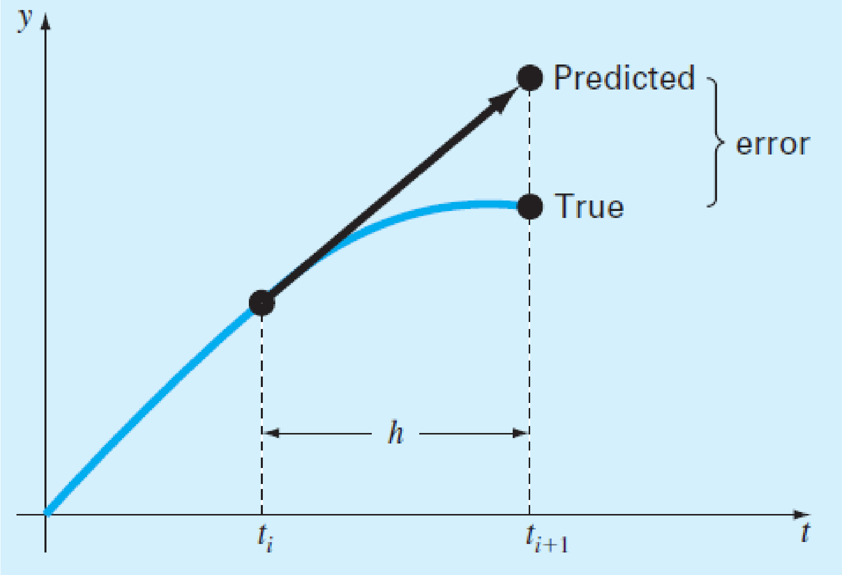
- De acordo com a equação (*ii*), a estimativa da inclinação ϕ é empregada para extrapolar de um valor antigo y_i para um valor novo y_{i+1}, em uma distância h.
- Essa forma aplicada passo a passo traça a trajetória da solução para o futuro.
- Esses métodos são conhecidos como *métodos de passo único* ou *métodos de Runge-Kutta*.
- Os métodos de passo único se diferenciam pela maneira como é feita a estimativa da inclinação.
- A abordagem mais simples é chamada de *Método de Euler*.

Método de Euler

- O Método de Euler usa a ED para obter uma estimativa da inclinação na forma da primeira derivada em t_i:
  - Ou seja, a inclinação no início do intervalo é tomada como uma aproximação da inclinação média em todo o intervalo:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h \quad (iii)$$

onde $f(t_i, y_i)$ é a equação diferencial calculada em t_i e y_i.



Método de Euler
Exemplo 11.1

- Usar o Método de Euler para integrar $y' = 4\,e^{0,8\,t} - 0,5y$ de t = 0 a 4, com um passo de 1.

  A condição inicial em t = 0 é y = 2. A solução exata, determinada analiticamente é (mostre):

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8t} - e^{-0,5t}\right) + 2\,e^{-0,5t}$$

  A equação (ii) pode ser usada para implementar o método de Euler:

$$y(1) = y(0) + f(0,2) \cdot h$$

  onde y(0) = 2, h = 1 e a estimativa de inclinação em t = 0 é

$$f(0,2) = 4e^{0} - 0,5 \cdot 2 = 3$$

  Assim,

$$y(1) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

Método de Euler
Exemplo 11.1

A solução verdadeira em t = 1 é:

$$y = \frac{4}{1,3}\left(e^{0,8} - e^{-0,5}\right) + 2e^{-0,5} = 6,19463$$

Assim o erro relativo percentual verdadeiro:

$$\varepsilon_t = \left|\frac{6,19463 - 5}{6,19463}\right| \cdot 100 = 19,28\%$$

Para o segundo passo:

$$y(2) = y(1) + f(1,5) \cdot \mathbf{1}$$

onde

$$\mathrm{f}(1,5) = 4e^{0,8} - 0,5 \cdot 5 = 6,40216$$

Assim,

$$y(2) = 5 + 6,40216 \cdot 1 = 11,40216$$

Método de Euler
Exemplo 11.1

A solução verdadeira em t = 2 é:

$$y=\frac{4}{1,3}\left(e^{1,6}-e^{-1}\right)+2\,e^{-1}=14,8439$$

Assim o erro relativo percentual verdadeiro:

$$\varepsilon_t=\left|\frac{14,8439-11,4021}{14,8439}\right|\cdot 100=23,19\,\%$$

Repetindo os cálculos, constrói-se a Tabela 11.1 e a Figura 11.1.

