

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Versuch 206

Die Wärmepumpe

Max-Wilhelm Bruker & Christian Jung *

25. Juni 2007

*m.bruker@digitalmedia.de, Christian.Jung@uni-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Grundlagen	3
2.1	Definition der Güteziffer	3
2.2	Beschreibung der verwendeten Wärmepumpe	3
2.3	Bestimmung charakteristischer Größen einer Wärmepumpe	4
3	Auswertung	5
3.1	Berechnung eines Funktionsterms zur Approximation der Messreihen	5
3.2	Berechnung der Zeitableitung der Temperaturen für vier Beispielwerte	5
3.3	Berechnung der Güteziffer der Apparatur für vier Beispielwerte	8
3.4	Berechnung des Massendurchsatzes des Transportgases	8
3.5	Berechnung der mechanischen Leistung des Kompressors	11
4	Diskussion	11
5	Literatur	11

1 Ziel

Eine Wärmepumpe ist eine Apparatur, die durch Aufwendung mechanischer Arbeit dafür sorgt, dass ein Wärmereservoir allein durch Abkühlen eines anderen aufgewärmt wird. In diesem Versuch sollten einige charakteristische Größen für eine Wärmepumpe bestimmt werden.

2 Grundlagen

2.1 Definition der Güteziffer

Bekannterweise fließt Wärme in abgeschlossenen Systemen von alleine nur von „warm“ nach „kalt“. Um diesen Prozess umzukehren, muss Arbeit an dem System geleistet werden. Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt sofort, dass folgende Beziehung zwischen der einem wärmeren Reservoir zugeführten Wärmemenge Q_1 , der einem kälteren Reservoir entnommenen Wärmemenge Q_2 und der dafür aufgewendeten Arbeit A gilt:

$$Q_1 = Q_2 + A \quad (2.1)$$

Aus dem zweiten Hauptsatz folgt weiterhin, dass zwischen den Wärmemengen Q_i und den Temperaturen T_i folgender Zusammenhang besteht (unter der Voraussetzung, dass sich die Temperaturen bei dem Wärmetransport kaum ändern):

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \geq 0 \quad (2.2)$$

Dabei gilt „ \geq “ nur für den Fall eines reversiblen Vorganges, der in der Praxis nicht herstellbar ist. Aus diesen beiden Gleichungen kann man nun die Güteziffer ν der Wärmepumpe errechnen, die wie folgt definiert ist:

$$\nu = \frac{Q_1}{A} \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (2.3)$$

Man sieht sofort, dass die Güteziffer um so größer ist, je kleiner die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Reservoirs ist.

2.2 Beschreibung der verwendeten Wärmepumpe

In diesem Versuch wurde eine Wärmepumpe verwendet, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist. Im Wesentlichen besteht sie aus zwei Wärmereservoirs (gefüllt mit der gleichen Menge Wasser) der Temperaturen T_1 und T_2 sowie einem Gaskreislauf, der für den Wärmetransport zuständig ist. Dieser Kreislauf wird durch ein Drosselventil und einen Kompressor in zwei Bereiche geteilt, die sich durch ihren Druck unterscheiden. Dabei sind diese so eingestellt, dass das Gas bei der Temperatur T_1 und dem Druck p_b flüssig, bei der Temperatur T_2 und dem Druck p_a gasförmig ist. Der Wärmetransport erfolgt somit über die so genannte „Verdampfungswärme“ L des Gases: In Reservoir 2 verdampft das Gas und entzieht dabei diesem Reservoir besagte Verdampfungswärme. Nach Durchlaufen des Kompressors kondensiert das Gas nun in Reservoir 1 und gibt die Verdampfungswärme an das Reservoir ab.

An den Thermometern kann man nun nach Einschalten des Kompressors und der Rührmotoren (die dafür zuständig sind, die Temperatur in den Reservoirs homogen zu halten) die Temperaturen der Reservoirs ablesen. An den Manometern liest man gleichzeitig den Druck ab, und an dem Wattmeter wird die elektrische Leistung des Kompressors angezeigt. Des Weiteren existieren einige weitere Vorrichtungen an der Wärmepumpe, die aber für das Experiment keine

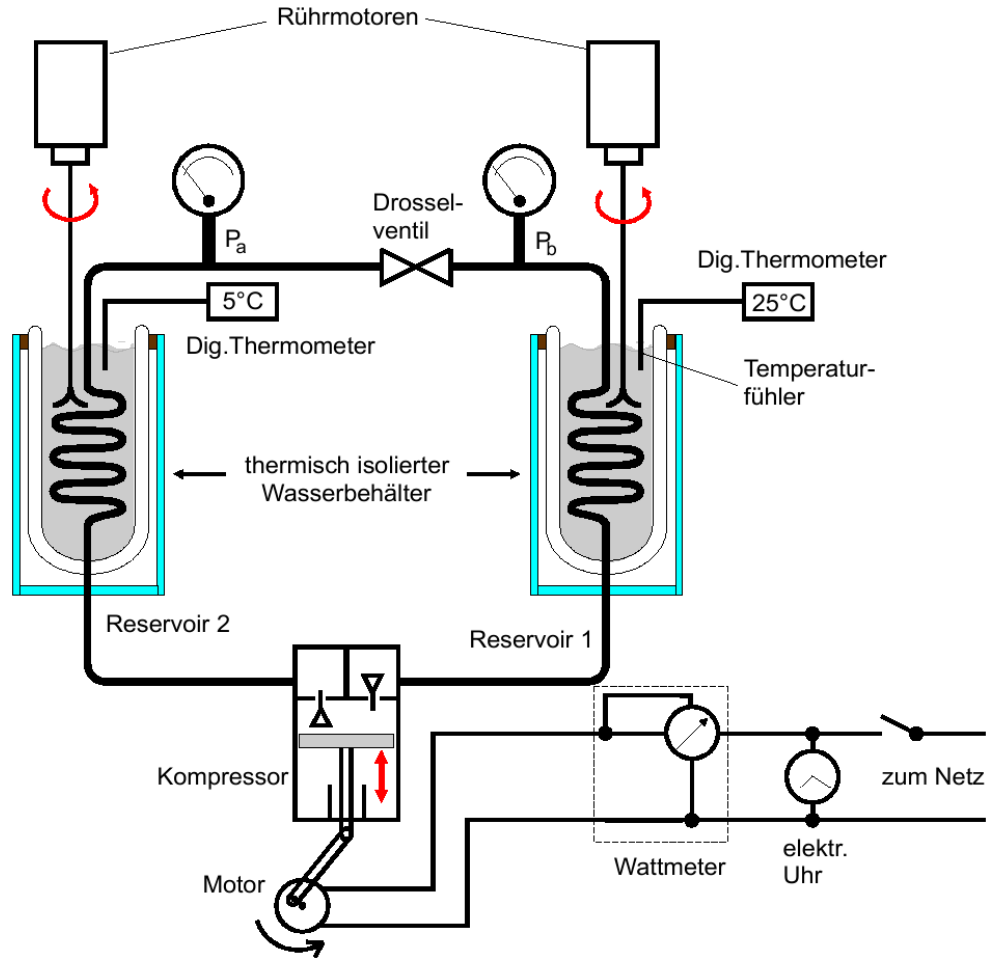


Abbildung 1: Darstellung der verwendeten Wärmepumpe

größere Bedeutung haben. Sie sind für eine korrekte Arbeit der Wärmepumpe allerdings nötig.

