

Technische Universität Dortmund
Versuch Nr. 354
Gedämpfte und erzwungene
Schwingungen

Jan Stubben
jan.stubben@uni-dortmund.de

Maximilian Demmel
maximilian.demmel@uni-dortmund.de

16. November 2007

1 Einführung

In diesem Versuch wird ein System mit zwei Energiespeichern, nämlich eine Kapazität und eine Induktivität, untersucht. Wird Energie in dieses System gepumpt, so wird diese zwischen den beiden Speichern hin und her oszillieren. Wird kein Energieverbraucher im System berücksichtigt, so wird dies ungedämpfte Schwingung genannt. Wird ein Verbraucher in Form eines ohm'schen Widerstandes eingebaut (vergleiche Abbildung 1), so fallen die Amplituden von Strom und Spannung im Kreis monoton ab, dies wird dann eine gedämpfte Schwingung genannt. Im letzten Teil des Experiments wer-

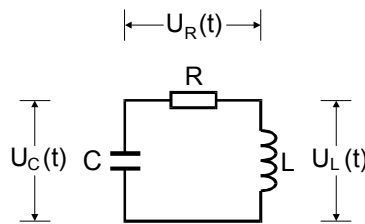


Abbildung 1: Ein gedämpfter Schwingkreis

den erzwungene Schwingungen betrachtet, in dem das System von außen **periodisch** angeregt wird. Bei einer bestimmten Erregerfrequenz werden die Strom- und Spannungsamplituden maximal, in diesem Fall spricht man von einer Resonanz.

2 Theorie

2.1 Die gedämpfte Schwingung

Nach den Kirchhoffschen Gesetzen fallen die Spannungen in einem Kreis wie in Abbildung 1 wie folgt ab:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 \quad (1)$$

Durch Einsetzen folgender Beziehungen in (1):

$$\begin{aligned} U_R(t) &= R \cdot I(t) \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{C} \\ U_L(t) &= L \cdot \dot{I} \end{aligned}$$

und anschließend Ableiten nach der Zeit erhält man folgende DGL:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad (2)$$

Als Ansatz zur Lösung dieser homogenen DGL wählen wir:

$$I(t) = C \cdot e^{i\bar{\omega}t} \quad (3)$$

Wobei $C, \bar{\omega}$ komplexe Zahlen sind. Nach einsetzen in Gleichung (2) erhält man:

$$(-\bar{\omega}^2 + i\frac{R}{L}\bar{\omega} + \frac{1}{LC})Ce^{i\bar{\omega}t} = 0$$

Es gilt also $(\bar{\omega}^2 - i\frac{R}{L}\bar{\omega} - \frac{1}{LC}) = 0$ zu lösen. Wir erhalten zwei Lösungen:

$$\bar{\omega}_{1,2} = i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

Zur Vereinfachung werden folgende Substitutionen verwandt: Für die Dämpfung: $2\beta = \frac{R}{L}$ und für die Eigenfrequenz: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{1,2} &= i\beta \pm \omega \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung lautet dann (C_1, C_2 sind komplex):

$$I(t) = C_1 e^{i\bar{\omega}_1 t} + C_2 e^{i\bar{\omega}_2 t} = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (6)$$

Der Verlauf von $I(t)$ hängt nun stark von dem ω im Exponenten ab, also ob dieser reell oder komplex ist. Wir untersuchen nun die verschiedenen Möglichkeiten:

2.1.1 Schwache Dämpfung (Schwingfall)

Hier ist die Frequenz ω reell, also gilt:

$$\beta^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 < 4\frac{L}{C} \quad (7)$$

Mit dem Ansatz $C_1 = \frac{1}{2}A_0 e^{i\varphi}$ und $C_2 = \frac{1}{2}A_0 e^{-i\varphi}$ erhalten wir aus Gleichung (6) folgende Schwingungsgleichung:

$$I(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

Die Energie oszilliert mit der Frequenz ω und exponentiell abfallender Amplitude (vgl. Abbildung (2)), wir erhalten dann für die Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Im Falle $\beta \ll \omega_0^2$ gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (9)$$

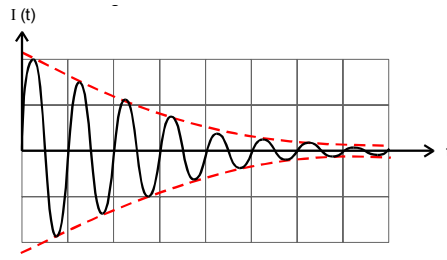


Abbildung 2: Schwingfall mit exponentiellen Abfall der Amplitude

2.1.2 Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall)

Bei der kritischen Dämpfung gilt:

$$\beta^2 = \omega_0^2 \Leftrightarrow \omega = 0 \Leftrightarrow R_{Ap}^2 = 4 \frac{L}{C} \quad (10)$$

Hier geht $I(t)$ ohne Überschwinger am schnellsten gegen Null. Da $\omega = 0$ gilt:

$$I(t) \propto e^{-\frac{R}{2L}t} \propto e^{-\frac{1}{LC}t}$$

2.1.3 Starke Dämpfung (Kriechfall)

Hier ist:

$$\beta^2 > \omega_0^2 \Leftrightarrow R^2 > 4 \frac{L}{C}$$

Die Frequenz ist dann rein imaginär:

$$\omega = i\gamma; \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Hier oszilliert das System nicht mehr, $I(t)$ geht langsam gegen Null.

