INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo III

Resolução de sistemas de equações lineares por métodos diretos e iterativos

Parte III – Métodos iterativos

B. Métodos diretos x iterativos

C. Sistemas não lineares

Métodos diretos *x* métodos iterativos

- Convergência:

  Métodos diretos – Processos finitos, teoricamente fornecem a solução para qualquer sistema não singular.

  Métodos iterativos – Convergência garantida apenas sob certas condições.

.

Métodos diretos *x* métodos iterativos

- Erros de arredondamento:

  Métodos diretos – Como vimos, sofrem com os erros de arredondamento. Quanto maior o sistema maior o acúmulo de erros de arredondamento.

- Métodos indiretos – Uma vez garantida a convergência, ela independe da condição inicial. Desta forma, somente os erros provenientes na última iteração afetam a solução, pois os erros das aproximações anteriores, não levarão à divergência nem à convergência para um outro vetor que não seja o vetor solução.

Métodos diretos *x* métodos iterativos

- Sistemas lineares esparsos

  Métodos diretos – Alteram a matriz coeficientes, introduzindo elementos não nulos no lugar dos nulos.
- Métodos indiretos – Não alteram a matriz de coeficientes, o que configura-se como uma vantagem, conforme ilustra o exemplo a seguir.

Métodos diretos *x* métodos iterativos

- Exemplo (RUGGIERO, 1988, p. 187)

29. Considere o sistema linear cuja matriz dos coeficientes é a matriz esparsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ache a solução por inspeção.

b) Faça mudanças de linhas na matriz original para facilitar a aplicação do método da Eliminação de Gauss. O que você pode concluir, de uma maneira geral?

c) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema. Comente seu desempenho.

d) Faça uma comparação da utilização de métodos diretos e iterativos na resolução de sistemas lineares esparsos.

Métodos diretos *x* métodos iterativos

- Exercício:

  Resolva o sistema abaixo utilizando o método de Gauss e, em seguida, Gauss-Seidel. Qual seria o tipo de método recomendado, e por que?

  $15x_1 + x_2 – 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 15$

  $2x_1 + 3x_3 = 8$

  $13x_2 - 8x_5 = -1$

  $5x_1 + 14x_4 = 2$

  $x_1 - 23x_5 = -10$

  Obs: imprima as etapas da eliminação de Gauss

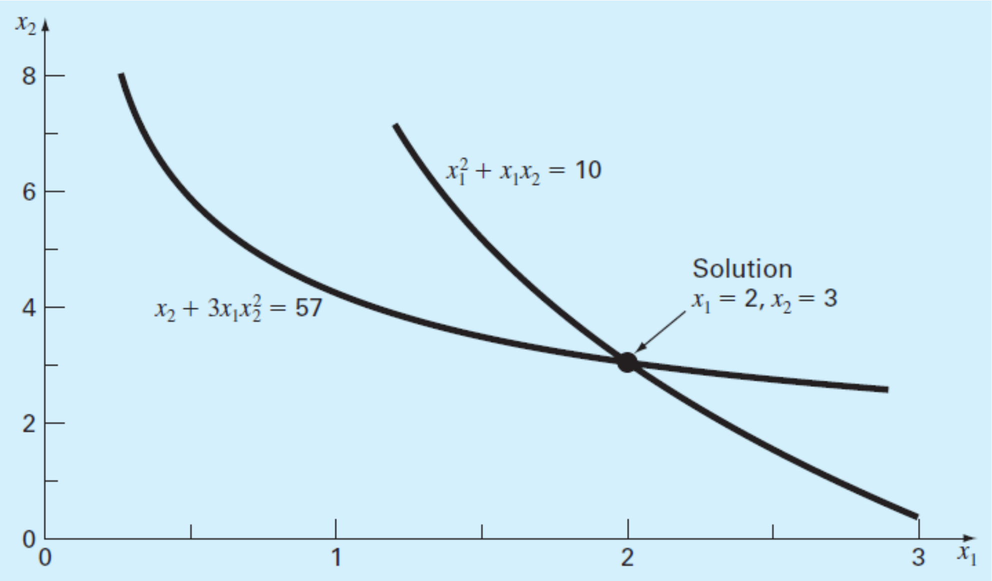
Sistemas não lineares

- O sistema a seguir é formado por um conjunto de 2 equações simultâneas não lineares com 2 incógnitas:

$$x_1^2 + x_1 x_2 = 10 \quad (i.a)$$

$$x_2 + 3x_1 x_2^2 = 57 \quad (i.b)$$

- Os gráficos associados a essas equações são curvas de x_1 versus x_2. Conforme mostra a figura, a solução é intersecção das curvas.



