

Versuch V355: Gekoppelte Schwingkreise

Martin Bieker
Julian Surmann

Durchgeführt am 09.01.2014
TU Dortmund

1 Einleitung

Der folgende Versuch gekoppelte Oszillatoren untersucht werden. Bei diesen Systemen handelt es sich um schwingfähige Systeme, welche miteinander in Wechselwirkung stehen und so Energie austauschen können.

2 Theorie

In diesem Versuch sollen zwei Schwingkreise untersucht werden, die über eine gemeinsame Koppelkapazität C_K miteinander wechselwirken (siehe Abb ??). Mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze kann gezeigt werden, dass der Verlauf der Ströme I_1 und I_2 durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt wird. Daraus folgt, dass die I_1 und I_2 durch eine Überlagerung von zwei so genannten Fundamentalschwingungen beschreiben werden können. Diese haben die Frequenzen

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1)$$

und

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}) - 1}}. \quad (2)$$

Da die Werte von L , C und C_K mit Messunsicherheiten behaftet sind, müssen, um einen Vergleich von Theorie und Experiment zu ermöglichen, die Gesamtfehler dieser Größen bekannt sein. Diese wurden im Folgenden mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung nach GAUSS berechnet:

$$\Delta\nu_+ = \sqrt{\frac{\sigma_L^2}{16\pi^2 CL^3} + \frac{\sigma_C^2}{16\pi^2 C^3 L}} \quad (3)$$

$$\Delta\nu_- = \sqrt{\frac{\sigma_L^2 \left(-\frac{1}{C_K} - \frac{1}{2C}\right)^2}{4\pi^2 \left(L\left(\frac{2}{C_K} + \frac{1}{C}\right) - 1\right)^3} + \frac{L^2 \sigma_{C_K}^2}{4\pi^2 C_K^4 \left(L\left(\frac{2}{C_K} + \frac{1}{C}\right) - 1\right)^3} + \frac{L^2 \sigma_C^2}{16\pi^2 C^4 \left(L\left(\frac{2}{C_K} + \frac{1}{C}\right) - 1\right)^3}} \quad (4)$$

In diesem Abschnitt soll der Stromverlauf für die Anfangesbedingungen

$$I_1(0) = I_0 \neq 0$$

und

$$I_2(0) = 0$$

untersucht werden. Zusätzlich wird angenommen, dass sich die Frequenzen ν_+ und ν_- sich nur geringfügig unterscheiden. Den in diesem Fall auftretenden Schwingungsvorgang bezeichnet man als Schwebung. Dabei schwingen die Einzelkreise ungefähr mit der Frequenz ν_+ . Des weiteren ändert sich die Amplitude der Schwingung mit der Wesentlich geringeren Frequenz

$$\nu_{Schwebung} = \nu_- - \nu_+ \quad (5)$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Vorbereitungen

Vor Beginn der Messungen müssen die Resonanzfrequenzen beider Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden. Dazu wird die Schaltung wie in abbildung 1 gezeigt aufgebaut. In einem

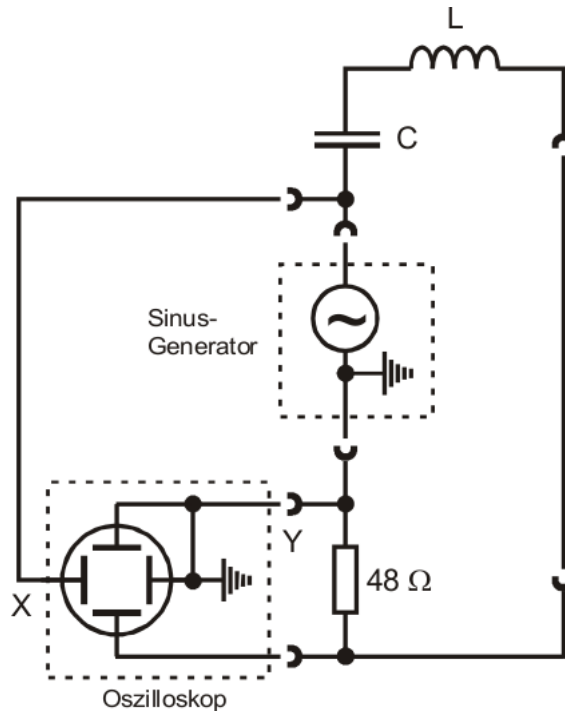


Abbildung 1: Diese Schaltung dient zum Kalibrieren der Resonanzfrequenzen beider Schwingkreise. [1]

