Przykład Bogolubowa - depletion

Parametry: $\varepsilon = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}$ $\quad \gamma = \frac{g}{2L\varepsilon}$ gdzie

1 L & L - Fizyka stat II rozdział o nadciekłości wzory 25.7 - 25.19

$$\varepsilon(p) = \left[u^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2} \qquad u = \left(\frac{4\pi\hbar^2 a N}{m^2 L}\right)^{1/2} \qquad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$$

$$u = \left(\frac{gN}{mL}\right)^{1/2}$$

Zamieniamy sumy po pędach w $\hat{H}$ na sumy po k

$$\varepsilon(k) = \left[\frac{gN}{mL}\left(2m\varepsilon k^2\right) + \varepsilon^2 k^4\right]^{1/2} = \varepsilon\left[4\gamma N k^2 + k^4\right]^{1/2}$$

Depletion to $\sum_{k\neq 0} N_p$, gdzie $N_k = \frac{m^2 u^4}{2\varepsilon(k)\left(\varepsilon(k) + \varepsilon k^2 + m u^2\right)}$

$$N_k = \frac{m^2 \frac{g^2 N^2}{m^2 L^2}}{2\varepsilon\left[4\gamma N k^2 + k^4\right]^{1/2} \varepsilon\left(\left[4\gamma N k^2 + k^4\right]^{1/2} + k^2 + \frac{gN}{L\varepsilon}\right)} =$$

$$= \boxed{\frac{2\gamma^2 N^2}{\left[4\gamma N k^2 + k^4\right]^{1/2}\left(\left[4\gamma N k^2 + k^4\right]^{1/2} + k^2 + 2\gamma N\right)}}$$

To sumujemy (ale bez $k=0$)

2 Notatki z MK II B

Odwracając transformację Bogolubowa znajdujemy

$$a_k = \operatorname{ch}\theta_k\, b_k + \operatorname{sh}\theta_k\, b_{-k}^+ \qquad a_k^+ = \operatorname{ch}\theta_k\, b_k^+ + \operatorname{sh}\theta_k\, b_{-k}$$

$$a_k^+ a_k = \left(\operatorname{ch}\theta_k\, b_k^+ + \operatorname{sh}\theta_k\, b_{-k}\right)\left(\operatorname{ch}\theta_k\, b_k + \operatorname{sh}\theta_k\, b_{-k}^+\right) = \operatorname{ch}^2\theta_k\, b_k^+ b_k + \operatorname{ch}\theta_k \operatorname{sh}\theta_k\, b_k^+ b_{-k}^+$$
$$+ \operatorname{ch}\theta_k \operatorname{sh}\theta_k\, b_{-k} b_k + \operatorname{sh}^2\theta_k\, b_{-k} b_{-k}^+ = \operatorname{ch}^2\theta_k\, b_k^+ b_k + \underline{\operatorname{ch}\theta_k \operatorname{sh}\theta_k\left(b_k^+ b_{-k}^+ + b_{-k} b_k\right)}$$
$$+ \operatorname{sh}^2\theta_k + \operatorname{sh}^2\theta_k\, b_{-k}^+ b_{-k}$$

Teraz obliczamy $\langle a_k^+ a_k\rangle = \operatorname{Tr}\left(\hat{\varrho}\, a_k^+ a_k\right)$

Ślad jest liniowy. Człon podkreślony ma zera na diagonali w bazie, w której $\hat{\varrho}$ jest diag. — nie ma wkładu do $\langle a_k^+ a_k\rangle$. Obsadzenie stanu k

$$N_{pk} = \operatorname{sh}^2\theta_k + \operatorname{ch}^2\theta_k\, n_k^b + \operatorname{sh}^2\theta_k\, n_{-k}^b$$

n_k^b i n_{-k}^b to obsadzenia kwazicząstek - bozonów podlegającym statystyce B-E.
w $T=0$ $n_k^b=0$ i $n_{-k}^b=0$. czyli

$$N_k = sh^2\theta_k$$

Wiemy że

$$\hbar\omega_k ch2\theta_k = \hbar\Omega_k$$
$$\hbar\omega_k sh2\theta_k = -\eta_k$$

gdzie $\hbar\Omega_k = \varepsilon k^2 + \frac{Ng}{L} = \varepsilon(k^2+2\gamma N)$

$$\hbar\omega_k = \sqrt{\varepsilon^2 k^4 + 2\varepsilon k^2 \cdot \frac{N}{L} g} =$$
$$= \varepsilon\sqrt{k^4 + 4k^2\gamma N}$$

$$ch2\theta_k = \frac{\hbar\Omega_k}{\hbar\omega_k} = \frac{\cancel{\varepsilon}(k^2+2\gamma N)}{\cancel{\varepsilon}\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}} = \frac{k^2+2\gamma N}{\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}}$$

$$ch2\theta_k = sh^2\theta_k + ch^2\theta_k = 1 + 2sh^2\theta_k$$

$$sh^2\theta_k = \frac{ch2\theta_k - 1}{2}$$

$$N_k = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}}\left(k^2+2\gamma N - \sqrt{k^4+4k^2\gamma N}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}} \times$$

$$\times \frac{(k^2+2\gamma N)^2 - k^4 - 4k^2\gamma N}{\left(k^2+2\gamma N + \sqrt{k^4+4k^2\gamma N}\right)} = \boxed{\frac{2\gamma^2 N^2}{\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}\left(\sqrt{k^4+4k^2\gamma N}+k^2+2\gamma N\right)}}$$

I dostajemy wzór jak w 1.