

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Versuch 301
EMK und Innenwiderstand von
Spannungsquellen

André Jagiolka Matrikelnr.: 0118775 andre.jagiolka@uni-dortmund.de	Britt-Marie Meiners Matrikelnr.: 0118377 inkino@hotmail.com
--	---

Durchführung: 07.11.2006
Abgabe: 14.11.2006

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	5
3.1 Monozelle	5
3.2 Generator	5
4 Auswertung	6
4.1 Innenwiderstand	6
4.1.1 Monozelle ohne Gegenspannung	6
4.1.2 Monozelle mit Gegenspannung	7
4.1.3 Rechteckspannung	10
4.1.4 Sinusspannung	10
4.2 Systematischer Fehler von U_0	13
4.3 Leistung der Monozelle	13
4.4 Systematischer Fehler von Punkt H	16
5 Diskussion	16
6 Anhang	16

1 Einleitung

In diesem Versuch sollen die charakteristischen Eigenschaften einer realen Spannungsquelle bestimmt werden. Stichwörter dazu sind *Leerlaufspannung* und *Innenwiderstand*.

2 Theorie

Misst man die Spannung (hier: *Klemmspannung*) einer idealen Spannungsquelle, so ist diese gleich der Leerlaufspannung U_0 . Betrachten wir jedoch eine reale Spannungsquelle, so liegt die Klemmspannung bei Belastung durch einen Verbraucher unter dem zu erwartendem Wert für U_0 . Außerdem ist daran zu erkennen, dass die Klemmspannung von dem Widerstand des Verbrauchers R_a abhängen muss.

Der beschriebene Spannungsabfall zwischen U_0 und U_k kann auf einen Innenwiderstand R_i der Spannungsquelle zurückgeführt werden. Da man eine reale Spannungsquelle als Reihenschaltung der idealen Spannungsquelle mit R_i darstellen kann, gilt folgendes Schaltbild:

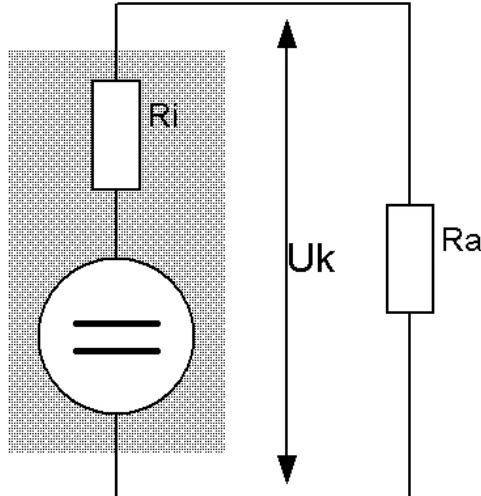


Abbildung 1: Aufbau einer realen Spannungsquelle

Anhand der KIRCHHOFF'schen Maschenregel bekommt man für U_0 :

$$U_0 = I \cdot R_a + I \cdot R_i \quad (2.1)$$

Es gilt für die gemessene Klemmspannung U_k :

$$U_k = I \cdot R_a \quad (2.2)$$

Somit ergibt sich auf Gleichung (2.1):

$$U_k = U_0 - I \cdot R_i \quad (2.3)$$

$$I \cdot R_a = U_0 - I \cdot R_i \quad (2.4)$$

Nun ist aus der letzten Gleichung ersichtlich, warum die Klemmspannung abfallen muss, sobald ein Strom durch R_a fließt. Möchten wir an dieser Stelle jedoch die Leerlaufspannung direkt messen, so muss dafür der Strom I gegen Null gehen. Dies erreichen wir indem ein möglichst hochohmiges Messgerät verwendet wird. Somit kann aus Gleichung (2.3) approximiert werden:

$$U_k \approx U_0 \quad (2.5)$$

Durch den Innenwiderstand der Spannungsquelle wird verhindert, dass über die Spannungsquelle eine wahlweise hohe Leistung entnommen werden kann. Dazu lässt sich die Leistung am Lastwiderstand mit Gleichung (2.7) berechnen.