der Kreise ein Kondensator mit variabler Kapazität verbaut. Mit dem Sinusgenerator wird nun der Kreis mit konstanter Kapazität angeregt. Zunächst wird mit dem Oszilloskop im YT-Betrieb die Frequenz ermittelt bei der die gemessene Spannung U_R maximal wird. Dann wird das Oszilloskop in den XY-Modus umgeschaltet die Resonanzfrequenz ν_{res} bestimmt. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass U_R und die Generatorspannung U_0 in Phase liegen und daher die angezeigte Lissajouz-Figur eine Gerade ist. Danach wird der Sinusgenerator an den zweiten Teil des Schwingkreises angeschlossen und mit der Frequenz ν_{res} angeregt. Nun wird auch dieser Kreis durch Verändern der variablen Kapazität in Resonanz gebracht. Dazu werden wie zuvor Lissajouz-figures verwendet.

3.2 Messung vom Schwebungs- und Schwingungsfrequenz

Für diesen Versuchsteil wird die Schaltung wie in Abbildung 2 aufgebaut. Der linke Schwingkreis wird durch eine Rechteckspannung zu Schwingungen angeregt. Mit dem Oszilloskop wird nun die am Widerstand R abfallende Spannung gemessen. So kann der im rechten Schwingkreis fließende Strom bestimmt. Bei verschiedenen Koppelkapazitäten C_K wird nun das Verhältnis von Schwingungs- und Schwebungsfrequenz bestimmt. Dazu wird die Zahl n der Schwingungs-

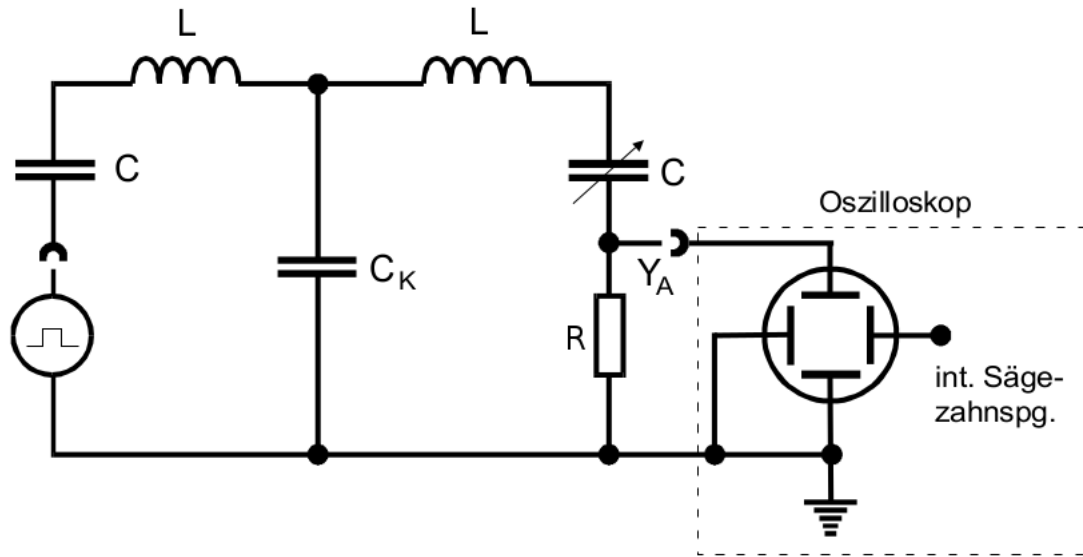


Abbildung 2: Diese Schaltung dient zur Messung des Verhältnisses von Schwebungs- zu Schwingungsfrequenz. [2]

maxima in einer Schwebungsperiode bestimmt. Es gilt:

$$\frac{\nu_{\text{Schwingung}}}{\nu_{\text{Schwebung}}} = n \quad (6)$$

3.3 Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Des Weiteren sollen die Frequenzen ν_- und ν_+ bestimmt werden. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Phasenverschiebung zwischen der Errgerspannung und dem im Sekundärkreis fließenden Stroms 0 oder π beträgt. Die oben Verwendete Schaltung wird nun mit einer Sinusspannung angeregt und die Generator auf den zweiten Kanal des Oszilloskops gelegt (siehe Abb. 3). So kann die Phasenbeziehung von I und U_0 mit Hilfe von Lissajouz-Figuren untersucht werden. So werden ν_+ und ν_- in Abhängigkeit von C_K bestimmt.

