Cząstka na okręgu. $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$

Δ we współrzędnych biegunowych $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$. Oczywiście $\psi = \psi(\theta)$

Ponadto

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \underbrace{\frac{2mER^2}{\hbar^2}}_{\varkappa^2}\psi = 0$$

Ogólne rozw. $\psi = Ae^{i\varkappa\theta} + Be^{-i\varkappa\theta}$. Ale $[H, L_z] = 0$, więc możemy wybrać bazę rozw. o określonym pędzie (momencie) układzie $B = 0$.

Warunek periodyczności $\forall\theta$ $\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta)$

$$Ae^{i\varkappa(\theta+2\pi)} = Ae^{i\varkappa\theta} \rightsquigarrow e^{i\varkappa\cdot 2\pi} = 1$$

$$\varkappa \cdot 2\pi = 2\pi\cdot k \qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$\varkappa = k$$

Czyli $k^2 = \frac{2mER^2}{\hbar^2}$ $\quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2mR^2} = \frac{2\pi^2\hbar^2k^2}{mL^2}$ $\quad L = 2\pi R$

Energia stanu k

Uwzględniając normalizację $\psi_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{ik\theta}$ $\quad E_k = \underbrace{\frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}}_{\varepsilon} k^2 = \varepsilon k^2$

Zamiast jako współrzędną brać kąt θ można brać $\frac{x}{L} = \frac{\theta}{2\pi}$ $\quad x = \frac{L}{2\pi}\theta$.
Wtedy można o tym myśleć jako o ruchu swobodnej cząstki z nałożonymi warunkami brzegowymi. $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i\frac{2\pi k x}{L}}$ $\quad E_k = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}k^2$

$H = H_{kin} + H_{pot}$

Dwie cząstki oddziałują potencjałem $V(\vec{r}-\vec{r}\,') = g\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Weźmy bazę $\psi_k = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i 2\pi k x}{L}}$. ~~Widzimy~~ H_{kin} jest diagonalny w tej bazie

$$H_{kin} = \sum_k \langle k | H_{kin} | k \rangle \, a_k^\dagger a_k$$

$$H_{kin}|k\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{4\pi^2 k^2}{L^2}\right)\frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi k x}{L}} = \frac{2\pi^2\hbar^2 k^2}{mL^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi k x}{L}}$$

$$H_{kin} = \sum_k \frac{2\pi^2\hbar^2 k^2}{mL^2} a_k^\dagger a_k = \boxed{\varepsilon = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}} = \sum_k \varepsilon k^2 a_k^\dagger a_k$$

Część potencjalna

$$H_{pot} = \frac{1}{2}\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4} \langle j_1 j_2 | V_{pot} | j_3 j_4 \rangle \, a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}$$

$$\langle j_1 j_2 | V_{pot} | j_3 j_4 \rangle = \frac{1}{L^2}\int_0^L\!\!\int_0^L dx\,dx'\, e^{-i\frac{2\pi (j_1+j_2)x}{L}} \left(g\,\delta(x-x')\right) e^{i\frac{2\pi (j_3+j_4)x}{L}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{L}\, d\bar{x}\, g\, e^{-i2\pi(j_1+j_2-(j_3+j_4))\bar{x}} = \frac{1}{L}\,\delta_{j_1+j_2,\, j_3+j_4}\, g$$

Pełen hamiltonian
$$H = \sum_k \varepsilon k^2 a_k^\dagger a_k + \frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4 \\ j_1+j_2=j_3+j_4}} a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}$$

Po zastąpieniu operatorów zespolonymi współ. i zmieniając lekko oznaczenia

$$H = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} \varepsilon n^2 |\alpha_n|^2 + \frac{g}{2L}\sum_{\substack{n_1,n_2,n_3,n_4 \\ n_1+n_2=n_3+n_4}} \alpha_{n_1}^* \alpha_{n_2}^* \alpha_{n_3} \alpha_{n_4}$$

n_{max} – parametr obcięcia

Wersja bezwymiarowa
$$\frac{H}{\varepsilon} = \sum_{n=-n_{max}}^{n_{max}} n^2 |\alpha_n|^2 + \underbrace{\frac{g}{2L\varepsilon}}_{\gamma}\sum_{\substack{n_1,n_2,n_3,n_4 \\ n_1+n_2=n_3+n_4}} \alpha_{n_1}^* \alpha_{n_2}^* \alpha_{n_3} \alpha_{n_4}$$