$$P = U_k \cdot I \quad (2.6)$$

$$= I^2 \cdot R_a \quad (2.7)$$

Indem man Gleichung (2.4) nach I umstellt und in Gleichung (2.7) einsetzt, so erhält man

$$P = \frac{U_0^2 \cdot R_a}{(R_a + R_i)^2} \quad (2.8)$$

Berechnen wir nun die maximale Leistung. Dazu leiten wir die vorangegangene Gleichung nach R_a ab und setzen sich gleich null

$$\frac{\partial P}{\partial R_a} = \frac{U_0^2 \cdot (R_a + R_i)^2 - 2 \cdot (R_a + R_i) \cdot U_0^2 \cdot R_a}{(R_a + R_i)^4} \quad (2.9)$$

$$= \frac{R_1 - R_a}{(R_a + R_i)^2} \cdot U_0^2 = 0 \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow R_a = R_i \quad (2.11)$$

Das Maximum der Leistung liegt vor, wenn Innen- und Außenwiderstand gleich sind. Man spricht hier von *Leistungsanpassung*. Also beträgt die maximale Leistung

$$P = \frac{U_0^2 \cdot R_i}{(R_i + R_i)^2} \quad (2.12)$$

$$= \frac{U_0^2}{4R_i} \quad (2.13)$$

Bezüglich der Starkstromtechnik ist diese Leistungsanpassung nicht interessant. Aufgrund des hohen Stromes ist ohne eine weitere Anpassung, wie der Wahl des Leitungsquerschnittes und somit dem Eigenwiderstand der Leitung, eine hohe Verlustleistung zu erwarten.

3 Durchführung

Man nimmt 4 Messreihen auf, um an die jeweilige Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i zu bekommen; gemessen wird die Spannung U_k in Volt und der Strom I in Ampère. Bevor man mit der Messung beginnt, muss man sich einige andere wichtige Werte notieren, wie die Fehler des Messbereichs für Spannungs und Strom, so wie den Widerstand des Voltmeters R_V und die Gegenspannung U_G .

3.1 Monozelle

Als erstes wird die Leerlaufspannung der Monozelle mit dem Voltmeter gemessen. Dafür verbindet man nur das Voltmeter mit der Monozelle verbinden.

Dann werden die Geräte nach dem Schaltbild verbunden, wobei der regelbare Widerstand zwischen $0 - 50\Omega$ liegt:

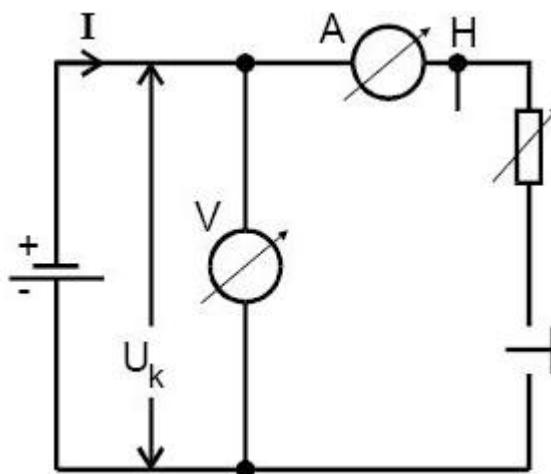


Abbildung 2: Schaltplan ohne Gegenspannung

Nun kann man die Meßwerte aufnehmen, indem man den Widerstand varriert. Wobei man eine Unterteilung von $\frac{1}{3}$ zu $\frac{2}{3}$ der Messwerte für den oberen Ω -Bereich zum unteren einhalten sollte. Wenn dies geschehen ist, steckt man nun die Apperaturen für die neue Messreihe um:

Nun schaltet man die Gegenspannung ein und nimmt Messwerte auf, die auch wieder das gleich Verhältniss des Ohm-Bereiches haben sollten.

3.2 Generator

Anstelle der Monozelle schließt man nun den Generator an. Hier kann man zwischen Rechteck- und Sinusspannung wählen, also nimmt man jeweils eine Messreihe mit der gleichen Verteilung, wie bei der Monozelle auf, wobei der Widerstand bei der Rechteckspannung zwischen $20 - 250\Omega$ und bei der Sinusspannung zwischen $0,1 - 5k\Omega$ liegt.