3.4 Messung des Stroms in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz

Um den Verlauf des Stroms I im Sekundärkreis bei in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz darzustellen, wird die Schaltung wie in Abbildung 1 aufgebaut. Mit dem Unterschied, dass der Funktionsgenerator im Sweep-Betrieb arbeitet. Dies bedeutet, dass die Frequenz der Errgerspannung nicht mehr konstant ist, sondern steigt in der Zeit $\Delta t = 21 \text{ ms}$ von $\nu_0 = 3.8 \text{ kHz}$ auf $\nu_1 = 74.2 \text{ kHz}$. Mit der Verlauf der am Widerstand abfallenden spannung gemessen werden. Dabei wird die Zeitbasis des Oszilloskops so eingestellt, dass ein vollständiger Sweep auf dem Schirm zu sehen ist. Anfang und Ende dieses Zyklus entsprechen den Frequenzen ν_0 und ν_1 .

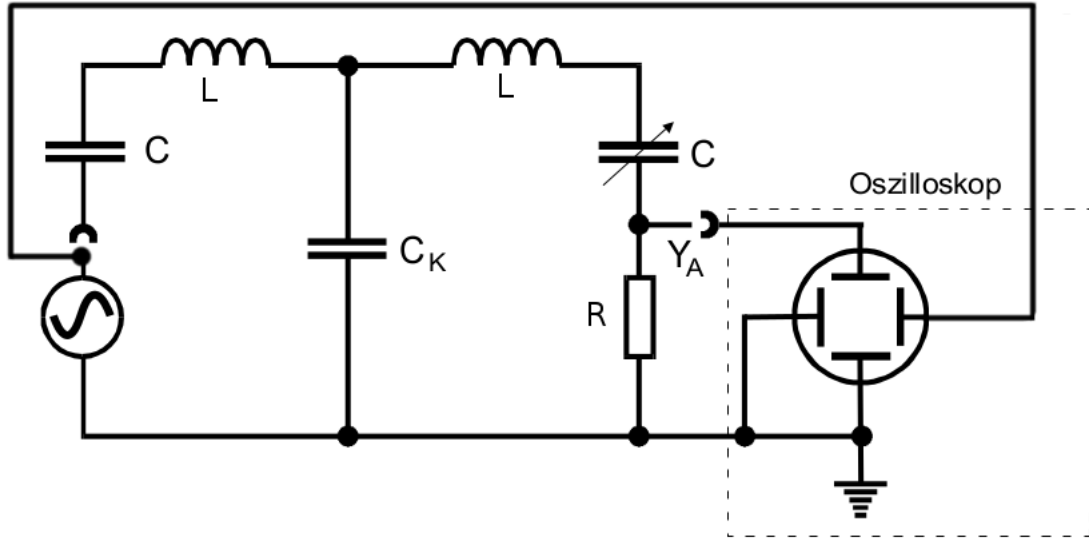


Abbildung 3: Diese Schaltung dient zur Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen. [2]

4 Auswertung

Sofern nicht anders angegeben, wurden alle Fehler mit python uncertainties berechnet.

4.1 Vorbereitungen

Für die Justierung des Messaufbaus wurde mit der Grobmessung eine Frequenz von (30.69 ± 0.01) kHz ermittelt. Die feine Messung mit Hilfe der Lissajous-Figuren ergab eine Resonanzfrequenz von (30.70 ± 0.01) kHz. Der mit L und C theoretisch berechnete Wert liegt bei 30.49 kHz, mit einer Abweichung von 0.68 % ausgezeichnet im Toleranzbereich. Allerdings wurde in der Berechnung des theoretischen Wertes die Kapazität der Spule schon berücksichtigt.

4.2 Messung von Schwebungs- und Schwingungsfrequenz

Die Perioden pro Schwebungsperiode wurden so genau wie möglich abgelesen. Der Fehler liegt bei maximal ± 0.5 Perioden. Diese Werte sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Der bei C_K angegebene Fehler ist ein auf die Werte umgerechneter Fehler von $\pm 3\%$. Dieser ist an der Messapparatur vorgegeben.