Observe que o erro é considerável. Logicamente, esse erro pode ser reduzido usando-se um passo de cálculo menor

Método de Euler
Exemplo 11.1

t	y_{true}	y_{Euler}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.00000	2.00000	
1	6.19463	5.00000	19.28
2	14.84392	11.40216	23.19
3	33.67717	25.51321	24.24
4	75.33896	56.84931	24.54

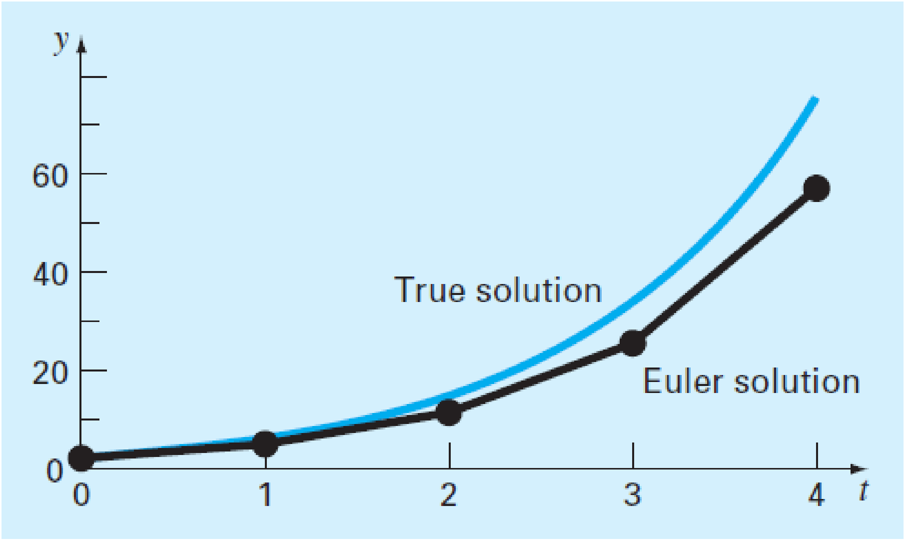


Tabela 11.1 e Figura 11.1

Nota histórica

- O *Método de Euler* foi publicado em seu trabalho de três volumes *Institutiones calculi integrals* (Fundações do cálculo integral) nos anos de 1768 a 1770.

  No volume 1, seção II, capítulo 7, *De integratione aequationum differentialium per approximationem*, Euler declara que *"o principal objetivo do cálculo integral é a solução de equações diferenciais".*
- O que hoje se conhece por *métodos de Runge-Kutta* foram inicialmente desenvolvidos por Carl Runge (1895), que transformou o *método de Euler* em um esquema mais elaborado, capaz de oferecer maior exatidão.
- Wilhelm Kutta (1901) estendeu essa classe de métodos até a quinta ordem.

Métodos de Runge-Kutta (RK)

- Existem muitas variações, mas todas podem ser colocadas na forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (iv)$$

onde ϕ é chamada de função incremento, que representa a inclinação em um intervalo.

Métodos de Runge-Kutta

- A função incremento possui como forma geral:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \quad (v)$$

onde os *a's* são constantes e os *k's* são

$$k_1 = f(t_i, y_i) \qquad (vi.a)$$
$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \qquad (vi.b)$$
$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \qquad (vi.c)$$
$$\vdots$$
$$k_n = f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \qquad (vi.d)$$

onde os p's e os q's são constantes.

Métodos de Runge-Kutta

- As diversas variações do método de Runge-Kutta estão relacionadas com o número de termos da função incremento.
- O método RK de primeira ordem é, de fato, o Método de Euler.
- Neste curso, abordar-se-á a forma mais popular dos métodos de RK, o Método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico.

Método RK clássico de quarta ordem

- Possui como forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)h \quad (vii)$$

onde

$$k_1 = f\left(t_i, y_i\right) \quad (viii.a)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \quad (viii.b)$$

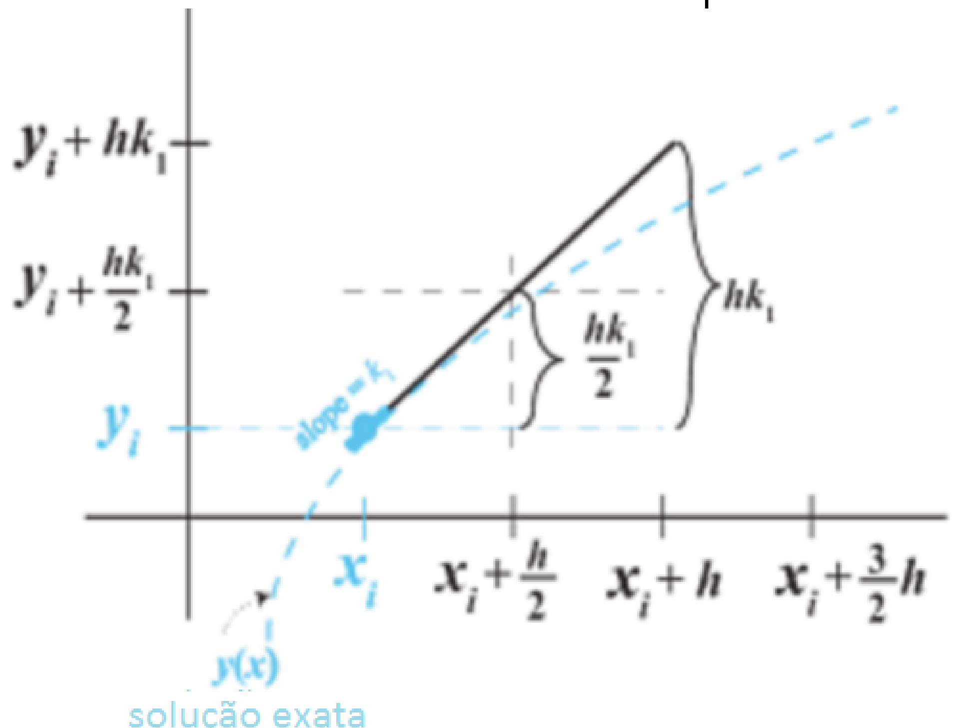
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \quad (viii.c)$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, y_i + k_3 h\right) \quad (viii.d)$$

Método RK clássico de quarta ordem Interpretação gráfica

- **1ª estimativa $k_1 = f(x_i, y_i)$ e preparação para a 2ª estimativa:**

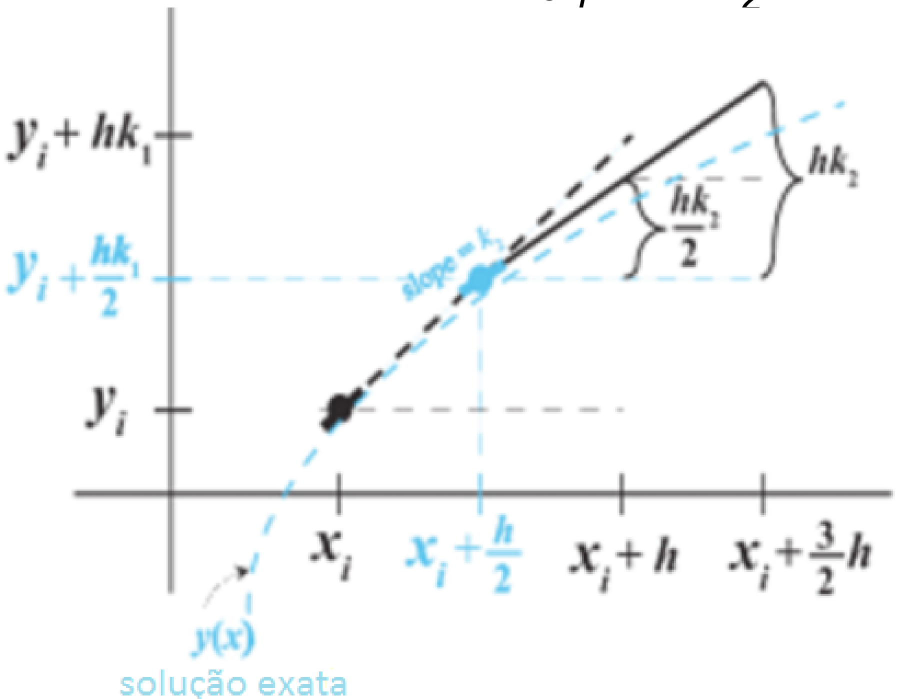
  O método de RK pega a metade do incremento (hk_1 / 2) e utiliza o valor de x na metade do caminho entre x_i e o próximo passo x_i + h