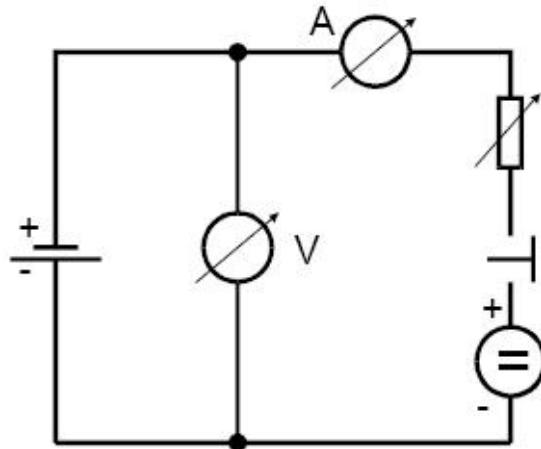


Abbildung 3: Schaltplan mit Gegenspannung

4 Auswertung

Die Multimeter haben einen Eichfehler von 3% auf den Maximalausschlag.

4.1 Innenwiderstand

4.1.1 Monozelle ohne Gegenspannung

Direktmessung der Leerlaufspannung

Die gemessene Leerlaufspannung hat bei einem Innenwiderstand $R_v = 10M\Omega$ einen Wert von:

$$U_0 = 1,51 \pm 0,01V$$

Klemmspannungen

Alle Spannungswerte haben einen Ablesefehler von $\pm 0,01V$. Bei den Stromwerten verändert sich dieser, da dort der Messbereich geändert wurde. Dies bedeutet von Messwert 1-2 beträgt der Ablesefehler 0,0005A, von 3-12 0,001A und von 13-15 0,005A.

Der Graph zeigt die Werte aus der Tabelle, wobei der Strom I gegen die Klemmspannung U_k aufgetragen ist. Mit Hilfe der Linearisierung, welche mit ORIGIN erstellt wurde, kann man nun die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i angeben. Denn der Y-Achsenabschnitt gibt U_0 und der Betrag der Steigung R_i an, so dass man zu folgenden Werten gelangt:

$$R_i = 6,007 \pm 0,052\Omega$$

$$U_0 = 1,537 \pm 0,004V$$

Diese werden mit den folgenden Formeln berechnet:

$$\bar{m} = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\bar{b} = \bar{y} - \bar{mx}$$

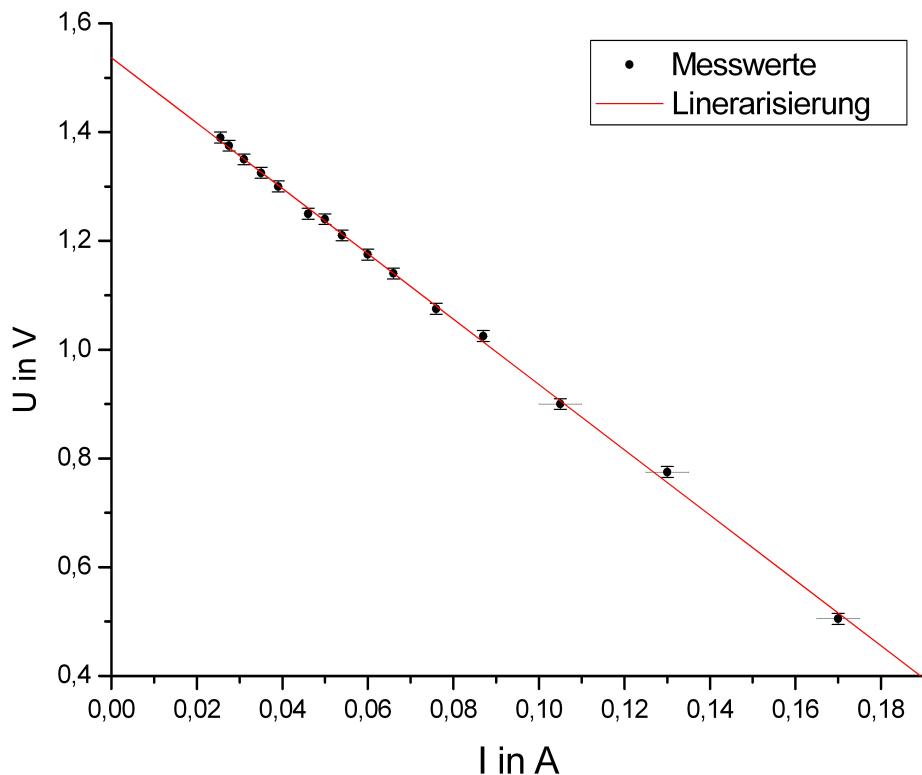


Abbildung 4: Spannung gegen Strom der Monozelle

4.1.2 Monozelle mit Gegenspannung

Alle Messwerte für die Spannung haben einen Ablesefehler von $\pm 0,01V$. Beim Strom ändert sich dieser, weil auch hier der Messbereich geändert wurde. Das heißt von 1-12 beträgt der Ablesefehler $0,001A$ und von 13-15 $0,005A$.