Die Frequenz ν_{theo}^+ ist konstant und beträgt 30.493 kHz. Diese wurde mit Formel 1 berechnet. ν_{theo}^- wurde mit Formel 2 ermittelt. Der Mittelwert der beiden Frequenzen wurde mit

$$\bar{\nu} = \frac{1}{2}(\nu_- + \nu_+)$$

ermittelt. Die Frequenz der Schwebung ist durch $\nu_{theo}^- - \nu_{theo}^+$ gegeben. Diese theoretisch ermittelten Werte befinden sich in Tabelle 2. Abbildung 4 zeigt sowohl das experimentell ermittelte, als auch das berechnete Frequenzverhältnis in Abhängigkeit von der verwendeten Koppelkapazität.

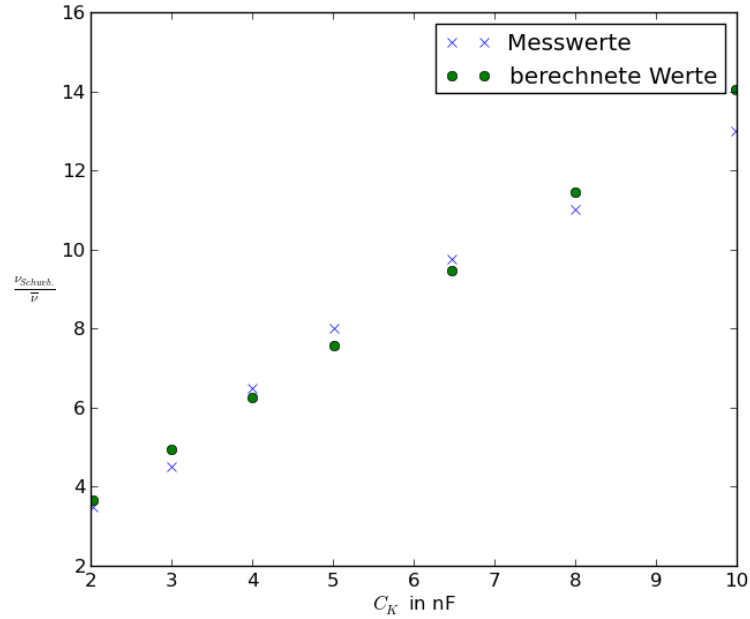


Abbildung 4: Diese Abbildung zeigt das Verhältnis von Schwebungs- zu Schwingungsfrequenz für verschiedene Koppelkapazitäten

Die in der Tabelle 3 angegebene Abweichung bezieht sich auf den Unterschied vom experimentellen zum theoretischen Frequenzverhältnis.

4.3 Messung der Frequenzen der Fundamentalschwingungen

Für die Messung der Frequenzen wurden Lissajous-Figuren benutzt. Die Frequenzen ν_+ und ν_- wurden aufgenommen als die Generatorspannung und der Strom im Sekundärkreis jeweils gleich- oder gegenphasig verlaufen. Die Frequenzen werden in Tabelle 4 mit den Theoriewerten aus 4.2 Verglichen. Dies ist auch in den Abbildungen 4.3 und 6 dargestellt. Diese zeigen den Verlauf von ν_+ und ν_- in Abhängigkeit von der verwendeten Koppelkapazität C_K dar. Die Berechnungen zeigen eine Abweichung vom Theoriewert von jeweils ca. 1 %

4.4 Messung des Stroms in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz

Die in dieser Messreihe aufgenommenen Werte sind in Tabelle 5 ersichtlich. Die bei den zeitlichen Abständen und der Spannung angegebenen Unsicherheiten entsprechen der Hälfte der kleinsten angezeigten Skaleneinteilungen des Oszilloskops. Aus den zeitlichen Abständen d_1 und d_2 kann mit folgenden Zusammenhängen die zugehörige Frequenz berechnet werden:

- $f_1 = \left(\frac{70400 \cdot d_1}{21 \text{ ms}} + 3800 \right) \text{ Hz}$
- $f_2 = \left(\frac{70400 \cdot d_2}{21 \text{ ms}} + 3800 \right) \text{ Hz}.$

Diese sind in Tabelle 6 angegeben. Die Ströme wurden mit dem Ohmschen Gesetz berechnet. Allerdings wurde der Widerstand mit 73Ω statt mit 48Ω angenommen, da weitere