2.1.4 Übertragung auf mechanische Systeme

Dieses Beispiel eines RLC-Schwingkreises läßt sich auf jedes mechanische System, welches folgende DGL erfüllt, übertragen:

$$M\ddot{x} + S\dot{x} + Dx = 0$$

2.2 Die gedämpfte, erzwungene Schwingung

Nun wird ein Sinusgenerator mit $U_G(t) = U_0 e^{i\omega t}$ in den Kreis integriert. Wir stellen analog zu Abschnitt 2.1 die DGL auf:

$$LC \cdot \ddot{U}_C + RC \cdot \dot{U}_C + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (11)$$

Wir wählen den Ansatz $U_C(\omega, t) = U(\omega)e^{i\omega t}$ um diese DGL zu lösen und erhalten:

$$-LC\omega^2 U(\omega) + i\omega RC U(\omega) + U(\omega) = U_0$$

$U(\omega)$ läßt sich nun bestimmen zu:

$$U(\omega) = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + i\omega RC}$$

Wie man sieht ist $U(\omega)$ komplex, wir bestimmen Betrag und Phase zu:

$$|U(\omega)| = U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (12)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) lassen sich noch diskutieren. Bei einer bestimmten Frequenz kann U_C sogar U_0 übersteigen, diese Frequenz nennt man diese Resonanzfrequenz und liegt bei:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (14)$$

Wie man sieht geht für $\beta^2 \ll \omega_0^2$ die Resonanzfrequenz $\omega_R \rightarrow \omega_0$. Wie erhalten ein Spannungsmaximum von:

$$U_{C,max}(\omega_R) = \frac{U_0}{\omega_0 RC} \quad (15)$$

Bemerkenswert hierbei ist, dass für $R \rightarrow 0$ die Spannung $U_{C,max} \rightarrow \infty$ geht. Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ wird Güte q genannt. Die Breite der Resonanzkurve bestimmt man mit den Frequenzen ω_+ und ω_- , an denen U_C auf den Wert $\frac{U_{C,max}}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. Mit der Voraussetzung $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ läßt sich für die Breite eines Schwingkreises folgendes angeben:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$$

Damit gilt für die Güte q :

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

Ganz anders ist das Verhalten im Falle der starken Dämpfung (vgl. Abschnitt 2.1.3), hier gibt es kein Resonanzphänomen mehr sondern die Kondensatorspannung geht von U_0 ausgehend bei steigender Frequenz monoton gegen Null. Dabei fällt U_C mit $\frac{1}{\omega^2}$ ab.

Nun wird die Frequenzabhängigkeit der Phase (siehe Gleichung (13)) untersucht. Man kann aus Gleichung (13) ablesen, dass für hinreichend kleine Frequenzen die Generator- und Kondensatorspannung in Phase sind, während für sehr hohe Frequenzen U_C um den Faktor π phasenverschoben ist. Außerdem ist $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$.

2.3 Impedanz des Schwingkreises

Man definiert einen komplexen Widerstand Z :

$$Z = X + iY$$

Folgende Bezeichnungen gelten:

- Impedanz: $|Z|$
- Wirkwiderstand $\operatorname{Re} Z$
- Blindwiderstand $\operatorname{Im} Z$

Dabei haben die Bauteile in unserem Kreis folgende Widerstände:

- $Z_R = R$, also ein reeller Widerstand
- $Z_C = -\frac{i}{\omega C}$
- $Z_L = i\omega L$

Zunächst schauen wir uns einen Serienschwingkreis an (vgl mit Abbildung (3)): Hier haben wir einen Widerstand:

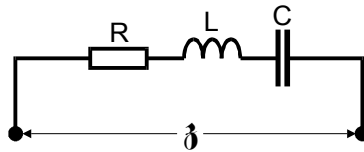


Abbildung 3: Serienschwingkreis

$$Z_{\text{Serie}} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Mit einer Impedanz:

$$|Z_{\text{Serie}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (16)$$

Man kann an Gleichung (16) ablesen, dass die Impedanz bei $\omega = \omega_0$ ihr Minimum besitzt und für sowohl für $\omega \rightarrow 0$, als auch für $\omega \rightarrow \infty$ die Impedanz gegen unendlich geht. Man kann dieses Bauteil auch als Bandpass verwenden. Anders sieht es bei einer Parallelschaltung (Abbildung (4)) aus:

Widerstand und Impedanz sind hier:

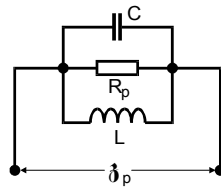


Abbildung 4: Parallelschwingkreis

$$Z_P = \frac{\frac{1}{R} + i(\frac{1}{\omega L} - \omega C)}{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}$$

$$|Z_P| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}} \quad (17)$$

Man kann aus (17) ersehen, dass $|Z_P|$ bei $\omega = \omega_0$ ein Maximum hat, und für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Diese Schaltung kann als Bandsperre verwendet werden.

3 Versuchsaufbau

3.1 Messung der Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude

Für diese Messung nehme man folgende Schaltung (5).

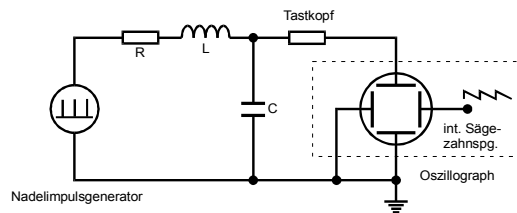


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Schwingungsamplitude

Die Frequenz des Nadelimpulsgenerators wird so gewählt, dass die Amplitude zwischen zwei Impulsen um den Faktor 3-8 abfällt. Es wird ein hochohmiger Tastkopf zur Messung verwendet um einen Einfluss des Eingangswiderstands des Oszillograph zu vermeiden.

3.2 Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes

Hierzu verwenden wir eine Schaltung gemäß der Abbildung (6)

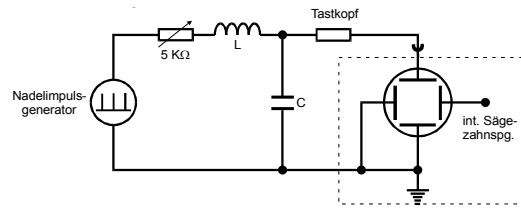


Abbildung 6: Schaltung zur Messung des aperiodischen Grenzwiderstandes

Der regelbare Widerstand wird zunächst auf sein Maximum gestellt, damit der Kriechfall vorliegt (vgl. Abschnitt 2.1.3). Dann regelt man ihn runter bis ein erster Überschwinger auf dem Oszillograph erkennbar ist. Jetzt hat man R_{Ap} schon unterschritten. Nun wird der Widerstand wieder erhöht bis der Überschwinger gerade wieder verschwindet und man R_{Ap} somit bestimmt hat.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Hierzu wird die Schaltung nach Abbildung (7)

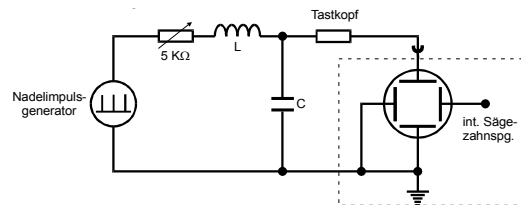


Abbildung 7: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Bei dieser Schaltung wird ebenfalls ein Tastkopf verwendet. Es muss bei diesem Aufbau auch die Generatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz gemessen werden, weil die Ausgangsspannung des Tastkopfes frequenzabhängig ist.

3.4 Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase

Um die Frequenzabhängigkeit der Phase zu Messen verwenden wir Schaltung (8)

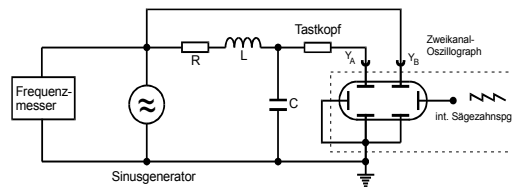


Abbildung 8: Schaltung zur Messung Frequenzabhängigkeit der Phase

Um die Phasenverschiebung zu messen wird ein Zweikanaloszilloskop verwendet, wobei an dem einen Kanal die Wechselspannungsquelle und an dem anderen Kanal die Kondensatorspannung angeschlossen wird. Das Oszilloskop sollte ein Bild, ähnlich Abbildung 9 wiedergeben. Es wird der Abstand a der beiden Nulldurchgänge gemessen, um damit die Phasendifferenz zu berechnen (b bekommt man aus der Frequenz der Generators!).

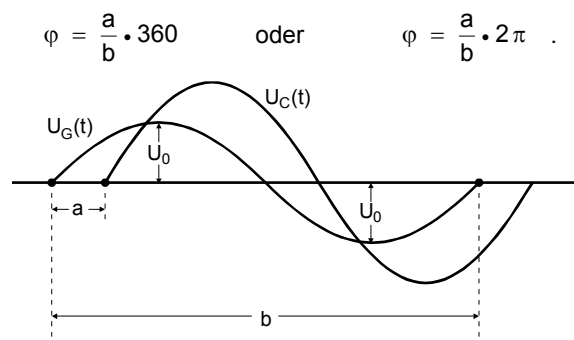


Abbildung 9: Phasenverschiebung der Generatorspannung und der Kondensatorspannung

3.5 Messung des Scheinwiderstandes des RLC-Kreises

Wir messen den Scheinwiderstand mit einem Impedanzmeter.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes

Der effektive Dämpfungswiderstand wird durch Auswertung des erhaltenen Thermodrucks bestimmt. Die daraus gewonnenen Daten sind in Tabelle 1 dargestellt. Diese wurden jeweils im Abstand eines Kästchens aus dem Thermodruck entnommen, wobei gilt: Eine Einheit auf der Zeitachse entspricht $\Delta t = 0,1 \text{ ms}$, eine Einheit auf der Spannungs-Achse entspricht $\Delta V = 0,5 \text{ V}$.

t [ms]	U [V]
0,1	1,5
0,2	1,143
0,3	0,821
0,4	0,643
0,5	0,429
0,6	0,357
0,7	0,250
0,8	0,179
0,9	0,143
1,0	0,107

Tabelle 1: Entnommene Werte aus dem Thermodruck

Stellt man diese Daten logarithmiert auf einer linearen Skala dar, so ergibt sich das in Abbildung 10 vorliegende Bild. Die eingezeichnete und - ebenso wie der Plot - mit gnuplot erstellte Ausgleichsgerade liefert zusammen mit Gleichung 8 folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 U &= U_0 \cdot e^{-\beta t} \\
 \ln U &= -\beta t + \ln U_0 \\
 \Rightarrow U_0 &= (2,024 \pm 0,056)V \\
 \Rightarrow \beta &= (2966 \pm 44) \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Resubstitution von R und L aus $2\beta = \frac{R_{eff}}{L}$ folgt daher

$$\begin{aligned}
 2\beta &= \frac{R_{eff}}{L} \\
 R_{eff} &= 2 \cdot \beta \cdot L
 \end{aligned}$$

Aus den gegebenen Werten für $L = 17,03mH \pm 0,5\%$ und $\beta = 2966 \frac{1}{s} \pm 1,5\%$ ergibt sich

$$R_{eff} = 101,0\Omega \pm 2,0\%$$

Die Abklingdauer T_{ex} berechnet sich zu

$$T_{ex} := \frac{2L}{R_{eff}} = 0,337ms \pm 2,5\%$$

Dabei wurde benutzt, dass sich relative Fehler von Produkten addieren: $\Delta R_{eff} = \Delta L + \Delta \beta$ und $\Delta T_{ex} = \Delta L + \Delta R_{eff}$. Der berechnete Wert bestätigt sich anhand des Thermodrucks. Die Abweichung des effektiven Widerstandes

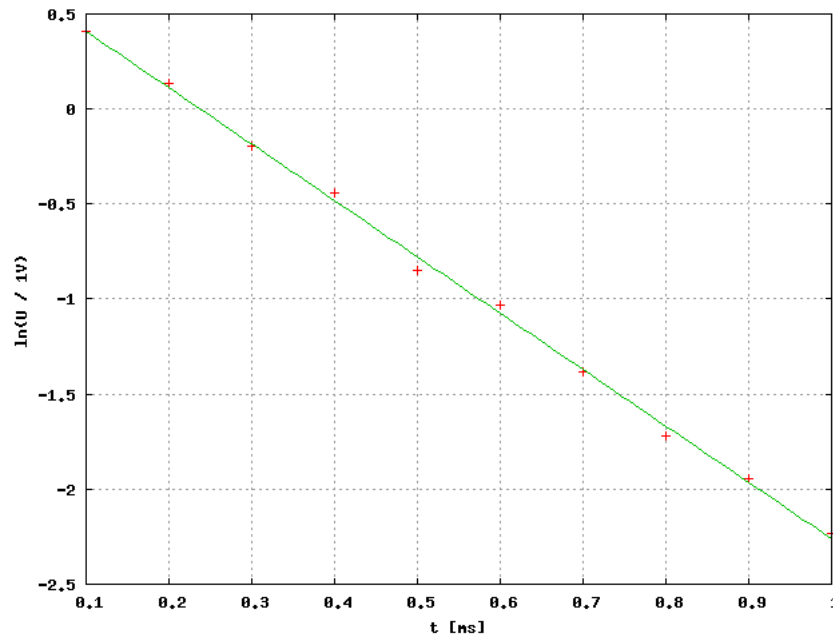


Abbildung 10: Abklingende Amplitude der erzwungenen gedämpften Schwingung

zum angegebenen Wert des eingebauten Widerstandes $R_1 = (72,8 \pm 0,2)\Omega$ von $\Delta R = 28,2\Omega$ entsteht durch den nicht vernachlässigbaren Beitrag der Spule, welche selbst einen ohmschen Widerstand besitzt, sowie den Innenwiderstand der Spannungsquelle von $R_i = 5\Omega$. Der daraus berechenbare Verlustwiderstand ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_{verl} &= R_{eff} - R - R_i \\ &= 23,2\Omega \end{aligned}$$

4.2 Dämpfungswiderstand R_{ap} des aperiodischen Grenzfalles

Der experimentell ermittelte Widerstand beim aperiodischen Grenzfall beträgt

$$R_{ap,exp} = 4,33k\Omega$$

Der aus L und C berechnete Wert beträgt nach Gleichung ??

$$R_{ap,theo} = \sqrt{4 \frac{L}{C}} = (5766 \pm 17)\Omega$$

Der Fehler ergibt sich aus einer Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta R_{ap} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{ap}}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial R_{ap}}{\partial C}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{LC} \cdot (\Delta L)^2 + \frac{L}{C^3} \cdot (\Delta C)^2} \\
&= 17\Omega
\end{aligned}$$

Die Diskrepanz der beiden Werte resultiert aus der Ungenauigkeit des Messverfahrens: Es ist nicht deutlich zu erkennen, ob der gemessene Wert wirklich der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles ist, da die Veränderungen am Oszilloskop viel Spielraum lassen.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung U_C

Die Messung beinhaltet neben dem frequenzabhängigen Verhalten der Kondensatorspannung auch den Frequenzgang des Tastkopfes. Die gemessenen Werte sind in Tabelle 2 angegeben. Das entsprechende Bild, in dem das

$f[\frac{1}{s}]$	$U_C[mV]$	$U_G[mV]$	$f[\frac{1}{s}]$	$U_C[mV]$	$U_G[mV]$
101	48	48	4055	40	39
200	48	48	5095	40	39
301	47,5	47,5	7040	41	38
402	47	47	10066	44	38
501	47	47	11004	45,5	38
609	47	47	20703	85	38
705	46,5	46	30001	120	38
824	46	46	40701	28	38
917	45,5	46	50100	14,5	38
1014	45	45	70480	6	38
2033	42	42	101124	2,4	38
3016	41	40			