Auch hier erstellt man die Linearisierung um die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand zu erhalten, wobei diese natürlich die gleichen Werte ergeben müssen wie bei der Monozelle ohne Gegenspannung, da immernoch die selbe Spannungsquelle gemessen wird.

$$R_i = 6,037 \pm 0,052\Omega$$

$$U_0 = 1,531 \pm 0,004V$$

U_k [V]	I [10^{-1} A]
1,390	0,255
1,375	0,275
1,350	0,310
1,325	0,350
1,300	0,390
1,250	0,460
1,240	0,500
1,210	0,540
1,175	0,600
1,140	0,660
1,075	0,760
1,025	0,870
0,900	1,050
0,775	1,300
0,505	1,700

Tabelle 1: Spannung und Strom der Monozelle

U_k [V]	I [10^{-1} A]
1,720	0,315
1,725	0,335
1,775	0,380
1,790	0,420
1,820	0,465
1,860	0,550
1,890	0,595
1,920	0,645
1,950	0,715
2,000	0,795
2,075	0,895
2,150	1,010
2,290	1,250
2,480	1,600
2,750	2,000

Tabelle 2: Spannung und Strom der Monozelle mit Gegenspannung

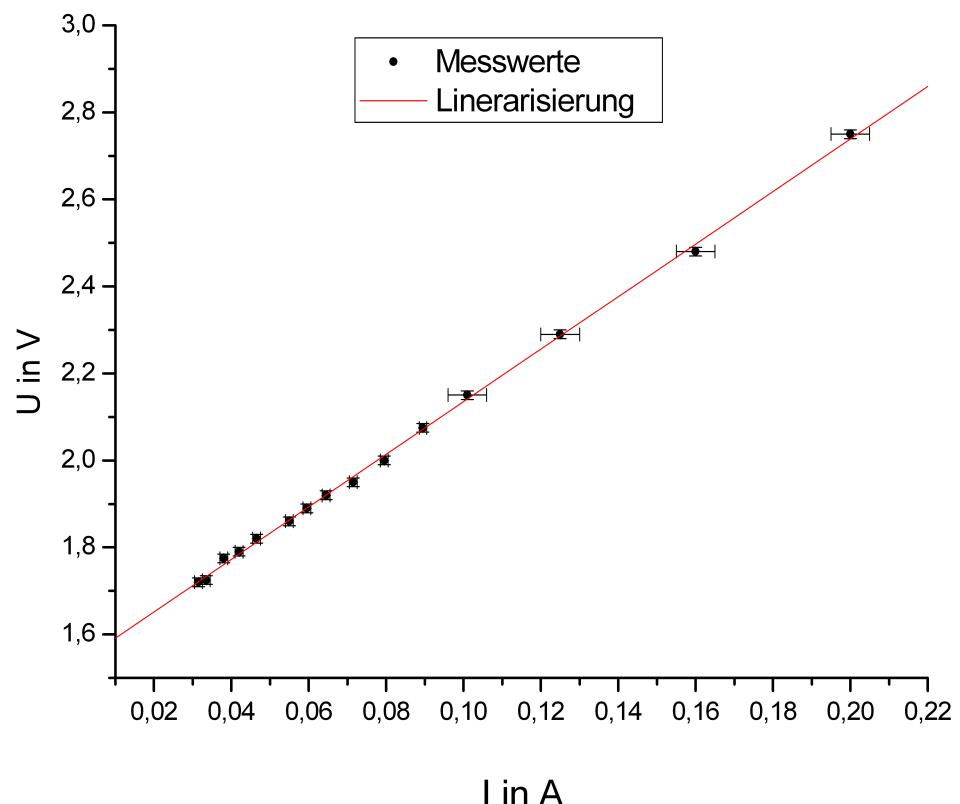


Abbildung 5: Monozelle mit Gegenspannung – Messwerte mit Ausgleichsgerade

4.1.3 Rechteckspannung

Bei der Spannung haben alle Messwerte einen Ablesefehler von $\pm 0,005V$, wobei beim Strom wieder der Messbereich geändert wurde und folglich die Messwerte von 1-12 einen Ablesefehler $0,00005A$, und von 13-15 $0,0001A$, haben.

U_k [V]	I [$10^{-3}A$]
0,335	1,10
0,330	1,15
0,325	1,20
0,320	1,35
0,310	1,50
0,295	1,75
0,285	1,90
0,280	2,00
0,270	2,20
0,250	2,55
0,245	2,65
0,230	2,90
0,220	3,35
0,185	4,00
0,120	5,15

Tabelle 3: Spannung und Strom der Rechteckschwingung

Aus dieser Linearisierung ergibt sich nun:

$$R_i = 51,842 \pm 0,985V$$

$$U_0 = 0,387 \pm 0,003\Omega$$

4.1.4 Sinusspannung

Alle Spannungswerte haben einen Ablesefehler von $\pm 0,005V$. Bei den Stromwerten ändert sich dieser, weil dort der Messbereich geändert wurde.

Die hat zur Folge, dass der Ablesefehler von 1-13 $0,00001A$ und von 13-15 $0,0001A$ beträgt.

Die Linearisierung zeigt:

$$R_i = 628,162 \pm 0,470V$$

$$U_0 = 0,560 \pm 0,001\Omega$$

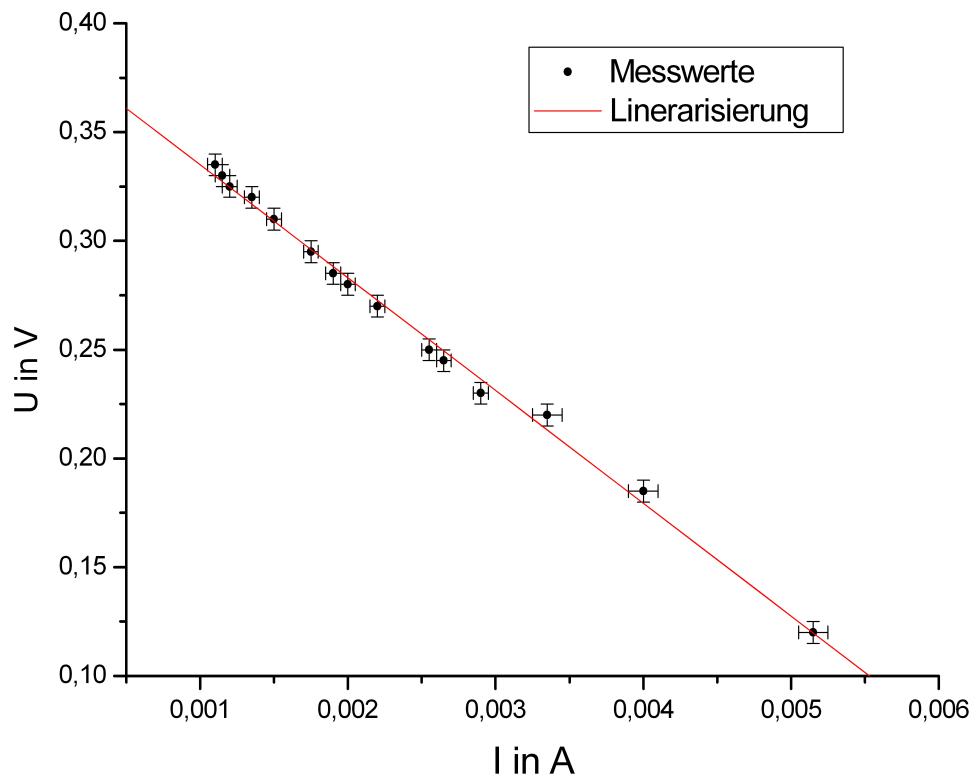


Abbildung 6: Rechteck Signal – Messwerte mit Ausgleichsgerade

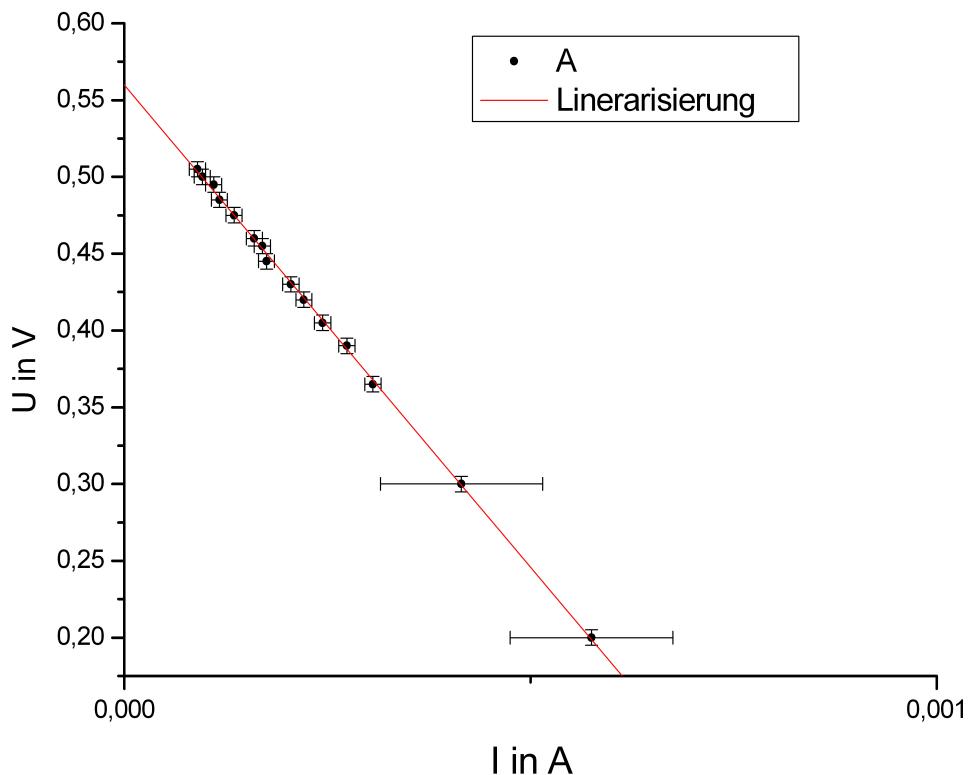


Abbildung 7: Sinus Signal – Messwerte mit Ausgleichsgerade

4.2 Systematischer Fehler von U_0

Bei der direkten Messung von U_0 sind wir einen systematischen Fehler eingegangen, weil der Innenwiderstand des Voltmeters nicht unendlich ist, wie er laut Theorie für eine korrekte, direkte Messung sein müsste. Also berechnen wir jetzt mit der Formel den "wahren" Wert für U_0 .

Mit $R_{iv} = 10M\Omega$ ist

$$U_0 = U_k * \left(1 + \frac{R_i}{R_{iv}}\right) U_0 = 1,504999$$

Wie man sieht ist der Unterschied so gering, dass man ihn vernachlässigen kann.

4.3 Leistung der Monozelle

Um die Leistung der Monozelle zu berechnen, benötigt man die Formeln für den Belastungswiderstand R_a und die experimentelle und theoretische Leistung:

$$R_a = \frac{U_k}{I}$$

$$P_{exp} = U_k I$$

$$P_{theo} = \frac{U_0^2 R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

U_k [V]	I [10^{-4} A]
0,505	0,90
0,500	0,96
0,495	1,10
0,485	1,17
0,475	1,35
0,460	1,60
0,455	1,70
0,445	1,75
0,430	2,05
0,420	2,21
0,405	2,44
0,390	2,74
0,365	3,06
0,300	4,15
0,200	5,75

Tabelle 4: Spannung und Strom der Sinusschwingung

P_{ex} [$10^{-2}W$]	P_{theo} [$10^{-2}W$]	R_a [Ω]
3,5	3,5	54,510
3,8	3,7	50,000
4,2	4,2	43,548
4,6	4,6	37,857
5,1	5,1	33,333
5,8	5,8	27,174
6,2	6,1	24,800
6,5	6,5	22,407
7,1	7,0	19,583
7,5	7,5	17,273
8,2	8,2	14,145
8,9	8,7	11,782
9,5	9,5	8,571
10,1	9,8	5,962
8,6	8,6	2,971

Tabelle 5: Leistung der Monozelle

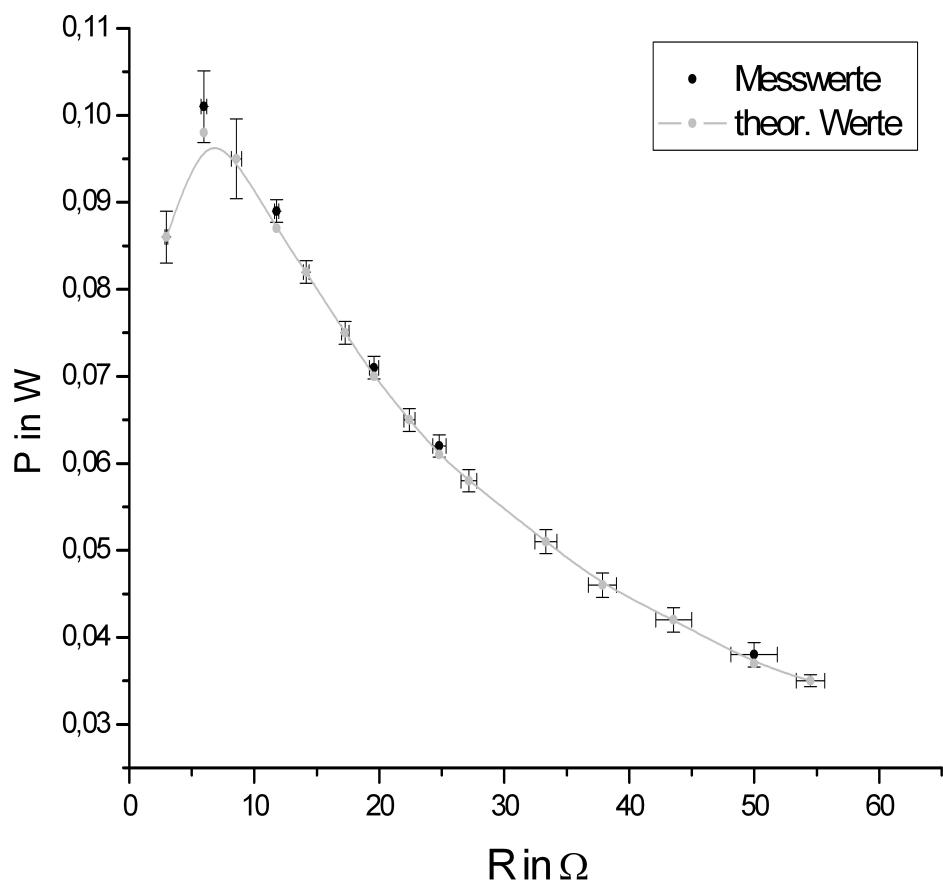


Abbildung 8: Leistung – theoretische Werte und Messwerte

Die Fehler werden durch die GAUSS'sche Fehlerfortpflanzung bestimmt.

$$\sigma_n = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\delta x}{\delta x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (4.1)$$

$$f_{pex} = \sqrt{f_U^2 \left(\frac{\delta P}{\delta U_k} \right)^2 + f_I^2 \left(\frac{\delta P}{\delta I} \right)^2} \quad (4.2)$$

$$f_{pex} = \sqrt{(f_U I)^2 + (f_I U_k)^2} \quad (4.3)$$

$$fr = \sqrt{f_U^2 \left(\frac{\delta R}{\delta U_k} \right)^2 + f_I^2 \left(\frac{\delta R}{\delta I} \right)^2} \quad (4.4)$$

$$f(r) = \sqrt{\left(\frac{f_U}{I} \right)^2 + \left(\frac{f_I U_k}{I^2} \right)^2} \quad (4.5)$$

Wie man deutlich erkennen kann liegen die experimentellen Leistungswerte auf oder sehr nahe der theoretischen Kurve. Die minimale Abweichung liegt also im Rahmen der Messgenauigkeit.

4.4 Systematischer Fehler von Punkt H

Wenn man das Voltmeter nach dem Ampèremeter bei Punkt H in Abbildung (3.1) schaltet, misst man einen systematischen Fehler. Man würde zu anderen Spannungswerten kommen, da man den Innenwiderstand des Amperemeters mit messen würde.

5 Diskussion

Durch das Variieren des Messbereichs am Ampèremeter kann es zu Fehlern kommen, weil jene Messgeräte ungenügend auf allen Messbereichen geeicht sind. Dieses kann die Abweichungen des Y-Achsenabstandes und der Steigung für die Monozelle erklären.

6 Anhang

Literatur

- [1] Physikalisches Anfänger-Praktikum Skript, Versuch 301, EMK und Innenwiderstand von Spannungsquellen, Universität Dortmund