2.3 Bestimmung charakteristischer Größen einer Wärmepumpe

Aus einer Messreihe T_1 gegen t kann man wie folgt die Gütezahl der Wärmepumpe errechnen:

$$\nu = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{N \Delta t} \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet der Term in der Klammer die Wärmekapazität des Wassers und der Kupferschlange (und des Eimers); N ist die über das Zeitintervall Δt gemittelte Kompressorleistung. Eine weitere Kenngröße für die Wärmepumpe ist der Massendurchsatz dm/dt des Kompressors, der ein Maß dafür ist, wie schnell die Wärmepumpe arbeitet. Ihn kann man wie folgt aus einer Messreihe von T_2 gegen t ermitteln:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{L} (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Die Verdampfungswärme L lässt sich aus den (p, T) -Wertepaaren mittels Ausgleichsrechnung

ermitteln, da diese Größen wie folgt voneinander abhängen:

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{L}{R} \frac{1}{T} \right) \quad (2.6)$$

Dabei ist R die allgemeine Gaskonstante.

Als letzte Kenngröße soll die mechanische Kompressorleistung N_m bestimmt werden. Unter Annahme eines adiabatischen Kompressionsvorganges lässt sich diese Größe wie folgt aus dem Massendurchsatz des Kompressors errechnen:

$$N_m = \frac{1}{\rho(\kappa - 1)} \left(p_b \sqrt{\frac{p_b}{p_a}} - p_a \right) \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (2.7)$$

Hierin bezeichnet ρ die Dichte des Stoffes beim Druck p_a und κ das Verhältnis der Molwärmen c_p und c_v .

Abschließend bleibt zu sagen, dass man, wenn man es schafft, die Messreihen T_i gegen t durch Funktionen anzunähern, alle Differenzenquotienten in diesem Kapitel durch Differentialquotienten ersetzen kann.

3 Auswertung

3.1 Berechnung eines Funktionsterms zur Approximation der Messreihen

Es soll als Erstes eine Funktion gefunden werden, die die Zeitabhängigkeit der Temperaturen T_1 und T_2 möglichst gut wiedergibt. Hierzu verwenden wir ein Polynom zweiten Grades:

$$T_i(t) = A_i t^2 + B_i t + C_i. \quad (3.1)$$

Eine nichtlineare Ausgleichsrechnung¹ liefert folgende Werte für die Koeffizienten:

$$A_1 = (-4,51 \pm 0,09) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2 \quad (3.2)$$

$$B_1 = (2,44 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ K/s} \quad (3.3)$$

$$C_1 = (295,10 \pm 0,06) \text{ K} \quad (3.4)$$

$$A_2 = (3,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} \text{ K/s}^2 \quad (3.5)$$

$$B_2 = (1,63 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ K/s} \quad (3.6)$$

$$C_2 = (295,13 \pm 0,07) \text{ K} \quad (3.7)$$

Die Messwerte und die dazugehörigen Ausgleichskurven sind in Abbildung 2 grafisch dargestellt. Da die Kurven gut durch die Messwerte verlaufen, ist davon auszugehen, dass der Ansatz sinnvoll gewählt wurde.

3.2 Berechnung der Zeitableitung der Temperaturen für vier Beispielwerte

Die folgenden Berechnungen werden exemplarisch für die Zeiten 360 s, 720 s, 1080 s und 1440 s durchgeführt. Zunächst soll die Zeitableitung der Temperaturen T_1 und T_2 für diese Zeiten bestimmt werden. Die Zeitableitung der Ausgleichsfunktion ist

$$\frac{dT_i}{dt} = 2A_i t + B_i. \quad (3.8)$$

¹Wir führen alle Ausgleichsrechnungen mit GNUplot 4.0 durch.

t [s]	T_1 [K]	p_b [bar]	T_2 [K]	p_a [bar]	N_{el} [W]
60	296,55	6,4	294,55	5,9	125
120	297,85	6,7	293,25	5,0	127
180	299,25	6,9	292,25	5,0	128
240	300,65	7,1	291,35	5,0	128
300	302,05	7,2	290,45	4,8	128
360	303,25	7,7	289,65	4,8	127
420	304,65	7,9	288,85	4,6	127
480	305,75	8,2	288,15	4,6	126
540	307,05	8,3	287,45	4,5	126
600	308,15	8,6	286,75	4,4	125
660	309,35	8,8	286,05	4,4	125
720	310,35	9,1	285,45	4,2	125
780	311,45	9,2	284,85	4,2	125
840	312,45	9,5	284,25	4,2	125
900	313,45	9,8	283,65	4,0	125
960	314,35	10,0	283,15	4,0	125
1020	315,15	10,2	282,65	4,0	125
1080	316,05	10,3	282,15	4,0	125
1140	316,85	10,6	281,75	4,0	125
1200	317,75	10,8	281,25	3,9	125
1260	318,55	10,9	280,95	3,9	125
1320	319,35	11,2	280,55	3,8	125
1380	320,15	11,3	280,15	3,8	125
1440	320,85	11,6	279,75	3,8	125
1500	321,55	11,8	279,45	3,8	125
1560	322,25	12,0	279,25	3,8	125
1620	322,85	12,0	278,95	3,8	125

Tabelle 1: Messwerte

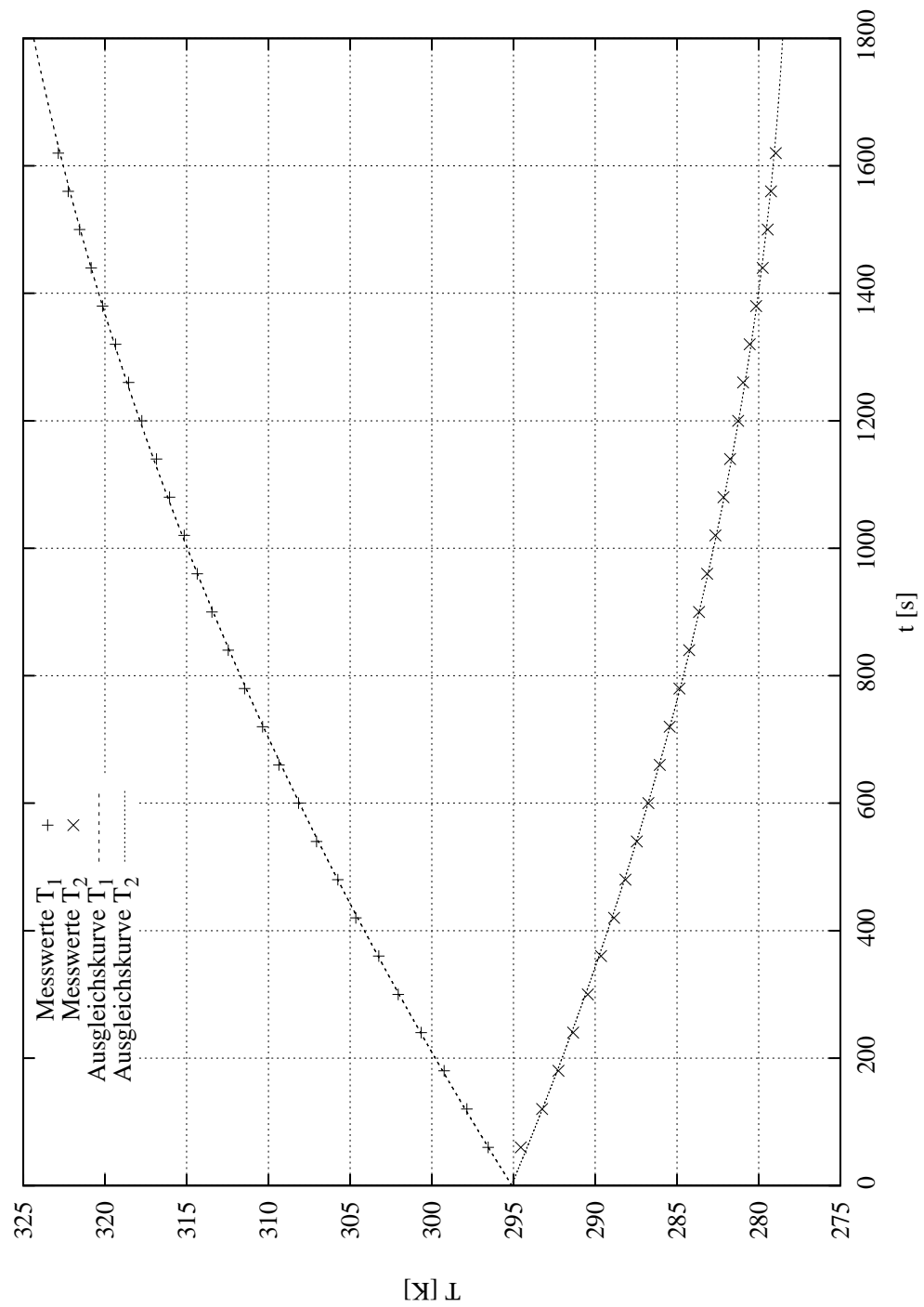
Der Fehler ergibt sich nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\frac{dT_i}{dt}} = \sqrt{4t^2\sigma_{A_i}^2 + \sigma_{B_i}^2}. \quad (3.9)$$