Bozowy hamiltonian
$$H=\sum_k \varepsilon k^2 a_k^\dagger a_k+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4\\ j_1+j_2=j_3+j_4}} a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}$$

Równanie Heisenberga
$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\bar q)}{\partial t}=[\Psi(\bar q),H]$$

$$[\Psi(\bar q),H]=\sum_k \varepsilon k^2\underbrace{[\Psi(\bar q),a_k^\dagger a_k]}_{(1)}+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4\\ j_1+j_2=j_3+j_4}}\underbrace{[\Psi(\bar q),a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}]}_{(2)} =$$

$$(1)=\sum_{k'}\langle\bar q|k'\rangle[a_{k'},a_k^\dagger a_k]=\sum_{k'}\langle\bar q|k'\rangle(a_{k'}a_k^\dagger a_k-a_k^\dagger a_k a_{k'})=\sum_{k'}\langle\bar q|k'\rangle\big((\delta_{k,k'}+a_k^\dagger a_{k'})a_k$$
$$-a_k^\dagger a_k a_{k'}\big)=\sum_{k'}\langle\bar q|k'\rangle\delta_{k,k'}a_k=\langle\bar q|k\rangle a_k$$

$$(2)=\sum_k\langle\bar q|k\rangle[a_k,a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}]=\sum_k\langle\bar q|k\rangle(a_k a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}-a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}a_k)=$$

$$=\sum_k\langle\bar q|k\rangle\big((\delta_{k,j_1}+a_{j_1}^\dagger a_k)a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}-a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}a_k\big)=$$

$$=\sum_k\langle\bar q|k\rangle\big(\delta_{k,j_1}a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}+a_{j_1}^\dagger(\delta_{k,j_2}+a_{j_2}^\dagger a_k)a_{j_3}a_{j_4}-a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_k a_{j_3}a_{j_4}\big)=$$

$$=\sum_k\langle\bar q|k\rangle\big(\delta_{k,j_1}a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}+\delta_{k,j_2}a_{j_1}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}\big)$$

$$=\sum_k\varepsilon k^2\langle\bar q|k\rangle a_k+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4,k\\ j_1+j_2=j_3+j_4}}\langle\bar q|k\rangle\delta_{k,j_1}a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4,k\\ j_1+j_2=j_3+j_4}}\langle\bar q|k\rangle\delta_{k,j_2}a_{j_1}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}=$$

$$=\sum_k\varepsilon k^2\langle\bar q|k\rangle a_k+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_2,j_3,j_4,k\\ k+j_2=j_3+j_4}}\langle\bar q|k\rangle a_{j_2}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}+\frac{g}{2L}\sum_{\substack{j_1,j_3,j_4,k\\ j_1+k=j_3+j_4}}\langle\bar q|k\rangle a_{j_1}^\dagger a_{j_3}a_{j_4}=$$

$$=\sum_k\varepsilon k^2\langle\bar q|k\rangle a_k+\frac{g}{L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,k\\ k=j_2+j_3-j_1}}\langle\bar q|k\rangle a_{j_1}^\dagger a_{j_2}a_{j_3}$$

Ostatecznie $$i\hbar\sum_k\langle\bar q|k\rangle\frac{\partial a_k}{\partial t}=\sum_k\varepsilon k^2\langle\bar q|k\rangle a_k+\frac{g}{L}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,k\\ k=j_2+j_3-j_1}}\langle\bar q|k\rangle a_{j_1}^\dagger a_{j_2}a_{j_3}$$

Teraz uwzględnimy, że $\langle q|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi kx}{L}}$ układ $\frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi kx}{L}}$ jest ON więc powyższe równanie równoważne jest układowi

$$i\hbar \frac{\partial a_k}{\partial t} = \varepsilon k^2 a_k + \frac{g}{L} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} a_{j_1}^{+} a_{j_2} a_{j_3}$$

Zastępując operatory zespolonymi współczynnikami otrzymamy

$$i\hbar \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \varepsilon k^2 \alpha_k + \frac{g}{L} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} \alpha_{j_1}^{*} \alpha_{j_2} \alpha_{j_3}$$

$$i\frac{\hbar}{\varepsilon} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = k^2 \alpha_k + \frac{g}{L\varepsilon} \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} \alpha_{j_1}^{*} \alpha_{j_2} \alpha_{j_3}$$

