扩张希尔伯特空间语言下的量子力学

Rafael de la Madrid Modino

2024 年 5 月 4 日

目录

前言 **ii**

第一章　导言 **1**

1.1　扩张希尔伯特空间简史 2

1.2　谐振子 3

前言

第一章　导言

本章将概述本论文的内容。这些内容主要是关于 Dirac 右矢、Lippmann -Schwinger 右矢、Gamow 向量的性质。

本文是关于 Dirac 右矢、Lippmann -Schwinger 右矢、Gamow 向量在扩张希尔伯特空间语言中的表述。Dirac 右矢是关联于一个可观测量的谱点的态向量。Lippmann -Schwinger 右矢是与散射理论有关的 Hamilton 量的本征右矢。它们对应于 等能[1] "入"散射态和"出"散射态。Gamow 向量是表示共振的态向量的右矢。我们的主要目标是展现：扩张希尔伯特空间是对刻画这些右矢而言最合适的框架。我们将用例子来说明这一点，而不是完全停留于抽象的讨论。主要用到的两个例子是谐振子和方势垒。

本文未讨论任何实验数据，而是关注于解释和理解这些数据的方法、思想和原则。我们将用配备各种边界条件的 Schrödinger 方程来作为提供数据的模型。Schrödinger 方程上的各种边界条件将给出 Dirac 右矢、Lippmann -Schwinger 右矢、Gamow 向量。这样的模型涉及了一种理想化，但这可能仍是理解这些态向量为何物的最佳方式。

须注意，RHS **不是**对量子力学的一种阐释，而是一种表述如 Dirac 右矢、Lippmann -Schwinger 右矢、Gamow 向量这样的启发性的物理概念的更自然、精确、逻辑化的语言。

[1]译者注：原文为：「monoenergetic」。

1.1 扩张希尔伯特空间简史

在 1920 年代末，Dirac 引入了量子力学的一种新数学模型，它是基于无穷维复内积向量空间上线性算子所构的一种 唯一的光滑而精致[2] 的抽象代数。Dirac 的**左矢**、**右矢**（源于内积的括号记法）的抽象代数模型在之后的年头里已证明是有着巨大的启发价值——尤其是在处理具有连续谱的 Hamilton 算子时。然而，在寻找一种可用于实际数值计算的线性代数时则出现了严重的困难。

Hilbert 空间 (HS) 是为量子力学提出的第一种数学 形式化 (idealization) 模型然而, 如 von Neumann 在他的书中解释的那样, HS 理论和 Dirac 体系是两回事。尽管有在 Hilbert 空间中实现 Dirac 模型的尝试, 仍有不少严重问题使得这体系无法给出左矢、右矢或 Dirac 函数, 或是无法给 Dirac 基向量展开以一个数学含义——而这种展开在涉及连续谱的量子力学的物理表述中都是及其重要的。当然，Dirac 在他的文字报告中表示:「我们目前所用的左矢和右矢构成了一个比 Hilbert 空间更一般的空间。」。

在 1940 年代末，为 Dirac 函数给出了精确的含义，它定义为一种测试函数空间上的线性泛函。这导向了泛函分析的一个新分支的发展：分布理论。

大约是与此同时，von Neumann 发表了 Hilbert 空间的由一个自伴算子诱导的直积分分解理论（也对更一般的情况成立）。这种谱理论更接近于经典 Fourier 分析，它代表了对更早的 von Neumann 谱理论的一项改进。

则总是认为 von Neumann 谱理论并非无穷维向量空间上线性算子理论的完整故事。获益于分布理论的发展，他与其学派引入了 扩张希尔伯特空间 (RHS) 。从这扩张希尔伯特空间和 von Neumann 的直积分分解出发，他们得以证明所谓核型谱定理（也称为 Gelfand -Maurin 定理）。该定理为算子的谱性质提供了更为彻底的信息，并在相同立足点上处理了连续谱与离散谱。

作为 Dirac 体系的一面，可观测量代数中元素的连续性在 1960 年代初得到了讨论。若可观测量代数中的两个算子满足正则（Heisenberg ）对

[2]译者注：原文为：「uniquely smooth and elegant」。

易关系，则它们中至少有一个不能在 Hilbert 空间拓扑下是连续的 (即，有界的)。证明了 Hilbert 空间中有这样一些子定义域，其上可配备使得那些算子连续的拓扑。而这些子定义域中最大的就是 Schwartz 空间。

在 1960 年代末，一些物理学家独立地意识到 RHS 为 Dirac 体系的所有方面都提供了一个严格的数学表述。特别地，核型谱定理在数学理论中重新表述了 Dirac 基向量展开和 Dirac 左、右矢。之后，其他作者也得到了相同结论。如今，RHS 已成为教科书中的内容。

在过去一些年中，RHS 作为散射与衰变理论的自然的数学语言而出现。RHS 也被证明在其他理论物理领域中很有用处，如混沌映射的广义谱分解的构造。实际上，为以一种 自恰[3] 的方式来处理散射与衰变，RHS 似乎是最为人所知的语言。这就是我们为何在此使用它。

Schrödinger 方程是统御量子系统行为的动力学方程。于是任何试图证明 RHS 包含量子力学所需的数学方法的尝试，都应展现 RHS 是 Schrödinger 方程 之解 (solutions of) 的自然框架。本论文的目的在于得到作为不同边界条件下 Schrödinger 方程的解的 Dirac 、Lippmann -Schwinger 、Gamow 右矢，并展示这些解是落在 RHS 中而非仅仅是在 HS 中。

最终，本文的这些结论将允许我们描绘出一个非常重要的结论：RHS 是处理散射与衰变的自然语言。

1.2 谐振子

[3]译者注：原文为：「consistent」。