Wir erhalten damit die in Tabelle 2 aufgeführten Werte.

t [s]	T_1 [K]	$\frac{dT_1}{dt}$ [$10^{-2} \frac{K}{s}$]	T_2 [K]	$\frac{dT_2}{dt}$ [$10^{-2} \frac{K}{s}$]
360	303,25	$2,11 \pm 0,02$	289,65	$-1,35 \pm 0,02$
720	310,35	$1,79 \pm 0,02$	285,45	$-1,06 \pm 0,02$
1080	316,05	$1,46 \pm 0,02$	282,15	$-0,78 \pm 0,03$
1440	320,85	$1,14 \pm 0,03$	279,75	$-0,50 \pm 0,04$

Tabelle 2: Werte der Zeitableitung der Temperaturfunktionen

Abbildung 2: Messwerte und Ausgleichskurven für $T_1(t)$ und $T_2(t)$

3.3 Berechnung der Gütezahl der Apparatur für vier Beispielwerte

t [s]	T_1 [K]	T_2 [K]	ν_{exp}	ν_{theor}
360	303,25	289,65	$2,90 \pm 0,02$	22,30
720	310,35	285,45	$2,49 \pm 0,03$	12,46
1080	316,05	282,15	$2,04 \pm 0,03$	9,32
1440	320,85	279,75	$1,59 \pm 0,04$	7,81

Tabelle 3: Güteziffern für vier Beispieltemperaturen

Es sollen als Nächstes die zu den Beispielwerten gehörenden Güteziffern der Apparatur bestimmt werden. Diese werden nach Gleichung (2.4) berechnet, wobei sich der Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung wie folgt ergibt:

$$\sigma_{\nu_{\text{exp}}} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{1}{N} \sigma_{\frac{dT_1}{dt}}. \quad (3.10)$$

Die Größe $m_k c_k$ ist mit

$$m_k c_k = 750 \text{ J/K} \quad (3.11)$$

angegeben. Die Größe $m_1 c_w = V_1 \rho_w c_w$, wobei $\rho_w = 998 \text{ kg/m}^3$ die Dichte von Wasser und $c_w = 4180 \text{ J/kgK}$ die spezifische Wärmekapazität von Wasser sind, hat den Wert

$$m_1 c_w = 16687 \text{ J/K}. \quad (3.12)$$

Für das Volumen V_1 wurde dabei 4l eingesetzt.

Wir erhalten für die Gütezahl die in Tabelle 3 aufgeführten Werte. Zwecks Vergleichbarkeit sind die nach Gleichung (2.3) berechneten theoretischen Werte daneben angegeben. Es ist eine erhebliche Abweichung zu sehen.

3.4 Berechnung des Massendurchsatzes des Transportgases

Es soll nun der Massendurchsatz des Transportgases für die vier Beispieltemperaturen berechnet werden. Hierzu ist es nötig, die Verdampfungswärme des Transportgases zu kennen. Diese lässt sich nach (2.6) aus den (T_1, p_b) -Wertepaaren errechnen. Durch Logarithmieren dieser Gleichung erhält man den Zusammenhang

$$\ln \left(\frac{p_b}{[p_b]} \right) = \ln \left(\frac{p_0}{[p_0]} \right) - \frac{L}{R} \frac{1}{T_1}. \quad (3.13)$$

Da dies eine Geradengleichung ist, lässt sich damit eine lineare Regression durchführen. Die dafür benötigten Zwischenergebnisse sind in Tabelle 4 aufgeführt. Die lineare Regression liefert folgendes Ergebnis:

$$\left(\frac{L}{R} \right)_{\text{exp}} = (2309 \pm 19) \text{ K}, \quad (3.14)$$

$$\ln \left(\frac{p_0}{[p_0]} \right)_{\text{exp}} = 21,16 \pm 0,06. \quad (3.15)$$

Die für diese Ausgleichsrechnung verwendeten Werte und die ermittelte Ausgleichsgerade sind in Diagramm 3 grafisch dargestellt.

T_1 [K]	p_b [Pa]	T_1^{-1} [K ⁻¹]	$\ln\left(\frac{p_b}{[p_b]}\right)$	T_1 [K]	p_b [Pa]	T_1^{-1} [K ⁻¹]	$\ln\left(\frac{p_b}{[p_b]}\right)$
296,55	640000	0,00337	13,37	313,45	980000	0,00319	13,80
297,85	670000	0,00336	13,42	314,35	1000000	0,00318	13,82
299,25	690000	0,00334	13,44	315,15	1020000	0,00317	13,84
300,65	710000	0,00333	13,47	316,05	1030000	0,00316	13,84
302,05	720000	0,00331	13,49	316,85	1060000	0,00316	13,87
303,25	770000	0,00330	13,55	317,75	1080000	0,00315	13,89
304,65	790000	0,00328	13,58	318,55	1090000	0,00314	13,90
305,75	820000	0,00327	13,62	319,35	1120000	0,00313	13,93
307,05	830000	0,00326	13,63	320,15	1130000	0,00312	13,94
308,15	860000	0,00325	13,66	320,85	1160000	0,00312	13,96
309,35	880000	0,00323	13,69	321,55	1180000	0,00311	13,98
310,35	910000	0,00322	13,72	322,25	1200000	0,00310	14,00
311,45	920000	0,00321	13,73	322,85	1200000	0,00310	14,00
312,45	950000	0,00320	13,76				

Tabelle 4: Zwischenwerte für die lineare Regression zur Berechnung der Verdampfungswärme

Mit $R = 8,31441 \text{ J/K}\cdot\text{mol}$ ergibt sich damit für die Verdampfungswärme L :

$$L = \left(\frac{L}{R}\right)_{\text{exp}} R = (1,92 \pm 0,02) \text{ J/mol}, \quad (3.16)$$

wobei der Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_L = \sigma\left(\frac{L}{R}\right)_{\text{exp}} R \quad (3.17)$$

berechnet wird. Es lassen sich nun die Massendurchsätze für die Beispielttemperaturen mit Gleichung (2.5) berechnen. Der Fehler ist nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_{\frac{dm}{dt}} = (m_2 c_w + c_k m_k) \sqrt{\left(\frac{dT_2}{dt} \frac{\sigma_L}{L^2}\right)^2 + \left(\sigma_{\frac{dT_2}{dt}} \frac{1}{L}\right)^2} \quad (3.18)$$

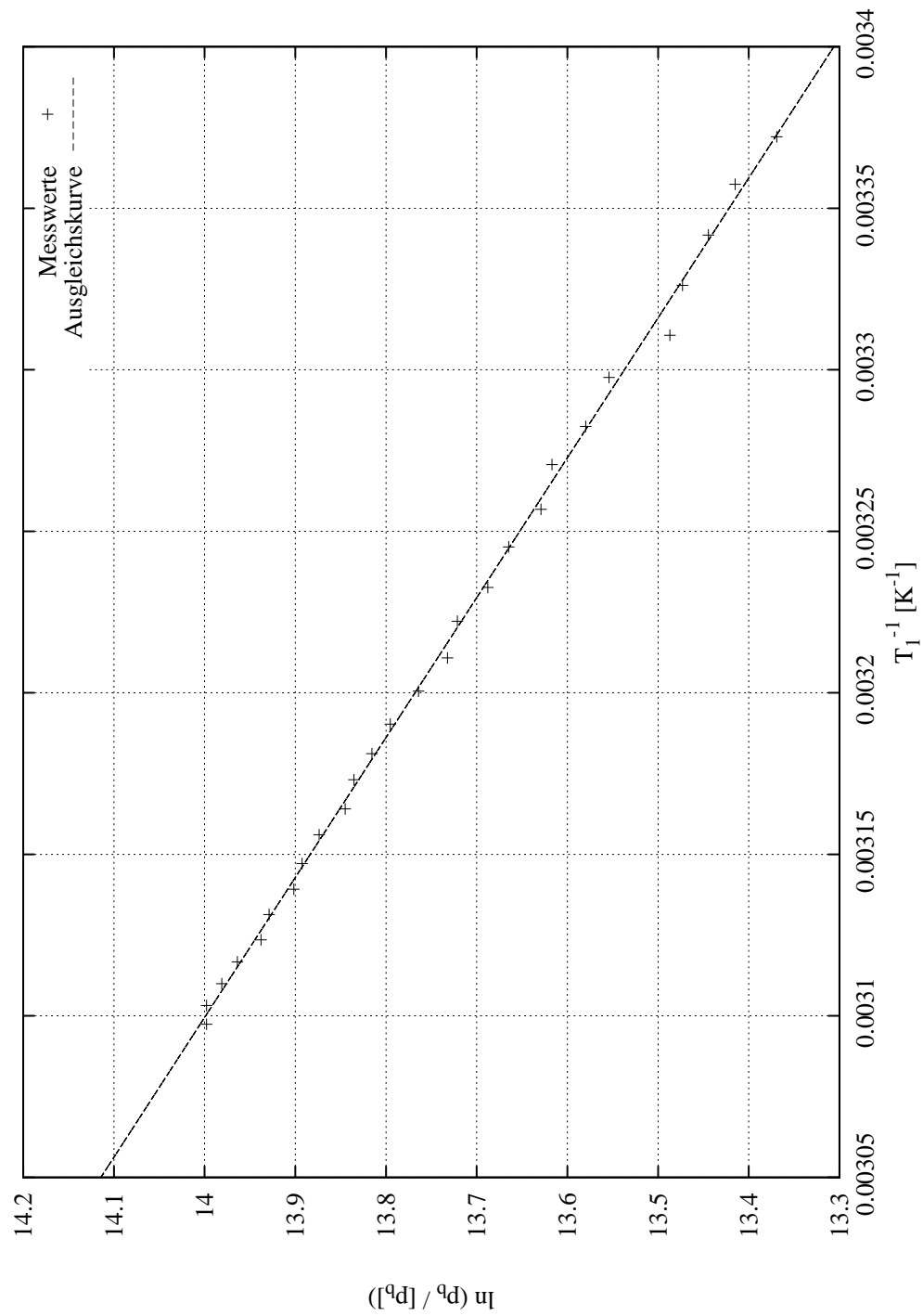
gegeben ist. Da die Füllmengen der beiden Eimer gleich sind, setzen wir $m_1 = m_2$. Die so erhaltenen Werte sind in Tabelle 5 aufgeführt. Zur Umrechnung der Ergebnisse von mol/s nach g/s wird die molare Masse $m_{\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}}$ benötigt, die gemäß [3] durch

$$m_{\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}} = 120,914 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad (3.19)$$

gegeben ist.

T_2 [K]	$\frac{dT_2}{dt}$ [10^{-2} K/s]	$\frac{dm}{dt}$ [10^{-2} mol/s]	$\frac{dm}{dt}$ [$\frac{\text{g}}{\text{s}}$]
289,65	-1,35	$1,22 \pm 0,02$	$1,48 \pm 0,03$
285,45	-1,06	$0,97 \pm 0,02$	$1,17 \pm 0,03$
282,15	-0,78	$0,71 \pm 0,02$	$0,86 \pm 0,03$
279,75	-0,50	$0,45 \pm 0,03$	$0,55 \pm 0,04$

Tabelle 5: Werte des Massendurchsatzes bei den Beispielttemperaturen

Abbildung 3: Transformierte Messwerte und Ausgleichskurve für $p_b(T_1)$

3.5 Berechnung der mechanischen Leistung des Kompressors

Zuletzt soll die mechanische Leistung des Kompressors für die Beispielttemperaturen nach Gleichung (2.7) errechnet werden. Der Fehler wird nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung durch

$$\sigma_{N_m} = \frac{1}{\rho(\kappa - 1)} \left(p_b \sqrt{\frac{p_b}{p_a}} - p_a \right) \sigma_{\frac{dm}{dt}} \quad (3.20)$$

berechnet. Es muss die Dichte des Gases bekannt sein, die durch

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0 p_a}{p_0 T_2} \quad (3.21)$$

berechnet wird, wobei die auftretenden Konstanten durch

$$\rho_0 = 5,51 \text{ kg/m}^3, \quad (3.22)$$

$$T_0 = 273,15 \text{ K}, \quad (3.23)$$

$$p_0 = 1 \text{ bar}, \quad (3.24)$$

$$\kappa = 1,14 \quad (3.25)$$

gegeben sind. Die für die Berechnung benötigten Werte und die Ergebnisse sind in Tabelle 6 aufgeführt.

T_2 [K]	p_a [bar]	p_b [bar]	ρ [$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$]	N_m [W]
289,65	4,8	7,7	24,9	$12,2 \pm 0,2$
285,45	4,2	9,1	22,1	$15,8 \pm 0,4$
282,15	4,0	10,3	21,3	$14,1 \pm 0,5$
279,75	3,8	11,6	20,4	$10,6 \pm 0,8$

Tabelle 6: Mechanische Kompressorleistung bei den Beispielttemperaturen

4 Diskussion

Es sind in allen Bereichen deutliche Abweichungen von den Theoriewerten zu beobachten. Dies ist vermutlich zum größten Teil auf eine nicht ideale Isolation der Apparatur, insbesondere der Wärmereservoirs, zurückzuführen. An der geringen mechanischen Leistung des Kompressors können auch Reibungsverluste und ohmsche Verluste beteiligt sein.

5 Literatur

- [1] Versuch 206—Die Wärmepumpe.
<http://berniers-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Waermelehre/Versuch%20Nr.206.pdf>, Stand: 24.06.2007
- [2] Versuch 203—Verdampfungswärme und Dampfdruckkurve.
<http://berniers-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Waermelehre/Versuch%20Nr.203.pdf>, Stand: 24.06.2007
- [3] Molekulare Masse von $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$.
<http://www.chemie.fu-berlin.de/cgi-bin/molform?Cl2F2C>
- [4] Tilo Fischer, Hans-Jerg Dorn, Physikalische Formeln und Daten, 1. Auflage, 1982