.

Sistemas não lineares

- Os sistemas de equações não lineares podem ser expressos genericamente como:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) &= 0
\end{aligned}
\qquad (ii)
$$

Portanto, a solução são os valores dos *x's* que tornam as equações iguais a zero.

Substituição sucessiva

Uma abordagem possível para a resolução da equação (*ii)* é empregar a mesma estratégia adotada para a iteração de ponto fixo e o Método de Gauss-Seidel:

- A partir de aproximações iniciais, cada uma das equações é resolvida para cada uma das variáveis;
- Um processo iterativo vai calculando novos valores que podem convergir;
- Essa abordagem é conhecida como *substituição sucessiva.*

Substituição sucessiva
Exemplo 9.1

- Use a substituição sucessiva para encontrar as raízes de (i), com aproximações iniciais de $x_1 = 1.5$ e $x_2 = 3.5$

  Note que os valores verdadeiros são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

  Ao final, calcule as estimativas de erro.

  Solução: As equações (*i.a*) e (*i.b*) podem ser reescritas como:

$$x_1 = \frac{10 - x_1^2}{x_2} \quad (iii.a)$$

$$x_2 = 57 - 3x_1 x_2^2 \quad (iii.b)$$

Substituição sucessiva
Exemplo 9.1

Com base nas aproximações iniciais (iii.a) pode ser usada para calcular o novo valor de x_1 .

$$x_1 = \frac{10 - 1{,}5^2}{3{,}5} = 2{,}21429$$

Esse novo valor de x_1 e o valor inicial de x_2 podem ser substituídos em (iii.b) para se obter um novo x_2 .

$$x_2 = 57 - 3 \cdot 2{,}2143 \cdot 3{,}5^2 = -24{,}3752$$

Considerando os resultados, a abordagem parece estar divergindo.

Substituição sucessiva
Exemplo 9.1

Usando os novos valores em uma segunda iteração, resulta:

$$x_1 = \frac{10 - 2{,}21429^2}{-24{,}3752} = -0{,}209103$$

$$x_2 = 57 - 3 \cdot -0{,}2091 \cdot -24{,}3752^2 = 429{,}716$$

Obviamente a abordagem está divergindo.

Os cálculos podem ser repetidos, definindo as equações originais de outra forma:

$$x_1 = \sqrt{10 - x_1 x_2}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - x_2}{3\,x_1}}$$

Substituição sucessiva Exemplo 9.1

$$x_1 = \sqrt{10 - x_1 x_2}$$
$$x_2 = \sqrt{\frac{57 - x_2}{3 x_1}}$$

Este conjunto de equações apresenta um resultado mais satisfatório:

$$x_{1,1} = \sqrt{10 - 1{,}5 \cdot 3{,}5} = 2{,}17945$$
$$x_{2,1} = \sqrt{\frac{57 - 3{,}5}{3 \cdot 2{,}17945}} = 2{,}86051$$
$$x_{1,2} = \sqrt{10 - 2{,}17945 \cdot 2{,}86051} = 1{,}94053$$
$$x_{2,2} = \sqrt{\frac{57 - 2{,}86051}{3 \cdot 1.94053}} = 3{,}04955$$

nitidamente convergindo para os valores verdadeiros

Newton-Raphson

- Lembre-se que para encontrar raízes de funções, 0 método de Newton-Raphson baseava-se no emprego da derivada para fazer a estimativa da sua intersecção com o eixo da variável independente.
- Utilizando uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para a função, resulta:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \cdot f'(x_i)$$

onde x_i é a aproximação inicial da raiz e x_{i+1} é o ponto em que a tangente intercepta o eixo x.

Newton-Raphson

- Na intersecção, $f(x_{i+1}) = 0$ e, rearranjado (*iv*):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

  que é a forma para uma única equação do Método de Newton-Raphson.