Wprowadzamy bezwymiarowy czas $\tau = \frac{t}{\hbar/\varepsilon}$ i równania uzyskują formę

$$i \frac{\partial \alpha_k}{\partial \tau} = k^2 \alpha_k + 2\gamma \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3 \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} \alpha_{j_1}^{*} \alpha_{j_2} \alpha_{j_3}$$

Oddziaływania dalekozasięgowe

Znowu $V = V(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ $\quad H = H_{kin} + H_{pot}$

$$H_{pot} = \frac{1}{2} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \langle j_1 j_2 | V | j_3 j_4 \rangle \, a^\dagger_{j_1} a^\dagger_{j_2} a_{j_3} a_{j_4}$$

$$\langle j_1 j_2 | V | j_3 j_4 \rangle = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L dx\, dx'\, e^{-\frac{i 2\pi j_1 x}{L}} \cdot e^{-\frac{i 2\pi j_2 x'}{L}} V(|x - x'|)\, e^{i\frac{2\pi j_3 x}{L}} \cdot e^{i\frac{2\pi j_4 x'}{L}} = \left\{ \begin{array}{l} x \to \frac{x}{L} \\ x' \to \frac{x'}{L} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 dx\, dx'\, e^{i 2\pi (j_3 - j_1) x}\, V(L|x - x'|)\, e^{i 2\pi (j_4 - j_2) x'} := C_{j_1 j_2 j_3 j_4}$$

Wiemy, że $C_{j_1 j_2 j_3 j_4} \in \mathbb{R}$

$$e^{i 2\pi (j_3 - j_1) x} \cdot e^{i 2\pi (j_4 - j_2) x'} = \left(\cos(2\pi (j_3 - j_1) x) + i \sin(2\pi (j_3 - j_1) x) \right) \left(\cos(2\pi (j_4 - j_2) x') + i \sin(2\pi (j_4 - j_2) x') \right)$$

$$= \cos(2\pi (j_3 - j_1) x) \cos(2\pi (j_4 - j_2) x') - \sin(2\pi (j_3 - j_1) x) \sin(2\pi (j_4 - j_2) x') + i(\ldots)$$

$\int$ z tego to 0

$$= \cos\left[2\pi \left((j_3 - j_1) x + (j_4 - j_2) x' \right)\right]$$

$$C_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dx' \cos\left(2\pi \left((j_3 - j_1) x + (j_4 - j_2) x'\right)\right) V(L|x - x'|)$$

Niech całka z V po $\mathbb{R}$ wynosi g. $\boxed{V = \frac{g}{L} \tilde{V}}$

$$\tilde{C}_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dx' \cos\left(2\pi \left((j_3 - j_1) x + (j_4 - j_2) x'\right)\right) \tilde{V}(L|x - x'|)$$

Wtedy hamiltonian $\quad \frac{H}{\varepsilon} = \sum_{n = -n_{max}}^{n_{max}} n^2 |\alpha_n|^2 + \gamma \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \tilde{C}_{n_1 n_2 n_3 n_4}\, \alpha^*_{n_1} \alpha^*_{n_2} \alpha_{n_3} \alpha_{n_4}$

Obliczanie całki

$$\tilde{C}_{j_1 j_2 j_3 j_4} = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dx' \cos 2\pi \left[(j_3 - j_1) x + (j_4 - j_2) x' \right] \tilde{V}(L|x - x'|)$$

Możemy wprowadzić zmienne $p, q \in \overline{-2n_{max}, 2n_{max}}$

$$F(p, q) = \int_0^1 dx \int_0^1 dx' \cos 2\pi (px + qx')\, \tilde{V}(L|x - x'|)$$

$$F(p, q) = F(q, p)$$

Okazuje się, że F jest niezerowe tylko dla $p = -q$

Bierzemy hamiltonian

$$H = \sum_k \varepsilon k^2 a_k^\dagger a_k + \frac{g}{2L} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \tilde{C}_{j_1 j_2 j_3 j_4} a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}$$

Równanie Heisenberga

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\bar{q})}{\partial t} = [\Psi(\bar{q}), H]$$

$$[\Psi(\bar{q}), H] = \sum_k \varepsilon k^2 \underbrace{[\Psi(\bar{q}), a_k^\dagger a_k]}_{(1)} + \frac{g}{2L} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \tilde{C}_{j_1 j_2 j_3 j_4} \underbrace{[\Psi(\bar{q}), a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}]}_{(2)} =$$