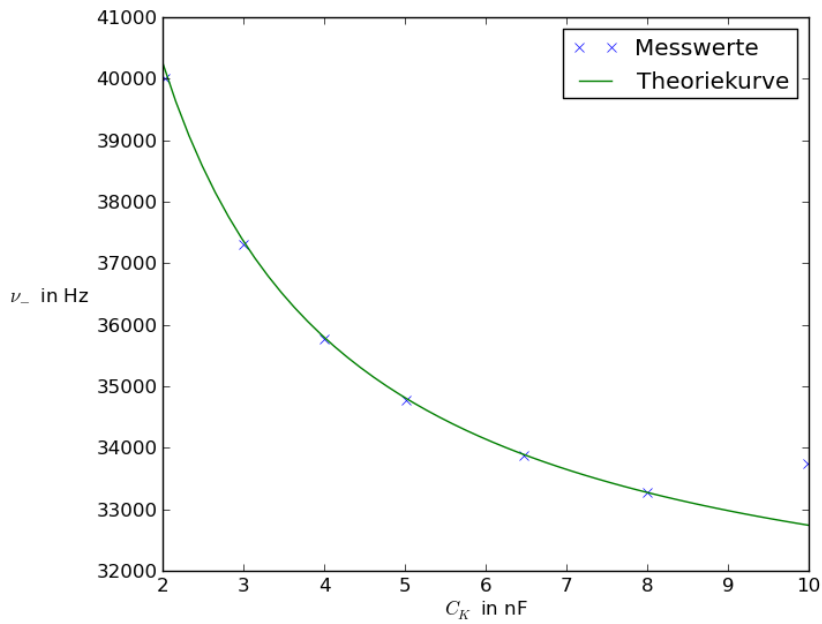


Abbildung 5: Diese Grafik zeigt die Frequenz ν_- für verschiedene Werte von C_K .

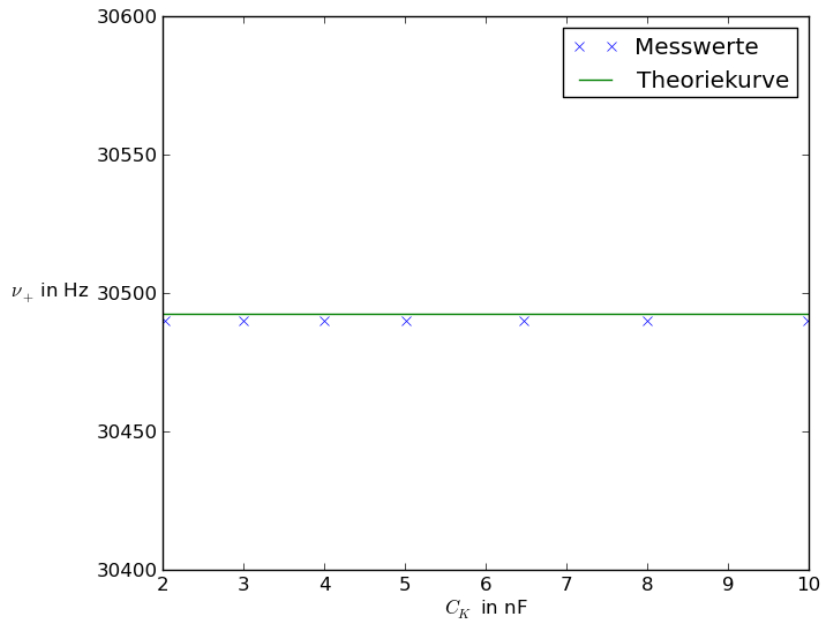


Abbildung 6: Diese Grafik zeigt die Frequenz ν_+ für verschiedene Werte von C_K .

Dämpfungseffekte zum Beispiel durch die in den Stromkreisen vorhandenen Spulen auftreten. Für die verschiedenen untersuchten Koppelkapazitäten wurden die jeweils gemessenen Ströme

I_1 und I_2 in Abbildung 7 aufgetragen.