Método RK clássico de quarta ordem Interpretação gráfica

- **2ª estimativa $k_2 = f(x_i + h/2,\ y_i + hk_1/2)$ e preparação p/ a 3ª:**

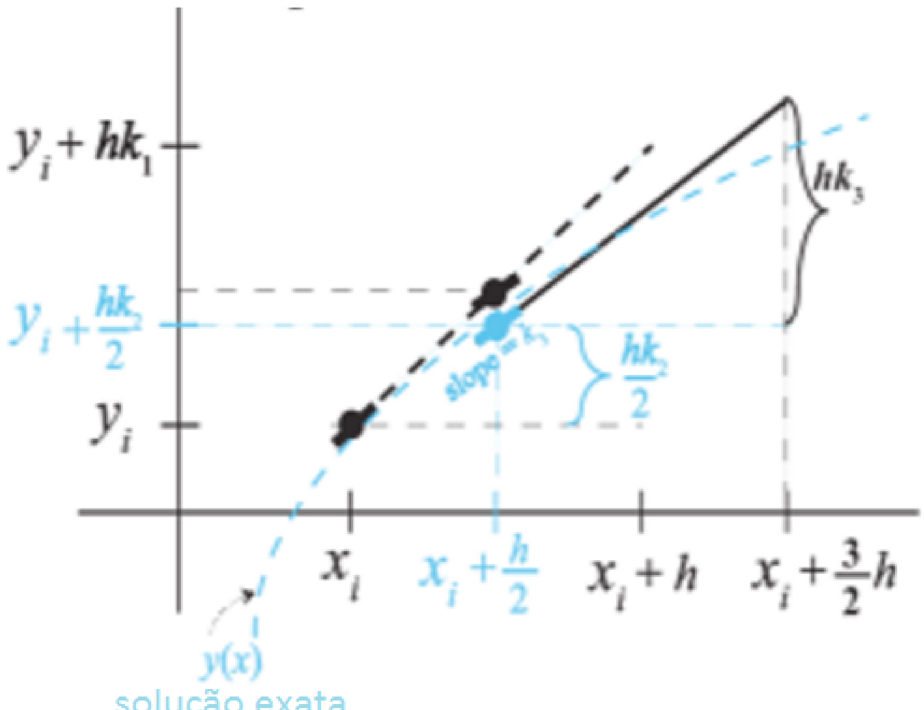
  O método de RK pega a metade do incremento ($hk_2 / 2$) e utiliza o valor médio de x e um diferente y = $y_i + h\,k_2 / 2$



Método RK clássico de quarta ordem Interpretação gráfica

- **3ª estimativa $k_3 = f(x_i+h/2, y_i+hk_2/2)$ e preparação p/ a 4ª:**

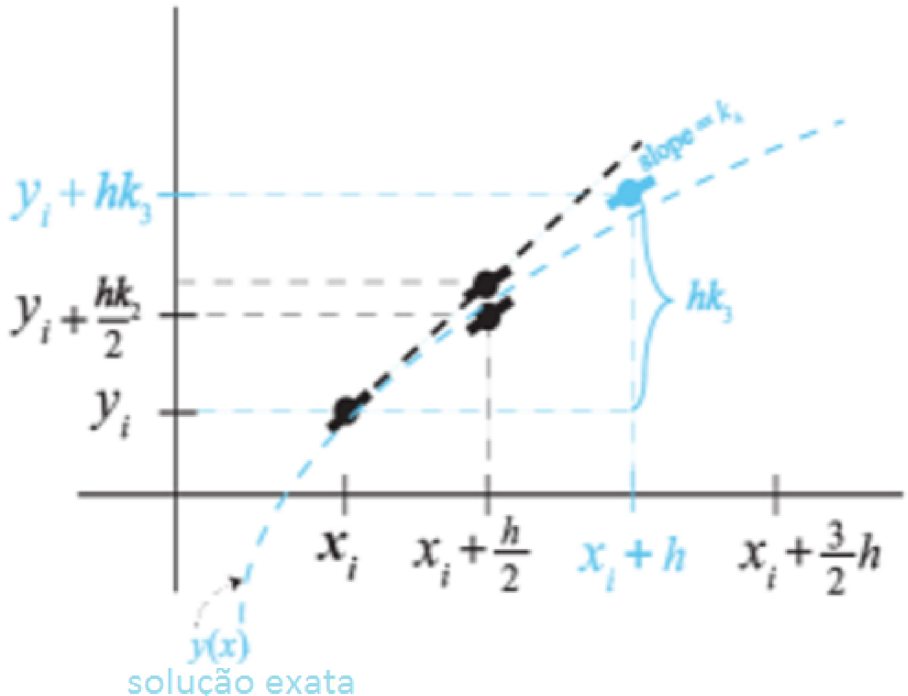
  Após realizar o segundo cálculo de valor médio, o método RK4 utiliza o valor de $x = x_i + h$ e $y = y_i + h\,k_3$



Método RK clássico de quarta ordem Interpretação gráfica

- **4ª estimativa $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$:**

  É realizada a estimativa final, calculando a inclinação da sol. que passa pelo valor $(x_i + h, y_i + h\,k_3)$.



Método RK clássico de quarta ordem

- Tem-se então 4 inclinações, perto do ponto atual (x_i, y_i). Cada um dos k's da expressão *(vii)* representa uma inclinação.
- Assim, a equação *(vii)* representa uma média ponderada que fornece uma estimativa melhorada da inclinação para o cálculo do próximo ponto.

Método RK 4ª ORDEM
Exemplo 11.2

- Usar o Método RK 4ª ordem para integrar $y' = 4e^{0,8\,t} - 0,5y$ de t = 0 a 1, com um passo 1. A condição inicial em t = 0 é y = 2.

  Solução: A inclinação no início do intervalo é calculada como

  $$k_1 = f(0,2) = 4e^0 - 0,5 \cdot 2 = 3$$

  Com esse valor, calcula-se um valor de y e a inclinação k_2 no meio do intervalo:

  $$y(0,5) = y(0) + \frac{1}{2} k_1 h = 2 + 0,5 \cdot 3 = 3,5$$

  $$k_2 = f(0,5\,,\,3,5) = 4 \cdot e^{0,8 \cdot 0,5} - 0,5 \cdot 3,5 = 4,21730$$

- Com k_2, calcula-se um novo valor de y e a inclinação k_3 no meio do intervalo:

  $$y(0,5) = y(0) + \frac{1}{2} k_2 h = 2 + 0,5 \cdot 4,21730 = 4,10865$$

  $$k_3 = f(0,5\,,\,4,10865) = 4 \cdot e^{0,8 \cdot 0,5} - 0,5 \cdot 4,10865 = 3,91297$$

Método RK 4ª ORDEM
Exemplo 11.2

Com esse valor, calcula-se um valor de y e a inclinação k_4 no final do intervalo:

$$y(1)=y(0)+k_3 h=2+3{,}91297\cdot 1=5{,}91297$$

$$k_4=f(1,\ 5{,}91297)=4\cdot e^{0{,}8\cdot 1}-0{,}5\cdot 5{,}91297=5{,}94568$$

Finalmente, a equação (vii) fornece a estimativa derradeira no final do intervalo:

$$y(1{,}0)=y(0)+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)h$$

$$y(1{,}0)=2+\frac{1}{6}(3+2\cdot 4{,}21730+2\cdot 3{,}91297+5{,}94568)\cdot 1$$

$$y(1{,}0)=2+4{,}20104=6{,}20104$$

O erro relativo percentual verdadeiro vale

$$\varepsilon_t=\left|\frac{6{,}19463-6{,}20104}{6{,}19463}\right|\cdot 100=0{,}103\,\%$$

Método RK 4ª ORDEM
Exemplo 11.2

Observe que o erro relativo percentual verdadeiro empregando o método de Euler com o mesmo passo de cálculo era de 19,28 %!

Sistemas de EDOs simultâneas

- Forma geral:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

- A solução de tal sistema exige que sejam conhecidas n condições iniciais no valor inicial de t.

Aplicando RK4 em EDOs de mais alta ordem

- Exemplo: $$\frac{d^3 y}{dt^3}+\frac{d^2 y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+x\,y=e^x$$

- Fazendo

$$y=y_1$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}=y_2$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2}=\frac{dy_2}{dt}=y_3$$
$$\frac{d^3 y}{dt^3}=\frac{dy_3}{dt}=e^x-x\,y_1+2\,y_2-y_3$$

Aplicando RK4 em EDOs de mais alta ordem

- Percebe-se, assim que a solução da EDO de 3ª ordem equivale a resolver o sistema de EDOS simultâneas:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_{1,} y_{2,} y_3) = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_{1,} y_{2,} y_3) = y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = f_n(t, y_{1,} y_{2,} y_3) = e^x - x\, y_1 + 2\, y_2 - y_3$$

Sistemas de EDOs simultâneas Exercício

- Determine a velocidade e a posição do saltador de *bungee jumping* em queda livre utilizando o método RK4. Considere que em t = 0, x = v = 0, e integre para t = 2 s com um passo de 1 s. A aceleração da gravidade é 9,81 m/s^2 e o saltador tem uma massa de 68,1 kg, com um coeficiente de arraste de 0,25 kg/m.
- Elabore uma função Scilab que utilize o método de RK4 para a solução de sistemas de EDOs e teste determinando a velocidade e a posição do saltador para t = 10 s.

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.
- EULER, Leonhard. **Institutionum calculi integralis volumen primun.** Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/pages/E342.html>. Acessado em 29 de setembro de 2015.
- KUTTA, W. Beitrag zur näherungsweisen integration totaler differentialgleichungen. **Z. Math. Phys.**, vol. 46, p. 435 – 453, 1901.
- RUNGE, C. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. **Math. Ann.**, vol. 46, p. 167 – 178, 1895.