Jiasy jakiże

$(1) = \langle \bar{q} | k \rangle a_k$

$(2) = \sum_k \langle \bar{q} | k \rangle (\delta_{k,j_1} a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4} + \delta_{k,j_2} a_{j_1}^\dagger a_{j_3} a_{j_4})$

$$= \sum_k \varepsilon k^2 \langle \bar{q} | k \rangle a_k + \frac{g}{2L} \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4 k} \langle \bar{q} | k \rangle \tilde{C}_{j_1 j_2 j_3 j_4} (\delta_{k,j_1} a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4} + \delta_{k,j_2} a_{j_1}^\dagger a_{j_3} a_{j_4}) =$$

$$= \sum_k \varepsilon k^2 \langle \bar{q} | k \rangle a_k + \frac{g}{2L} \sum_{j_2 j_3 j_4 k} \langle \bar{q} | k \rangle \tilde{C}_{k j_2 j_3 j_4} a_{j_2}^\dagger a_{j_3} a_{j_4} + \frac{g}{2L} \sum_{j_1 j_3 j_4 k} \langle \bar{q} | k \rangle \tilde{C}_{j_1 k j_3 j_4} a_{j_1}^\dagger a_{j_3} a_{j_4} =$$

$$= \sum_k \varepsilon k^2 \langle \bar{q} | k \rangle a_k + \frac{g}{L} \sum_{j_1 j_2 j_3 k} \langle \bar{q} | k \rangle \tilde{C}_{j_1 k j_2 j_3} a_{j_1}^\dagger a_{j_2} a_{j_3} =$$

Wiemy, że F jest niezerowe $\Leftrightarrow p = -q$ ~~...~~ $j_2 - j_1 = k - j_3$

$k = j_2 + j_3 - j_1$

Więc możemy napisać

$$= \sum_k \varepsilon k^2 \langle \bar{q} | k \rangle a_k + \frac{g}{L} \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 k \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} \langle \bar{q} | k \rangle \tilde{C}_{j_1 k j_2 j_3} a_{j_1}^\dagger a_{j_2} a_{j_3}$$

Zastępując operatory zespolonymi współ. i zamieniając zmienne

$$i \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} = k^2 \alpha_k + 2\gamma \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 \\ k = j_2 + j_3 - j_1}} \tilde{C}_{j_1 k j_2 j_3} \alpha_{j_1}^* \alpha_{j_2} \alpha_{j_3}$$

Obliczanie średniej i fluktuacji na podstawie danych z całej ewolucji

Średnia po czasie $\langle f\rangle_t = \frac{1}{t}\int_0^t f(t)\,dt$

Z ewolucji mamy obliczone średnie $\langle N_0\rangle_1, \langle N_0\rangle_2, \ldots$ i fluktuacje $\langle \Delta N_0\rangle_1, \langle \Delta N_0\rangle_2, \ldots$ Indeksy 1, 2, ... opisują kolejne przedziały czasu (równej długości) na które jest podzielona ewolucja.

Dla wariancji zachodzi wzór $(\langle \Delta N_0\rangle)^2 = \langle (N_0 - \langle N_0\rangle)^2\rangle = \langle N_0^2\rangle - \langle N_0\rangle^2$

Jeśli przedziałów było m, to średnia z całej ewolucji:

$$\langle N_0\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle N_0\rangle_i$$

Trzeba obliczyć wariancję dla całej ewolucji

$$(\langle \Delta N_0\rangle)^2 = \langle N_0^2\rangle - \langle N_0\rangle^2$$

$\langle N_0\rangle$ już obliczyliśmy

Aby obliczyć $\langle N_0^2\rangle$ zapiszmy dla dowolnego przedziału

$$(\langle \Delta N_0\rangle_i)^2 + \langle N_0\rangle_i^2 = \langle N_0^2\rangle_i$$

$$\langle N_0^2\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\langle N_0^2\rangle_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left((\langle \Delta N_0\rangle_i)^2 + \langle N_0\rangle_i^2\right)$$

Ostatecznie

$$\langle \Delta N_0\rangle = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\langle \Delta N_0\rangle_i^2 + \langle N_0\rangle_i^2\right) - \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{m}\langle N_0\rangle_i\right)^2}$$