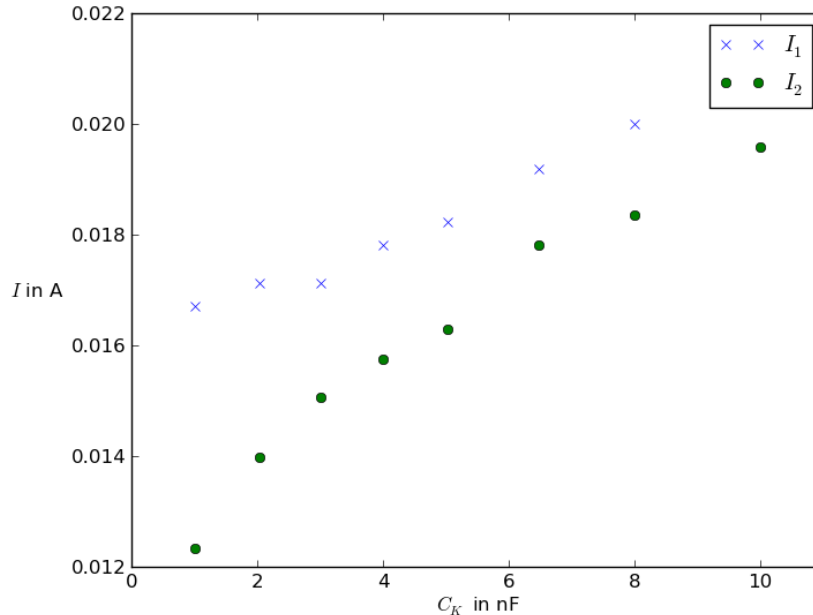


Abbildung 7: Diese Grafik zeigt den Verlauf der Ströme I_1 und I_2 für verschiedene Werte von C_K .

5 Diskussion

Insgesamt sind alle Unsicherheiten innerhalb der üblichen Toleranzen. Die Messfehler beim Ablesen der Werte auf dem Bildschirm des Oszilloskopes wurden eher pessimistisch angenommen, sie sind auf jeden Fall groß genug angenommen. Die Abweichungen der experimentellen zu den theoretischen Frequenzen sind mit $< 10\%$ tolerierbar.

In den anderen Versuchsteilen sind die Abweichungen alle gering.

6 Literatur- und Abbildungsverzeichnis

- [1] Entnommen aus:
Versuch Nr.355 Gekoppelte Schwingkreise, TU Dortmund
 Download am 09.01.14 unter:
<http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf>
- [2] Geringfügig bearbeitete Grafiken aus:
Versuch Nr.355 Gekoppelte Schwingkreise, TU Dortmund
 Download am 09.01.14 unter:
<http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf>

7 Anhang

- Tabellen
- Auszug aus dem Messheft

n	$\frac{C_K}{\text{nF}}$	Frequenzverhältnis
1	12.03 ± 0.06	3.5 ± 0.5
2	23.00 ± 0.09	4.5 ± 0.5
3	34.00 ± 0.12	6.5 ± 0.5
4	45.02 ± 0.15	8.0 ± 0.5
5	56.47 ± 0.19	9.8 ± 0.5
6	68.00 ± 0.24	11.0 ± 0.5
7	79.99 ± 0.30	13.0 ± 0.5

Tabelle 1: Diese Tabelle zeigt das ermittelte Frequenzverhältnis in Abhängigkeit von der Koppelkapazität.

n	$\frac{\bar{f}}{\text{Hz}}$	$\frac{f_{\text{Schweb.}-\text{th.}}}{\text{Hz}}$	th. Frequenzverhältnis
1	$(3.532 \pm 0.013) \times 10^4$	$(9.65 \pm 0.25) \times 10^3$	3.66 ± 0.08
2	$(3.393 \pm 0.010) \times 10^4$	$(6.87 \pm 0.18) \times 10^3$	4.94 ± 0.12
3	$(3.314 \pm 0.008) \times 10^4$	$(5.30 \pm 0.14) \times 10^3$	6.25 ± 0.16
4	$(3.265 \pm 0.007) \times 10^4$	$(4.31 \pm 0.12) \times 10^3$	7.58 ± 0.20
5	$(3.219 \pm 0.005) \times 10^4$	$(3.40 \pm 0.10) \times 10^3$	9.47 ± 0.25
6	$(3.188 \pm 0.005) \times 10^4$	$(2.78 \pm 0.08) \times 10^3$	11.46 ± 0.31
7	$(3.162 \pm 0.004) \times 10^4$	$(2.25 \pm 0.06) \times 10^3$	14.10 ± 0.40

Tabelle 2: Diese Tabelle zeigt die berechneten Werte für Frequenzverhältnis und Schwebungsfrequenz.

n	exp. Freq.-Verh.	exp. Freq.-Verh.	$\frac{\Delta}{\%}$
1	3.5 ± 0.5	3.66 ± 0.08	4
2	4.5 ± 0.5	4.94 ± 0.12	4
3	6.5 ± 0.5	6.25 ± 0.16	4
4	8.0 ± 0.5	7.58 ± 0.20	6
5	9.8 ± 0.5	9.47 ± 0.25	3
6	11.0 ± 0.5	11.46 ± 0.31	4
7	13.0 ± 0.5	14.1 ± 0.4	7

Tabelle 3: In dieser Tabelle werden die experimentell gewonnenen Daten mit den rechnerisch ermittelten verglichen.