- Para várias variáveis, se deve lembrar o fato de que mais de uma variável contribui para a determinação da raiz.

Newton-Raphson

- Para o caso de duas variáveis a série de Taylor pode ser escrita para cada equação não linear como:

$$f_{1,i+1} = f_{1,i} + \left(x_{1,i+1} - x_{1,i}\right) \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + \left(x_{2,i+1} - x_{2,i}\right) \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} \quad (v.a)$$

$$f_{2,i+1} = f_{2,i} + \left(x_{1,i+1} - x_{1,i}\right) \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + \left(x_{2,i+1} - x_{2,i}\right) \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} \quad (v.b)$$

como na versão para uma única, a estimativa da raiz corresponde aos valores de x_1 e x_2 nos quais $f_{1,i+1}$ e $f_{2,i+1}$ são iguais a zero.

Newton-Raphson

- Assim, reorganizando (*v*):

$$x_{1,i+1} \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + x_{2,i+1} \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} = -f_{1,i} + x_{1,i} \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + x_{2,i} \cdot \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} \quad (vi.a)$$

$$x_{1,i+1} \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + x_{2,i+1} \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} = -f_{2,i} + x_{1,i} \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + x_{2,i} \cdot \frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} \quad (vi.b)$$

obtém-se um sistema de equações onde as únicas incógnitas são $x_{1,i+1}$ e $x_{2,i+1}$.

Newton-Raphson

- Manipulando algebricamente (*vi*), resulta:

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} - \frac{f_{1,i}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - f_{2,i}\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}} \qquad (vii.a)$$

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} - \frac{f_{2,i}\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} - f_{1,i}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}} \qquad (vii.b)$$

sendo que o denominador de cada uma dessas duas equações é conhecido como o determinante da *matriz Jacobiana* do sistema.

Newton-Raphson
Exemplo 9.2

- Use o método de Newton-Raphson para determinar as raízes da equação (i). Inicie os cálculos com $x_1 = 1.5$ e $x_2 = 3.5$.

  Iteração 1 – Determina-se, inicialmente as derivadas parciais para as condições iniciais:

$$\frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 = 2\cdot 1{,}5 + 3{,}5 = 6{,}5 \qquad \frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_2} = x_1 = 1{,}5$$

$$\frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_1} = 3x_2^2 = 3\cdot 3{,}5^2 = 36{,}75 \qquad \frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_2} = 1 + 6x_1 \cdot x_2 = 1 + 6\cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5 = 32{,}5$$

  resultando em um determinante da *matriz Jacobiana* de:

$$6{,}5\cdot 32{,}5 - 1{,}5\cdot 36{,}75 = 156{,}125$$

Newton-Raphson
Exemplo 9.2

Os valores das funções para as condições iniciais são:

$$f_{1,0} = 1{,}5^2 + 1{,}5 \cdot 3{,}5 - 10 = -2{,}5$$

$$f_{2,0} = 3{,}5 + 3 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 - 57 = 1{,}625$$

esses valores podem ser substituídos em (*vii*), para se obter:

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{-2{,}5 \cdot 32{,}5 - 1{,}625 \cdot 1{,}5}{156{,}125} = 2{,}0360$$

$$x_2 = 3{,}5 - \frac{-1{,}625 \cdot 6{,}5 - (-2{,}5) \cdot 36{,}75}{156{,}125} = 2{,}8439$$

resultados que convergem para os valores verdadeiros $x_1 = 2$ e $x_2 = 3.0$.

O procedimento prossegue até a condição de parada.

Newton-Raphson Considerações

- Quando o método de Newton-Raphson converge, ele exibe a mesma convergência quadrática rápida da versão de uma única equação.
- Entretanto, ele pode divergir se as aproximações iniciais não estiverem suficientemente próximo das raízes verdadeiras.
- Infelizmente, nenhum processo simples está disponível para encontrar boas aproximações iniciais, o que faz com que elas sejam encontradas por tentativa e erro.

Newton-Raphson Generalização

- A abordagem de Newton-Raphson para 2 equações pode ser generalizada para a solução de n equações simultâneas. Para isso, escreve-se (*vi*) para a *k-ésima* equação como:

$$x_{1,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1}+x_{2,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_2}+\cdots+x_{n,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n}=-f_{k,i}+x_{1,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1}+x_{2,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_2}+\cdots+x_{n,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n} \qquad (viii)$$

observe que as únicas incógnitas são os termos $x_{k,i+1}$ do lado esquerdo de (*viii*).

Newton-Raphson Generalização

- A notação matricial pode ser usada para expressar (*viii*):

$$[J]\{x_{i+1}\}=-\{f\}+[J]\{x_i\} \quad (ix)$$

$$x_{1,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1}+x_{2,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_2}+\cdots+x_{n,i+1}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n}=-f_{k,i}+x_{1,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_1} \qquad (viii)$$

$$+x_{2,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_2}+\cdots+x_{n,i}\cdot\frac{\partial f_{k,i}}{\partial x_n}$$

Newton-Raphson
Generalização

- A notação matricial pode ser usada para expressar (*viii*):

$$[J]\{x_{i+1}\}=-\{f\}+[J]\{x_i\} \quad (ix)$$

onde as derivadas parciais avaliadas a cada iteração *i* formam a matriz Jacobiana:

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (x)$$

Newton-Raphson Generalização

Os valores inicial e final são expressos na forma vetorial como:

$$\{x_i\}^T = \{x_{1,i} \quad x_{2,i} \quad \cdots \quad x_{n,i}\}$$

e:

$$\{x_{i+1}\}^T = \{x_{1,i+1} \quad x_{2,i+1} \quad \cdots \quad x_{n,i+1}\}$$

Os valores da função em *i* podem ser expressos por:

$$\{f\}^T = \{f_{1,i} \quad f_{2,i} \quad \cdots \quad f_{n,i}\}$$

- A equação (ix) pode ser resolvida utilizando uma técnica como a eliminação de Gauss, que pode ser repetida iterativamente para se obter estimativas refinadas da solução.

Newton-Raphson Generalização

- Uma visão sobre a solução pode ser obtida resolvendo-se (ix) com inversão de matriz, lembrando que a versão de uma única equação do método de Newton-Raphson é:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f\left(x_i\right)}{f'\left(x_i\right)} \quad \left(xi\right)$$

- Se a equação (ix) é resolvida multiplicando-se pela inversa da *matriz Jacobiana*, o resultado é:

$$\left\{x_{i+1}\right\} = \left\{x_i\right\} - \left[J\right]^{-1}\left\{f\right\} \quad \left(xii\right)$$

- Comparando (xi) e (xii), percebe-se que a matriz Jacobiana é equivalente à derivada de uma função de diversas variáveis.

Newton-Raphson Generalização

- Cálculos matriciais são implementados de forma eficiente no Scilab, conforme pode ser ilustrado pela repetição dos cálculos do Exemplo 10.2:

```
-->x=[1.5 ; 3.5];
-->J=[2*x(1)+x(2) x(1); 3*x(2)^2 1+6*x(1)*x(2)]
 J  =
    6.5      1.5
    36.75    32.5
-->f=[x(1)^2+x(1)*x(2)-10; x(2)+3*x(1)*x(2)^2-57]
 f  =
  - 2.5
    1.625
```

Newton-Raphson
Generalização

- Então, pode-se implementar a equação (xii) para se obter as novas aproximações:

```
-->x = x - J\f
 x  =
    2.0360288
    2.8438751
```

lembrando que

$$J^{-1}f = y \rightarrow J\ y = f$$

o que permite a utilização da divisão à esquerda.

Newton-Raphson
Tarefa

- Elabore uma função Scilab para solucionar sistemas de equações não lineares pelo Método de Newton-Raphson. Use:

  ```
  function [x,iter] = newraph_n(fun,jac,es,maxi)
  ```

  onde

  `x` é o vetor de raízes;

  `iter` é o número de iterações realizadas;

  `fun` é uma função que retorna f

  `jac` é uma função que retorna J;
- As aproximações iniciais $\{x_0\}$ são fornecidas dentro da função.
- Utilize a divisão à esquerda
- Utilize a sua função para resolver o sistema:

$$y = -x^2 + x + 0{,}5$$
$$y + 5\mathrm{xy} = x^2$$

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.
- RUGGIERO, Márcia e LOPES, Vera. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** Pearson, 1988.