Tabelle 2: Generator- und Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

Verhältnis von Kondensator- und Generatorspannung $\frac{U_C}{U_G}$ gegen die Frequenz aufgetragen wurde, ist in Abbildung 11 dargestellt. Die eingezeichnete Kurve ist die Theoriekurve unter Annahme eines Gesamtdämpfungswiderstandes von $R_{ges} = (713 \pm 2)\Omega$, bestimmt aus einer nichtlinearen Ausgleichsrechnung mittels gnuplot der Daten in Tabelle 3 und Gleichung 12. Der theoretische Gesamtdämpfungswiderstand liegt bei $R_{ges,theo} = R_2 + R_{verl} = 715,3\Omega$, mit R_2 als dem eingebauten benutzten Widerstand der Schaltung. Weiterhin wird hier der aus den Messdaten gewonnene Gesamtdämpfungswiderstand benutzt, da er dem theoretischen Wert genügend genau entspricht. Die gewonnene Abbildung zeigt, dass die Resonanzüberhöhung $q = 4,08 \pm 0,01$ ist (siehe Abbildung 15 im Anhang). Der Bereich um die Resonanzfrequenz

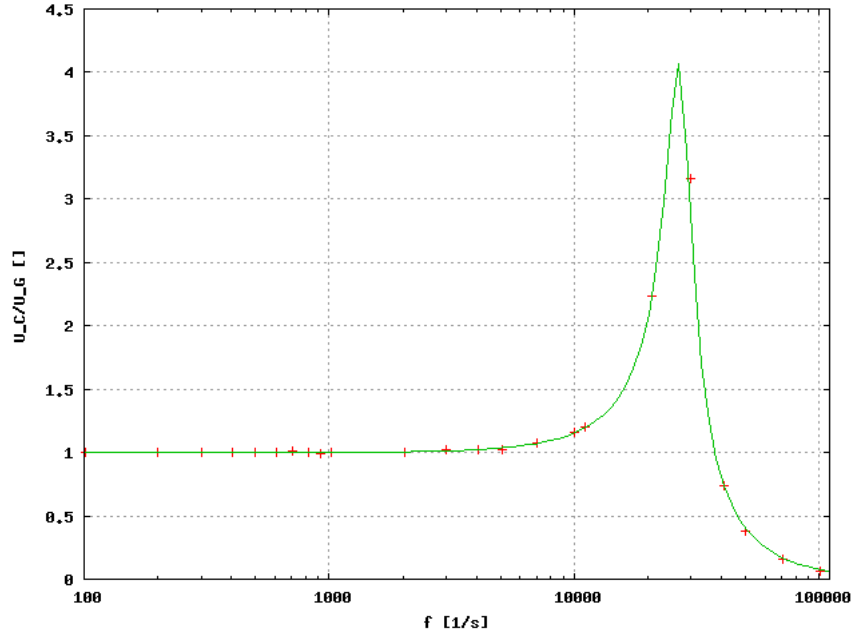


Abbildung 11: Frequenzgang des Spannungsquotienten

ist in Abbildung 12 noch einmal detaillierter dargestellt. Die zugehörigen Daten werden in Tabelle 3 aufgelistet. Im gezeigten Bereich um die Resonanzfrequenz betrug die Generatorspannung konstant $U_G = 38mV$, daher wird sie in der Tabelle nicht explizit angeführt. Die in blau eingezeichnete Gerade liegt genau bei $\frac{q}{\sqrt{2}}$. Daraus lässt sich die Breite der Resonanzkurve ablesen (aus Abbildung 15 im Anhang) zu

$$\omega_{\pm} = \omega_{+} - \omega_{-} = 2\pi \cdot (f_{+} - f_{-}) = 2\pi \cdot ((29700 \pm 50) - (22950 \pm 50)) \frac{1}{s} = (42411 \pm 628) \frac{rad}{s}$$

Weiterhin liest man aus dem Diagramm auch die Resonanzfrequenz f_{res} ab:

$$f_{res} = (26500 \pm 50) \frac{1}{s}$$

Die Fehlerangaben beziehen sich bei den angegebenen Werten auf den geschätzten Ablesefehler. Bei ω_{\pm} addieren sich die absoluten Ablesefehler, da die Differenz der dazugehörigen Größen gebildet wird. Aus Gleichung ?? erhalten wir als Ausdruck für die Resonanzüberhöhung:

$$q_{theo} = \frac{1}{\omega_{res,theo} RC}$$

Die fehlende Größe $\omega_{res,theo}$ folgt mit $R_{ges} = (713 \pm 2)\Omega$ von oben aus

$$\omega_{res,theo} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_{ges}^2}{2L^2}}$$

$f[1/s]$	$U_C[mV]$	$f[1/s]$	$U_C[mV]$
10546	44,5	26605	155
11777	46,2	28045	140
13050	49	29479	112
14653	53	31185	85
16087	57	32592	68
17646	64	34030	55
19023	72	35670	45
20574	83	37006	39
22010	99	38607	33
23623	120	40360	28
25065	144		

Tabelle 3: Kondensatorsspannung gegen Frequenzgang aufgetragen um die Resonanzfrequenz

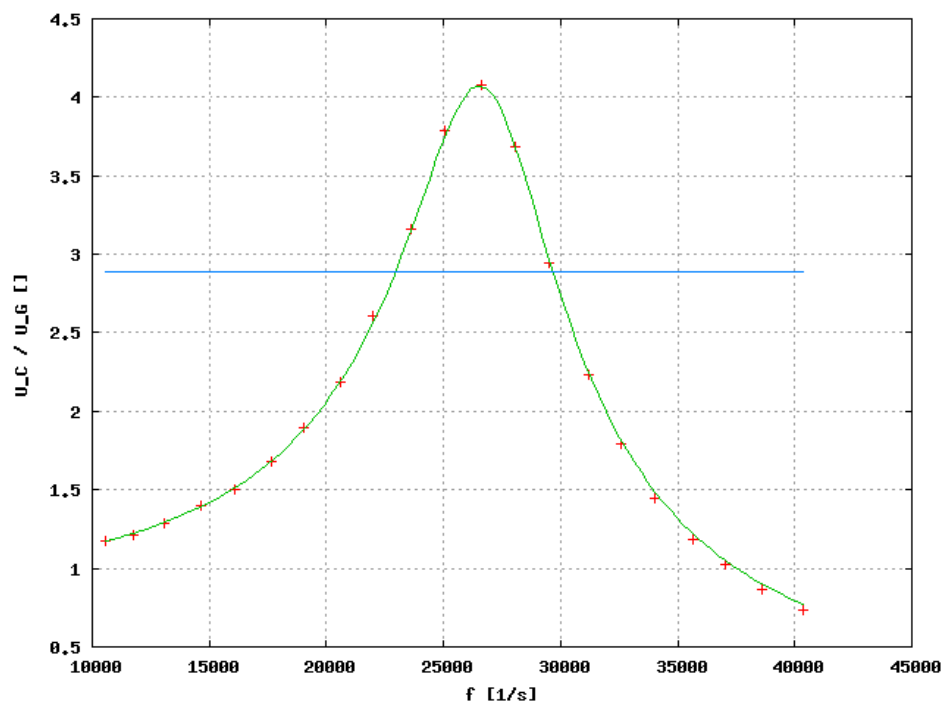


Abbildung 12: Frequenzgang des Spannungsquotienten um die Resonanzfrequenz

$$= 166678 \frac{1}{s}$$

Mit einem Fehler von ($\omega \equiv \omega_{res,theo}$)

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial L}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial C}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial R_{ges}}\right)^2 \cdot (\Delta R_{ges})^2} \\ \frac{\partial\omega}{\partial L} &= \frac{1}{2L^2} \left(\frac{R_{ges}^2}{L} - \frac{1}{C} \right) \cdot \left(\frac{1}{LC} - \frac{R_{ges}^2}{2L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial\omega}{\partial C} &= -\frac{1}{2LC^2} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R_{ges}^2}{2L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial\omega}{\partial R_{ges}} &= -\frac{R_{ges}}{4L^2} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R_{ges}^2}{2L^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mit den gegebenen Werten errechnet sich daraus

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 344 \frac{1}{s} \\ \Rightarrow \omega_{res,theo} &= (166678 \pm 344) \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Daraus errechnen sich

$$f_{res,theo} = \frac{\omega_{res,theo}}{2\pi} = (26527 \pm 55) \frac{1}{s}$$

und

$$\begin{aligned} q_{theo} &= \frac{1}{\omega_{res} R_{ges} C} \\ &= \frac{1}{166678 \frac{rad}{s} \cdot 713\Omega \cdot 2,049 \cdot 10^{-9} F} \\ &= 4,1 \end{aligned}$$

mit einem Fehler von

$$\begin{aligned} \Delta q_{theo} &= \Delta\omega_{res} + \Delta R_{ges} + \Delta C \\ &= 0,2\% + 0,3\% + 0,3\% \\ &= 0,8\% \\ \Rightarrow q_{theo} &= 4,1 \pm 0,8\% \end{aligned}$$

Letztlich ergibt sich für die Breite der Resonanzkurve ein Theoriewert von

$$\omega_{\pm} \approx \frac{R_{ges}}{L} = 41867 \frac{rad}{s}$$

und dem Fehler

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega_{\pm} &= \Delta R_{ges} + \Delta L \\
 &= 0,3\% + 0,5\% \\
 \Rightarrow \omega_{\pm} &= 41867 \frac{rad}{s} \pm 0,8\%
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass alle ermittelten Werte - abgesehen von kleinen Variationen - mit den Theoriewerten übereinstimmen. Die Abweichungen bewegen sich in der Größenordnung von $\Delta\omega_{\pm} = 1,3\%$, $\Delta f_{res} = 0,1\%$ und $\Delta q = 0,5\%$ und liegen somit im Toleranzbereich.

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen U_C und U_G

Die gemessenen Werte sind in Tabelle 4 dargestellt. Die zugehörige Abbil-

$f[1/s]$	$\Delta t[\mu s]$	$\varphi[rad]$	$f[1/s]$	$\Delta t[\mu s]$	$\varphi[rad]$
10150	2	0,128	26596	9	1,504
11564	2	0,145	28036	11	1,938
13050	2	0,164	29682	12	2,238
14527	2	0,183	31147	12,5	2,446
16043	2	0,202	32581	12,5	2,559
17472	2,5	0,274	34206	12,5	2,687
19196	3	0,362	35453	12	2,673
20553	3	0,387	37076	12	2,795
22125	4	0,556	38672	11,5	2,794
23550	5	0,740	40479	11,5	2,925
25195	7	1,108			

Tabelle 4: Messung zur Frequenzabhängigkeit der Phase

dung 13 ist unten dargestellt. Berechnet man aus diesen Werten den Gesamtdämpfungswiderstand (ebenfalls mit nichtlinearer Ausgleichsrechnung und gnuplot), so folgt $R_{ges} = (708 \pm 14)\Omega$, also fast derselbe Wert wie bereits aus der ersten Messung ermittelt. Aus der vergrößerten Abbildung 16 im Anhang entnimmt man f_{res} bei $\pi/2$, f_- bei $\pi/4$ und f_+ bei $3\pi/4$ und erhält:

- $f_- = (23800 \pm 50) \frac{1}{s}$
- $f_{res} = (26900 \pm 50) \frac{1}{s}$
- $f_+ = (30450 \pm 50) \frac{1}{s}$

Die Fehler beziehen sich wieder auf geschätzte Ablesefehler.

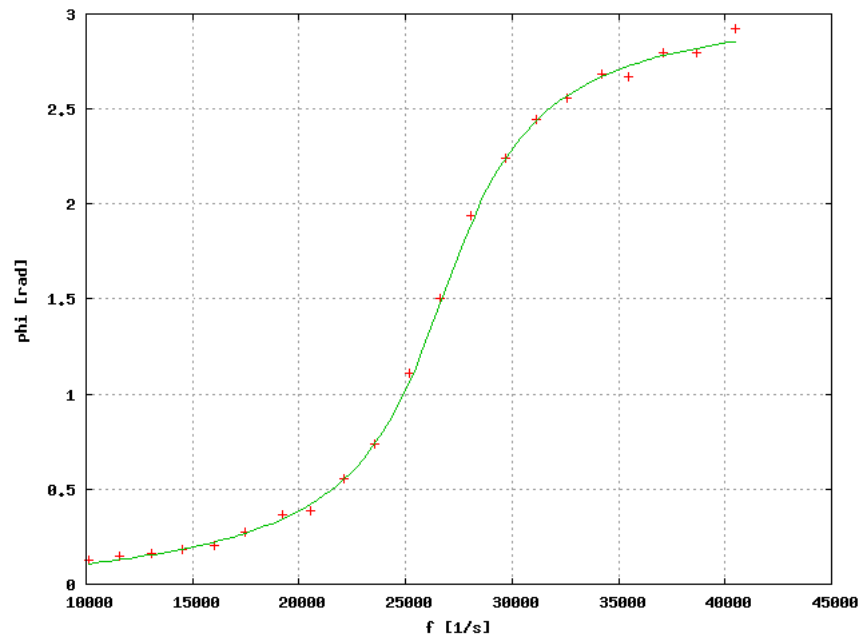


Abbildung 13: Frequenzgang der Phase um die Resonanzfrequenz

Der Theoriewert von $f_{res,theo} = 26527 \frac{1}{s}$ wird aus dem vorhergehenden Kapitel übernommen, die beiden Werte für f_- und f_+ folgen aus Gleichung ?? im Schwingfall mit $\omega = 2\pi f$ zu

$$\begin{aligned}
 f_{\pm,theo} &= \pm \frac{R_{ges}}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{ges}^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \\
 &= \pm 3332 \frac{1}{s} + 27148 \frac{1}{s} \\
 f_{+,theo} &= 30480 \frac{1}{s} \\
 f_{-,theo} &= 23816 \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

Die ermittelten Werte liegen nah an den theoretischen Größen.

4.5 Frequenzabhängigkeit der Impedanz

Die graphisch ermittelten Daten der Frequenzabhängigkeit wurden mit einem Impedanzmeter bestimmt und werden in Tabelle 5 aufgelistet. Abbildung 14 zeigt die Daten und die theoretische Kurve unter der Annahme eines Gesamtdämpfungswiderstandes von $R_{ges} = 713\Omega$, wie oben bereits aus der Ausgleichsrechnung entnommen. Man stellt fest, dass eine leichte Abweichung zu hohen Frequenzen auftritt. Diese Abweichung erklärt sich durch

$f[1/s]$	$ Z [\Omega]$	$\varphi[\text{deg}]$
5000	15000	-86
10000	6900	-69
15000	3700	-71
20000	1900	-66
25000	880	-34
30000	920	40
35000	1700	66
40000	2500	78
45000	3400	84
50000	4200	89

