INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Prof. Marco Valério Miorim Villaça

Capítulo V

Integração Numérica

Regrado trapézio, Regra de Simpson, estudo sobre erros e integração dupla

Fórmulas de Newton - Cotes

- São os esquemas mais comuns de integração numérica;
- A estratégia utilizada é substituir uma função complicada por um polinômio que seja fácil de integrar:

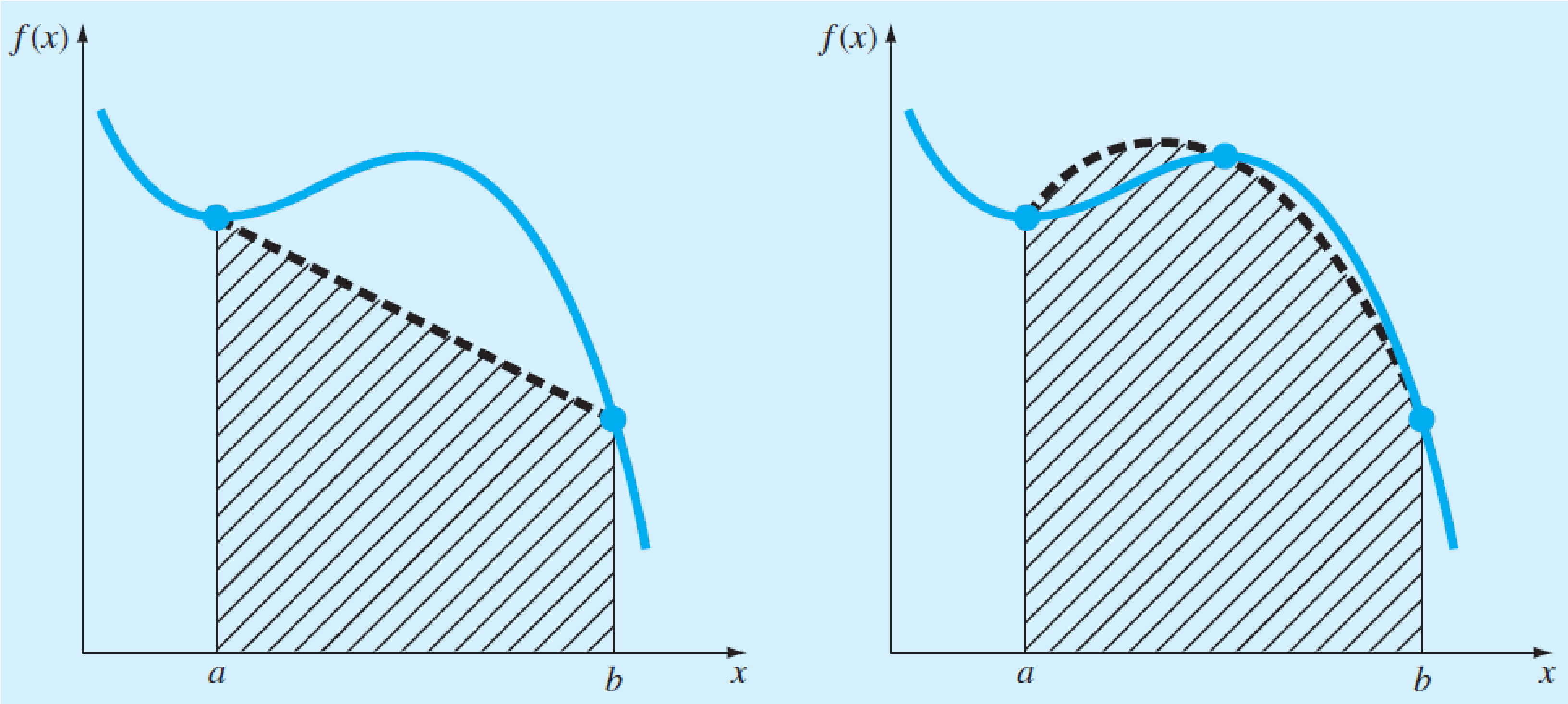
$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad (i)$$

onde $f_n(x)$ é um polinômio da forma

$$f_n(x)=a_0+a_1 x+\cdots+a_{n-1} x^{n-1}+a_n x^n \qquad (ii)$$

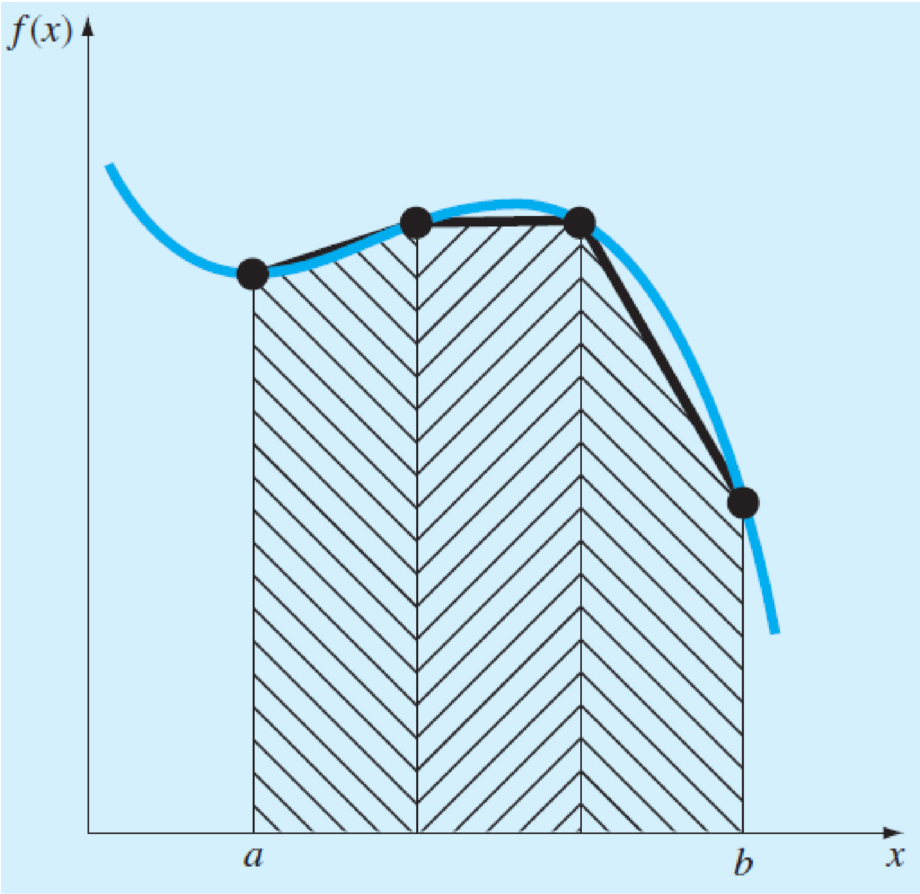
Fórmulas de Newton - Cotes

- A figura abaixo e à esquerda, mostra um polinômio de primeiro grau (reta) sendo usado como uma aproximação. Já a figura da direita, uma parábola é usada com o mesmo propósito.



Fórmulas de Newton - Cotes

- A integral também pode ser aproximada utilizando uma série de polinômios aplicados por partes à função ou aos dados em segmentos de comprimento constante como, por exemplo na figura ao lado.



A regra do trapézio

- Fórmula de *Newton-Cotes* que corresponde ao caso no qual o polinômio na equação (i) é de primeiro grau:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx \qquad (iii)$$

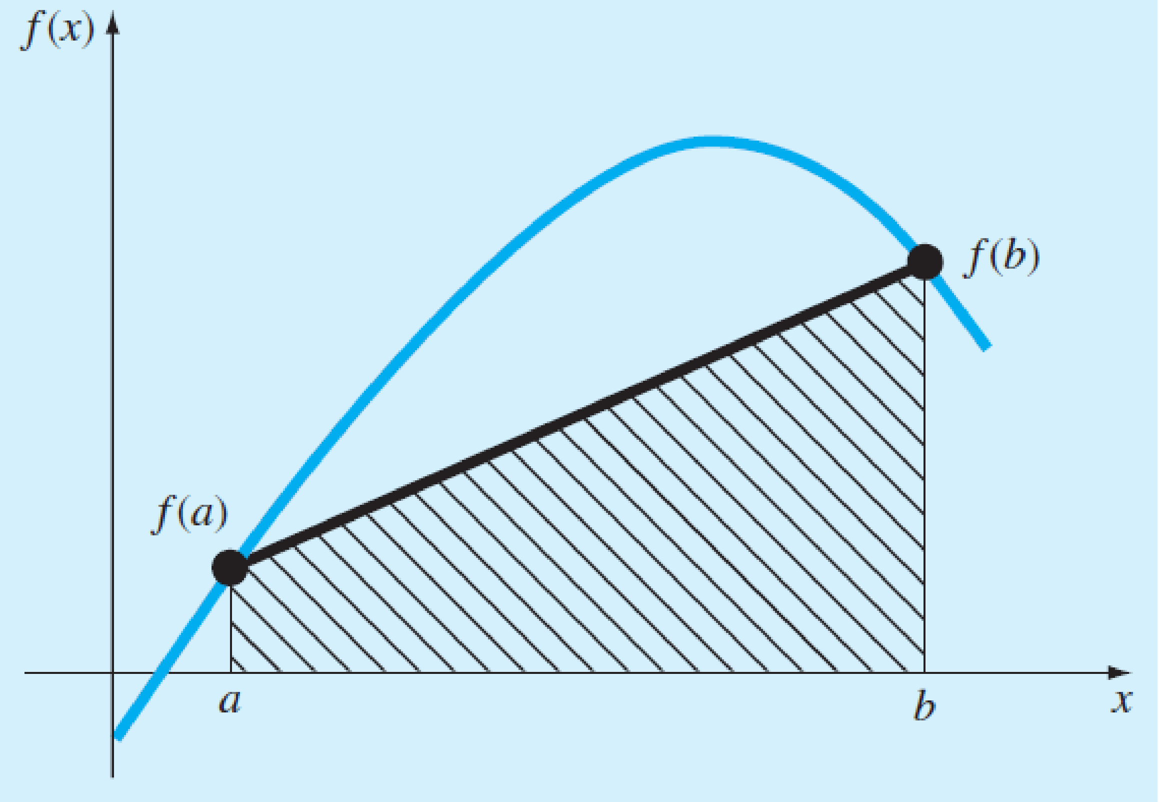
- Integrando (iii) resulta em

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (iv)$$

que é conhecida como regra do trapézio

A regra do trapézio

- Geometricamente a regra do trapézio é equivalente a aproximar a integral pela área do trapézio sob a reta que une a e b:



A regra do trapézio

- Da geometria, sabe-se que a fórmula para calcular a área de um trapézio é a altura vezes a média das bases. Como em nosso caso o trapézio está apoiado sobre um de seus lados, resulta:

$$I = largura \cdot altura\ média \qquad (v)$$

ou

$$I = (b-a) \cdot altura\ média \qquad (vi)$$

sendo, no caso dos trapézios a altura média calculada por

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Demonstração da Fórmula Newton-Cotes

- Aplicando um polinômio interpolador linear de Newton a função da figura 7, resulta:

$$f_1(x)=f(a) + x\,\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} - a\,\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$$

- Agrupando o primeiro e o último termo obtém-se:

$$f_1(x)= x\,\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} + \frac{f(a)(b-a)-a[f(b)-f(a)]}{(b-a)}$$

ou

$$f_1(x)= x\,\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} + \frac{b\,f(a)-a\,f(b)}{(b-a)}$$

Demonstração da Fórmula Newton-Cotes

- Integrando a expressão anterior de a até b, resulta:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \cdot \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] + \frac{b\, f(a) - a\, f(b)}{(b-a)} \cdot (b-a)$$

- Simplificando a expressão acima

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{2} \cdot (b+a) + b\, f(a) - a\, f(b)$$

$$I = \frac{b\, f(b)}{2} + \frac{a\, f(b)}{2} - \frac{b\, f(a)}{2} - \frac{a\, f(a)}{2} + b\, f(a) - a\, f(b)$$

$$I = f(b) \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2} - a \right) + f(a) \left(b - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

Demonstração da Fórmula Newton-Cotes

- Resolvendo os termos entre parênteses da expressão anterior, resulta em:

$$I = f(b)\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) + f(a)\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)$$

ou

$$I = \frac{f(b)}{2}(b-a) + \frac{f(a)}{2}(b-a)$$

- Finalmente,

$$I = (b-a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2}\right]$$

que é a expressão da regra do trapézio

A regra do trapézio

- Obviamente quando se utiliza um único segmento de reta para aproximar uma integral, assume-se um erro que pode ser substancial. Uma estimativa para o erro de truncamento resultante de uma única aplicação da da regra do trapézio é (CHAPRA, 2012, p. 469):

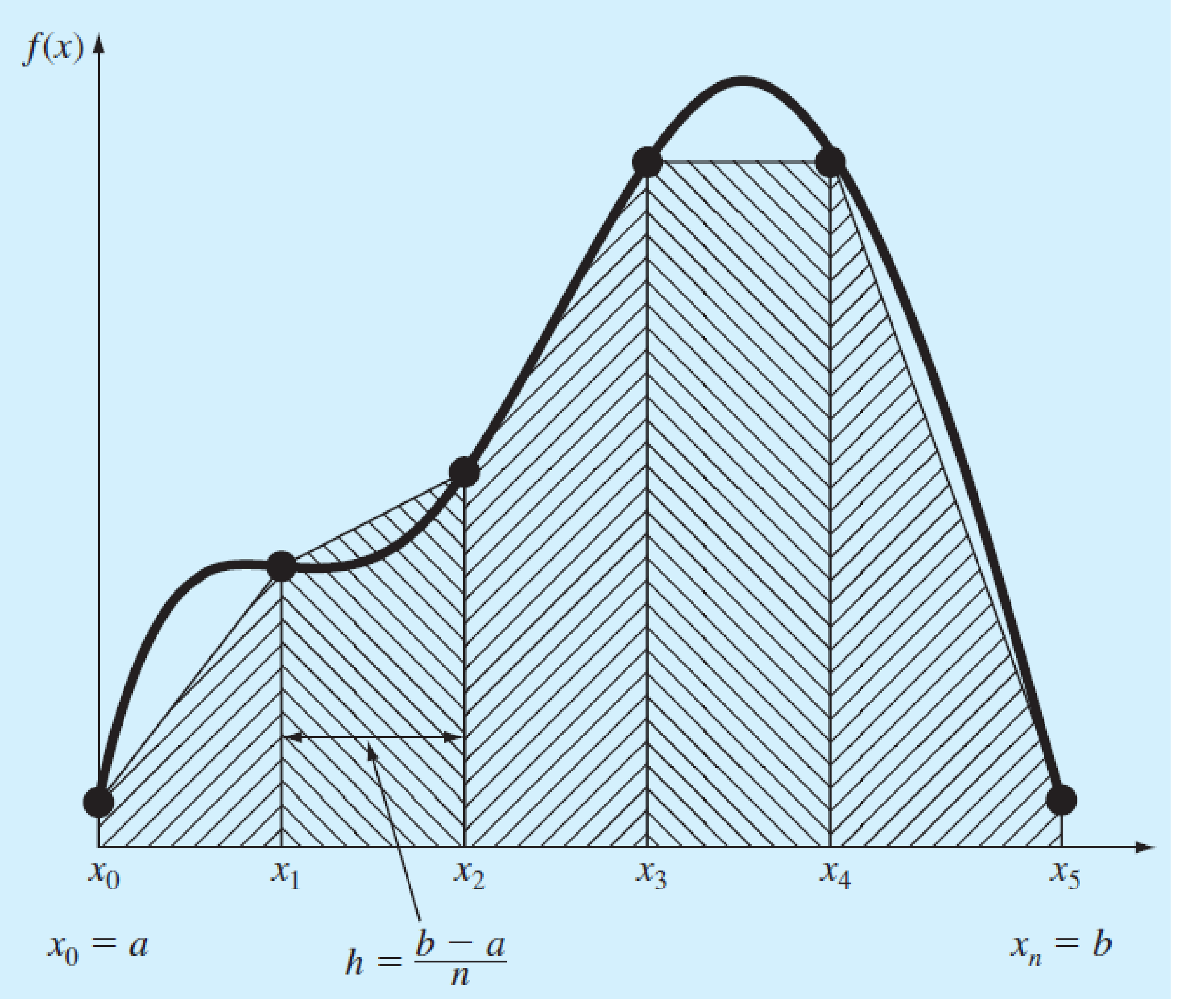
$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

