Versuch V355: Gekoppelte Schwingkreise

Martin Bieker
Julian Surmann

Durchgeführt am 09.01.2014
TU Dortmund

1 Einleitung

Im folgenden Versuch sollen gekoppelte Oszillatoren untersucht werden. Bei diesen Systemen handelt es sich um schwingfähige Systeme, welche miteinander in Wechselwirkung stehen und so Energie austauschen können.

2 Theorie

In diesem Versuch sollen zwei Schwingkreise untersucht werden, die über eine gemeinsame Koppelkapazität C_K miteinander wechselwirken. Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze kann gezeigt werden, dass der Verlauf der Ströme I_1 und I_2 durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt wird. Daraus folgt, dass I_1 und I_2 durch eine Überlagerung von zwei so genannten Fundamentalschwingungen beschreiben werden können. Diese haben die Frequenzen

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{1}$$

und

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(\frac{1}{C}+\frac{2}{C_K})^-1}}. \tag{2}$$

Da die Werte von L, C und C_K mit Messunsicherheiten behaftet sind, müssen, um einen Vergleich von Theorie und Experiment zu ermöglichen, die Gesamtfehler dieser Größen bekannt sein. Diese wurden im Folgenden mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung nach Gauss berechnet:

$$\Delta\nu_+ = \sqrt{\frac{\sigma_L^2}{16\pi^2 CL^3} + \frac{\sigma_C^2}{16\pi^2 C^3 L}} \tag{3}$$

$$\Delta\nu_- = \sqrt{\frac{\sigma_L^2\left(-\frac{1}{C_K}-\frac{1}{2C}\right)^2}{4\pi^2\left(L\left(\frac{2}{C_K}+\frac{1}{C}\right)-1\right)^3} + \frac{L^2\sigma_{C_K}^2}{4\pi^2 C_K^4\left(L\left(\frac{2}{C_K}+\frac{1}{C}\right)-1\right)^3} + \frac{L^2\sigma_C^2}{16\pi^2 C^4\left(L\left(\frac{2}{C_K}+\frac{1}{C}\right)-1\right)^3}} \tag{4}$$

Im Folgenden soll der Stromverlauf für die Anfangsbedingungen

$$I_1(0) = I_0 \neq 0$$

und

$$I_2(0) = 0$$

untersucht werden. Zusätzlich wird angenommen, dass sich die Frequenzen ν_+ und ν_- nur geringfügig unterscheiden. Den in diesem Fall auftretenden Schwingungsvorgang bezeichnet man als Schwebung. Dabei schwingen die Einzelkreise ungefähr mit der Frequenz ν_+. Des Weiteren ändert sich die Amplitude der Schwingung mit der wesentlich geringeren Frequenz

$$\nu_{Schwebung} = \nu_- - \nu_+. \tag{5}$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Vorbereitungen

Vor Beginn der Messungen müssen die Resonanzfrequenzen beider Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden. Dazu wird die Schaltung wie in Abbildung 1 gezeigt aufgebaut. In einem

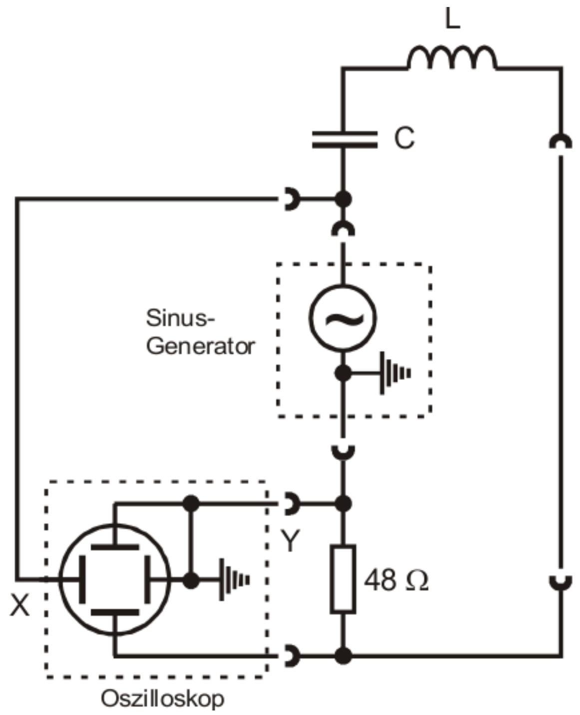

Abbildung 1: Diese Schaltung dient zum Kalibrieren der Resonanzfrequenzen beider Schwingkreise. [1]

der Kreise ist ein Kondensator mit variabler Kapazität verbaut. Mit dem Sinusgenerator wird nun der Kreis mit konstanter Kapazität angeregt. Zunächst wird mit dem Oszilloskop im YT-Betrieb die Frequenz ermittelt, bei der die gemessene Spannung U_R maximal wird. Dann wird das Oszilloskop in den XY-Modus umgeschaltet die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass U_R und die Generatorspannung U_0 in Phase liegen und daher die angezeigte Lissajous-Figur eine Gerade ist. Danach wird der Sinusgenerator an den zweiten Teil des Schwingkreises angeschlossen und mit der Frequenz ν_{res} angeregt. Nun wird auch dieser Kreis durch Veränderung der variablen Kapazität in Resonanz gebracht. Dazu werden wie zuvor Lissajous-Figuren verwendet.

3.2 Messung vom Schwebungs- und Schwingungsfrquenz

Für diesen Versuchsteil wird die Schaltung wie in Abbildung 2 aufgebaut. Der linke Schwingkreis wird durch eine Rechteckspannung zu Schwingungen angeregt. Mit dem Oszilloskop wird nun die am Widerstand R abfallende Spannung gemessen. So kann der im rechten Schwingkreis fließende Strom bestimmt werden. Bei verschiedenen Koppelkapazitäten C_K wird nun das Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz bestimmt. Dazu wird die Zahl n der

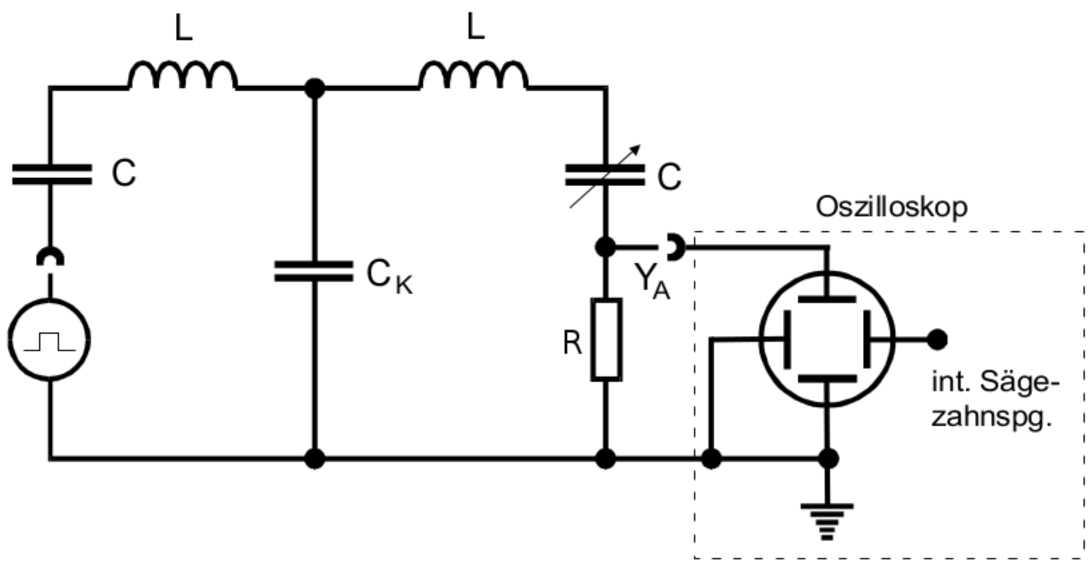

Abbildung 2: Diese Schaltung dient zur Messung des Verhältnisses von Schwebungs- zu Schwingungfrequenz. [2]

Schwingungsmaxima in einer Schwebungsperiode ermittelt. Es gilt:

$$\frac{\nu_{Schwingung}}{\nu_{Schwebung}} = n \tag{6}$$

3.3 Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Des Weiteren sollen die Frequenzen ν_- und ν_+ bestimmt werden. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Phasenverschiebung zwischen der Erregerspannung und dem im Sekundärkreis fließenden Stroms 0 oder π beträgt. Die oben verwendete Schaltung wird nun mit einer Sinusspannung angeregt und das Generatorsignal auf den zweiten Kanal des Oszilloskops gelegt (siehe Abb. 3). So kann die Phasenbeziehung von I und U_0 mit Hilfe von Lissajous-Figuren untersucht werden. So werden ν_+ und ν_- in Abhängigkeit von C_K bestimmt.

3.4 Messung des Stroms in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz

Um den Verlauf des Stroms I im Sekundärkreis bei in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz darzustellen, wird die Schaltung wie in Abbildung 1 aufgebaut. Mit dem Unterschied, dass der Funktionsgenerator im Sweep-Betreib arbeitet. Dies bedeutet, dass die Frequenz der Erregerspannung nicht mehr konstant ist, sondern steigt in der Zeit $\Delta t = 21\,\text{ms}$ von $\nu_0 = 3.8\,\text{kHz}$ auf $\nu_1 = 74.2\,\text{kHz}$. Mit der Verlauf der am Widerstand abfallenden Spannung gemessen werden. Dabei wird die Zeitbasis des Oszilloskops so eingestellt, dass ein vollständiger Sweep auf dem Schirm zu sehen ist. Anfang und Ende dieses Zyklus entsprechen den Frequenzen ν_0 und ν_1.

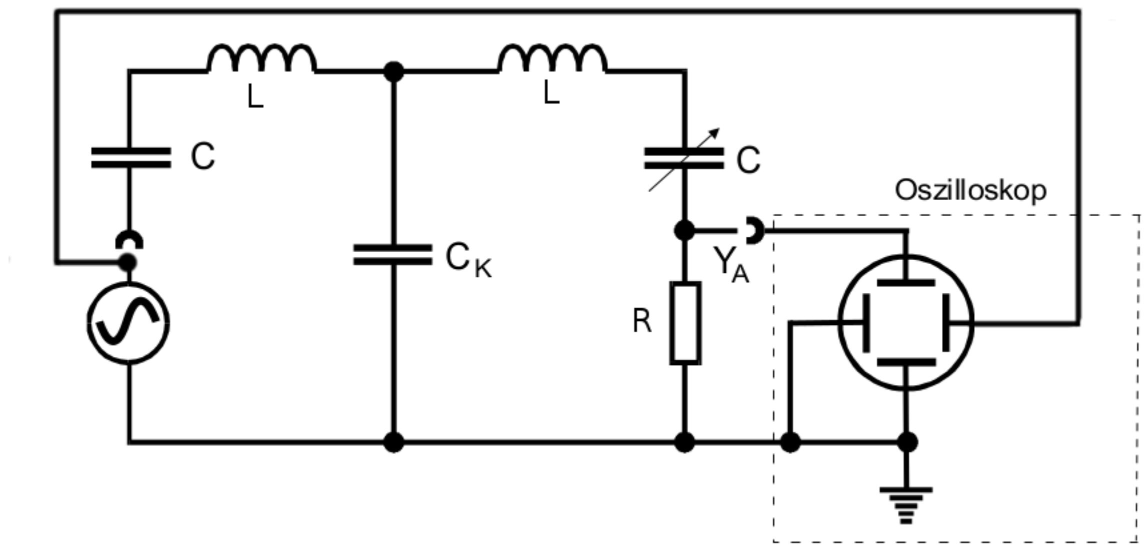

Abbildung 3: Diese Schaltung dient zur Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen. [2]

4 Auswertung

Sofern nicht anders angegeben, wurden alle Fehler mit PYTHON UNCERTAINTIES berechnet.

4.1 Vorbereitungen

Für die Justierung des Messaufbaus wurde mit der Grobmessung eine Frequenz von (30.69 ± 0.01) kHz ermittelt. Die feine Messung mit Hilfe der Lissajous-Figuren ergab eine Resonanzfrequenz von (30.70 ± 0.01) kHz. Der mit L und C theoretisch berechnete Wert liegt bei 30.49 kHz, mit einer Abweichung von 0.68 % ausgezeichnet im Toleranzbereich. Allerdings wurde in der Berechnung des theoretischen Wertes die Kapazität der Spule schon berücksichtigt.

4.2 Messung von Schwebungs- und Schwingungsfrequenz

Die Perioden pro Schwebungsperiode wurden so genau wie möglich abgelesen. Der Fehler liegt bei maximal ± 0.5 Perioden. Diese Werte sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Der bei C_K angegebene Fehler ist ein auf die Werte umgerechneter Fehler von $\pm 3\%$. Dieser ist an der Messapparatur vorgegeben.
Die Frequenz ν^+_{theo} ist konstant und beträgt 30.493 kHz. Diese wurde mit Formel 1 berechnet. ν^-_{theo} wurde mit Formel 2 ermittelt. Der Mittelwert der beiden Frequenzen wurde mit

$$\overline{\nu} = \frac{1}{2}(\nu_- + \nu_+)$$

ermittelt. Die Frequenz der Schwebung ist durch $\nu^-_{theo} - \nu^+_{theo}$ gegeben. Diese theoretisch ermittelten Werte befinden sich in Tabelle 2. Abbildung 4 zeigt sowohl das experimentell ermittelte, als auch das berechnete Frequenzverhältnis in Abhängigkeit von der verwendeten Koppelkapazität.

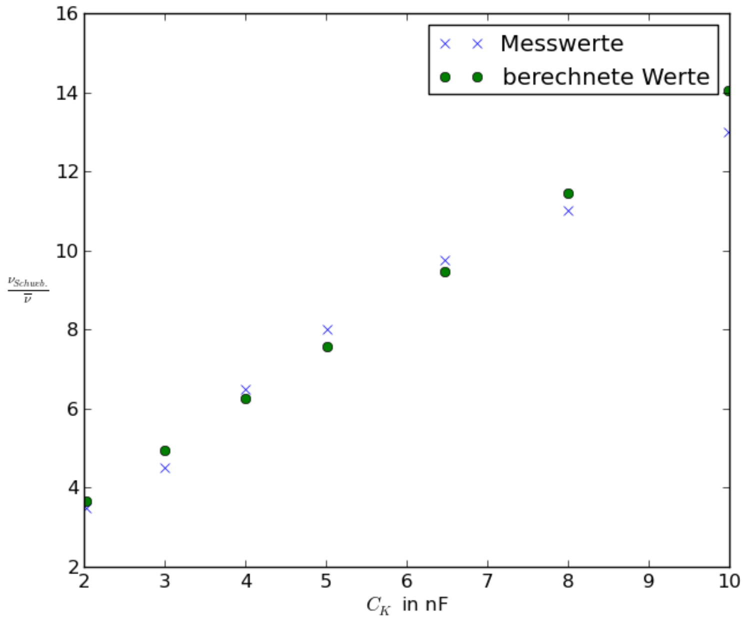

Abbildung 4: Diese Abbildung zeigt das Verhältnis von Schwebungs- zu Schwingungsfrequenz für verschiedene Koppelkapazitäten

Die in der Tabelle 3 angegebene Abweichung bezieht sich auf den Unterschied vom experimentellen zum theoretischen Frequenzverhältnis.

4.3 Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Für die Messung der Frequenzen wurden Lissajous-Figuren benutzt. Die Frequenzen ν_+ und ν_- wurden aufgenommen als die Generatorspannung und der Strom im Sekundärkreis jeweils gleich- oder gegenphasig verlaufen. Die Frequenzen werden in Tabelle 4 mit den Theoriewerten aus 4.2 Verglichen. Dies ist auch in den Abbildungen 4.3 und 6 dargestellt. Diese zeigen den Verlauf von ν_+ und ν_- in Abhängigkeit von der verwendeten Koppelkapazität C_K dar. Die Berechnungen zeigen eine Abweichung vom Theoriewert von jeweils ca. 1 %.

4.4 Messung des Stroms in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz

Die in dieser Messreihe aufgenommenen Werte sind in Tabelle 5 ersichtlich. Die bei den zeitlichen Abständen und der Spannung angegebenen Unsicherheiten entsprechen der Hälfte der kleinsten angezeigten Skaleneinteilungen des Oszilloskops. Aus den zeitlichen Abständen d_1 und d_2 kann mit folgenden Zusammenhängen die zugehörige Frequenz berechnet werden:

- $f_1 = \left(\frac{70400 \cdot d_1}{21\,\mathrm{ms}} + 3800\right)\,\mathrm{Hz}$
- $f_2 = \left(\frac{70400 \cdot d_2}{21\,\mathrm{ms}} + 3800\right)\,\mathrm{Hz}.$

Diese sind in Tabelle 6 angegeben. Die Ströme wurden mit dem Ohmschen Gesetz berechnet. Allerdings wurde der Widerstand mit 73 Ω statt mit 48 Ω angenommen, da weitere

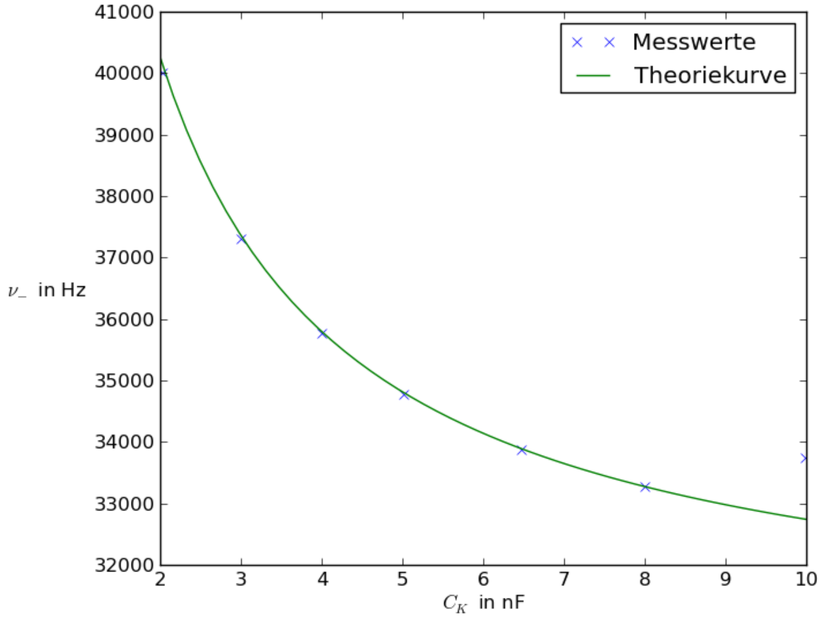

Abbildung 5: Diese Grafik zeigt die Frequenz ν_- für verschiedene Werte von C_K.

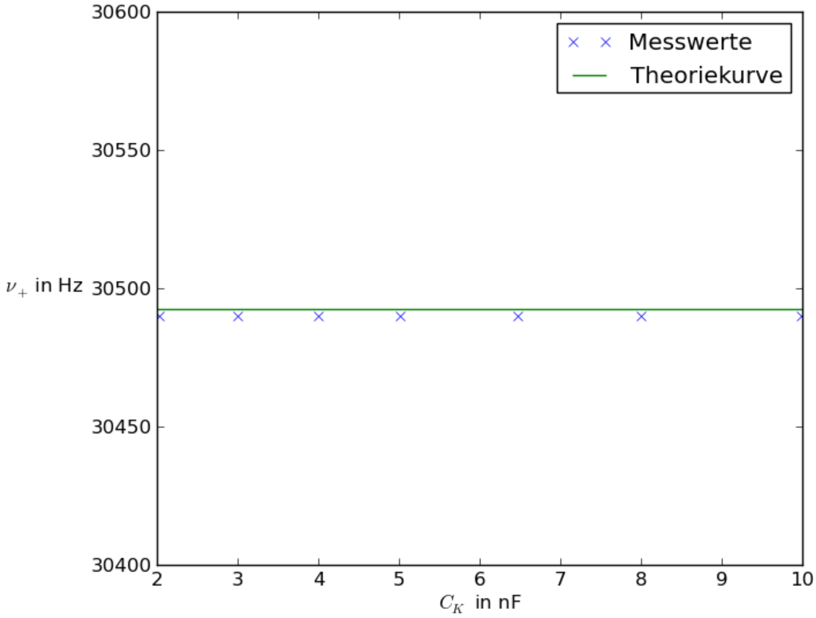

Abbildung 6: Diese Grafik zeigt die Frequenz ν_+ für verschiedene Werte von C_K.

Dämpfungseffekte zum Beispiel durch die in den Stromkreisen vorhandenen Spulen auftreten. Für die verschiedenen untersuchten Koppelkapazitäten wurden die jeweils gemessenen Ströme

I_1 und I_2 in Abbildung 7 aufgetragen.

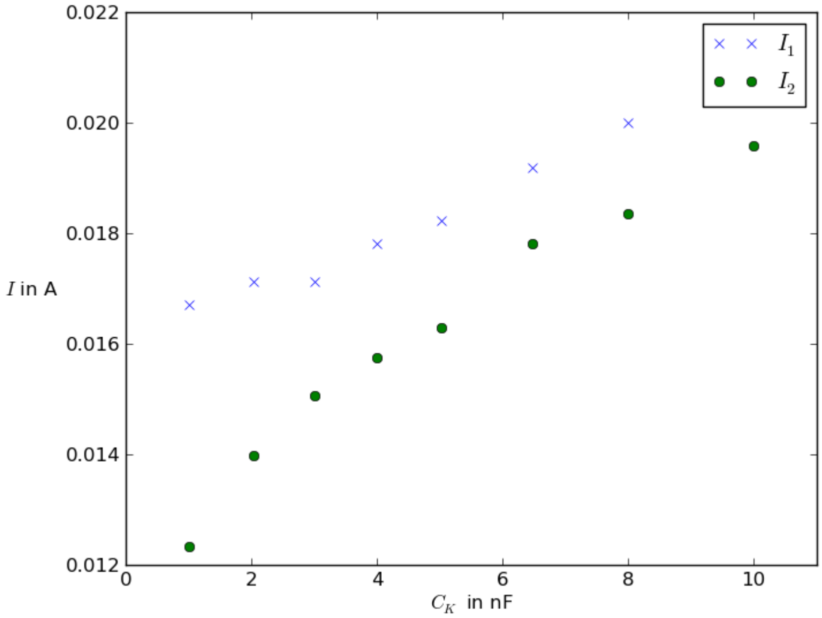

Abbildung 7: Diese Grafik zeigt den Verlauf der Ströme I_1 und I_2 für verschiedene Werte von C_K.

5 Diskussion

Die in diesem Versuch experimentell ermittelten Werte für das Frequenzverhältnis stimmen mit den Theoriewerten bis auf eine Abweichung von maximal 7 % überein. Diese lassen sich durch Fehler beim Ablesen vom Schirmbild des Oszilloskops erklären. Die mit Hilfe von Lissajous-Figuren bestimmten Werte für ν_+ und ν_- weisen, wie zu erwarten war, deutlich geringere Abweichungen von der Theoriekurve auf. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Phasenbeziehungen durch die Lissajous-Figuren sehr präzise durchführbar war. Die in allen Versuchsteilen auftretenden Abweichungen können zum Teil auch durch nicht berücksichtigte systematische Effekte wie zum Beispiel der Innenwiderstand des Generators oder der Widerstand und die parasitäre Kapazität innerhalb der Spulen. Der letzte Versuchsteil hat gezeigt, dass die Impedanz ein System von gekoppelten Schwingkreisen im Bereich seiner Resonanzfrequenzen sehr niedrig ist. Auf diese Tatsache können die im Sweep-Betrieb beobachteten Spannungs- beziehungsweise Strompeaks zurückgeführt werden.

6 Literatur- und Abbildungsverzeichnis

[1] Entnommen aus:
Versuch Nr.355 Gekoppelte Schwingkreise, TU Dortmund
Download am 09.01.14 unter:
`http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf`

[2] Geringfügig bearbeitete Grafiken aus:
Versuch Nr.355 Gekoppelte Schwingkreise, TU Dortmund
Download am 09.01.14 unter:
`http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf`

7 Anhang

- Tabellen
- Auszug aus dem Messheft

n	$\frac{C_K}{\mathrm{nF}}$	Frequenzverhältnis
1	12.03 ± 0.06	3.5 ± 0.5
2	23.00 ± 0.09	4.5 ± 0.5
3	34.00 ± 0.12	6.5 ± 0.5
4	45.02 ± 0.15	8.0 ± 0.5
5	56.47 ± 0.19	9.8 ± 0.5
6	68.00 ± 0.24	11.0 ± 0.5
7	79.99 ± 0.30	13.0 ± 0.5

Tabelle 1: Diese Tabelle zeigt das ermittelte Frequenzverhältnis in Abhängigkeit von der Koppelkapazität.

n	$\frac{\overline{f}}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{f_{Schweb.-th.}}{\mathrm{Hz}}$	th. Frequenzverhältnis
1	$(3.532 \pm 0.013) \times 10^4$	$(9.65 \pm 0.25) \times 10^3$	3.66 ± 0.08
2	$(3.393 \pm 0.010) \times 10^4$	$(6.87 \pm 0.18) \times 10^3$	4.94 ± 0.12
3	$(3.314 \pm 0.008) \times 10^4$	$(5.30 \pm 0.14) \times 10^3$	6.25 ± 0.16
4	$(3.265 \pm 0.007) \times 10^4$	$(4.31 \pm 0.12) \times 10^3$	7.58 ± 0.20
5	$(3.219 \pm 0.005) \times 10^4$	$(3.40 \pm 0.10) \times 10^3$	9.47 ± 0.25
6	$(3.188 \pm 0.005) \times 10^4$	$(2.78 \pm 0.08) \times 10^3$	11.46 ± 0.31
7	$(3.162 \pm 0.004) \times 10^4$	$(2.25 \pm 0.06) \times 10^3$	14.10 ± 0.40

Tabelle 2: Diese Tabelle zeigt die berechneten Werte für Frequenzverhältnis und Schwebungsfrequenz.

n	exp. Freq.-Verh.	exp. Freq.-Verh.	$\frac{\Delta}{\%}$
1	3.5 ± 0.5	3.66 ± 0.08	4
2	4.5 ± 0.5	4.94 ± 0.12	4
3	6.5 ± 0.5	6.25 ± 0.16	4
4	8.0 ± 0.5	7.58 ± 0.20	6
5	9.8 ± 0.5	9.47 ± 0.25	3
6	11.0 ± 0.5	11.46 ± 0.31	4
7	13.0 ± 0.5	14.1 ± 0.4	7

Tabelle 3: In dieser Tabelle werden die experimentell gewonnenen Daten mit den rechnerisch ermittelten verglichen.

$\frac{C_K}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{\nu_{+th}}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{\nu_{+ex}}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{\nu_{+th}}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{\Delta_{\nu+}}{\%}$	$\frac{\Delta_{\nu-}}{\%}$
1.010 ± 0.030	$(4.014 \pm 0.025) \times 10^4$	30490	40010	1.0	0.997
2.03 ± 0.06	$(3.736 \pm 0.019) \times 10^4$	30490	37300	1.0	0.998
3.00 ± 0.09	$(3.580 \pm 0.015) \times 10^4$	30490	35760	1.0	0.999
4.00 ± 0.12	$(3.480 \pm 0.012) \times 10^4$	30490	34780	1.0	0.999
5.02 ± 0.15	$(3.389 \pm 0.010) \times 10^4$	30490	33880	1.0	1.0
6.47 ± 0.19	$(3.327 \pm 0.008) \times 10^4$	30490	33280	1.0	1.0
8.00 ± 0.24	$(3.274 \pm 0.007) \times 10^4$	30490	33750	1.0	1.031

Tabelle 4: Diese Tabelle zeigt die gemessen Frequenzen der Fundamentalschwingungen.

$\frac{C_K}{\mathrm{nF}}$	$\frac{t_1}{\mathrm{ms}}$	$\frac{t_1}{\mathrm{ms}}$	$\frac{U_1}{\mathrm{V}}$	$\frac{U_2}{\mathrm{V}}$
1.010 ± 0.030	9.0 ± 0.5	13.7 ± 0.5	1.22 ± 0.05	0.90 ± 0.05
2.03 ± 0.06	9.0 ± 0.5	11.8 ± 0.5	1.25 ± 0.05	1.02 ± 0.05
3.00 ± 0.09	9.0 ± 0.5	10.9 ± 0.5	1.25 ± 0.05	1.10 ± 0.05
4.00 ± 0.12	9.0 ± 0.5	10.5 ± 0.5	1.30 ± 0.05	1.15 ± 0.05
5.02 ± 0.15	9.0 ± 0.5	10.1 ± 0.5	1.33 ± 0.05	1.19 ± 0.05
6.47 ± 0.19	9.0 ± 0.5	9.9 ± 0.5	1.40 ± 0.05	1.30 ± 0.05
8.00 ± 0.24	9.0 ± 0.5	9.5 ± 0.5	1.46 ± 0.05	1.34 ± 0.05
9.99 ± 0.30	9.0 ± 0.5	9.5 ± 0.5	1.55 ± 0.05	1.43 ± 0.05

Tabelle 5: Diese Tabelle zeigt die Position der Spannungspeaks in Abhängigkeit von der Koppelkapazität C_K

$\frac{C_K}{\mathrm{nF}}$	$\frac{\nu_1}{\mathrm{10kHz}}$	$\frac{\nu_2}{\mathrm{10kHzß}}$	$\frac{I_1}{\mathrm{A}}$	$\frac{I_2}{\mathrm{A}}$
1.010 ± 0.030	3.40 ± 0.17	4.97 ± 0.17	0.0167 ± 0.0007	0.0123 ± 0.0007
2.03 ± 0.06	3.40 ± 0.17	4.34 ± 0.17	0.0171 ± 0.0007	0.0140 ± 0.0007
3.00 ± 0.09	3.40 ± 0.17	4.03 ± 0.17	0.0171 ± 0.0007	0.0151 ± 0.0007
4.00 ± 0.12	3.40 ± 0.17	3.90 ± 0.17	0.0178 ± 0.0007	0.0158 ± 0.0007
5.02 ± 0.15	3.40 ± 0.17	3.77 ± 0.17	0.0182 ± 0.0007	0.0163 ± 0.0007
6.47 ± 0.19	3.40 ± 0.17	3.70 ± 0.17	0.0192 ± 0.0007	0.0178 ± 0.0007
8.00 ± 0.24	3.40 ± 0.17	3.56 ± 0.17	0.0200 ± 0.0007	0.0184 ± 0.0007
9.99 ± 0.30	3.40 ± 0.17	3.56 ± 0.17	0.0212 ± 0.0007	0.0196 ± 0.0007

Tabelle 6: Diese Tabelle zeigt die Frequenz und die Strom der Strompeaks in Abhängigkeit von der Koppelkapazität C_K