Tabelle 5: Frequenzabhängigkeit der Impedanz

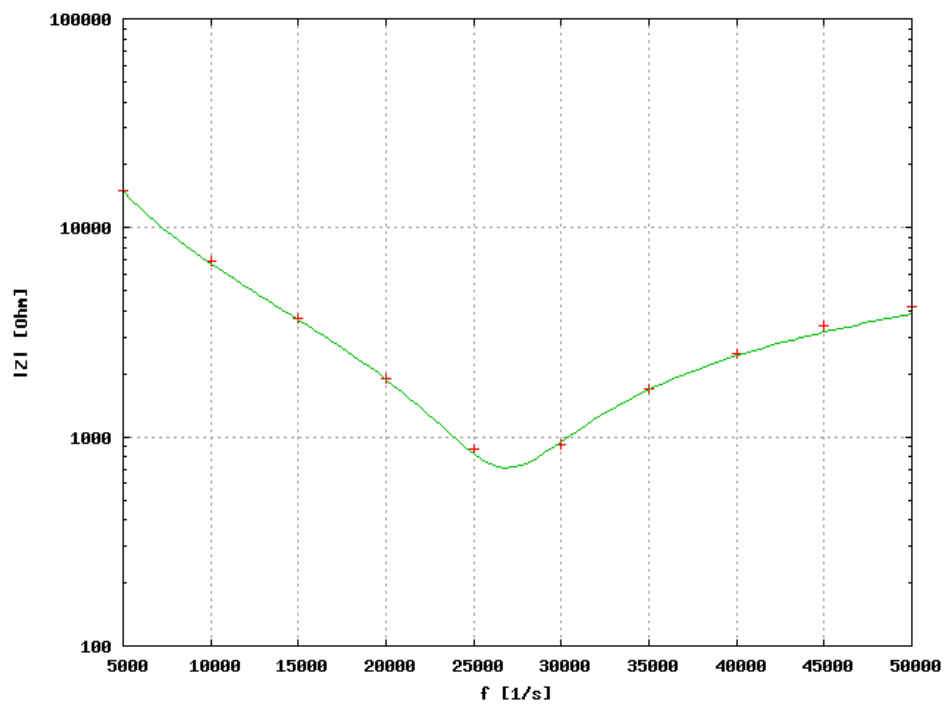


Abbildung 14: Frequenzgang des Spannungsquotienten um die Resonanzfrequenz

die bei hohen Frequenzen nicht mehr vernachlässigbare Impedanz der Leitungen, welche die gemessene Impedanz im Messbereich leicht anheben.

Plottet man die Ortskurve des Serienresonanzkreises, so ergibt sich Abbildung 15. Es ist gut zu erkennen, dass die Ortskurve die reelle Achse bei einem Widerstand von ungefähr $R_{ges} = 713\Omega$ schneidet. Das bestätigt den gewählten Wert für den gesamten Dämpfungswiderstand.

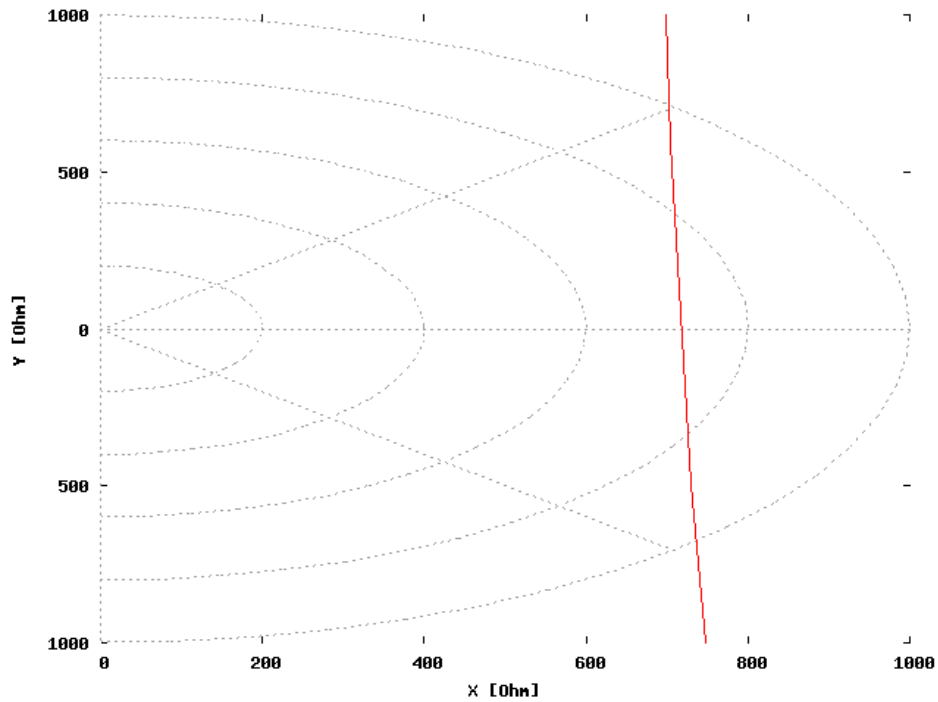


Abbildung 15: Ortskurve des Serienresonanzkreises, es gilt $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

5 Diskussion

Die in Kapitel 4.1 ausgewerteten Daten des Thermodrucks ergeben zuverlässige Werte für die Abklingdauer der Amplitude und für den effektiven Widerstand der ersten Teilaufgabe.

Der Widerstand des aperiodischen Grenzfalles in 4.2 weist eine zu hohe Abweichung vom Theoriewert auf, die jedoch zu einem großen Teil vom ungenauen Messverfahren abhängt.

Die in 4.3 und 4.4 auf unterschiedlichen Wegen ermittelten Werte stimmen bis auf kleine Unsicherheiten sowohl mit den Theorie- als auch den entsprechenden Experimentalwerten überein, wobei die Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes auf der Basis zweier unterschiedlicher Messungen als hinreichend genau anzusehen ist, was ebenfalls durch die Darstellung in 4.5 unterstützt wird.

6 Literatur- und Softwareverzeichnis

Für alle Plots und Ausgleichsrechnungen wurde GNUPLOT benutzt.

Alle Abbildungen im ersten Kapitel wurden dem Praktikumsskript (Stand: 19.11.2007) entnommen,

[http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/ ↔
Schwingungen/Versuch%20Nr.354.pdf](http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Schwingungen/Versuch%20Nr.354.pdf)