onde ξ está em algum ponto do intervalo [a e b].

A regra do trapézio
Aplicação múltipla

- Consiste em aplicar a regra do trapézio em vários segmentos de um intervalo de integração.
- As áreas de cada segmento individual são somadas para fornecer uma estimativa do integral do intervalo inteiro.
- A próxima figura representa a aplicação múltipla da regra do trapézio.

A regra do trapézio
Aplicação múltipla



Regra do trapézio

- Na figura, a integral total pode ser representada como

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

- Substituindo cada integral pela regra do trapézio (ii)

$$I = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \quad (viii)$$

ou, agrupando os termos:

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \quad (ix)$$

Regra do trapézio

- Como *h* = *(b-a) / n*, a expressão (ix) pode ser expressa nos termos de (vi) como

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{largura}} \underbrace{\frac{\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right]}{2n}}_{\text{altura média}} \qquad (x)$$

- Um erro para a aplicação múltipla da regra do trapézio pode ser obtida pela soma dos erros individuais dos segmentos:

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \qquad (xi)$$

Regra do trapézio

onde f´´(ξ_i) é a derivada segunda em um ponto ξ_i localizado no segmento i. Esse resultado pode ser simplificado por uma estimativa do valor médio da derivada segunda no intervalo todo como:

$$\bar{f}'' \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} \qquad (xii)$$

Substituindo (xii) em (xi), resulta:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}'' \qquad (xi)$$

que é uma aproximação do erro. Observe que o erro de truncamento será divido por 4 se o número de segmentos for dobrado.

Regra do trapézio
Exemplo 1

- Use a regra do trapézio com 4 segmentos para obter uma estimativa da integral de

$$f(x) = 0{,}2 + 25\,x - 200\,x^2 + 675\,x^3 - 900\,x^4 + 400\,x^5$$

de 0 a 0,8. O valor exato da integral vale 1,640533.

Solução: Para n = 4 segmentos,:

  - h = 0,8 / 4 = 0,2; f(0) = 0,2; f(0,2) = 1,288;
  - f(0,4) = 2,456; f(0,6) = 3,464; f(0,8) = 0,232.

Regra do trapézio
Exemplo 1

- Com esse dados o valor da integral calculado pela equação *(x)* resulta em:

$$I = 0{,}8 \; \frac{\left[0{,}2 + 2\left(1{,}288 + 2{,}456 + 3{,}464\right) + 0{,}232\right]}{8} = 1{,}4848$$

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}4848 = 0{,}1557333 \;\rightarrow\; \varepsilon_t = 9{,}5\,\%$$

- Para avaliar o erro aproximado, primeiro se deve estimar o valor médio da segunda derivada:

$$\bar{f}'' = \frac{\int_0^{0{,}8} -400 + 4050\,x - 10800\,x^2 + 8000\,x^3}{0{,}8 - 0} = -60$$

Regra do trapézio
Exemplo 1 / exercício

- Substituindo esse valor em (xi), obtém-se o erro aproximado:

$$E_a = -\frac{(0,8)^3}{12(4)^2}(-60) \ = \ 0,16$$

Exercício: Avalie a integral utilizando 10 segmentos.

- Resposta: I = 1,6150, $\varepsilon_t = 1,6\,\%$

Regra do trapézio
Atividade

- Escreva uma função *Scilab* para estimar a integral de uma função qualquer empregando a aplicação múltipla da regra do trapézio.

- Teste a sua função estimando da integral de

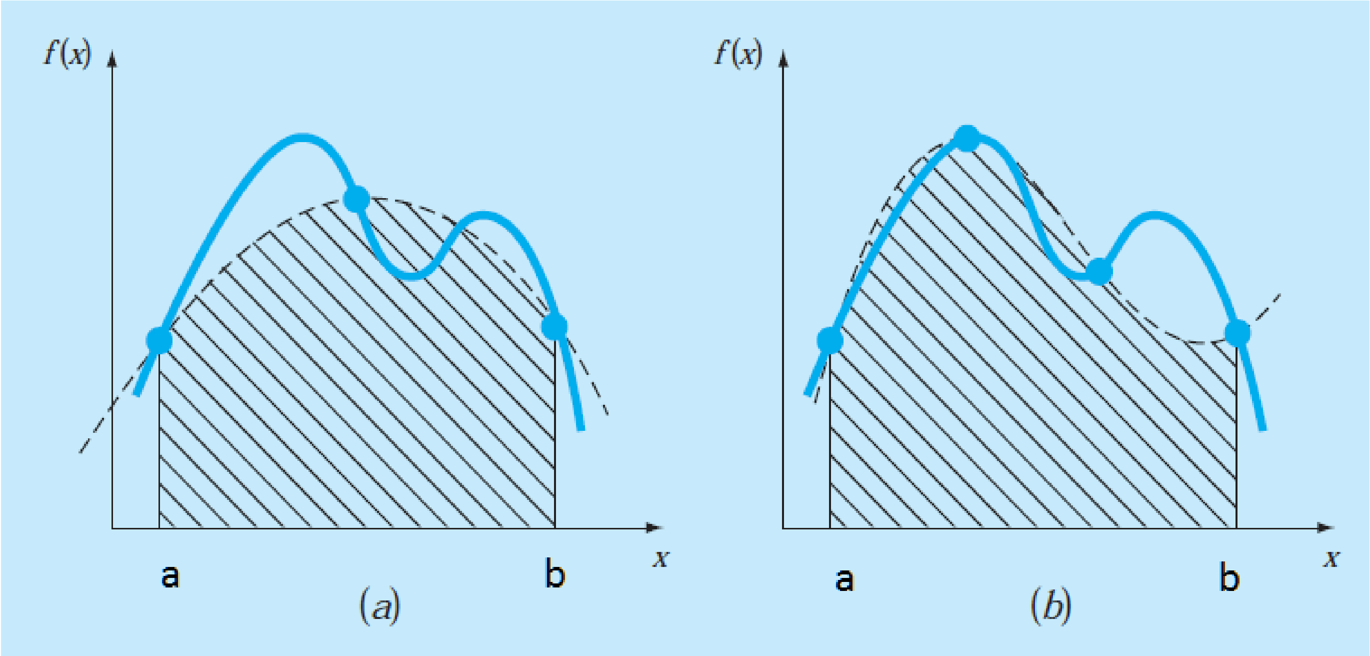
$$f(x)=0{,}2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

de 0 a 0,8,

Use o resultado para calcular o erro verdadeiro percentual.

Regras de Simpson

- Utilizam polinômios de grau mais elevado para unir os pontos.



- (a) A regra 1/3 de Simpson consiste em obter a área sob uma parábola ligando 3 pontos (b) a regra 3/8 consiste em obter a área sob uma cúbica ligando 4 pontos.

Regras de Simpson

- Utilizam polinômios de grau mais elevado para unir os pontos.
- Quando o polinômio da equação (i) for um polinômio de segundo grau, tem-se a regra 1/3 de Simpson:

$$I=\int_{x_0}^{x_2}\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\right]dx$$

onde a e b são designados como x_0 e x_2, sendo x_1 o ponto médio entre a e b, respectivamente.

Regras de Simpson
A regra 1/3

- O resultado da integração anterior é:

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right] \qquad (xii)$$

ou

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \qquad (xiii)$$

- Segundo Chapra (2012, p. 475), o erro de truncamento vale:

$$E_t = -\frac{1}{90}h^5 f^4(\xi)$$

ou

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^4(\xi) \qquad (xiv)$$

Regras de Simpson
Aplicação múltipla regra 1/3

- Da mesma forma que a regra do trapézio, a regra de Simpson pode ser melhorada dividindo-se o intervalo de integração em diversos segmento de mesmo comprimento:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

- Aplicando-se o mesmo procedimento utilizado na regra do trapézio, chega-se a seguinte expressão para estimar a integral:

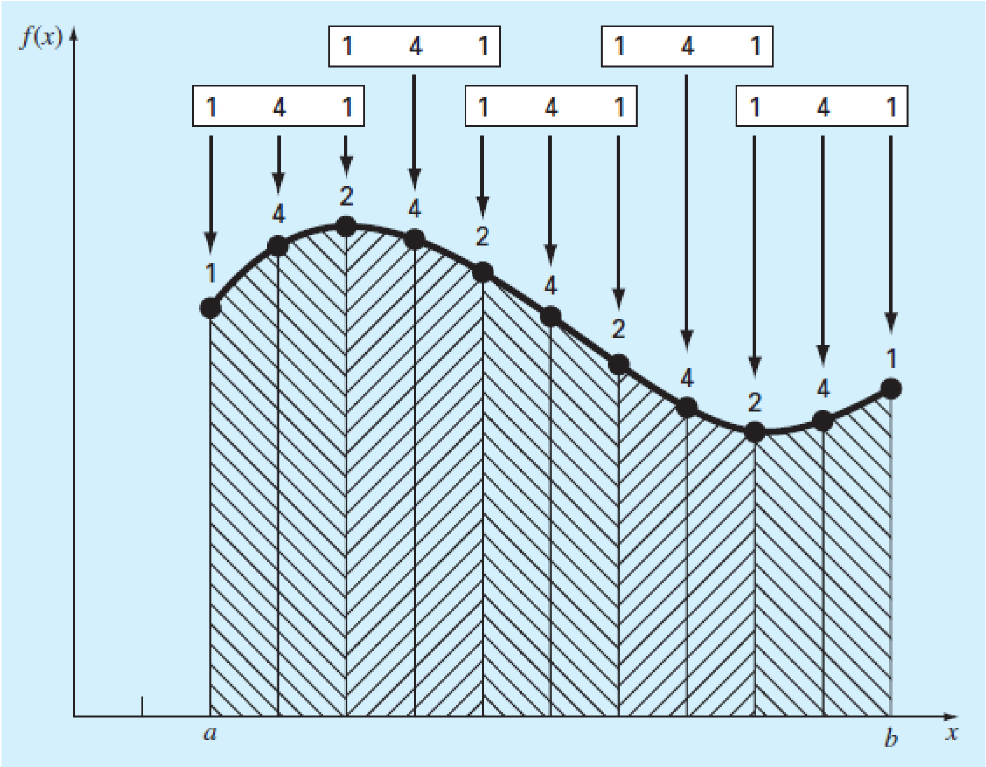
$$I = (b-a)\,\frac{\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n) \right]}{3n} \qquad (xv)$$

Regras de Simpson
Aplicação múltipla regra 1/3

- E a esta expressão para estimar o erro aproximado

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^4 \qquad (xvi)$$

- Na figura os pesos relativos estão representados acima dos valores da função. Observe que a regra 1/3 deve ser utilizada com um número par de segmentos.



Aplicação múltipla regra 1/3
Exemplo 2

- Use a regra 1/3 de Simpson com n = 4 segmentos para obter uma estimativa da integral de

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de 0 a 0,8. O valor exato da integral vale 1,640533.

Solução: Para n = 4 segmentos,:

- *f(0) = 0,2; f(0,2) = 1,288; f(0,4) = 2,456;*
- *f(0,6) = 3,464; f(0,8) = 0,232.*

Da equação (xv) resulta:

$$I = 0{,}8 \; \frac{[0{,}2 + 4(1{,}288 + 3{,}463) + 2(2{,}456) + 0{,}232]}{12} = 1{,}6223467$$

Aplicação múltipla regra 1/3
Exemplo 2

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}623467 = 0{,}017067 \quad \rightarrow \; \varepsilon_t = 1{,}04\,\%$$

- Cerca de 9 vezes mais acurada que a regra do trapézio. Para avaliar o erro aproximado, utiliza-se a equação (xvi):

$$E_a = -\frac{(0{,}8)^5}{1804^4}(-2400) \; = \; 0{,}017067$$

onde -2400 é o valor médio da quarta derivada para o intervalo, obtido de:

$$\overline{f}^{(4)} = \frac{\int_0^{0{,}8} -21600 + 48000\,x}{0{,}8 \; - 0} = -2400$$

Regra 1/3 de Simpson
Atividade

- Escreva uma função *Scilab* para estimar a integral de uma função qualquer empregando a aplicação múltipla da regra 1/3 de Simpson.

- Teste a sua função estimando da integral de

$$f(x)=0,2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

de 0 a 0,8,

Use o resultado para calcular o erro verdadeiro percentual.

Regra 3/8 de Simpson

- A regra 3/8 de Simpson corresponde ao caso que um polinômio de Lagrange de terceiro grau é ajustado a quatro pontos e integrado para fornecer:

$$I = \frac{3\text{h}}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)f(x_3)\right] \qquad (xvi)$$

onde *h = (b - a) /3*. A equação (xvi) pode ser expressa também como:

$$I = (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8} \qquad (xvii)$$

- A regra 3/8 tem um erro de $E_t = -\frac{3}{80}h^5 f^4(\xi)$

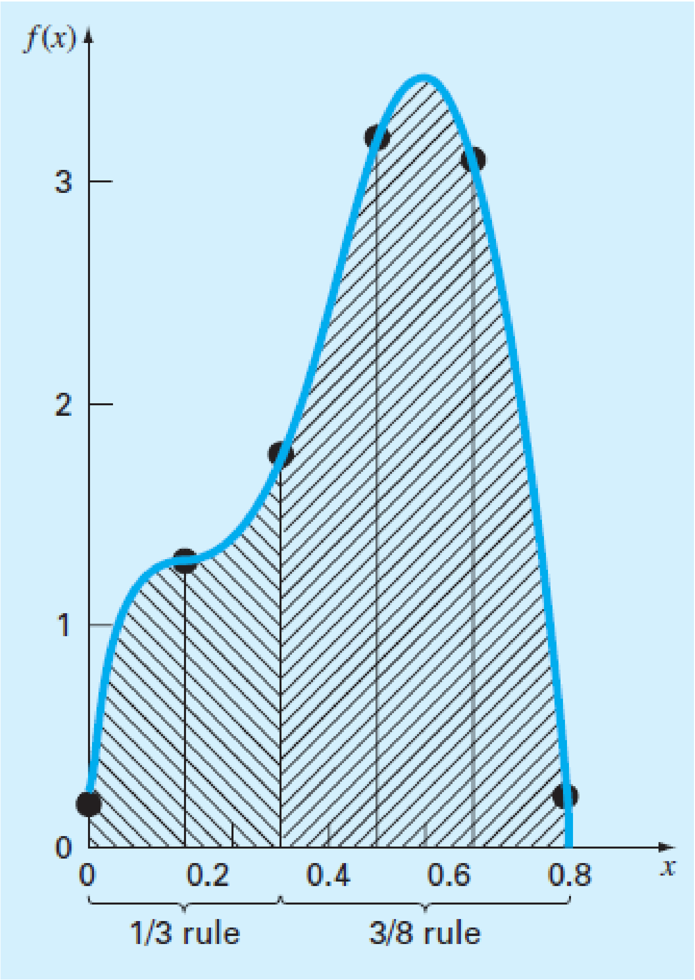
ou,

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^4(\xi) \qquad (xvii)$$

Regra 3/8 de Simpson

- A regra 1/3 de Simpson é o método preferido, pois alcança acurácia de terceira ordem (erro proporcional à quarta derivada) baseada em apenas 3 pontos.

- A regra 3/8 é usada em conjunto com a regra 1/3 quando o número de segmentos é impar, como alternativa a regra do trapézio, de menor acurácia.



Exemplo 3

- Use a regra 3/8 de Simpson em conjunto com a regra 1/3 para obter utilizando 5 segmentos uma estimativa da integral de

$$f(x) = 0{,}2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de 0 a 0,8. O valor exato da integral vale 1,640533.

Solução: Para n = 5 segmentos, h = 0,16:

- *f(0) = 0,2; f(0,16) = 1,296919; f(0,32) = 1,743393;*
- *f(0,48) = 3,186015; f(0,64) = 3,186015; f(0,8) = 0,232.*

Aplicando a regra 1/3 de Simpson aos dois primeiros segmentos (eq. xiii):

$$I = 0{,}32\left[\frac{0{,}2 + 4(1{,}296919) + (1{,}743393)}{6}\right] = 0{,}3803237$$

Exemplo 3

- Para os três últimos segmentos, utiliza-se a regra 3/8 para obter:

$$I = 0{,}48\left[\frac{1{,}743393+3(3{,}186015)+3(3{,}181929)+0{,}232}{8}\right] = 1{,}264754$$

- A integral total é a soma dos resultados anteriores:

$$I_T = 0{,}3803237 + 1{,}264754 = 1{,}645077$$

- O erro verdadeiro será:

$$E_t = 1{,}6405333 - 1{,}645077 = -0{,}00276831 \rightarrow \quad \varepsilon_t = 0{,}28\,\%$$

Integração com segmentos desiguais

- Nesses casos, uma alternativa é empregar a regra do trapézio para cada segmento e somar os resultados::

$$I = h_1 \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \quad (xix)$$

onde h_i é a largura do segmento i:

Integração com segmentos desiguais Exercício

- Utilizando a regra do trapézio, determine a distância percorrida para os seguintes dados de velocidade:

t(s)	1	2	3,25	4,5	6	7	8	8,5	9	10
v(m/s)	5	6	5,5	7	8,5	8	6	7	7	5

Calcule também a velocidade média no percurso.

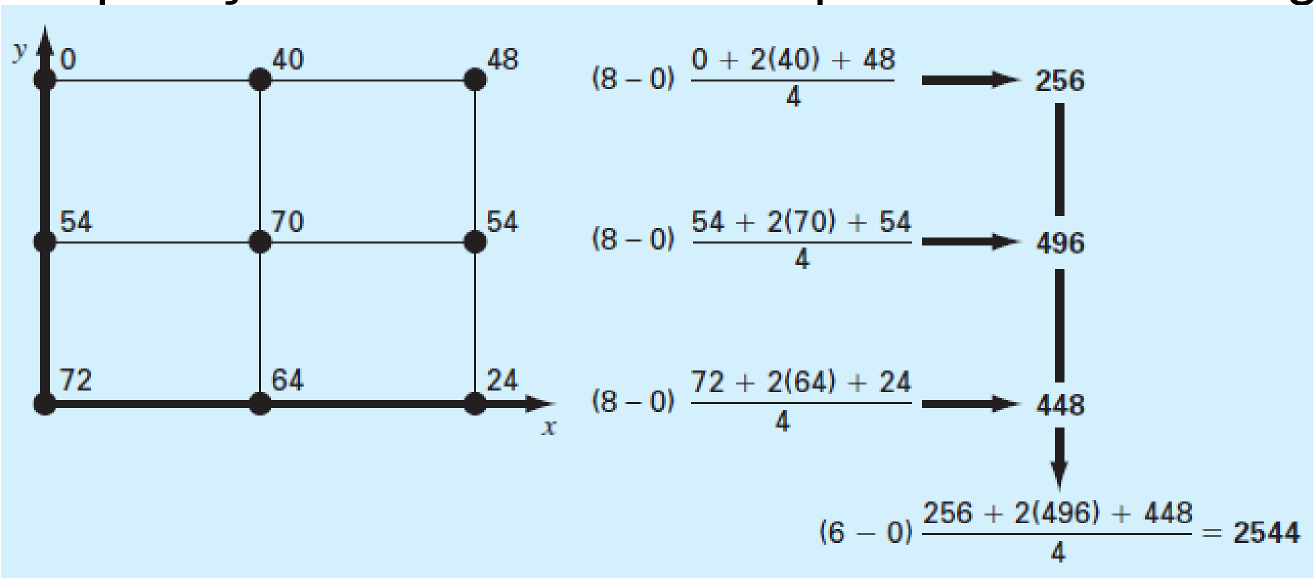
Resposta: $d = 60{,}125\ m$; $v_{med} = 6{,}68\ m/s$

Integração múltipla

- As técnicas discutidas neste capítulo podem ser usada para resolver integrais múltiplas:
  - Por exemplo, para resolver uma integral dupla, aplica-se um dos métodos vistos na primeira dimensão para cada valor da segunda dimensão constante.
  - Depois, o método é aplicado para integrar na segunda dimensão
- Exemplo 4: Considere que a temperatura de uma placa retangular aquecida seja descrita pela seguinte função:$T(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$ Se a placa tiver 8 m de comprimento (x) e 6 m de largura (y), calcule a temperatura média.

Integração múltipla
Exemplo 4

- Utilizar-se-á a regra do trapézio com dois segmentos em cada dimensão. As temperaturas nos valores necessários de x e y, bem como a aplicação do método são esquematizados na figura abaixo.



- Dividindo-se o resultado pela área da placa, obtém-se uma temperatura média igual a 53 ^{0}C.

Integração múltipla
Exercício

- Utilize a regra 3/8 de Simpson para resolver o exemplo anterior.

  Resposta: 58,6667 ^{0}C.

Integração Numérica
Funções Nativas Scilab

- O Scilab oferece a função inttrap para calcular a integral numérica de uma função usando a regra do trapézio. A forma geral da função é

```
[v] = inttrap([x,]y)
```

- Exemplo 5 : Resolva o Exemplo 1 utilizando a função `inttrap`

```
-->x=linspace(0,0.8,5);
-->y = 0.2 +25*x - 200*x^2 + 675*x^3 - 900*x^4 +
400*x^5;
-->I = inttrap(x,y)
 I  =

    1.4848
```

Integração Numérica
Funções Nativas Scilab

- O Scilab oferece a função int2d para calcular a integral dupla. A forma geral da função é

```
[I,err]=int2d(X,Y,f)
```

  onde:

  X é um array 3 por N contendo as abscissas dos vértices dos N triângulos;
- Y é um array 3 por N contendo as ordenadas dos vértices dos N triângulos;
- f é uma função externa definindo o integrando f(u,v);
- I é o valor da integral;
- err é o erro estimado.

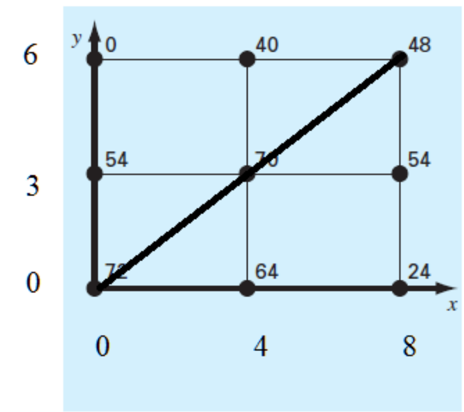
Integração Numérica
Funções Nativas Scilab

- Exemplo 6: Resolva o Exemplo 45 utilizando a função `int2d`

```
-->x=[0,0 ;8,0;8,8];
-->y=[0,0 ;0,6;6,6];
-->deff('z=f(x,y)','z=2*x.*y + 2*x - x^2 -2*y^2 + 72');
-->[I,e]=int2d(x,y,f)
 e  =

     6.253D-13
 I  =

     2816.
```




```
//computa o integrando sobre o retângulo [0 8] x [0 6]
```

Bibliografia e crédito das figuras

- CHAPRA, Steven. **Applied numerical methods with MATHLAB for engineers and scientists.** McGrawHill, 2012.
- CHAPRA, Steven e CANALE, Raymond. **Numerical methods for engineers.** McGrawHill, 2010.