$\frac{C_K}{\text{Hz}}$	$\frac{\nu_{+th}}{\text{Hz}}$	$\frac{\nu_{+ex}}{\text{Hz}}$	$\frac{\nu_{+th}}{\text{Hz}}$	$\frac{\Delta_{\nu+}}{\%}$	$\frac{\Delta_{\nu-}}{\%}$
1.010 ± 0.030	$(4.014 \pm 0.025) \times 10^4$	30490	40010	1.0	0.997
2.03 ± 0.06	$(3.736 \pm 0.019) \times 10^4$	30490	37300	1.0	0.998
3.00 ± 0.09	$(3.580 \pm 0.015) \times 10^4$	30490	35760	1.0	0.999
4.00 ± 0.12	$(3.480 \pm 0.012) \times 10^4$	30490	34780	1.0	0.999
5.02 ± 0.15	$(3.389 \pm 0.010) \times 10^4$	30490	33880	1.0	1.0
6.47 ± 0.19	$(3.327 \pm 0.008) \times 10^4$	30490	33280	1.0	1.0
8.00 ± 0.24	$(3.274 \pm 0.007) \times 10^4$	30490	33750	1.0	1.031

Tabelle 4: Diese Tabelle zeigt die gemessenen Frequenzen der Fundamentalschwingungen.

$\frac{C_K}{\text{nF}}$	$\frac{t_1}{\text{ms}}$	$\frac{t_1}{\text{ms}}$	$\frac{U_1}{\text{V}}$	$\frac{U_2}{\text{V}}$
1.010 ± 0.030	9.0 ± 0.5	13.7 ± 0.5	1.22 ± 0.05	0.90 ± 0.05
2.03 ± 0.06	9.0 ± 0.5	11.8 ± 0.5	1.25 ± 0.05	1.02 ± 0.05
3.00 ± 0.09	9.0 ± 0.5	10.9 ± 0.5	1.25 ± 0.05	1.10 ± 0.05
4.00 ± 0.12	9.0 ± 0.5	10.5 ± 0.5	1.30 ± 0.05	1.15 ± 0.05
5.02 ± 0.15	9.0 ± 0.5	10.1 ± 0.5	1.33 ± 0.05	1.19 ± 0.05
6.47 ± 0.19	9.0 ± 0.5	9.9 ± 0.5	1.40 ± 0.05	1.30 ± 0.05
8.00 ± 0.24	9.0 ± 0.5	9.5 ± 0.5	1.46 ± 0.05	1.34 ± 0.05
9.99 ± 0.30	9.0 ± 0.5	9.5 ± 0.5	1.55 ± 0.05	1.43 ± 0.05

Tabelle 5:

$\frac{C_K}{\text{nF}}$	$\frac{\nu_1}{\text{Hz}}$	$\frac{\nu_2}{\text{Hz}}$	$\frac{I_1}{\text{A}}$	$\frac{I_2}{\text{A}}$
1.010 ± 0.030	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(4.97 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0167 ± 0.0007	0.0123 ± 0.0007
2.03 ± 0.06	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(4.34 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0171 ± 0.0007	0.0140 ± 0.0007
3.00 ± 0.09	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(4.03 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0171 ± 0.0007	0.0151 ± 0.0007
4.00 ± 0.12	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(3.90 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0178 ± 0.0007	0.0158 ± 0.0007
5.02 ± 0.15	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(3.77 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0182 ± 0.0007	0.0163 ± 0.0007
6.47 ± 0.19	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(3.70 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0192 ± 0.0007	0.0178 ± 0.0007
8.00 ± 0.24	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(3.56 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0200 ± 0.0007	0.0184 ± 0.0007
9.99 ± 0.30	$(3.40 \pm 0.17) \times 10^4$	$(3.56 \pm 0.17) \times 10^4$	0.0212 ± 0.0007	0.0196 ± 0.0007

Tabelle 6: